Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 11. Ein Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweyer Linien AB, BC beschrieben, ist dem Unterschiede der Quadrate aus beyden Linien gleich, oder $(AB+BC)x(AB-BC)=AB^2-BC^2$.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

LEHRSATZ 10.

Fig. 23. *Ein Quadrat aus einer Linie AC, welche der Unterschied zweyer Linien AB, BC ist, beschrieben, ist gleich den Quadraten dieser beyden Linien zusammen genommen, weniger zweymal dem Rechteck aus beyden Linien AB, BC; oder es ist* AC^2 *d. h.* $(AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2 . AB \times BC$.

Beschreibe über AC das Quadrat ABIF, mache AE gleich AC, und ziehe CG mit AF, und HE mit IF parallel, so wird das erstere Quadrat durch diese Parallellinie, wie Lehrsatz 8 Zusatz 2 aussagt, eingetheilt. Beschreibt man folglich noch über EF, welches gleich BC ist, das Quadrat EFLK gleich BC^2, so ist; dieses sammt AI, d. i. dem Quadrat über AB, gleich AD d. i. dem Quadrat aus AC und den beyden Rechtecken CBIG, GLKD. Jedes dieser Rechtecke ist aber aus AB = LG und BC beschrieben, und folglich $AB^2 + BC^2 - 2\, AB \times BC = AC^2$.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus: $(a-b)^2 = a^2 - 2\, ab + b^2$.

LEHRSATZ 11.

Fig. 24. *Ein Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweyer Linien AB, BC beschrieben, ist dem Unterschiede der Quadrate aus beyden Linien gleich, oder* $(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2$.

Beschreibe über AB und so auch über AC ein Quadrat, verlängere AB um BK, gleich BC, und vollende das Rechteck KCDL und das Quadrat DHIG.

Die Grundlinie AK jenes Rechtecks ist der Summe, die Höhe desselben AE dem Unterschiede der beyden Linien AB, BC gleich, und folglich ist jenes Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede der beyden Linien AB, BC beschrieben, oder Rechteck $AKLE = (AB + BC) \times (AB - BC.)$ Nun besteht dieses Rechteck aus den beyden Stücken ABHE und BKLH, welches letztere dem Rechteck EDGF gleich ist, da beyde aus den Linien AC, CB beschrieben sind*. Also ist $AKLE = ABHE + EDGF$. Diese *8. Z. 2. beyden Stücke sind aber gleich dem Quadrat über AB, weniger dem Quadrat über DH, d. h. über BC; also ist $AKLE = AB^2 - BC^2$, und deshalb $(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2$.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus: $(a + b). (a - b) = a^2 - b^2$.

[*Folgerung* 1. α) *Ist eine grade Linie MN im* Fig. 25. *Punkte O in zwey gleiche, im Punkte P dagegen in zwey ungleiche Theile getheilt*, ($MO = ON$ und $MP > PN$;) so ist $MP = MO + OP$, und $NP = ON - OP = MO - OP$ und folglich stets

$$MP \times NP = MO^2 - OP^2$$

β) *Nimmt man auf der Verlängerung einer solchen Linie MN, welche in O gleich getheilt ist, einen Punkt p*, so ist $Mp = Op + MO$ und $Np = Op - MO$ folglich stets

$$Mp \times Np = Op^2 - MO^2.$$

In beyden Fällen ist also das Rehteck aus den beyden ungleichen Stücken MP, NP oder Mp, Np dem Unterschiede der Quadrate aus der Hälfte der Linie MN und aus dem

Abſtand der beyden Theilpunkte O, *P oder* O, *p* (welche die Linie in gleiche und ungleiche Theile zerſchneiden), *von einander gleich.* — Der Lehrſatz gehört in dieſer Form zu den fruchtbarern Sätzen der Geometrie, iſt in ihr in geometriſchen Unterſuchungen von nicht minderm Gebrauch, als der Analoge arithmetiſche in der Buchſtabenrechnung, und verdient vorzüglich gemerkt zu werden. Schon in den Zuſätzen zu dieſem Lehrſatze findet man einige intereſſante Anwendungen deſſelben.]

[*Folgerung* 2. Verbindet man mit dieſen Sätzen Lehrſatz 9 und 10, ſo geben ſie noch ein Paar ähnliche Sätze, die gleichfalls Bemerkung verdienen, obgleich ſie nicht von ſo häufigem Gebrauch als die vorigen ſind.

α) Im *erſten Fall* war nemlich $MP + NP = MN = 2 . MO$. Folglich müſſen auch die Quadrate dieſer
*E. 4. β. gleichen Linien gleich ſeyn *, mithin $MP^2 + NP^2 +$
* 9. $2 MP \times NP$ * $= 4 . MO^2$ *. Da nun in dieſem Fall
*4. Z. 3. nach Folgerung 1. α. auch $2 MP \times NP = 2 . MO^2 - 2 . OP^2$ iſt, ſo folgt hieraus, wenn wir Gleiches von Gleichem abziehn,

$$MP^2 + NP^2 = 2 . MO^2 + 2 . OP^2.$$

Denn da die Gröſse die wir abziehn ſollen um $2 . OP^2$ kleiner als $2 . MO^2$ iſt, ſo ziehn wir, wenn wir $2 . MO^2$ wegnehmen, um $2 . OP^2$ zu viel ab, müſſen alſo zum Reſte, der bey jener Wegnahme bleibt, $2 . OP^2$ hinzufügen, um den richtigen Unterſchied zu erhalten.

β) Im *zweyten Fall* war $Mp - Np = MN = 2 . MO$. Folglich ſind auch die Quadrate dieſer Linien gleich, alſo $Mp^2 + Np^2 - 2 . Mp \times Np$ * $= 4 . MO^2$. Da 10.
nun nach Folgerung 1. β. in dieſem Fall, $2 . Mp \times Np = 2 . Op^2 - 2 . MO^2$ iſt, ſo folgt daraus, wenn wir Gleiches zu Gleichem hinzufügen

$$Mp^2 + Np^2 = 2 . MO^2 + 2 . OP^2.$$

In beyden Fällen iſt alſo die Summe der Quadrate aus den ungleichen Stücken MP, NP oder Mp, Np gleich dem doppelten Quadrat der halben Linie MN, und des Abſtands der beyden Theilpunkte O, P oder O, p von einander. Dieſer Satz läuft auf den arithmethiſchen hinaus: $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 . a^2 + 2 . b^2$.]

[**Folgerung 3.** Im *zweyten Fall* der erſten Folgerung, d. h. wenn $Mp = MN + Np = 2 . MO + Np$ iſt, iſt auch $Mp^2 = 4 . MO^2 + 4 . MO \times Np + Np^2$ * * 9.
oder, da $MO + Np = Op$, und folglich $MO^2 + MO \times Np = MO \times Op$ iſt *, * 3. f. 2.

$$Mp^2 = 4 . MO \times Op + Np^2$$

ein Satz der auf den arithmethiſchen hinausläuft $(2a + b)^2 = 4 . a . (a + b) + b2$].

Anmerkung. Man ſieht leicht, daſs man ſolche Sätze nach Anleitung analoger arithmetiſcher ins Unbeſtimmte vervielfältigen kann, und das iſt vielleicht der Grund, warum *Le Gendre* und *Simpſon* die fünf Sätze, die in dieſen Folgerungen ſtehn, ganz weggelaſſen haben; doch ſehr mit Unrecht, da durch ſie manche Beweiſe ſich abkürzen, und ohne ſie die Schriften alter Geometer ſich nicht ohne Anſtoſs verſtehn laſſen. Bey *Euklid* machen ſie im zweyten Buch der Elemente fünf beſondre Lehrſätze aus, und werden ſehr umſtändlich, jeder durch beſondere

Conſtructionen bewieſen. Dieſe Beweiſe ſind beſonders für die beyden Sätze in der zweyten Folgerung, die von Euklid aus dem Pythagoreiſchen Lehrſatz abgeleitet werden, ermüdend weitläufig. Sollte Euklid dieſe langen Umwege, nach welchen blos die Beweiſe dieſer beyden Sätze zwey enggedruckte Seiten füllen nicht bloſs deshalb erwählt haben, weil die arithmetiſchen Vorſtellungsarten, mittelſt derer wir ſie abgeleitet haben, den ältern Geometern noch nicht ſo recht geläufig waren.

Mit ähnlichen Sätzen iſt faſt jedes geometriſche Werk, welches tiefer in die Wiſſenſchaft hineingeht, reichlich ausgeſtattet. Nun iſt es zwar nicht zu leugnen, daſs Sätze von dieſer Art, zur gelegnen Zeit gebraucht, geometriſche Unterſuchungen auſserordentlich abkürzen können; allein ſie ſind jedesmal, beſonders auf arithmetiſchem Wege, (durch die einfachſte Buchſtabenrechnung) ſo leicht zu finden, daſs es in der That unnütz und ſchädlich iſt, mit ihnen die geometriſchen Werke zu überfüllen. Sie haben in der geometriſchen Analyſis einen ähnlichen Nutzen wie die Verwandlung einer Formel in die andre in der Buchſtabenrechnung, und billig nimmt man daher dieſe bey jener mit zu Hülfe. *Clavius*, *Gregor von St. Vincenz* und ſelbſt *Tacquet* ſtanden noch in der Meynung, die Regeln der Buchſtabenrechnung müſsten aus dieſen geometriſchen Sätzen abgeleitet, und durch ſie bewieſen werden; ein ſonderbarer Wahn, welcher zeigt, wie ſehr noch vor hundert Jahren die arithmetiſchen Wiſſenſchaften in ihrer Kindheit lagen, und der vielleicht nicht wenig dazu mag beygetragen haben, die geometriſchen Werke mit Sätzen über Rechtecke und Quadrate aus Linien, welche nach einer gewiſſen Art eingetheilt ſind, ſo ſehr zu überladen. Von ſolchen Sätzen führe ich hier nur noch ein Paar an, die den Sätzen in der erſtern Folgerung ähnlich ſind: *Sind an einer Linie CD zwey gleiche Linien AC, DB angeſetzt, ſo iſt immer* $CB^2 = AB^2 + AB \times CD$, *und nimmt man in der Linie CD irgend einen beliebigen Punkt E, ſo iſt* $AE \times EB = DE \times EA + EC \times CA + AC^2$ (*Gregor von St. Vinc.* B. 1. S. 57. 58.)

Fig. 26

d. U.

[Zusatz I. *Unter allen Rechtecken die sich aus zwey Abschnitten einer gegebnen graden Linie MN bilden lassen, ist das Quadrat über ihre Hälfte MO das gröste, und der Inhalt wird immer kleiner, je mehr die Abschnitte MP, PN verschieden sind.* Denn denkt man sich die Linie in O gleich, und in P ungleich getheilt, so ist, nach Folgerung 1. α., $MP \times NP = MO^2 - OP^2$, und dieser subtractive Theil OP^2 wächst mit dem Unterschiede der beyden ungleichen Theile, und nimmt mit demselben ab, und fällt ganz fort, wenn beyde Abschnitte gleich sind. Fig. 25.

α) *Unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat mithin das Quadrat den grösten Inhalt.*

β) Und wenn zwey Rechtecke, welche aus Abschnitten gleicher Linien beschrieben sind, gleichen Inhalt haben, so sind auch die Abschnitte, welche ihre Seiten bilden, selbst gleich.

Zusatz II. Dagegen wird *die Summe der Quadrate aus den beyden Abschnitten MP, NP kleiner, wenn der Unterschied der beyden Abschnitte von einander abnimmt.* Denn da die Summe dieser Quadrate $MP^2 + NP^2 = MN^2 - 2 . MP \times PN$ ist *; nimmt sie ab, wenn das Rechteck aus den beyden Abschnitten MP, PN zunimmt, folglich wenn die beyden Abschnitte von einander weniger verschieden werden. (Eukl. X. 42. Lemma).] * 9.

LEHRSATZ 12.

Das Quadrat der Hypotenuse BC eines rechtwinkligen Dreyecks ABC ist gleich den Quadraten Fig. 27.