Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 16.] 1. Ein Perpendikel, welches aus einem der Eckpunkte eines Dreyecks, z.B aus A, auf die gegenüberstehende Seite BC, oder deren Verlängerung gefällt wird, schneidet diese so, dass der ...

[LEHRSATZ 16.]

Fig. 36. 1. *Ein Perpendikel, welches aus einem der Eckpunkte eines Dreyecks, z. B. aus A, auf die gegenüberstehende Seite BC, oder deren Verlängerung gefällt wird, schneidet diese so, dass der Unterschied der Quadrate aus beyden Abschnitten BD, DC, dem Unterschiede der Quadrate aus den beyden andern Seiten des Dreyecks, AB, AC, gleich ist* ($BD^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$;) *und zwar liegt stets der grössere Abschnitt BD an dem grössern beyder Schenkel AB an.*

2. *Und theilt man die Grundlinie BC im Punkte O in zwey gleiche Theile, so ist der Unterschied der Quadrate aus beyden Schenkeln AB, AC gleich dem doppelten Rechteck aus der Grundlinie und aus dem Abstande des Perpendikels AD von der Mitte der Grundlinie; oder* $AB^2 - AC^2 = 2 . BC \times DO$.

1. Da nach dem Pythagoreischen Lehrsatze $AB^2 = AD^2 + BD^2$ und $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ist, so muss auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ seyn, wie dieses der erste Theil des Lehrsatzes aussagt; und dabey kömmt es auf die Beschaffenheit der Winkel weiter nicht an. Ist der Schenkel AB grösser als AC, so muss folglich auch der an diesem Schenkel anliegende Abschnitt BD der Grundlinie, der grössere seyn.

2. Da der Unterschied zweyer Quadrate dem Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede ihrer Seiten gleich

gleich ist *, so folgt aus dem eben Bewiesenen, dass * 11.
$AB^2 - AC^2 = (BD + CD) \times (BD - CD)$ ist. Nun ist im *spitzwinkligen* Dreyeck die Summe, im *stumpfwinkligen* der Unterschied der beyden Theile BD, CD der Grundlinie BC des Dreyecks gleich. Halbirt man überdem die Grundlinie im Punkte O, und trägt OE gleich OD auf, so ist auch BE gleich DC *, folglich *Gr. 2 ß
im *spitzwinkligen* Dreyeck der Unterschied der Linien BD, DC gleich $BD - BE = DE = 2 DO$, im *stumpfwinkligen* Dreyeck dagegen die Summe der Linien BD, DC gleich $BD + BE = DE = 2 . DO$. Mithin ist im spitzwinkligen Dreyeck sowohl als im stumpfwinkligen

$$AB^2 - AC^2 = 2 . BC \times DO.$$

Und diese Aussage gilt auch für das bey C rechtwinklige Dreyeck, für welches C und D zusammenfallen und $2 DO \times BC = BC^2$ ist; mithin für jedes Dreyeck. Eine Allgemeinheit, in der wir diesen Satz schon weiter oben unter den Folgerungen aus Lehrsatz 13 kennen gelernt haben *. * 13. f. 4.

Folgerung. 1. Da nach dem ersten Theil des Lehrsatzes, für jedes Dreyeck $AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$ ist, so muss auch, wenn man beyderseits $AC^2 + DC^2$ hinzufügt, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ seyn. *In jedem Dreyeck sind also die Quadrate der beyden Schenkel, sammt den Quadraten der ihnen gegenüberstehenden Abschnitte der Grundlinie, die durch ein Perpendikel aus der Spitze gebildet werden, untereinander gleich.*

Fig. 37. *Folgerung* 2. Eine grade Linie CG, welche man aus dem Scheitelpunkte C eines der spitzen Winkel *des bey A rechtwinkligen Dreyecks ABC*, nach der gegenüberstehenden *Kathete, oder nach deren Verlängerung willkührlich zieht*, theilt diese folglich so, dass $CB^2 + AG^2 = CG^2 + AB^2$ oder $CB^2 + Ag^2 = Cg^2 + AB^2$ ist. (Gregor von St. Vincenz I. 41.)

Fig. 36. *Folgerung* 3. Da nach dem zweyten Theil des Lehrsatzes in jedem Dreyeck der Unterschied der Quadrate zweyer Seiten, $AB^2 - AC^2$, dem Rechtecke $2\,BC \times DO$ gleich ist; so muss *in allen Dreyecken, welche über derselben Grundlinie BC stehn*, und *für welche der Unterschied der Quadrate aus beyden Schenkeln AB, AC derselbe*, folglich einem gegebnen Flächenraume F gleich ist ($AB^2 - AC^2 = F$,) auch *DO von einerley Grösse seyn*, ($DO = \frac{F}{2\,BC}$). In allen diesen Dreyecken steht folglich das Perpendikel, welches aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, vom Mittelpunkte der Grundlinie O gleich weit ab, und da für alle diese Dreyecke der Punkt O derselbe ist, so müssen ihre Spitzen insgesammt in dasselbe Perpendikel auf BC fallen, welches um die bestimmte Linie $OD = \frac{F}{2\,BC}$ von der Mitte der Grundlinie absteht. *Dieses Perpendikel ist mithin der geometrische Ort des Durchschnittspunktes zweyer grader Linien, welche von den gegebnen Punkten B und C aus gezogen, sich so durchschneiden, dass der Unterschied*
I.E. 21. *ihrer Quadrate einem gegebnen Flächenraum F gleich ist**. Oder es ist der geometrische Ort *für die Spitzen eines*

Dreyecks, von welchem die Grundlinie BC und der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln, d. i. F, gegeben ist. Verwandelt man diesen Flächenraum F in ein Rechteck, welches über 2 BC als Grundlinie steht*, so giebt die Höhe dieses Rechtecks den Abstand DO; und jeder Punkt A in dem Perpendikel, welches auf BC in der Entfernung DO von der Mitte der Grundlinie errichtet wird, giebt als Durchschnittspunkt zwey grade Linien BA, CA, oder als dritter Eckpunkt ein Dreyeck ABC, dessen Schenkel die verlangte Beschaffenheit haben. Dieses Perpendikel fällt innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks, oder auf dem Schenkel CB, je nachdem der gegebne Flächenraum F kleiner, oder grösser als AB^2, oder diesem Quadrate gleich ist.

* Ag.

Anmerkung. Unser Lehrsatz, der bey Euklid fehlt, ist das erste Lemma, und die Aussage der dritten Folgerung der erste Satz im Zweyten Buche von *Apollonius* ebnen Oertern; auch eben daselbst der erste Fall des vierten Satzes. d. U.

[LEHRSATZ 17.]

1. *Wenn man in einem Dreyeck ABC von einem der Winkelpunkte, z. B. von A, eine grade Linie AO nach dem Punkte O* in der Mitte *der gegenüberstehenden Seite BC zieht, so ist allemal* $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$. Fig. 36

Fälle von A auf die gegenüberstehende Seite das Perpendikel AD. Wie dieses auch liegen möge, so theilt allemal die Linie AO das gegebne Dreyeck in zwey Dreyecke AOB, AOC, welche, je nachdem die-