Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 18. In jedem Parallelogramm ABCD ist die Summe der Quadrate aus allen Seiten, den Quadraten der beyden Diagonalen AC, BD zusammen gleich.

ich aus *Gregor von St. Vincenz* I, 42 und 49, und Folgerung 1 macht in *Apollonius* ebnen Oertern II, 5. den ersten Theil des ersten Falls aus.

d. U.

LEHRSATZ 18.

In jedem Parallelogramm ABCD ist die Summe der Quadrate aus allen Seiten, den Quadraten der beyden Diagonalen AC, BD zusammengenommen gleich. Fig. 43.

Da jedes Parallelogramm durch eine der Diagonalen, z. B. durch AC, in zwey Dreyecke ABC, ADC getheilt wird, welche über der Diagonale als Grundlinie stehn, und überdem die beyden Diagonalen sich in ihrem Durchschnittspunkte O wechselseitig halbiren, so daſs $AO = OC$ und $BO = OD$ wird, so ist, erstens im Dreyeck ABC

$$AB^2 + BC^2 = 2\,AO^2 + 2\,BO^2$$

und zweytens im Dreyeck ADC

$$AD^2 + DC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OD^2$$

folglich, wenn man Gleiches zu Gleichem hinzufügt, und statt des vierfachen Quadrats der halben Diagonalen ($4AO^2$, $4\,BO^2$) die Quadrate der Ganzen setzt *, * 4. Z. 3.

$$AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$$

Folgerung. Da im Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten, folglich auch die Quadrate derselben, gleich sind, so läſst sich dieser Satz auch so ausdrücken: *In jedem Parallelogramm sind die Quadrate der beyden Diagonalen, das Doppelte von den Quadraten aus* *zwey an einander liegenden Seiten*, *oder* $AC^2 + BD^2 = 2\,AB^2 + 2\,AD^2$; ein Satz, der für das Parallelogramm etwas Aehnliches, als Lehrſatz 17 für das Dreyeck ausſagt.]

[LEHRSATZ 19.]

Fig. 44. *In jedem Trapez ABCD übertrifft die Summe der Quadrate aller Seiten, die beyden Quadrate der Diagonalen AC, BD zuſammen genommen; und zwar um ein Quadrat, welches man erhält, wenn man über zwey aneinander liegende Seiten des Trapezes ein Parallelogramm ABCE errichtet, den Abſtand der beyden Eckpunkte D des Trapezes und E des Parallelogramms, die beyden nicht gemein ſind, nimmt, und über dieſen Abſtand DE als Seite, ein Quadrat beſchreibt. Oder es iſt* $AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$.

Ein Parallelogramm, weches man über zwey an einander liegende Seiten eines Trapezes, z. B. über AB, BC beſchreibt, hat mit dem Trapez die drey Eckpunkte A, B, C und die Diagonale AC gemein, hingegen iſt der vierte Eckpunkt, D, E, und daher auch die zweyte Diagonale BD, BE in beyden verſchieden, weil ſonſt das erſtere Viereck, gegen die Vorausſetzung, ein Parallelogramm ſeyn würde.

Ziehe vom Winkelpunkte C eine Parallellinie mit der gegenüberſtehenden Seite DA des Trapezes, und von B aus eine Parallellinie mit DE, ſo durchſchneiden ſich dieſe Parallellinien in einem Punkte F ſo, daſs ſich die