Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 19.] In jedem Trapez ABCD übertrifft die Summe der Quadrate aller Seiten, die beyden Quadrate der Diagonalen AC, BD zusammen genommen; und zwar um ein Quadrat, welches man erhält, wenn man ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

zwey an einander liegenden Seiten, *oder* $AC^2 + BD^2 = 2\,AB^2 + 2\,AD^2$; ein Satz, der für das Parallelogramm etwas Aehnliches, als Lehrsatz 17 für das Dreyeck aussagt.]

[LEHRSATZ 19.]

Fig. 44. *In jedem Trapez ABCD übertrifft die Summe der Quadrate aller Seiten, die beyden Quadrate der Diagonalen AC, BD zusammen genommen; und zwar um ein Quadrat, welches man erhält, wenn man über zwey aneinander liegende Seiten des Trapezes ein Parallelogramm ABCE errichtet, den Abstand der beyden Eckpunkte D des Trapezes und E des Parallelogramms, die beyden nicht gemein sind, nimmt, und über diesen Abstand DE als Seite, ein Quadrat beschreibt. Oder es ist* $AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$.

Ein Parallelogramm, weches man über zwey an einander liegende Seiten eines Trapezes, z. B. über AB, BC beschreibt, hat mit dem Trapez die drey Eckpunkte A, B, C und die Diagonale AC gemein, hingegen ist der vierte Eckpunkt, D, E, und daher auch die zweyte Diagonale BD, BE in beyden verschieden, weil sonst das erstere Viereck, gegen die Voraussetzung, ein Parallelogramm seyn würde.

Ziehe vom Winkelpunkte C eine Parallellinie mit der gegenüberstehenden Seite DA des Trapezes, und von B aus eine Parallellinie mit DE, so durchschneiden sich diese Parallellinien in einem Punkte F so, dass sich die

Dreyecke CFB, ADE decken. Denn die Linien AE, BC*, und die Winkel an den Punkten C, A so wie an B, E sind einander gleich*. Folglich ist auch CF = AD und BF = DE. Zieht man also noch die Linien FA, FE, so entstehn zwey Parallelogramme ADCF und BDEF*, von deren Seiten und Diagonalen folglich der so eben bewiesene Satz* gilt. Es ist also im Parallelogramm ADCF

* I.
* I. 34.
* I. 35.
* 18.

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 = AC^2 + DF^2.$$

Eben so ist im Parallelogramm BDEF

$$2 . BD^2 + 2 . DE^2 = BE^2 + DF^2.$$

Zieht man folglich Gleiches von Gleichem ab, so erhält man

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 - 2 BD^2 - 2 . DE^2 = AC^2 - BE^2.$$

Und wenn man beyderseits wieder hinzufügt $2 . BD^2 + 2 . DE^2$,

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 = 2 . BD^2 + 2 . DE^2 + AC^2 - BE^2$$

Nun ist endlich auch im Parallelogramm ABCE

$$2 . AB^2 + 2 . BC^2 = AC^2 + BE^2.$$

Verbindet man wieder diese Gleichung mit der vorigen, so wird

$$2 . AB^2 + 2 . AD^2 + 2 . BC^2 + 2 . CD^2 = 2 . AC^2 + 2 . BD^2 + 2 DE^2;$$ mithin auch, wenn man von beyden gleichen Grössen die Hälfte nimmt,

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2.$$

Folgerung 1. Also ist kein Viereck möglich, worin die beyden Quadrate der Diagonalen *grösser* als die Quadrate aus allen Seiten zusammengenommen wären. Weicht ein Trapez vom Parallelogramm mehr ab, wird folglich DE grösser, so wird auch die Summe aus den Quadraten der Diagonale, gegen die Summe aus den Quadraten aller Seiten immer kleiner.

Folgerung 2. Halbirt man beyde Diagonalen des Trapezes in den Punkten P, Q, so wird durch den Punkt P zugleich die Diagonale AC des Parallelogramms ABCE, welche diesem mit dem Trapez gemein
*I. 37. ist, mithin auch die andre Diagonale BE halbirt *. Zieht man daher PQ, so theilt diese Linie sowohl BD als BE in zwey gleiche Theile, daher auch PQ die Hälfte von
* 7. DE, und mit dieser Linie parallel ist *. Ist aber DE $= 2 \cdot PQ$, so wird $DE^2 = 4 \cdot PQ^2$. Setzt man diese Grösse statt der erstern, so ist also auch in jedem Viereck

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot PQ^2.$$

Anmerkung. Diesen Lehrsatz entlehne ich von *Euler*, der ihn zuerst gefunden, und auf die hier mitgetheilte Art bewiesen hat, in seinen *Variis Demonstrationibus Geometricis*, in den *Novis Comm. Acad. Imp. Petrop. T. I. p. 409. seq.*

d. U.

[LEHRSATZ 20 †.]

Fig. 45. *Wenn man aus einem der Winkelpunkte eines Dreyecks ABC, z. B. aus A, nach irgend einem*

†) Wer mit den bisherigen Sätzen noch nicht ganz im Deutlichen ist, und sich noch nicht stark genug fühlt, um sich in das Feinere der Geometrie zu vertiefen, überschlage fürs erste diesen Lehrsatz sammt allen seinen Folgerungen und Zusätzen, und wende sich sogleich zu Lehrsatz 21, wo