Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 15.] Wenn man über zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC zwey Parallelogramme ABDE, ACFG, unter beliebigen Winkeln, und von beliebiger Grösse und Lage beschreibt, die Seiten derselben, ...

Denn gesetzt es ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$, und doch wäre A kein rechter, sondern ein spitzer oder ein stumpfer Winkel, so müsste zugleich auch $BC^2 =$
* 13. $AB^2 + AC^2 \mp 2\ AC \times AD$ seyn *, welches der Voraussetzung widerspricht.

Eben so müssen, wenn $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\ AC \times AD$ ist, und der Winkel A wäre nicht im Fall des *obern* Zeichens *spitz*, sondern recht oder stumpf, und nicht im Fall des *untern* Zeichens *stumpf*, sondern recht oder spitz, vermöge der beyden vorigen Lehrsätze zugleich $BC^2 = AB^2 + AC^2$ oder $BC^2 = AB^2 + AC^2 \pm 2\ AC \times AD$ seyn, welches ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz. Aehnliche *Kriterien* um aus der Grösse der drey Seiten eines Dreyecks ABC, und eines der Stücke, welche durch die Perpendikel aus den Spitzen auf den gegenüberstehenden Seiten abgeschnitten werden, *zu beurtheilen, ob ein bestimmter Winkel A des Dreyecks, recht, spitz oder stumpf ist*, geben die Formeln in Lehrsatz 13 Folgerung 3 und 4 an die Hand, so wie Folgerung 5 Merkmale, wonach sich aus der Grösse der Seiten beurtheilen läfst, ob ein Dreyeck *gleichschenklig* ist, oder nicht.

[Lehrsatz 15.]

Fig. 33. *Wenn man über zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC zwey Parallelogramme ABDE, ACFG, unter beliebigen Winkeln, und von beliebiger Grösse und Lage beschreibt, die Seiten derselben, welche den*

Seiten des Dreyecks gegenüberstehn, bis zu ihrem Durchschnittspunkte H verlängert, und durch diesen und die Spitze des Dreyecks die grade Linie HAK zieht:

so ist, wenn diese Linien die Grundlinie BC selbst schneidet, die Summe; wenn sie hingegen die Verlängerung der Grundlinie schneidet, der Unterschied der beyden Parallelogramme über AB und AC, einem Parallelogramme BCML gleich, welches über die dritte Seite BC des Dreyecks so beschrieben wird, dass dessen zweyte Seite der Linie HA gleich und parallel ist.

Zieht man durch die Endpunkte der Grundlinie BC, parallel mit KH, zwey grade Linien, welche die Linien DE, FG, in den Punkten L und M, durchschneiden, so sind die Vierecke ABLH, ACMH, Parallelogramme, da sie der Construction gemäss, durch Parallelen zwischen Parallelen gebildet werden*. Und* I. 34.
zwar stehn diese Parallelogramme mit denen, welche über die Seiten AB, AC beschrieben sind, auf gleicher Grundlinie und zwischen gleichen Parallelen, haben also mit ihnen gleichen Inhalt*. * I.

In ihnen sind die gegenüberstehenden Seiten BL, AH, und CM, AH, mithin auch BL und CM, gleich. Da diese Linien überdem der Construction gemäss parallel laufen, so ist CBLM ein Parallelogramm*, und I. 36.
zwar ein Parallelogramm, welches aus den Linien BC und AH, letzterer in paralleler Lage mit KH, beschrieben ist.

Ueberdem bildet die Linie HK mit den Seiten dieses Parallelogramms, oder deren Verlängerungen, ebenfalls zwey Parallelogramme LK, KM, welche mit den Parallelogrammen BLHA, CMHA, über gleichen Grundlinien BL, CM, und zwischen gleichen Parallelen stehn, folglich gleichen Inhalt haben *.

* 1.

Diese letztern hatten aber mit den Parallelogrammen ABDE und ACFG gleichen Inhalt. Also ist das Prlgr. ABDE = Prlgr. LK und Prlgr ACFG = Prlgr. MK.

Durchschneidet nun die Linie AK die Grundlinie des Dreyecks BC selbst, so ist das Parallelogramm über BC die Summe der beyden Parallelogramme MK, LK, folglich

Prlgr. ACFG + Prlgr. ABDE = Prlgr. BCML;

und dann ist dieses letztere Parallelogramm unter Winkeln LBC = B + BAK und MCB = C + CAK beschrieben.

Durchschneidet dagegen die Linie AH die Verlängerung der Grundlinie in einem Punkte K, so ist das Parallelogramm über BC der Unterschied der beyden Parallelogramme MK, LK, folglich

Prlgr. ACFG — Prlgr. ABDE = Prlgr. BCML;

und dann sind die Winkel, worunter das letztere Parallelogramm beschrieben ist, LBC = B — BAK und MCB = C — CAK.

Zusatz. Im Fall die beyden Parallelogramme, welche man über die Seiten AB, AC des Dreyecks, ABC beschreibt, *Quadrate* sind, geht die Aussage dieses Sat-

zes, für rechtwinklige Dreyecke in den *Pythagoreischen Lehrsatz* *, und für schiefwinklige in die allgemeinere * 12.
Aussage *des 13ten Lehrsatzes* über. In diesem Fall ist nemlich das dritte Parallelogramm über BC, welches jenen beyden gleich ist, beym rechtwinkligen Dreyeck auch ein Quadrat, bey schiefwinkligen hingegen ein Parallelogramm, das um zwey Rechtecke, wie sie Lehrsatz 13 angiebt, grösser oder kleiner als das Quadrat über BC ist. Dieses läſst sich leicht mittelst folgendes *Lemmas* zeigen.

Hülfssatz. *Beschreibt man über eine der Katheten* Fig. 34.
eines bey A rechtwinkligen Dreyecks ABC, z. B. über AC, ein Quadrat, verlängert die Seite desselben, welche der Kathete gegenübersteht, und zieht durch die Spitzen des rechten Winkels und des Winkels C, senkrecht auf der Hypotenuse, bis an jene Seite oder deren Verlängerung, die graden Linien KAH und CM; so sind AH und CM beyde der Hypotenuse des gegebnen rechtwinkligen Dreyecks gleich.

Denn vermöge dieser Construction sind erstens CMAH Parallelen zwischen Parallelen, also CM = AH *. * I. 34.
Zweytens sind BAC und F rechte Winkel; eben so BCM und ACF, weshalb der Unterschied derselben vom Winkel ACM, d. h. die Winkel BCA und MCF gleich seyn müssen. Endlich sind, als Seiten eines Quadrats, AC und CF gleich. Folglich decken sich die beyden Dreyecke ABC, FMC *, und es ist allemal * I. 7.
FM = AB und CM = BC, oder AH und CM sind der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreyecks gleich.

Folgerung 1. Werden folglich in einem *rechtwinkligen Dreyeck* über *beyde* Katheten Quadrate AF, AD beschrieben, und auf den Endpunkten der Hypotenuse Perpendikel BL, CM errichtet, welche die den Katheten gegenüberstehenden Seiten der Quadrate, oder deren Verlängerungen, in L und M durchschneiden, so sind diese Perpendikel beyde der Hypotenuse BC gleich, und folglich ist BCML ein über der Hypotenuse beschriebnes Quadrat. Ueberdem durchschneidet das Perpendikel KA jede dieser beyden Verlängerungen in einem Punkte H so, dass für die eine AH gleich CM, für die andre AH gleich BL, mithin für beyde gleich ist, folglich in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte beyder Verlängerungen. Da nun
* 15. überdem AH mit BL und CM parallel läuft, so ist * *das Quadrat über der Hypotenuse BC, den Quadraten über den beyden Katheten zusammengenommen gleich*, wie dieses der Pythagoreische Lehrsatz aussagt.

Fig. 35. *Folgerung* 2. Werden in einem *schiefwinkligen Dreyeck* ABD, über zwey Seiten AB, AC Quadrate AD, AF beschrieben, und man fällt aus den Endpunkten der dritten Seite BC auf die gegenüberstehenden Seiten Perpendikel CP, BQ, und beschreibt über die Seiten BP, CQ Quadrate, BPed, und CQgf, so gilt auch für diese Quadrate unser Lehnsatz, indem vermöge dieser Construction BCP und BCQ rechtwinklige Dreyecke sind, welche BC gemeinschaftlich zur Hypotenuse haben. Errichtet man folglich auf B und C die Perpendikel Bl Cm, welche bis an die Seiten dieser letztern Quadrate,

oder ihre Verlängerungen reichen, ſo iſt jedes dieſer Perpendikel der Hypotenuſe BC gleich, alſo auch in dieſem Fall BCml das Quadrat über der dritten Seite BC. Zugleich muſs auch in dieſem Fall das Perpendikel KA ſich mit den Seiten, welche den beyden Katheten gegenüber ſtehn, in demſelben Punkte h ſchneiden, weil dieſes Perpendikel, ſowohl mit AB, Bl, lh, als auch mit AC, Cm, mh, Parallelen zwiſchen Parallelen bildet, folglich für beyde Seiten gleiche Länge Bl = Cm hat. Mithin iſt nach Lehrſatz 15 BCq = Rechtk. Ad + Rechtk. Af. Nun aber iſt Rechtk. Ad = $AB^2 \mp AB \times AP$ * und Rechtk. Af = $AC^2 \mp AC \times AQ$, wo das *8.Z.2.
untere Zeichen gilt, wenn A (wie in unſrer Figur) ſtumpf, das obere wenn A ſpitz iſt, (für welchen Fall man ſich die Figur leicht ſelbſt zeichnen wird). Ueberdem ſind BQPC Punkte in einem Halbkreiſe *, und *23.Z.2.
folglich $AB \times AP = AC \times AQ$ der Natur der Sehnen gemäſs *. Mithin iſt $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AB \times AP$, * 22.
wie dieſes Lehrſatz 13 ausſagt.

Anmerkung. Der intreſſante Lehrſatz, von dem, wie wir ſehn, die Sätze von den Quadraten, welche über Seiten eines Dreyecks beſchrieben ſind, nur einen beſondern Fall ausſagen, kömmt im Weſentlichen ſchon bey *Pappus*, an der Spitze des vierten Buchs ſeiner mathematiſchen Sammlungen vor (Collectiones mathematicae lib. 4. pr. 1.) und wird vom ältern *Caſtillon* in den Schriften der Berliner Akademie der Wiſſenſchaften (Propoſitions de Géométrie et de Trigonométrie élémentaire, démontrées d'une maniere nouvelle. Mém. de Berlin An. 1766. p. 354.) auf eine ähnliche Art wie hier behandelt.

d. U.