Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 13.] In jedem schiefwinkligen Dreyeck ist das Quadrat einer Seite BC, welche einem spitzen Winkel A gegenüber steht, kleiner, dagegen das Quadrat einer Seite bc, welche einem stumpfen ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Seiten. — Dieses läſst sich auch so beweisen. Man ziehe durch die gegenüberstehenden Winkelpunkte des Quadrats Parallellinien mit der zwischen ihnen liegenden Diagonale, so entsteht dadurch ein Parallelogramm EFGH, welches, da beyde Diagonalen gleich und auf einander senkrecht sind *, das Quadrat der Diagonale ist. Dieses Quadrat enthält 8 rechtwinklige Dreyecke in sich, die sich decken, und deren 4 das Quadrat ABCD ausmachen; daher jenes Quadrat das Doppelte von diesem ist. * I. 37.

Es verhalten sich also in jedem Quadrate ABCD, die über eine der Diagonalen und über eine der Seiten beschriebnen Quadrate $AC^2 : AB^2 = 2 : 1$, folglich die Seiten dieser beyden Quadrate, wie die Quadratwurzeln aus 2 und 1 *, oder $AC : AB = \sqrt{2} : 1$. Diese beyden Linien haben also *ein irrationales Zahlverhältniſs, und mithin sind die Diagonale und die Seite eines jeden Quadrats untereinander incommensurabel* *; ein Satz, womit Euklid seine Abhandlung über incommensurable Flächen schlieſst (X. 117), und den wir weiterhin noch auf eine andre Art beweisen werden. *4. Z. 3. 7 *II. Auf. 19. a.

[LEHRSATZ 13.]

In jedem schiefwinkligen Dreyeck ist das Quadrat einer Seite BC, welche einem spitzen Winkel A gegenüber steht, kleiner, dagegen das Quadrat einer Seite bc, welche einem stumpfen Winkel a gegenüber steht, gröſser als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten. Und Fig. 30.

zwar, wenn man von einem der Endpunkte dieser Seite, z. B. aus B, auf die gegenüberstehende Seite AC, oder deren Verlängerung, ein Perpendikel fällt; so ist das doppelte Rechteck aus AC und dem Abschnitte dieser Seite, welcher am Winkelpunkte A (nicht an BC) anliegt, jenem Unterschiede gleich. Oder es ist

1) wenn der Winkel A spitz ist,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AC \times AD$$

2) wenn dagegen der Winkel a stumpf ist,

$$bc^2 = ab^2 + ac^2 + 2\ ac \times ad$$

1. Ist A eine *spitzer* Winkel, so liegt das Perpendikel BD zwischen den beyden Schenkeln dieses Winkels, und folglich mit der Grundlinie des Dreyecks,
* I. 16. Z. 2. d. h. mit AB auf einerley Seite des Punktes A*. Ist überdem auch der Winkel C spitz, so fällt das Perpendikel BD innerhalb des Dreyecks, und es ist CD = AC — AD; ist dagegen der Winkel C stumpf, so fällt das Perpendikel BD über den Schenhel BC hinaus,
*I.16.Z. 2. f. 2. ausserhalb des Dreyecks *, und es ist umgekehrt CD = AD — AC. In beyden Fällen ist also CD dem Unterschiede zwischen AC und AD gleich, nur dass im ersten Fall die Grundlinie AC, im zweyten AD grösser ist; und mithin ist in beyden Fällen gleichmäsig
* 10. $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2\ AC \times AD$ *. Fügt man nun zu diesen gleichen Flächenräumen beyderseits BD^2 hinzu, und setzt statt der Quadrate der beyden Katheten
* 12. $BD^2 + CD^2$, das Quadrat der Hypotenuse, BC^2*, und

und eben so statt $BD_2 + AD_2$, AB^2, so erhält man

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC \times AD.$$

2) Ist a ein *stumpfer Winkel*, so liegt das Perpendikel bd ausserhalb beyder Schenkel*, (zwischen den Schenkeln des spitzen Nebenwinkels) und steht daher nicht auf der Grundlinie ac selbst, sondern auf deren Verlängerung auf, die in Absicht des Punktes a entgegengesetzt liegt. In diesem Fall ist also $cd = ad + ac$, folglich $cd^2 = ad^2 + ac^2 + 2\,ac \times ad$, und wenn man beyderseits bd_2 hinzufügt, *I. 16 Z. 2. f. 2.

$$bc^2 = ab^2 + ac_2 + 2\,ac \times ad.$$

Folgerung I. Der Winkel A mag also *spitz* oder *stumpf* seyn, so wird in beyden Fällen das Quadrat der gegenüberstehenden Seite BC, durch die Summe der Quadrate der anliegenden Seiten AB, AC, und durch das doppelte Rechteck $2\,AC \times AD$ bestimmt, nur dass dieses für spitze Winkel *abzuziehn*, für stumpfe *hinzuzufügen* ist. Die Aussage für beyde Fälle lassen sich daher bequem in folgende allgemeine zusammen ziehn

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AC \times AD$$

wo, wenn A spitz ist, für den letzten Theil das *obere* Zeichen, wenn A hingegen *stumpf* ist, das *untere* Zeichen gilt.

Ist A ein *rechter Winkel*, so muss dieser Theil fortfallen, damit wir die Aussage des *Pythagoreischen Lehrsatzes* erhalten. In der That fällt dann das Perpendikel BD mit der Kathete BA zusammen, daher dann kein

Abschnitt AD, mithin auch kein Rechteck AC × AD vorhanden ist.

Grade so liegt der Abschnitt AD, so lange der Winkel A spitz ist, mit der Grundlinie AC auf einerley Seite des Punktes A, hingegen wenn a stumpf ist, auf der entgegengesetzten Seite, hat also in diesem zweyten Fall eine entgegengesetzte Lage als im erstern, und von diesem Entgegengesetzten in der Lage des Abschnitts rührt es her, daſs das Rechteck 2 AC × AD in beyden Fällen auf entgegengesetzte Art vorkömmt, in jenem wegzunehmen, in diesem hinzuzufügen ist.

Anmerkung 1. Dieses Entgegengesetzte in Absicht der Lage, (es sey nun zweyer Linien, oder zweyer Winkel, u. s. f.) in Fällen, die sich sonst ganz gleich sind, pflegt man *in der rechnenden Geometrie* durch die Benennungen *positiv* und *negativ* zu charakterisiren, indem man die Linien, Winkel u. s. f., welche dieselbe Lage als in dem Fall haben, von dem man ausgeht, *positive Linien*, *Winkel* u. s. f. nennt; diejenigen hingegen, die auf entgegengesetzte Art liegen, *negative Linien*, *Winkel* u. s. f. In so fern man sich dann bloſs an den arithmetischen Sinn der geometrischen Sätze und Formeln hält, und es lediglich mit Zahlausdrücken für ausgedehnte Gröſsen zu thun hat, kann man das, was durch dieses Entgegengesetzte in der Lage, in den Sätzen und Formeln abgeändert wird, nach den Regeln der Rechnung mit entgegengesetzten Zahlgröſsen, wie sie die Arithmetik entwickelt, beurtheilen, wobey uns die Aussage für einen einzigen Fall genügt, hier z. B. für den Fall eines spitzen Winkels, für den $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AD$ ist. Denn mittelst des Begriffs *negativer Gröſsen*, und den darauf gebauten Rechnungsregeln, liegt in dieser Formel zugleich die Aussage für den Fall eines stumpfen Winkels, für welchen AD auf eine entgegengesetzte Art als für den spitzen Winkel liegt, folglich einen nega-

tiven Zahlwerth erhält, daher alsdann das subtractive Produkt 2 AB × AD den Regeln der Rechnung gemäfs, in ein Additives übergeht. Allein *dieses Zusammenfassen mehrerer Fälle, die in allem, bis auf das Entgegengesetzte in der Lage gewisser Linien, Winkel u. s. f. übereinstimmen, in einen Einzigen*, gehört eigentlich nicht hierher, sondern *in die rechnende Geometrie*, welche eben dadurch so manche geometrische Untersuchung, die auf dem ostensiven Wege, durch die Menge solcher Fälle sehr weitläufig und langwierig wird, ausserordentlich abkürzt und erleichtert. Auf dem ostensiven, eigentlich geometrischen Wege, muss man diese Fälle *einzeln* betrachten, und für jeden die Aussage *einzeln* aufstellen und darthun, weil, wie gesagt, der Kunstgriff, alle Aussagen in Eine durch den Begriff des Negativen zusammenzufassen, und aus ihr zu entwickeln, auf arithmetischen Gründen beruht, und der rechnenden Geometrie ausschliesslich eigen ist.

Daraus folgt aber nicht, dass man im System der Geometrie aus solchen einzelnen Fällen auch *einzelne Sätze* machen müsse. Dadurch würde die Uebersicht und das Behalten viel zu sehr erschwert. Vielmehr muss man sie, wenn ich nicht irre, auch hier als blosse Modificationen eines und desselben Hauptsatzes unter einer allgemeinen Aussage zusammenstellen, die blos, je nachdem gewisse Linien, Winkel u. s. f. eine entgegengesetzte Lage haben, nüancirt wird. *Euklid*, *Le Gendre* und fast alle andern Geometer pflegen sie zwar durchgängig als einzelne Sätze aufzuführen, und machen so z. B. aus den beyden Fällen dieses Lehrsatzes, zwey verschiedne Sätze. Weil aber dadurch die Uebersicht der Wissenschaft in der That nicht wenig gestörht und erschwert wird, so glaube ich dieses für einen Fehler gegen die Methode halten zu müssen, den ich zu vermeiden durchgängig Bedacht gewesen bin. Diese Zusammenstellung gewährt überdem noch den Nutzen, dass sie von selbst darauf führt, genau nachzusehn, worin sich jedesmal die verschiednen Fälle unterscheiden, und wie sie sich mittelst des Begriffs des Negativen unter eine Aussage zusammenziehn, und aus ihr entwickeln lassen; Uebungen, die ich dem Anfänger recht sehr empfehle, und durch die er sich in dem rechten Sinne und dem Gebrauch dieses für die Analysis und ihre Anwendungen so wichtigen Begriffs festsetzen wird. Und zwar versuche er das sogleich an Lehrsatz 10 und bey den Folgerungen zu Lehrsatz 11, so wie bey den folgenden Lehrsätzen, bey denen ich hierauf nicht wieder zurückkommen werde.

Was unsern Lehrsatz betrifft, so umfaſst er, wie wir gesehn haben, zugleich den *Pythagoreischen Lehrsatz*, als einen von drey *Hauptfällen*, und dehnt ihn mit gehörigen Modificationen auf alle Arten von Dreyecken aus. Und zwar beruhen diese drey Fälle unmittelbar auf der Beschaffenheit und Lage des Abschnitts AD, welcher den Abstand des Perpendikels BD vom Winkelpunkte A bestimmt, und folglich mittelbar auf der Beschaffenheit des Winkels A. Je nachdem dieser Winkel A *spitz*, *stumpf* oder *recht* ist, fällt das Perpendikel BD und zugleich der Abschnitt AD, entweder auf *die* Seite des Punktes A, auf welcher die Grundlinie AC des Dreyecks liegt, oder auf die entgegengesetzte Seite, oder in den Punkt A selbst hinein. Und das macht die Verschiedenheit der drey Fälle aus, und begründet die Verschiedenheit in der Aussage des Satzes. Daſs indeſs selbst dieser so verallgemeinerte Satz sich wiederum nur als einen *besondern Fall* eines noch allgemeinern Satzes über das Dreyeck ansehn lasse; davon wird uns Lehrsatz 15 überzeugen.

Fig. 31. *Folgerung* 2. Fällt man aus beyden Endpunkten der Seite BC auf die gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks ABC, oder auf deren Verlängerungen, Perpendikel BD, CE; so ist, unserm Lehrsatz zu Folge, sowohl $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2AC \times AD$ als auch $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2AB \times AE$; wo in beyden Fäl-

len das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem A ſpitz oder ſtumpf iſt. Mithin muſs in jedem Dreyeck, der Winkel A ſey ſpitz oder ſtumpf, $AC \times AD = AB \times AE$ ſeyn, und folglich auch $AC : AB = AE : AD$ *. *4. f. 1.

Zieht man durch den Durchſchnittspunkt der beyden Perpendikel BD, CE die grade Linie AF, ſo ſteht auch dieſe auf der gegenüberſtehenden Seite BC ſenkrecht *; daher gleichfalls $BC \times BF = BA \times BE$ und * II. 25. Z. 2.
$CA \times CD = CB \times CF$ iſt, und ſich auch verhält $BC : BA = BE : BF$ und $CA : CB = CF : CD$.

Perpendikel aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberſtehenden Seiten gefällt, durchſchneiden dieſe folglich ſo, daſs je zwey Rechtecke, welche aus einer Seite und demjenigen Abſchnitt derſelben, der an beyder Seiten Durchſchnittspunkt anliegt, ſtets gleich ſind; oder daſs *je zweyer Seiten Abſchnitte, die an demſelben Winkelpunkte liegen, ſich verkehrt wie die Seiten verhalten* *. * E. 7.

Folgerung 3. Für einen ſpitzen Winkel A iſt *das Rechteck* $2\,AC \times AD = AB^2 + AC^2 - BC^2$; für einen ſtumpfen Winkel a hingegen $2\,ac \times ad = bc^2 - ab^2 - ac^2$. Für beyde wird alſo dieſes Rechteck durch die Quadrate der Seiten auf gleiche Art gegeben, nur daſs im erſtern BC^2 kleiner, im zweyten bc^2 gröſser iſt, als die Quadrate der beyden andern Schenkel zuſammengenommen.

Jeder der einzelnen Abschnitte, z. B. AD, wird mithin *durch die drey Seiten des Dreyecks* folgendermaßen bestimmt, $AD = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AC}$ und $ad = \frac{bc^2 - ab^2 - ac^2}{2\,ac}$; Ausdrücke, welche, je nachdem man den geometrischen oder den arithmetischen
*4. Z. 2. Sinn der Zeichen nimmt *, verschieden zu übersetzen sind. Dem *geometrischen Sinn gemäss* verlangen sie, dass man erstens ein Quadrat, welches den Quadraten von AB, AC zusammengenommen gleich, und zweytens ein Quadrat welches dem Unterschiede zwischen diesem und dem Quadrat von BC gleich sey, bilde, und dieses dritte Quadrat in ein Rechteck, das 2 AC zur Grundlinie hat, verwandle, (wozu man die Methoden unter den Aufgaben am Ende dieses Buches findet) um den Abschnitt AD, als die Höhe dieses Rechtecks zu finden. Nach dem *arithmetischen Sinn* genommen, erhält man, wenn man die Zahlwerthe der Seiten auf die Art, wie die Formel es aussagt, zusammen nimmt, den Zahlausdruck des Abschnitts AD, der für die Trigonometrie, wenn man aus den Zahlausdrücken der drey Seiten des Dreyecks den des Winkels A sucht, und für Lehrs. 20. von Wichtigkeit ist.

Aus AD und BC findet sich endlich geometrisch
* 12. f. 1. sowohl als arithmetisch *das Perpendikel* AD *, und aus dem Zahlwerth desselben der *Inhalt des Dreyecks*
* 5. ABC *, der also auf diese Art aus dem Zahlwerth der drey Seiten gefunden ist. Indess werden wir im folgenden Buche dazu einen bequemern Weg finden.

Folgerung 4. Endlich werden *die an dem Winkel A anliegenden Seiten des Dreyecks ABC durch folgende Ausdrücke gegeben. Erstens* die Seite AB, auf welcher das Perpendikel *nicht* steht, durch $AB^2 = BC^2 - AC^2 \pm 2 AC \times AD$. *Zweytens* die Seite AC, auf die das Perpendikel gefällt ist, durch $AC^2 \mp 2\, AC \times AD = BC^2 - AB^2$, (folglich der Zahlausdruck derselben durch eine unreine quadratische Gleichung,) wo wiederum das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem A spitz oder stumpf ist.

Aus der zweyten Formel folgt, daſs
$AC \times (AC \mp 2\, AD) = BC^2 - AB^2$ ist *. Theilt man * E. 5.
daher die Grundlinie des Dreyecks, AC, im Punkte O in zwey gleiche Theile, da denn $AC \times (AC \mp 2\, AD)$ gleich $AC \times (2\, AO \mp 2\, AD)$ gleich $2\, AC \times OD$ wird, und zwar sowohl für spitze als für stumpfe Winkel; so ist $2\, AC \times OD = BC^2 - AB^2$; ein sehr brauchbarer Satz, den wir weiter unten nochmals als besondern Lehrsatz aufstellen, und noch auf andre Art herleiten werden *. * 17.

Folgerung 5. *Ist das Dreyeck ABC gleichschenklig, A die Spitze, BC die Grundlinie*, und AF das Perpendikel auf die Grundlinie, so wie BD das Perpendikel auf den Schenkel AC (folglich AB = AE, $BF = \frac{1}{2} BC$ * und die Winkel an der Grundlinie B, C nothwendig spitz *) so ist, dem hier Bewiesenen gemäſs

Fig. 28. — * I. 12. Z. — * I. 31.

$$\alpha)\ BC^2 = 2\, AC^2 \mp 2\, AC \times AD\,^* = 2\, AC \times (AC \mp AD)\quad ^*\ (f.\ 1.)$$
$$= 2\, AC \times CD\,^* \quad ^*\ E.\ 5.$$

A sey spitz oder stumpf, da im erstern Fall das obere, im zweyten das untere Zeichen gilt. Und das ist aller-

* f. 2. dings richtig, da $CA \times CD = CB \times CF$ * und $CF = \frac{1}{2} CB$ ist.

* f. 3. β) $AD = \dfrac{2\,AC^2 - BC^2}{2\,AC}$ und $ad = \dfrac{bc^2 - 2\,.\,ac^2}{2\,.\,ac}$ *

Anmerkung 2. *Folgenden eleganten Beweis*, welcher *beyde Fälle unsers Lehrsatzes*, ganz nach der Art, wie wir den Pythagoreischen Lehrsatz bewiesen haben, und zwar unabhängig von diesem, darthut, halte ich der Mühe werth hierher aus *Gregor von St. Vincenz* (l. 44. u. 45) zu übertragen, obgleich er sich auf einen Satz über die Sehnen stützt, den wir erst weiterhin be-
* 22. weisen werden *, indem dieser Hülfssatz sich auch leicht unmit-
Fig. 32. telbar aus Lehrsatz 7 ableiten läst. Unsre Figur stellt zwar nur den Fall des stumpfen Winkels dar, reicht aber hin sich daran auch den Fall des spitzen Winkels zu denken, der nur wenig verschieden ist, und für den jeder sich leicht selbst eine Zeichnung entwerfen wird.

Man beschreibe über die drey Seiten des gegebnen Dreyecks ABC Quadrate AH, AI, BG, und über die Grundlinie BC, als Durchmesser, einen Halbkreis. Je nachdem nun der Winkel A *recht*, *spitz*, oder *stumpf* ist, fällt der Winkelpunkt A *auf* die Kreislinie, oder
*II 25. f. 1. u. 26. *ausserhalb*, oder *innerhalb* des Kreises *. In den beyden letztern Fällen wird also die Kreislinie entweder von den Schenkeln, oder von deren Verlängerung, in den Punkten P, Q durchschnitten, und zieht man durch diese Durchschnittspunkte die graden Linien CPM, BQN, so sind P, Q als Winkel im Halbkreise,
*II 23 Z 2 Rechte *, folglich BPMH und CQNI Rechtecke, so wie auch APML, AQNK; und zwar sind diese letztern Rechtecke, jenes aus den Linien AP, AB, dieses aus AQ, AC beschrieben, also (da BP, CQ Sehnen sind,

die ſich in einem Punkte A durchſchneiden,) vermöge der Natur des Kreiſes gleich *. Theilt man nun, * 22. wie beym Beweiſe des Pythagoreiſchen Lehrſatzes, das Quadrat über der Grundlinie BC durch das Perpendikel AE in zwey Rechtecke, und zieht AG, BI; ſo entſtehn zwey Dreyecke AGC, BIC, welche, jenes mit dem Rechteck DG, dieſes mit dem Rechteck CN über gleicher Grundlinie und zwiſchen gleichen Parallelen ſtehn, folglich halb ſo groſs als dieſe Rechtecke ſind *. *2. f. 1. Beyde Dreyecke decken ſich aber, ſind alſo gleich, und folglich haben auch die Rechtecke DG und CN gleichen Inhalt. Grade ſo thut man dar, daſs auch die Rechtecke DF und BM gleichen Inhalt haben. Folglich iſt BC^2 = Rechtk. CN + Rechtk. BM oder $BC^2 = AC^2 \mp AC \times AQ + AB^2 \mp AB \times AP$; und da die beyden Rechtecke gleich ſind,

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \mp 2\,AC \times AQ$$

wo das untere Zeichen gilt, wenn A ſtumpf, das obere wenn A ſpitz iſt, und wo man ſtatt des letztern Rechtecks auch das Rechteck $\mp 2 \cdot AB \times AP$ ſetzen kann.

d. U.

[LEHRSATZ 14.]

Ein Dreyeck ABC iſt bey A rechtwinklig, ſpitzwinklig oder ſtumpfwinklig, je nachdem das Quadrat der Seite BC, welche dieſem Winkel gegenüberſteht, den Quadraten der beyden Seiten AB, AC, welche den Winkel A einſchlieſsen, zuſammengenommen gleich iſt, oder kleiner, oder gröſser iſt, als dieſe beyden Quadrate. Fig. 30.