Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 17.] 1. Wenn man in einem Dreyeck ABC von einem der Winkelpunkte, z.B. von A, eine grade Linie AO nach dem Punkte O in der Mitte der gegenüberstehenden Seite BC zeiht, so ist allemal ...

Dreyecks, von welchem die Grundlinie BC und der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln, d. i. F, gegeben ist. Verwandelt man diesen Flächenraum F in ein Rechteck, welches über 2 BC als Grundlinie steht *, so giebt die Höhe dieses Rechtecks den Abstand DO; und jeder Punkt A in dem Perpendikel, welches auf BC in der Entfernung DO von der Mitte der Grundlinie errichtet wird, giebt als Durchschnittspunkt zwey grade Linien BA, CA, oder als dritter Eckpunkt ein Dreyeck ABC, dessen Schenkel die verlangte Beschaffenheit haben. Dieses Perpendikel fällt innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks, oder auf dem Schenkel CB, je nachdem der gegebne Flächenraum F kleiner, oder grösser als AB^2, oder diesem Quadrate gleich ist. * Ag.

Anmerkung. Unser Lehrsatz, der bey Euklid fehlt, ist das erste Lemma, und die Aussage der dritten Folgerung der erste Satz im Zweyten Buche von *Apollonius* ebnen Oertern; auch eben daselbst der erste Fall des vierten Satzes. d. U.

[LEHRSATZ 17.]

1. *Wenn man in einem Dreyeck ABC von einem der Winkelpunkte, z. B. von A, eine grade Linie AO nach dem Punkte O in der Mitte der gegenüberstehenden Seite BC zieht, so ist allemal* $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$. Fig. 36

Fälle von A auf die gegenüberstehende Seite das Perpendikel AD. Wie dieses auch liegen möge, so theilt allemal die Linie AO das gegebne Dreyeck in zwey Dreyecke AOB, AOC, welche, je nachdem die-

ſe halbirende Linie auf BC ſenkrecht oder ſchief aufſteht, entweder *beyde bey O rechtwinklig*, oder das *eine* bey O ſtumpfwinklig, das *andre* ſpitzwinklig iſt. Im *erſten Fall* (der ein gleichſchenkliges Dreyeck, deſ-
*I. 12.7. ſen Spitze A iſt, vorausſetzt *,) fallen die Punkte O und D zuſammen, und es iſt $AB^2 + AC^2 = 2\,AC^2 =$
* 12. $2\,AO^2 + 2\,OC^2$ *, wie der Lehrſatz ausſagt. Iſt im *zweyten Fall* AOB der ſtumpfe, AOC der ſpitze Winkel, ſo ſteht in dem bey O *ſpitzwinkligen* Dreyeck, dem Winkel O die Seite AC gegenüber, und aus A iſt auf OC das Perpendikel AD gefällt, folglich,

*13. (1) $$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2\,OC \times OD\ *;$$

(eine Ausſage, die für den Fall, daſs C ein rechter Winkel iſt, folglich AD mit AC zuſammenfällt, und OD in OC übergeht, ſich in dieſe, $AC^2 = AO^2 - OC^2$ verwandelt.) In dem bey O *ſtumpfwinkligen* Dreyeck AOB, wo der Schenkel AB dem Winkel bey O gegen-
*13. (2) überſteht, iſt $AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2\,OB \times OD$ *, oder, weil nach der Vorausſetzung OB gleich OC iſt,

$$AB^2 = AO^2 + OC^2 + 2\,OC \times OD$$

(eine Ausſage, die falls bey C ein rechter Winkel, und OD gleich OC iſt, in dieſe übergeht, $AB^2 = AO^2 + 3\,OC^2$). Es iſt daher auch in dieſem zweyten Fall

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$$

es ſey bey C ein ſchiefer oder ein rechter Winkel. Die Ausſage des Lehrſatzes gilt alſo für jeden möglichen Fall.

Ein andrer viel kürzerer *Beweis* dieſes Satzes läſst ſich unmittelbar aus Lehrſatz 11. Folgerung 2. ableiten. Denn da vermöge der Conſtruction, die Grundlinie

BC des Dreyecks, in O gleich, und in D ungleich getheilt ist, so ist $BD^2 + DC^2 = 2\,CO^2 + 2\,OD^2$, folglich, wenn man beyderseits $2\,AD$ hinzufügt, dem Pythagoreischen Lehrsatz gemäss, $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$. — Umgekehrt kann man aus dem letztern Satze den erstern ableiten, wenn man für ihn noch einen andern Beweis, als den oben * mitgetheilten *11. f. 2. wünscht.

Folgerung 1. *Für alle Dreyecke, wie ABC, welche über derselben Grundlinie BC stehn,* ist die Hälfte dieser Grundlinie, OC, also auch $2 \cdot OC^2$ von gleicher Grösse *. Diejenigen unter diesen Dreyecken, für wel- *E. 5. δ che überdem noch *die Quadrate der beyden Schenkel AB, AC einerley Grösse haben*, also $AB^2 + AC^2 = F$, d. h. irgend einem gegebnen Flächenraum gleich sind, müssen folglich allesammt so beschaffen seyn, *dass ihre Spitze A von dem Mittelpunkte der Grundlinie O gleich weit abstehn.* Denn da unserm Lehrsatz gemäss für sie alle $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$ ist, so ist in jedem dieser Dreyecke $2\,AO^2 = F - 2\,OC^2$, mithin $AO = \sqrt{(\frac{1}{2}F - OC^2)}$, also AO für alle von gleicher Grösse. Folglich ist eine um den Mittelpunkt der Grundlinie BC, mit einem Halbmesser, dessen Zahlausdruck $\sqrt{(\frac{1}{2}F - OC^2)}$ ist, beschriebne *Kreislinie*, der *geometrische Ort für die Spitzen aller Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und für welche die Summe der Quadrate aus den beyden Schenkeln gleiche Grösse hat.* Oder sie ist der *geometrische Ort für die Aufgabe*, welche verlangt, *von zwey gegebnen Punkten B, C aus, zwey grade Linien zu ziehn, die sich in einem Punkte A so durchschnei-*

den, daſs ihre Quadrate zuſammengenommen einem gegeb- *Cf. 16. f. 3. *nen Flächenraum gleich ſind* *. Den Halbmeſſer dieſer Kreislinie findet man aus den gegebnen Gröſsen F und BC geometriſch, wenn man nach Anleitung der Aufgaben zu Ende dieſes Buchs, die Figur F in ein gleichgeltendes Rechteck, und die Hälfte deſſelben in ein Quadrat verwandelt, und dann die Seite des Quadrats ſucht, welches dem Unterſchiede des erſtern Quadrats von $(\frac{BC}{2})^2$ gleich iſt.

Fig. 39. **Folgerung 2.** *Nimmt man umgekehrt auf dem Durchmeſſer eines gegebnen Kreiſes, oder auf deſſen Verlängerung, zu entgegengeſetzten Seiten des Mittelpunkts, in gleicher Entfernung von demſelben, zwey Punkte B, C; ſo iſt die Summe der Quadrate je zweyer Linien BM, CM, die man von dieſen Punkten nach einem Punkte M in der Kreislinie zieht, für jeden ſolchen Punkt von gleicher Gröſse.* Eine artige Eigenſchaft der Kreislinie, welche, wenn man MO zieht, unmittelbar aus unſerm Lehrſatz folgt.

Sie ſtellt uns jedoch nur den einfachſten Fall einer viel allgemeinern und weiter greifenden *Eigenſchaft der Kreislinie* dar, die grade ſo aus der Verallgemeinerung *20. unſers Lehrſatzes *, wie die hier entwickelte aus dieſem Lehrſatze ſelbſt flieſst, und von der man gleich nach den Anwendungen des gegenwärtigen Lehrſatzes *18.u.19 auf das Parallelogramm und Trapez *, nach dem Beweiſe jenes verallgemeinerten Satzes, einiges finden wird.

Fig. 40. **Zuſatz I.** *Werden alle Seiten eines Dreyecks ABC durch grade Linien aus den gegenüberſtehenden Winkelpunk-*

ten, AD, BE, CF halbirt, ſo iſt die Summe der Quadrate über dieſe Linien, gleich $\frac{3}{4}$ von der Summe der Quadrate aus den Seiten des Dreyecks. Denn da das doppelte Quadrat aus der Hälfte einer Linie, z. B. $2\,BD^2$, der Hälfte des Quadrats aus der ganzen Linie, $\frac{1}{2}\,BC^2$, gleich iſt, ſo iſt unſerm Lehrſatz gemäſs

$$AB^2 + AC^2 - \tfrac{1}{2}BC^2 = 2\,AD^2$$
$$AB^2 + BC^2 - \tfrac{1}{2}AC^2 = 2\,BE^2$$
$$AC^2 + BC^2 - \tfrac{1}{2}AB^2 = 2\,CF^2$$

folglich $\frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = (AD^2 + BE^2 + CF^2)$

Zuſatz II. Iſt ABC ein ſchiefwinkliges Drey- Fig. 41.
eck, ſo iſt das Quadrat der Seite AB, kleiner oder grö-
ſser als die Summe der Quadrate der beyden andern
Seiten AC, BC*. Dann muſs es folglich auf der Seite * 13.
AB, oder auf deren Verlängerung, einen Punkt O geben, der auf ihr zwey Stücke AO, BO abſchneidet, deren Quadrate zuſammengenommen den Quadraten der beyden andern Seiten AC, BC gleich ſind. Dieſen Punkt O findet man allemal, wenn man AB über B hinaus, und die Seite AC über C hinaus verlängert, auf dieſer Verlängerung CF = CA nimmt, FB zieht, auf der erſtern Verlängerung BG = FB anträgt, und dann AG halbirt. Der halbirende Punkt iſt der geſuchte Punkt O.

Denn weil dann AG in O gleich und in B ungleich
getheilt iſt, ſo iſt erſtens $AB^2 + BG^2 = 2\,AO^2 +$
$2\,BO^2$ *; und weil zweitens auch im Dreyeck *II. f. 2.
ABF, die Seite AF halbirt iſt, iſt $AB^2 + BF^2 = 2\,BC^2 + 2\,AC^2$. Nun aber iſt der Conſtruction gemäſs BF gleich BG, folglich $AO^2 + BO^2 = BC^2 + AC^2$, mit-

hin O der gesuchte Punkt, der auf der Seite AB oder deren Verlängerung, zwey Stücke abschneidet, deren Quadrate den Quadraten der beyden Seiten AC, CB zusammengenommen gleich sind.

Da in den Dreyecken BCA, BCF, die Schenkel, welche die Winkel bey C einschliessen, untereinander gleich sind, so ist, falls AB einem *spitzen* Winkel gegenübersteht, $AB < FB$, also $< BG$, und mithin fällt alsdann der Punkt O allemal in die Verlängerung der Seite AB. Steht hingegen AB einem *stumpfen* Winkel gegenüber, so ist $AB > FB$, also $> BG$ und der Punkt O liegt dann stets in der Seite AB, wie dieses auch Lehrsatz 13 gemäss seyn muss.

Fig. 42. Zusatz III. *Wenn man von irgend einem Punkte F nach den vier Eckpunkten eines Rechtecks ABCD grade Linien zieht, so ist die Summe der Quadrate je zweyer dieser Linien, die nach den gegenüberstehenden Winkelpunkten gezogen sind, einander gleich, oder* $FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$.

Denn zieht man die beyden Diagonalen AC, BD, so halbiren sich diese wechselseitig, so dass $AO = OC = OB$
*I. 36. Z. $= OD$ ist *. Zieht man FO, so ist im Dreyeck AFC vermöge unsers Lehrsatzes $FA^2 + FC^2 = 2\,FO^2 + 2\,AO^2$, und im Dreyeck BFD eben so $FB^2 + FD^2 = 2\,FO^2 +$
* Gr. 1. 2 DO^2, folglich $FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$ *.

Anmerkung. Bey *Le Gendre* findet sich zwar der Lehrsatz, aber sein Beweis ist mangelhaft. Folgerung 2 und Zusatz 3 kommen in *Simpsons* Elementen vor; Zusatz 1 und 2 entlehne ich aus *Gregor von St. Vincenz* I. 42 und 49, und Folgerung 1 macht in *Apollonius* ebnen Oertern II, 5. den ersten Theil des ersten Falls aus.

d. U.

LEHRSATZ 18.

In jedem Parallelogramm ABCD ist die Summe der Quadrate aus allen Seiten, den Quadraten der beyden Diagonalen AC, BD zusammengenommen gleich. Fig. 43.

Da jedes Parallelogramm durch eine der Diagonalen, z. B. durch AC, in zwey Dreyecke ABC, ADC getheilt wird, welche über der Diagonale als Grundlinie stehn, und überdem die beyden Diagonalen sich in ihrem Durchschnittspunkte O wechselseitig halbiren, so dass $AO = OC$ und $BO = OD$ wird, so ist, erstens im Dreyeck ABC

$$AB^2 + BC^2 = 2\ AO^2 + 2\ BO^2$$

und zweytens im Dreyeck ADC

$$AD^2 + DC^2 = 2\ AO^2 + 2\ OD^2$$

folglich, wenn man Gleiches zu Gleichem hinzufügt, und statt des vierfachen Quadrats der halben Diagonalen ($4AO^2$, $4\ BO^2$) die Quadrate der Ganzen setzt *, * 4. Z. 3.

$$AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$$

Folgerung. Da im Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten, folglich auch die Quadrate derselben, gleich sind, so läst sich dieser Satz auch so ausdrücken: *In jedem Parallelogramm sind die Quadrate der beyden Diagonalen, das Doppelte von den Quadraten aus*