UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 20.] Wenn man aus einem der Winkelpunkte eines Dreyecks ABC, z.B. aus A, nach irgend einem Punkte G in der gegenüberstehenden Seite BC, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie AG ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Visual Library

ab, wird folglich DE grösser, so wird auch die Summe aus den Quadraten der Diagonale, gegen die Summe aus den Quadraten aller Seiten immer kleiner.

Folgerung 2. Halbirt man beyde Diagonalen des Trapezes in den Punkten P, Q, so wird durch den Punkt P zugleich die Diagonale AC des Parallelogramms ABCE, welche diesem mit dem Trapez gemein
*I. 37. ist, mithin auch die andre Diagonale BE halbirt *. Zieht man daher PQ, so theilt diese Linie sowohl BD als BE in zwey gleiche Theile, daher auch PQ die Hälfte von
* 7. DE, und mit dieser Linie parallel ist *. Ist aber DE $= 2 \cdot PQ$, so wird $DE^2 = 4 \cdot PQ^2$. Setzt man diese Grösse statt der erstern, so ist also auch in jedem Viereck

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot PQ^2.$$

Anmerkung. Diesen Lehrsatz entlehne ich von *Euler*, der ihn zuerst gefunden, und auf die hier mitgetheilte Art bewiesen hat, in seinen *Variis Demonstrationibus Geometricis*, in den *Novis Comm. Acad. Imp. Petrop. T. I. p. 409. seq.*

d. U.

[LEHRSATZ 20 †.]

Fig. 45. *Wenn man aus einem der Winkelpunkte eines Dreyecks ABC, z. B. aus A, nach irgend einem*

†) Wer mit den bisherigen Sätzen noch nicht ganz im Deutlichen ist, und sich noch nicht stark genug fühlt, um sich in das Feinere der Geometrie zu vertiefen, überschlage fürs erste diesen Lehrsatz sammt allen seinen Folgerungen und Zusätzen, und wende sich sogleich zu Lehrsatz 21, wo

Punkte G in der gegenüberstehenden Seite BC, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie AG zieht, so ist allemal

$$\alpha)\ BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} \pm \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$$

oder, was auf eins hinauskömmt,

$$\beta)\ AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

$$= BG^2 \pm CG^2 \times \frac{BG}{CG} \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

oder $\gamma)\ AB^2 \times CG \pm AC^2 \times BG$

$$= BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG \pm AG^2 \times BC$$

oder, wenn GE irgend eine beliebige Linie ist,

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} = BG^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CG^2 \times \frac{BG}{GE}$$

$$\pm AG^2 \times \frac{BC}{GE} = \frac{BG}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2)$$

oder endlich

$$\delta)\ AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2$$

wo, je nachdem der Punkt G in der Seite BC selbst, oder in deren Verlängerung liegt, die obern oder die untern Zeichen gelten, und zugleich angenommen wird, dass im zweyten Fall Bg > Cg ist.

er ohne Anstos fortfahren kann. Der gegenwärtige Lehrsatz, und die hinzugefügten Sätze, enthalten vom zweyten Buche der *ebnen Oerter des Apollonius*, so viel als es nur immer der Zweck dieses Werks erlaubte, auf eine, wie mir scheint, leichtere Art als von andern vorgetragen, und wird hinreichen einen deutlichen Begriff von jenem interes-

Fig. 48. *Steht AG* 1) *auf der Grundlinie BC selbst*, *oder* 2) *auf deren Verlängerung senkrecht*, so bildet diese Linie mit den Schenkeln des Dreyecks zwey rechtwinklige Dreyecke, worin $BG^2 = AB^2 - AG^2$ und $CG^2 = AC^2 - AG^2$, mithin auch $BG = \frac{AB^2 - AG^2}{BG}$ und $CG^2 = \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$ ist. Nun ist im ersten Fall die Grundlinien $BC = BG + CG$, im zweyten Fall $BC = BG - CG$, vorausgesetzt dass $BG > CG$ ist. Daraus folgt für diesen Fall die Aussage α, und mithin die Wahrheit der andern Aussagen, die, wie wir gleich sehn werden, unmittelbar aus ihr abgeleitet sind.

Fig. 45. *Steht* dagegen AG *schief auf*, und zwar 1) *auf der Grundlinie BC selbst*, so dass AGB ein spitzer, AGC aber ein stumpfer Winkel ist, so theilt diese Linie das gegebne Dreyeck in zwey kleinere Dreyecke, ein spitzwinkliges AGB, und ein stumpfwinkliges AGC, denen die Spitze A und das Perpendikel AD auf die gegenüberstehende Seite gemein ist, und in denen beyden das Perpendikel, von dieser Seite oder deren Verlängerung, ein gleiches Stück GD abschneidet. Die Grösse dieses Abschnitts wird in jedem Dreyeck durch
13.f.3. die Grösse der drey Seiten bestimmt *, und zwar ist

samen Theile der Geometrie zu geben, und eine Menge netter und allgemeiner Sätze, besonders über den Kreis, dem Leser, der die kleine Mühe des Durchstudirens nicht scheut, bekannt zu machen.

Gilbert.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

in dem bey G spitzwinkligen Dreyeck AGB, GD $= \frac{BG^2 + AG^2 - AB_2}{2\ BG}$, hingegen in dem bey G stumpfwinkligen Dreyeck ACC, GD $= \frac{AC^2 - CG^2 - AG^2}{2\ CG}$; Ausdrücke, die wir ihrem geometrischen und ihrem arithmetischen Sinne nach, am angeführten Orte erklärt haben. Folglich sind, da für beyde Dreyecke der Abschnitt GD derselbe ist, diese Ausdrücke gleich; mithin auch ihr Zweyfaches, und da überdem $\frac{BG^2}{BG} = BG$ und $\frac{CG^2}{CG} = CG$ ist, $BG + \frac{AG^2 - AB^2}{BG}$ $= \frac{AC^2 - AG^2}{CG} - CG$. Fügt man beyderseits CG und $\frac{AB^2 - AG^2}{BG}$ hinzu, so bleiben auch diese Grösen gleich, und folglich ist

$$BG + CG \text{ d. h. } BC = \frac{AB^2 - BG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG},$$

welches in der Aussage α, der erste Fall ist. Und da hier AB, AC und BG, CG völlig auf einerley Art vorkommen, so hat es auf den Ausdruck von BC weiter keinen Einfluss, welcher von den beyden Schenkeln AB, oder ob AC dem stumpfen Winkel bey G gegenübersteht. Dieser Ausdruck gilt daher unbedingt *für jeden Punkt G in der Grundlinie* (selbst dann, wenn G mit B oder C zusammenfällt).

Steht 2) *Ag auf der Verlängerung der Grundlinie schief auf*, und zwar *zuerst auf der Verlängerung derselben* *über C hinaus, so dass $Bg > Cg$ ist*, so unterscheidet sich dieser Fall von dem vorigen darin, dass nun die Schenkel AB, AC entweder beyde dem spitzen, oder beyde dem stumpfen Winkel bey g gegenüberstehn. Ist das *erstere* der Fall, und die Dreyecke AgB, AgC sind beyde bey g spitzwinklig, so ist

$$gD = \frac{Bg^2 + Ag^2 - AB^2}{2\,Bg} \text{ und zugleich}$$

$$gD = \frac{Cg^2 + Ag^2 - AC^2}{2\,Cg}, \text{ mithin } Bg + \frac{Ag^2 - AB^2}{Bg}$$

$$= Cg + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}.$$ Ist hingegen das *zweyte* der

Fig. 47. Fall, und stehn beyde Schenkel AB, AC dem stumpfen Winkel bey g gegenüber, so ist in diesen stumpfwinkligen Dreyecken $gD = \frac{AB^2 - Bg^2 - Ag^2}{2\,Bg}$ und zugleich $gD = \frac{AC^2 - Cg^2 - Ag^2}{2\,Cg}$, folglich $\frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$

$$- Bg = \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg} - Cg.$$ In beyden Fällen ist der Voraussetzung gemäss $Bg - Cg = BC$. Zieht man daher im erstern Fall beyderseits Cg ab, und fügt zugleich $\frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$ beyderseits hinzu, und verfährt dagegen im zweyten Fall grade umgekehrt, so erhält man *in beyden Fällen gleichmässig*

a) $Bg - Cg$ d. h. $BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}$

oder, da es einerley ist, ob man den Unterschied

Ag²

$Ag^2 - AC^2$ hinzufügt, oder umgekehrt den Unterschied $AC^2 - Ag^2$ abzieht,

b) $Bg - Cg$ d. h. $BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} - \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg}$

welches oben in der Ausſage α der zweyte Fall iſt, bey welchem es alſo wiederum nicht weiter auf die Beſchaffenheit des Winkels bey g ankömmt, wenn nur g ein Punkt in der Verlängerung der Grundlinie über C hinaus iſt.

Liegt dagegen g in der entgegengeſetzten Verlängerung, und ſteht, Ag nicht wie wir hierbey vorausſetzten, auf der Verlängerung der Grundlinie über den Punkt C, ſondern *auf der entgegengeſetzt liegenden Verlängerung über den Punkt B hinaus auf*; ſo iſt $Bg < Cg$, und folglich $Cg - Bg = BC$, daher wir unter dieſen Umſtänden nicht den Werth $Bg - Cg$, ſondern den umgekehrten, $Cg - Bg$, hätten herleiten müſſen, für welchen ſich Fig. 46.

$BC = \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg} - \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$, alſo BC ebenfalls als

der Unterſchied der beyden Theile in b) findet nur daſs in jenem Fall der erſtere, in dieſem der letztere dieſer Theile gröſser iſt. Will man daher die Form in b) auch auf dieſen Fall übertragen, ſo giebt ſie in ihm für BC einen ſubtractiven Zahlwerth, oder etwas *Negatives* *, welches alſo allemal ein Zeichen iſt, daſs * 13.a 1.
die Linie Ag eine entgegengeſetzte Lage hat; als die, für welche die Formel unmittelbar gebildet iſt, und welche wir im Lehrſatz ausdrücklich bemerkt haben; d. h. daſs ſie ſo aufſteht, daſs nicht, wie die Formel vorausſetzt, $Bg > Cg$, ſondern umgekehrt $Bg < Cg$

iſt. *Unter dieſer Bedingung* gilt auch die Formel *b* allgemein für jeden beliebigen Punkt g in der Verlängerung der Grundlinie. (Durch die Vorſtellung des Negativen läſst ſich dieſe Formel ſelbſt mit unter die Ausſage für den erſten Fall ziehn, wenn der Punkt G in der Grundlinie liegt, indem beyde Fälle ſich lediglich durch das Entgegengeſetzte in der Lage des Abſchnitts CG unterſcheiden, und daher die erſtere, wenn man in ihr CG negativ ſetzt, in die zweyte übergeht. Doch haben wir es nicht nöthig uns hier bis zu dieſer gänzlichen Verallgemeinerung zu erheben.)

Die Ausſage unter α läſst ſich noch *auf eine andre Art ſehr leicht beweiſen*, die ich hier wenigſtens andeuten will. Man fälle im gegebnen Dreyeck ABC auf die Grundlinie das Perpendikel AD, und es ſey D ſowohl als G ein Punkt in der Grundlinie ſelbſt, ſo iſt die Grundlinie BC = BD + GD + CD — GD. Nun iſt das Rechteck aus der Summe und dem Unterſchiede zweyer Linien, dem Unterſchiede ihrer Qua-

* 11. drate gleich *, folglich $BD + GD = \frac{BD^2 - GD^2}{BD - GD}$ und

$CD - GD = \frac{CD^2 - GD^2}{CD + GD}$, und da überdem im Drey-

* 16. 1. eck ABG, $BD^2 - GD^2 = AB^2 - AG^2$ *, und im Dreyeck AGC, $CD^2 - GD^2 = AC^2 - AG^2$ iſt, ſo muſs in dieſem Fall $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$ ſeyn, welches der erſte Fall in der Ausſage α iſt. Eben ſo leicht laſſen ſich die übrigen Fälle, je nachdem G und D verſchieden liegen, auf dieſe Art herleiten.

Aus diesen Sätzen dass für Punkte G *in der Grundlinie*, $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$, hingegen für Punkte g *in ihrer Verlängerung*, $BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}$ ist, (wobey $Bg > Cg$ angenommen wird,) lassen sich *die übrigen Aussagen des Lehrsatzes folgendermassen* herleiten. Man füge zu den gleichen Grössen im ersten Fall beyderseits $\frac{AG^2}{BG} + \frac{AG^2}{CG}$, und im zweyten Fall $\frac{Ag^2}{Bg} - \frac{Ag^2}{Cg}$ hinzu, d. i. Linien, deren Zahlausdruck auf gleiche Benennungen, nach den Regeln der Bruchrechnung, gebracht, im ersten Fall $\frac{AG^2 \times (CG + BG)}{BG \times CG}$, das ist $\frac{AG^2 \times BC}{BG \times CG}$, im zweyten Fall $\frac{Ag^2 \times (Cg - BG)}{Bg \times Cg}$ das ist $- \frac{AG^2 \times BC}{Bg \times Cg}$ ist (da unsrer Voraussetzung gemäss $Bg > Cg$ ist); so verwandeln sich durch diese Hinzusetzung jene Aussagen für beyde Fälle in folgende: $BC \pm \frac{AG^2 \times BC}{BG \times CG} = \frac{AB^2}{BG} \pm \frac{AC^2}{CG}$, wo die *oberen Zeichen* für den erstern Fall gelten, wenn G in der Grundlinie BC selbst liegt, die *unteren Zeichen* für den zweyten Fall, wenn g in der Verlängerung der Grundlinie liegt, (wobey zugleich $Bg > Cg$ angenommen wird). *Und das ist ein für allemal, auch bey allen folgenden Ausdrücken zu merken.*

Ferner ſind auch die Producte dieſer Zahlausdrücke in den Zahlwerth der Linie BG gleich, oder

$$AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm AG^2 \times \frac{BC}{BG}$$

und hier läſst ſich wieder ſtatt $BC \times BG$ ſetzen $(BG \pm CG) \times BG$ oder, $BG^2 \pm CG^2 \times \frac{BG}{CG}$, welches die Formen des Satzes unter β ſind.

Nimmt man aufs neue die Produkte dieſer Ausdrücke in den Zahlausdruck von CG, ſo erhält man die erſte Form unter γ,

$$AB^2 \times CG \pm AC^2 \times BG$$
$$= BG^2 \times CG \pm CG_2 \times BG \pm AG^2 \times BC$$

und dieſe Gleichheit bleibt, wenn man alle Glieder, zum Behuf der geometriſchen Auslegung derſelben, durch den Zahlausdruck irgend einer willkührlichen Linie GE dividirt, wie in der zweyten Form unter γ. — Da endlich die beyden Theile $BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG$ ſich in das Produkt $BG \times CG \times (BG \pm CG)$, das iſt $BG \times CG \times BC$ zuſammen ziehn laſſen, ſo iſt auch, wie die dritte Formel unter γ ausſagt

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC_2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2)$$

und dieſe Gleichheit bleibt wiederum, wenn man alle Glieder durch den Zahlausdruck $\frac{BC}{GE}$ dividirt, da denn, wie δ ausſagt, iſt

$$AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2$$

Auslegung. *Die geometriſchen Sätze*, welche dieſen verſchiednen Formen, wenn man die Zeichen in ihrem geometriſchen Sinne nimmt *, entſprechen, *4. Z. 2. lauten folgendermaſsen.

α) *Wenn man von der Spitze A eines Dreyecks ABC nach der gegenüberſtehenden Grundlinie BC, oder nach deren Verlängerung eine grade Linie AG zieht, und den Unterſchied der Quadrate über AB und AG in ein Rechteck, welches über der Grundlinie BG ſteht *, und eben ſo den* *Auf 4. *Unterſchied der Quadrate über AC und AG in ein Rechteck über CG verwandelt; ſo iſt die Grundlinie BC des gegebnen Dreyecks, gleich den Höhen dieſer beyden Rechtecke zuſammen genommen oder von einander abgezogen*, je nachdem G in der Grundlinie ſelbſt, oder in deren Verlängerung über C, oder über B hinaus liegt, und je nachdem AG gröſser oder kleiner als AB oder als AC iſt; welches denn jedesmal durch die Formel α dieſen Umſtänden gemäſs beſtimmt wird. Dieſe Formel ſchlieſst daher in der That ſo viel verſchiedne Sätze, als Unterfälle des Hauptſatzes, in ſich, als hierin Modificationen möglich ſind; und ſie alle müſste der Geometer einzeln aufführen, der (wie wohl vor Zeiten geſchah) die Vortheile unſrer Bezeichnung verſchmähte.

Bey der Auslegung der andern Formen, muſs man bemerken, daſs ein Ausdruck wie dieſer, $AC^2 \times \frac{BG}{CG}$ (den wir der Kürze wegen mit *a* bezeichnen wollen) in ſeinem geometriſchen Sinne genommen *, *einen* *4. Z. 2. *Flächenraum* bedeutet, *welcher vom Quadrate über AC*

ein bestimmter Theil $\frac{BG}{CG}$, d. h. der nemliche Theil, als BG von CG ist; oder was auf eins heraus kömmt, *einen Raum dessen Verhältniss zum Quadrate über AB bestimmt*, nemlich BG : CG, *ist*; oder *einen Raum, zu dem* AB^2 *sich wie CG : BG verhält* (denn dieser Ausdruck lässt sich stets als vierte Proportionalgrösse zu folgenden drey
*V. 2. α CG : BG = AB^2 : *a* betrachten *;) oder endlich *eine*
* (f. 3.) *der Gattung nach gegebne und über AC beschriebne Figur**, *deren Verhältniss zum Quadrate über AC eben deshalb gegeben*, nemlich BG : CG, *ist*. Je nachdem man in unsern Formen β, γ, δ, eine dieser Bedeutungen für solche Ausdrücke setzt, verwandelt sich eine jede in mannigfaltig ausgedrückte geometrische Sätze, an deren Ausdruck man sich jedoch nicht stossen wird, wenn man das hier bemerkte fest hält. — 2) Muss man sich dabey aus der Lehre von den Verhältnissen des Satzes erinnern, worauf unter andern in der Arithmetik die Gesellschaftsrechnung beruht, dass, nemlich, wenn eine Grösse A aus mehreren Theilen α, β, γ, besteht, und entweder diese Grösse A selbst, oder einer ihrer Theile α bekannt, und überdem das Verhältniss dieser Theile untereinander (m : n : p) oder zum Ganzen gegeben wird, *dadurch zugleich die Grösse aller Theile einzeln bestimmt ist*, weil wir nemlich dann auch das Verhältniss des Ganzen zu jedem der Theile (m + n + p : m, und : n, und : p) kennen. Ist also z. B. die Linie BC und das Verhältniss BG : CG gegeben, so ist auch die Grösse der Linien BG, CG bekannt, und mithin auch das Rechteck BG × CG, wel-

ches alſo in dieſem Fall auch ein gegebner Raum iſt. — Dieſes vorausgeſetzt, laſſen ſich alſo z. B. die andern Formen folgendermaſsen überſetzen:

β) Fall 1: „*Zieht man nach einem Punkt G in der Grundlinie BC eine grade Linie AG, ſo iſt die Summe des Quadrats über AB, und eines Raums zu welchem das Quadrat über AC ein gegebnes Verhältniſs (CG : BG) hat,* gleich *der Summe des Rechtecks BC × BG und eines Raums zu welchem das Quadrat über AG ein gegebnes Verhältniſs (CG : BC) hat.* — Oder: „Zieht man von zwey gegebnen Punkten B, C aus zwey grade Linien, welche ſich ſo in einem Punkte A durchſchneiden, daſs das Quadrat über AB und ein Raum, deſſen Verhältniſs zum Quadrat über AC gegeben iſt, zuſammengenommen einem gegebnen Flächenraum gleich ſind, ſo iſt auch die Summe eines gegebnen Raums (BC × BG) und eines Raums, deſſen Verhältniſs zu AG^2 gegeben iſt $(AG^2 \times \frac{BC}{BG})$ bekannt.

γ) Fall 1: „Unter denſelben Umſtänden iſt die Summe einer Figur gegebner Gattung über AB $(AB^2 \times \frac{CG}{GE})$ und einer Figur gegebner Gattung über AC $(AC^2 \times \frac{BG}{GE})$, *gleich* der Summe eines gegebnen Raums $(BG^2 \times \frac{CG}{GE} + CG^2 \times \frac{BG}{GE})$ und einer über AG beſchriebnen Figur gegebner Gattung $(AG^2 \times \frac{BC}{GE})$ u. ſ. f.;

Auslegungen die Folgerung 1 noch verdeutlichen wird.

Anmerkung. Mein Beweis dieser weitreichenden, für geometrische Untersuchungen ausserordentlich brauchbaren Satze, von welchen Lehrsatz 17, und eine Menge anderer bekannter Theoreme blos einzelne Fälle aussagen, tritt zwar aus dem eigentlich Constructiven hinaus, und in die arithmetischen Vorstellungen der rechnenden Geometrie über; allein bey geometrischen Sätzen von dieser Art, welche eine so grosse Menge verschieden modificirter Fälle in sich fassen, möchte das eher ein Vorzug als ein Mangel seyn. Ueberdem wäre es nicht schwierig gewesen den zweyten Beweis der Formel α, und die Herleitung der übrigen Formeln aus dieser, ganz in ein geometrisches Gewand zu kleiden, welches aber durch die Beschreibung der geometrischen Constructionen, welche der Division und Multiplication, so wie der geometrischen Begriffe, die den Producten u. s. f. entsprechen, zu weitschweifig geworden wäre. Solche ganz geometrische Beweise für den ersten Fall der Formen β und γ (wenn G in der Grundlinie liegt,) giebt *Robert Simson* in seiner *Wiederherstellung von Apollonius ebnen Oertern Buch II Lemma 10*, und *Anhang Lemma 3*, und diese Beweise, welche doch nur Einen Fall betreffen, sind beynahe eben so weitläufig, als mein Beweis für alle Formen in ihrer Allgemeinheit. Einen andern Beweis für die Form β giebt, wie Simson anführt, *Matthias Steward* in seinem Buche *de quibusdam Theorematibus generalibus etc. Edinb.* 1746, und zeigt den Gebrauch derselben beym Beweise mehrerer Theoreme. Die Hauptsätze im zweyten Buche von Apollonius ebnen Oertern (und sie gehören zu den nettesten und allgemeinsten, aber auch zu den schwierigsten in der Geometrie,) gründen sich am Ende auf unserm Hauptsatz, und können durch eine ähnliche Behandlung erleichtert werden.

Die Formen unter α und δ finde ich bey *Simson* nicht. Die beyden andern eignet sich Simson (S. 351) als seine Er-

findung zu, beweiſt ſie aber mittelſt eines Lehnſatzes über dreytheilige Linien, deſſen nach *Pappus* Bericht, ſchon Apollonius ſich in ſeinem Werke bedient hat, und aus dem ſie nicht ſchwer abzuleiten waren, wie denn *dieſer Lehnſatz* rückwärts unmittelbar aus unſerm Hauptſatze ſich ohne die geringſte Schwierigkeit ableiten läſst. *Werden nemlich in einer graden Linie vier* Fig. 49.
Punkte B, C, D, G willkührlich angenommen, und man errichtet über D ein Perpendikel, und zieht aus irgend einem Punkte A des Perpendikels, nach den übrigen Punkten B, C, G grade Linien, ſo entſteht ein Dreyeck ABC, worin aus der Spitze nach einem Punkte G in der Grundlinie, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie gezogen iſt. Für dieſe Dreyecke iſt nach unſrer Form α unter den oben angegebnen Vorausſetzungen $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} \pm \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$; und da zugleich das Perpendikel AD die Grundlinie ſo zerſchneidet, daſs $AB^2 - AG^2 = BD^2 - DG^2$ und $AC^2 - AG^2 = CD^2 - DG^2$ iſt *, * 16. 1.

$$\alpha)\ BC = \frac{BD^2 - DG^2}{BG} \pm \frac{CD^2 - DG^2}{CG}.$$

Dieſe Formel ſtimmt in ihrer ganzen Zuſammenſetzung mit der vorigen überein, und iſt an denſelben Vorausſetzungen gebunden, daher ſich aus ihr, grade auf dieſelbe Art, wie es in unſerm Lehrſatz geſchehn iſt, *drey* andre *Formen für jede dreytheilige Linie BC herleiten* laſſen, in welchen die obern oder die untern Zeichen zu nehmen ſind, je nachdem G in oder auſserhalb BC liegt, auch im letztern Fall, $Bg > Cg$ geſetzt iſt, die Verſchiedenheit in der Lage von D aber nichts ändert:

$$\beta)\ BD^2 \pm CD^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm DG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

(In dieſer Form kömmt der Satz bey *Pappus* Buch 7. Satz 125, und als 7tes Lemma zum zweyten Buche von *Apollonius* ebnen Oertern, doch nur, wenn G ein Punkt in der Grundlinie iſt, vor.

Beschreibt man über BC einen Halbkreis, und errichtet auf C und G Perpendikel, so läſst sich der Satz leicht unmittelbar mittelst
*12.f.2. unsrer Folgerungen zum Pythagoreischen Lehrsatze * beweisen.) Ist die Grundlinie BC, der Punkt D und das Verhältniſs des Flächenraums $CD^2 \times \frac{BG}{CG}$ zum Quadrat über CD, mithin CG : BG gegeben, so ist es auch der Punkt G, und mithin auch
*(Al. 2.) $BC \times BG \pm DG^2 \times \frac{BC}{CG}$ gegeben * (Apollonius II Lemma 8, bey Pappus Buch 7. Satz 126.)

$$\gamma)\ BD^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CD^2 \times \frac{BG}{GE}$$
$$= BG^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CG^2 \times \frac{BG}{GE} \pm DG^2 \times \frac{BC}{GE}$$

(Diese Form beweist *Simson* als Lehnsatz 1 im Anhange.) Sind hier wiederum BC, der Punkt D, und die Verhältnisse GE : CG und GE : BG gegeben, so sind auch der Punkt G und die gleichen Flächenräume bestimmt. (Anhang Lemma 2). Wenn überhaupt auf einer graden Linie mehrere Punkte B, G, H, C etc. gegeben sind, so ist allemal auch ein Punkt D gegeben, der auf dieser Linie so liegt, daſs der Inhalt von Figuren gegebner Gattung, die über DB, DC, DG etc. beschrieben sind, einen gegebnen Inhalt haben. (Anh. Lemma 4.)

Folgerung 1. *Figuren, welche der Gattung nach gegeben sind*, und *Figuren, welche unter einander ähnlich sind*, bedeutet nach dem geometrischen Sprachgebrauch dasselbe. Mit diesen Figuren werden wir uns im nächsten Buche beschäftigen, und ich verspare es bis dorthin, diesen Begriff genauer auseinander zu setzen. Hier kömmt es nur auf die Eigenschaft ähnlicher Figuren an, daſs ihr Inhalt sich zum Inhalte des Quadrats über eine ihrer homologen Seiten, in allen auf einerley Art verhält, und dafs folglich, *fo wie eine Figur, welche über eine Linie AC befchrieben ift, der Gattung nach gegeben wird, das Verhältnifs diefer Figur zum Quadrate über AB völlig beftimmt, unveränderlich und bekannt ift; ein Lehnfatz* aus dem folgenden Buche, den wir dort ftreng beweifen werden. Mittelft diefes Satzes laffen fich unmittelbar aus der Auslegung unfers Hauptfatzes in feinen verfchiedenen Formen, folgende intereffante *Sätze* über das Dreyeck und den Kreis folgern:

A) *Für alle Dreyecke, welche über derfelben Grund-* Fig. 50
linie BC ftehn, und in welchen entweder die Summe oder der Unterfchied des Quadrats über den einen Schenkel AB, und einer über den andern Schenkel AC befchriebnen Figur (a) von gegebner Gattung, einem gegebnen Flächenraum F gleich ift $(AB^2 \pm AC^2 \times \frac{m}{q} = F)$; *ift der geometrifche Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse.*

Denn ift die Gattung der über AC befchriebnen Figur *a* gegeben, fo ift auch, unferm Lehnfatz zu Folge, ihr Verhältnifs zum Quadrat über AC gegeben, und zwar ift diefes Verhältnifs, welches m : q feyn mag, für alle folche Figuren einerley und unveränderlich. *Nimmt man* daher im Fall der *Summe auf der* gegebnen *Grundlinie* BC felbft, hingegen im Fall des *Unterfchieds auf der Verlängerung* der Grundlinie *einen Punkt G fo, dafs fich verhält BG : CG = m : q*; fo ift *erftens* $\frac{BG}{CG} = \frac{m}{q}$, folglich, unsern Voraussetzungen gemäss, $F = AB^2$ $\pm AC^2 \times \frac{BG}{CG}$, das ist, der Form β gemäss, $= BC \times CG$ $\pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$, und mithin

$$AG^2 \times \frac{BC}{CG} \begin{cases} = F - BC \times CG \text{ im Fall der Summe} \\ = BC \times Cg - F \text{ im Fall des Untersch.} \end{cases}$$

Zweytens sind dann, weil BC gegeben ist, auch die beyden Linien BG, CG, so wie *der Punkt G*, das Recht-
*(Al. 2.) eck $BC \times CG$ und der Exponent $\frac{BC}{CG}$ gegeben *; und daher ist dann in beyden Fällen *eine Figur gegebner Gattung, welche über AG beschrieben wird*, (nemlich $a = AG^2 \times \frac{BC}{CG}$,) *auch der Grösse nach gegeben*, indem sie dem Unterschiede gegebner Flächenräume (F und $BC \times CG$) gleich ist. Zu dieser Figur steht das *Quadrat über AG*, weil sie der Gattung nach gegeben ist, in einem gegebnen Verhältnisse ($CG : BC$ oder $q : m \pm q$) daher auch das Quadrat über AG, und mithin *AG selbst*, der Grösse nach gegeben und unveränderlich ist. Da nun zugleich der eine Endpunkt G dieser Linie gegeben und unveränderlich ist; so muss der *geometrische Ort des zweyten Endpunkts A* eine *Kreislinie* seyn, welche um G als Mittelpunkt, mit AG als Halbmesser beschrie-
*II. E. 1. ben wird *. Und zwar findet man diesen Halbmesser durch Construction, wenn man, nach den Methoden in den Aufgaben zu diesem Buche, den Unterschied des gegebnen Raums F und des Rechtecks $BC \times CG$ in ein Quadrat verwandelt, und darauf ein Quadrat

bildet, zu welchem ſich das gefundene wie BC : CG verhält *. Die Seite dieſes Quadrats iſt der Halbmeſ- *12. f. 2 g ſer AG.

Apollonius ebne Oerter II. 5. Fall 1 Ausſage 2, auch *II. 3. A*; doch fehlt an beyden Stellen der Fall, wenn der Unterſchied gegeben iſt. --- Aus der Beſtimmung des Punktes G und der Linie AG, ſieht man, daſs für den Fall der Summe der *Mittelpunkt* G in der Grundlinie, für den Fall des Unterſchieds allemal auf ihrer Verlängerung liegt, und daſs im erſten Fall der gegebne Raum F nothwendig gröſser, im zweyten kleiner als das Rechteck BC × CG ſeyn muſs. Sonſt würde AG negativ, und der erſte Fall gienge in den zweyten, und umgekehrt über.

B) *Auch für alle Dreyecke, welche über derſelben Grundlinie BC ſtehn, und in welchen, entweder die Summe, oder der Unterſchied einer Figur gegebner Gattung (a), welche über den einen Schenkel AB, und einer andern Figur gegebner Gattung (b), welche über den andern Schenkel AC ſteht, einem gegebnen Flächenraum F gleich iſt* ($a \pm b = F$); *muſs der geometriſche Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse ſeyn.*

Denn da *a* und *b* der Gattung nach gegeben ſind, ſo iſt das Verhältniſs der erſtern Figur zum Quadrat über AB, welches m : q ſeyn mag, und das Verhältniſs der letztern zum Quadrat über AC, welches n : q ſeyn mag, mithin auch das Verhältniſs m : n gegeben, und dieſes iſt das Verhältniſs, worin die beyden der Gattung nach gegebnen Figuren, wenn man ſie über dieſelbe willkührliche Linie beſchreibt, zu einander ſtehn. *Nimmt man* im Fall der *Summe in der Grundlinie*, im Fall des *Unterſchieds auf ihrer Verlängerung einen Punkt*

G, und zugleich eine grade Linie GE, *so dass sich verhält*, $BG : CG : GE = m : n : q$, so sind, da BC gegeben ist, diese Linien, folglich auch das Rechteck $BG \times CG = R$ gegeben. Da nun nach γ,

$a = AB^2 \times \frac{CG}{GE}$ und $b = AC^2 \times \frac{BG}{GE}$ ist, $a \pm b$ das ist

$F = \frac{BC}{GE} \times (R \pm AG^2)$ seyn muss; so ist, falls a und b Figuren gegebner Gattung, folglich $\frac{m}{q}$, $\frac{n}{q}$ gegeben sind, und der Raum $F = a \pm b$ gegeben wird, auch eine Figur gegebner Gattung über AG gegeben, und zwar ist

$AG^2 \times \frac{m+n}{q} = F - \frac{m+n}{q} \times R$ im Fall der Summe

$AG^2 \times \frac{m-n}{q} = R \times \frac{m-n}{q} - F$ im Fall des Untersch.

In beyden Fällen ist also, auch unter dieser Voraussetzung, nicht nur der Punkt G, sondern auch das Quadrat über AG, und also auch AG selbst, als Seite dieses Quadrats, gegeben und unveränderlich, daher eine um den Mittelpunkt G, mit AG als Halbmesser beschriebene *Kreislinie* der *geometrische Ort der Spitze A* seyn muss.

Apollonius II. 5. Fall 1. Aussage 3. Wo doch wiederum der Fall, wenn der Unterschied der Figuren gegeben ist, fehlt. — Aus der Bestimmung von AG fällt übrigens in die Augen, dass hier für den Fall der *Summe* $F > \frac{m+n}{q} \times BG \times CG$ und für den Fall des *Unterschieds* $F < \frac{m-n}{q} \times Bg \times Cg$, folglich ein Raum, der sich zum Raum F im ersten Fall wie die Summe, im zweyten wie der Unterschied der beyden Figuren gegebner Gattung, wenn sie über derselben Linie stehn, zum Quadrat dieser Linie, verhält, im ersten Fall nothwendig grösser, im zweyten nothwendig kleiner als das Rechteck aus den beyden Abschnitten auf der Grundlinie seyn muss; und das ist *die Bestimmung* dieser Aussage.

Für den *zweyten Fall (wenn der Unterschied der Figuren gegebner Gattung a und b gegeben wird)* ist die Aussage unter *B* noch besonders dahin einzuschränken, dass a und b *nicht ähnliche Figuren* seyn dürfen. Denn dann würden sich a und b zu den Quadraten über AB und AC auf gleiche Art verhalten, folglich m und n, mithin auch Bg und Cg gleich seyn müssen; welches unmöglich ist, da in diesem Fall der Punkt g in der Verlängerung der Grundlinie liegt, und für jeden solchen Punkt die Linien Bg und Cg um BC verschieden sind. In der That ist dann auch $a - b = F = AB^2 \times \frac{m}{q} - AC^2 \times \frac{m}{q}$, folglich $AB^2 - AC^2 = F \times \frac{q}{m}$, mithin der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln gegeben und unveränderlich, daher in diesem Fall der Ort des Punktes A keine Kreislinie, sondern nach Lehrsatz 16 Folgerung 3 *eine grade Linie* seyn muss, und zwar ein *Perpendikel auf der Grundlinie BC*, dessen Abstand vom Mittelpunkt der Grundlinie gegeben ist *. *16. f.3.

C) *Auch für alle Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen das Quadrat, oder eine andere der Gattung nach gegebne Figur a über dem einen Schenkel AB, gleich ist, der Summe oder dem Unterschiede eines gegebenen Raumes S und des Quadrats, oder einer andern der Gattung nach gegebner Figur b, über dem zweyten Schenkel AC; muss der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebener Lage und Grösse seyn.*

Denn, ist *erstens* $a = b \pm S$, so ist im Fall *der Summe* $a - b = S$, *im Fall des Unterschieds* $b - a = S$, in beyden Fällen also der Unterschied zweyer der Gattung nach gegebenen Figuren, die über AB und AC beschrieben sind, einem gegebnen Raume S gleich. *Folglich tritt hier der zweyte Fall der Aussage B ein.* Verhalten sich daher die beyden Figuren gegebner Gattung a und b, zu den Quadraten über AB und AC, wie $m : q$ und $n : q$, und man nimmt auf der Verlängerung der Grundlinie BC einen Punkt g, so dass sich verhält $m : n = Bg : Cg$, so ist *eine Kreislinie*, welche um g als Mittelpunkt, und mit der Seite des Quadrats $Ag^2 = Bg \times Cg \times \frac{m - n}{q} - S$ als Halbmesser be-

* (B) schrieben wird, der Ort der Spitze A,*; es sey denn, dass m und n im Verhältniss der Gleichheit stehn, also *a* und *b* ähnliche Figuren sind, indem alsdann der Ort der Spitze A

*16. f. 3. eine grade Linie wird *. — Ist *zweytens* $a = S - b$, mithin $a + b = S$, oder die *Summe* der beyden Figuren a und b einem gegebnen Raume S gleich, so muss, nach *B Fall* 1, der Ort der Spitze A ebenfalls eine Kreislinie seyn, deren Mittelpunkt nun aber in der Grundline BC selbst liegt, und zwar der Punkt G in der Grundlinie ist, für welchen sich verhält, $BG : CG = m : n$, und deren Halbmesser AG nun als Seite eines Quadrats $AG^2 = S - \frac{m + n}{q} \times BG \times CG$, gefunden wird.

Bey dieser Aussage *C*) wird vorausgesetzt, dass a und b Figuren gegebner Gattung sind, und zwar dass

a glein gleich $AB^2 \times \frac{m}{q}$, und zugleich diese Figur $AB^2 \times \frac{m}{q}$ $= b \pm S$, oder umgekehrt $= S - b$ sey; eine Voraussetzung, die mit der auf eins hinausläuft, daſs sich verhalte $b \pm S$ (oder $S - b$) : $AB^2 = m : q$ *, daſs folglich *das Verhältniſs* der Summe oder des Unterschieds der Figur b und eines gegebenen Raums S, zum Quadrat über AB, *gegeben und unveränderlich sey*. Der Satz C) läſst sich daher auch folgendermaſsen ausdrücken: *Für Dreyecke über derselben Grundlinie BC, für die das Verhältniſs der Summe oder des Unterschieds einer der Gattung nach gegebnen Figur, welche über dem einen Schenkel AC steht, und eines gegebnen Raums S, zum Quadrat über dem andern Schenkel AB gegeben ist; ist der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse*, den Fall ausgenommen, wenn beyde Figuren *ähnlich* sind, für welchen dieser Ort eine der Lage nach gegebne *grade Linie* wird.

* V. 3. γ.

Auf diese Art wird der Satz in *Apollonius ebnen Oertern II, 4* vorgetragen, wiewohl er dort weder in seiner Allgemeinheit (nur für den Fall, wenn b ein Quadrat ist) dargethan, noch auf den vorigen Ort B zurückgeführt wird. (Vielmehr stellt ihn Apollonius vor den Ort B, und scheint daher umgekehrt diesen aus unserm Satze C abgeleitet zu haben, sind anders nicht, wie Simson vermuthet, diese Sätze von spätern Abschreibern fälschlich versetzt worden. *Simson* beweist ihn dagegen, Satz 2 und 3 des Anhangs, allgemein, mit Hülfe unsers Lehrsatzes 20.

D) *Ist das Quadrat über dem einen Schenkel AB, einer Figur gegebner Gattung, welche über den andern Schenkel AC beschrieben wird, selbst gleich*, $AB^2 = AC^2 \times \frac{m}{q}$, mithin das Verhältnifs der beyden Quadrate der Schenkel $AB^2 : AC^2 = m : q$, und folglich auch *das Verhältnifs der beyden Schenkel selbst zu einander gegeben und unveränderlich*; fo ift diefe Vorausfetzung zwar *algebraifch* unter der Bedingung unferer Ausfage C enthalten, als der Fall derfelben, da der gegebne Raum $S = 0$ ift, d. h. gar kein folcher Raum gefetzt wird, indem die Arithmetik lehrt, dafs man o mit unter die Reihe aller möglichen Werthe einer Gröfse nicht nur aufnehmen darf, fondern auch aufnehmen mufs. Allein hier ift die Gültigkeit unferer Ausfage für diefen Fall noch befonders darzuthun, und ausdrücklich zu beweifen, dafs auch unter diefen Umftänden der Ort des Durchchnittspunktes A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse fey, wie diefes in Zufatz VI und VII gefchehn foll.

Folgerung 2. *Alle diefe Sätze* find nicht blofs auf die Schenkel von Dreyecken, welche über einer gegebnen Grundlinie BC ftehn eingefchränkt, oder, was daffelbe fagt, gelten nicht blofs von graden Linien, welche von *zwey* gegebnen Punkten B, C aus gezogen, fich fo durchfchneiden, wie die Bedingungen der Sätze *A*), *B*), *C*) ausfagen; fondern fie *gelten auch für grade Linien, welche von* 3, *von* 4, *von* 5 *gegebnen Punkten*, *u. f. f.*, *kurz von jeder beliebigen Zahl gegebner Punkte aus gezogen*, *fich insgefammt in einem Punkte A fo durchfchneiden*, *dafs die Figuren gegebner Gattung*, *welche man über fie befchreibt*, *fie mögen Quadrate feyn oder nicht*,

a) entweder *alle zufammengenommen einem gegebnen Raume F gleich;*

b) oder *fo befchaffen find*, *dafs der Unterfchied zwifchen der Summe einiger diefer Figuren und der Summe andrer einem gegebnen Raume F gleich ift*;

c) oder endlich so, *daſs die Summe einiger, gleich ist der Summe der andern, vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum S:*

Immer ist unter diesen Bedingungen der geometrische Ort des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes A aller solcher Linien, eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse, ausgenommen in dem Fall, wenn in b, alle diese Figuren einander *ähnlich* sind, oder wenn in c, der Raum S dem Unterschiede *ähnlicher Figuren* gleich ist, in welchen Fällen der Ort des Durchschnittspunktes eine *grade Linie* von gegebner Lage wird.

a) *Wenn zwey Punkte B und C gegeben* sind, von denen grade Linien so gezogen werden, daſs sie sich zwey und zwey in Punkten A durchschneiden, und es werden beliebige Figuren gegebner Gattungen ** (f. 1.) $a = \frac{m}{q} \times MN^2$ über die ersten BA, und $b = \frac{n}{q} \times MN^2$ über die zweyten AC beschriebn, (wo MN irgend eine willkührliche Linie *bedeutet*,) und man nimmt auf der Linie BC, oder auf deren Verlängerung, einen Punkt G, und überdem eine Linie GE, so, daſs sich verhält $BC : BG : CG : GE = m + n : m : n : q$, und zieht AG; *so ist allemal*, wo auch die Spitze A des Dreyecks BAC liegen möge, der Natur des Dreyecks gemäſs,

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2) \text{ *}, \quad \text{* 20. 7.}$$

mithin stets $a \pm b = \frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2)$, wie in

Folg. 1. B., die beyden Figuren gegebner Gattung a und b mögen zur Summe oder zum Uterſchied einen beſtändigen, oder einen veränderlichen Flächenraum F haben, worauf es hierbey weiter nicht ankömmt. Nur hat im erſtern Fall AG^2 einen beſtändigen und immer einerley, im letztern hingegen einen veränderlichen und ungleichen Werth, weshalb zwar im erſtern, nicht aber im letztern Fall, der Ort der Durchſchnittspunkte A eine mit dem Halbmeſſer GA, um den Mittelpunkt G, beſchriebne Kreislinie iſt *.

*f. 1. B.

Fig. 52. *Wird alſo noch ein dritter Punkt D gegeben, und der Gattung nach noch eine dritte Figur* $c = \frac{p}{q} \times MN^2$, und durchſchneiden ſich nun *drey* von den Punkten B, C, D aus gezogne grade Linien in Einem Punkte A ſo, *daſs die Summe oder der Unterſchied der drey Figuren gegebner Gattungen a, b, c, über dieſe Linien beſchrieben, einem gegebnen, unverän derlichen Flächenraum F′ gleich ſind,* ($a \pm b \pm c = F'$,) ſo muſs, wenn man ſtatt $a \pm b$, ſetzt $\frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2)$, welches für jede Bedingung erlaubt iſt, allemal auch $\frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2) \pm c = F'$, folglich

$$AG^2 \times \frac{m+n}{q} \pm c = F' - R \times \frac{m+n}{q} \text{ im Fall von } a+b$$

$$AG^2 \times \frac{m-n}{q} \pm c = R \times \frac{m-n}{q} - F' \text{ im Fall von } a-b$$

ſeyn. Mithin müſſen dann in beyden Fällen die Linien BA, CA, DA sich drey und drey so in Punkten A durchschneiden, dass wenn man von dem Punkte G aus, (der auf die angezeigte Art, durch die Gattung der Figuren a und b bestimmt, und also gegeben ist,) GA zieht, entweder die Summe, oder der Unterschied zweyer Figuren gegebner Gattungen über GA und DA beschrieben, einem gegebnen Flächenraume gleich ist, nemlich dem Unterschiede der gegebnen Räume F' und $R \times \frac{m \pm n}{q}$. Es tritt dann also allemal für die Linien GA, DA der *Fall A, der vorigen Folgerung* ein, und vermöge des dort Bewiesenen muss *der geometrische Ort der Durchschnittspunkte A jener drey Linien,* wiederum eine *Kreislinie* von gegebner Lage und Grösse seyn. Und zwar, wenn man *erst*, im Fall der Summe a + b auf BC selbst, im Fall des Unterschieds a — b hingegen auf ihrer Verlängerung einen Punkt G so bestimmt, dass sich verhält BG : CG = m : n, und *dann* auf ähnliche Art, je nachdem c additiv oder subtractiv ist, auf GD oder auf deren Verlängerung einen Punkt G' so nimmt, dass sich verhält GG' : DG = m ± n : p, (da denn die Punkte G, G', die Abschnitte BG, CG und GG', DG', und die Rechtecke aus den erstern R, und aus den letztern R' gegeben sind); *so ist G' der Mittelpunkt dieser Kreislinie*, und auf diese Bestimmung des Mittelpunkts hat *lediglich die Gattung*, nicht aber die Grösse der Figuren a, b, c Einfluss. *Der Halbmesser* der Kreislinie bestimmt sich hingegen daraus, dass dann, *im Fall die Summe aller drey Figuren* gegebner Gattung dem Raume F' gleich ist, nach Folg. 1. B. seyn muss

$$G'A^2 \times \frac{m+n+p}{q} = F' - R \times \frac{m+n}{q} - R' \times \frac{m+n+p}{q}$$

(und auf eine ähnliche Art, *im Fall der Unterschied* einiger der Figuren gegebner Gattung von den andern, dem Raume F' gleich ist, nur dass dann einige der subtractiven Theile dieser Formel additiv, und umgekehrt einige der additiven subtractiv werden, wie man sich das leicht aus Folgerung 1. B. entwickeln wird.) Folglich ist dann sowohl die Gattung, als die Grösse einer über G'A beschriebnen Figur, mithin G'A selbst, zugleich mit F' gegeben und unveränderlich, und dieser Halbmesser des Ortes läst sich nach den Aufgaben zu Ende dieses Buchs ohne Schwierigkeit durch geometrische Construction, so wie dessen Zahlwerth durch Rechnung finden. Ist aber F' kein unveränderlicher Raum, so ist auch die Figur gegebner Gattung über G'A, und diese Linie selbst, von veränderlicher Grösse, und dann also der Ort der Punkte A keine um G' beschriebne Kreislinie.

Ist dann aber noch ein vierter Punkt E gegeben, und der Gattung nach eine vierte Figur $d = \frac{r}{q} \times MN^2$, und durchschneiden sich die aus den vier Punkten B, C, D, E gezogne grade Linien, je vier in Einem Punkte A, so, dass die *Summe* der vier Figuren gegebner Gattungen a, b, c, d, über diese Linien beschrieben, *einem gegebnen unveränderlichen Flächenraum F'' gleich sind,*

($a+b+c+d=F''$); so muſs, (wenn man aus der Gattung von drey dieſer Figuren, z. B, aus a, b, c, und aus der Lage der Punkte B, C, D, wie im vorigen Fall, den Punkt G' beſtimmt, und nach den Durchſchnittspunkten A die grade Linie G'A zieht,) wiederum die vorige Gleichung beſtehn. Fügt man folglich, beyderſeits die vierte Figur gegebner Gattung d hinzu, und ſetzt ſtatt $F'+d$ den Raum F'', ſo erhält man für jeden Durchſchnittspunkt A die Gleichung $G'A^2 \times \frac{m+n+p}{q} + d$

$$= F'' - R \times \frac{m+n}{q} - R' \times \frac{m+n+p}{q}.$$

Die Durchſchnittspunkte A je vier ſolcher Linien, ſind folglich wiederum ſo beſchaffen, daſs wenn man von den beyden gegebnen Punkten G' und E aus, nach ihnen die graden Linien G'A und EA zieht, Figuren gegebner Gattungen über dieſe Linien beſchrieben, zuſammengenommen einem gegebnen und unveränderlichen Flächenraume gleich ſind. *Der Ort dieſer Durchſchnittspunkte* iſt alſo wiederum eine *Kreislinie* von gegebner Lage und Gröſse,* deren Mittelpunkt und Halbmeſſer man wieder grade ſo, wie im vorigen Fall, nach Folg. 1. B. findet. Man theile nemlich, nachdem man den Punkt G' beſtimmt hat, die Linie G'E im Punkte G'' nach dem Verhältniſſe von $m+n+p:r$ ein, (d. h. nach dem Verhältniſſe der beyden Figuren gegebner Gattung über G'A und EA, wenn ſie auf derſelben Grundlinie ſtehn); ſo erhält man den *Mittelpunkt*

* f. 1. B.

und der *Halbmesser* G″A wird wider durch eine ähnliche Formel wie vorhin bestimmt,

$$G''A^2 \times \frac{m+n+p+r}{q} = F'' - R \times \frac{m+n}{q}$$
$$- R' \times \frac{m+n+p}{q} - R'' \times \frac{m+n+p+r.}{q}$$

Wird noch ein fünfter, und dann noch ein *sechster*, ein *siebenter Punkt* u. s. f. unter ähnlichen Bedingungen gegeben, so geht, wie man leicht sieht, die Schlussfolge grade so, wie hier für drey und vier Punkte fort, daher unsere Behauptung auch für 5, für 6, für 7, kurz für jede Zahl von Punkten gilt.

Wenn man folglich aus einer beliebigen Anzahl gegebner Punkte grade Linien so zieht, daſs sie sich insgesammt in Einem Punkte, und zwar so durchschneiden, daſs Figuren von gegebner Gattung, welche man über diese Linien beschreibt, zusammengenommen einem gegebnen Flächenraum gleich sind; so ist allemal der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes eine der Lage und Gröſse nach gegebne Kreislinie, so daſs jeder Punkt einer bestimmten Kreislinie, und kein Punkt auſserhalb derselben, mit den gegebnen Punkten grade Linien bestimmt, welche die erwähnte Eigenschaft haben. — Verhalten sich die der Gattung nach gegebnen, über BA, CA, DA, EA, u. s. f. zu beschreibenden Figuren, zu den Quadraten dieser Linien, wie m, n, p, r, u. s. f. zu q; und man theilt die grade Linie BC, im Punkte G nach dem Verhältnisse m : n ein, ferner GD, im Punkte G′ nach dem

Verhältnisse $m+n:p$, und G'E im Punkte G'' nach dem Verhältnisse $m+n+p:r$ u. s. f.; so findet man den *Mittelpunkt dieses Kreises:* und der *Halbmesser* desselben wird durch den gegebnen Flächenraum, durch die gegebnen Gattungen der Figuren a, b, c etc., und durch die Rechtecke aus den Abschnitten der Linien BC, G'D, G''E u. s. f., durch Formeln, deren Gesetz leicht zu übersehn ist, bestimmt.

b) *Dass der Satz in dieser Allgemeinheit auch für den Fall gilt, da der Unterschied der Figuren gegebner Gattungen, einem gegebnen unveränderlichen Flächenraum gleich ist*, fällt aus unserer Erörterung für 2 und 3 Punkte in die Augen. Der einzige Unterschied dabey ist, dass für jede subtractive Figur, der durch ihre Gattung bestimmte Punkt G in einer Verlängerung zu nehmen, und die Grösse der Figur gegebner Gattung über GA aus F, R, R' etc. auf andre Art zusammenzusetzen ist.

c) *Ist endlich die Summe einiger der Figuren gegebner Gattung, der Summe der übrigen, sammt einem gegebnen Raume S gleich*; so ist der Unterschied der Figur gegebner Gattungen dem Raume S gleich: also auch der Satz C, in dieser Allgemeinheit wahr *. *(f. 1. C)

Der erstere von diesen Sätzen, welche zu den allgemeinsten und elegantesten in der geometrischen Analysis gehören, wird in *Apollonius ebnen Oertern II. 5. Fall 2 und 3* dargethan. Bloss der Beweis für 3 Punkte und den Fall der Summe, nimmt dort 16 Seiten ein, indem er durch alle Verschiedenheiten, (wenn alle 3 Figuren gegebner Gattung Quadrate sind, oder wenn ihrer 2, oder wenn 1, oder wenn keine ein Quadrate ist,) umständlich durchgeführt wird, und obgleich *Simſon* den Fall des Unterſchieds ganz übergeht, ſo füllt doch der ganze Satz über 30 Seiten. Der deutſche Ueberſetzer, *Camerer*, hat dort arithmetiſche und trigonometriſche Formeln zur Beſtimmung des Halbmeſſers hinzugefügt, die aber, wie ſich ſchon aus unſern Formeln ſchlieſsen läſst, auſserordentlich weitläufig werden. — Daſs im Fall der Summe der gegebne Raum F nothwendig gröſser ſeyn muſs als die Summe aller ſubtractiven Räume, fällt aus der Beſtimmung des Halbmeſſers in die Augen.

Stellt man ſich alle gegebene Punkte B, C, D etc. als gleich ſchwer vor, ſo findet man den Lehren der Statik gemäſs, ihren *Schwerpunkt* grade auf dieſelbe Art, wie man hier den Mittelpunkt G der Kreislinie findet, welche der geometriſche Ort des Durchſchnittspuuktes A für den Fall iſt, daſs alle Figuren über BA, CA u. ſ. f. Quadrate ſind. Daher hat umgekehrt jeder Kreis, welcher aus dem Schwerpunkte mehrerer in einer Ebne gegebner, und gleich ſchwerer Punkte beſchrieben wird, die Eigenſchaft, daſs wenn man von allen dieſen Punkten, nach irgend einem Punkte der Kreislinie, grade Linien zieht, die Quadrate über dieſe Linien zuſammengenommen immer dem nemlichen Flächenraume gleich ſind; ein Satz den Simſon aus *Hughens Horologium Oſcillatorium prop. 12* entlehnt, und unſerm Satz *a* gemäſs noch erweitert.

Folgerung 3. Aus dieſen Sätzen flieſsen in Verbindung mit unſerm Lehrſatz umgekehrt folgende *intereſſante Eigenſchaften der Kreislinie*, wodurch die Eigenſchaft, welche wir in Lehrſatz 17, Folgerung 2 kennen gelernt haben, ausnehmend verallgemeinert wird.

Fig. 51. *Nimmt man nemlich auf einem der Durchmeſſer einer Kreislinie, oder auf deren Verlängerung, willkührlich zwey Punkte B und C, und zieht von beyden nach einem beliebigen*

Punkte M der Kreislinie grade Linien BM, CM; so haben zwey Figuren gegebner Gattung, welche man über diese Linien beschreibt, (nemlich solche Figuren, die über einerley Linie beschrieben, sich wie die Entfernungen CG und BG verhalten,) *für jeden Punkt der Kreislinie, falls B und C zu entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes G liegen, immer einerley Summe: falls hingegen B und C zu einerley Seite des Mittelpunkts G liegen, immer einerley Unterschied.* Denn ist *erstens* M ein Punkt *ausserhalb* des Durchmessers BC, und man zieht MB, MC, MG, so entsteht ein Dreyeck MBC, von dessen Spitze, im ersten Fall nach der gegenüberstehenden Grundlinie, im zweyten nach ihrer Verlängerung eine grade Linie AG gezogen ist, für welches folglich nach der Form γ unsers Lehrsatzes, $MB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm MC^2 \times \frac{BG}{GE}$

$= \frac{BC}{GE} \pm (BG \times CG \pm MG^2)$ ist. Nun sind B, G, C gegebne Punkte, also BG und CG unveränderliche Linien, wie auch der Halbmesser des Kreises MG, und die beliebig gegebne Linie GE. Mithin sind die Räume rechts vom Gleichheitszeichen, für jeden Punkt M in der Kreislinie, der ausserhalb BC liegt, von einerley Grösse, also auch die Räume links vom Gleichheitszeichen. Folglich haben zwey der Gattung nach gegebne Figuren über MB und MC beschrieben, und zwar zwey Figuren, die über dieselbe Linie beschrieben sich wie CG : BG verhalten, im *ersten* Fall zusammengenommen, im *zweyten* von einander abgezogen, immer einerley Grösse. Dass dieses *zweytens* auch für die bey-

den Punkte N der Kreislinie, welche *in* der Linie BC liegen, und für welche kein Dreyeck MBC vorhanden
*S 329. ist, gilt, folgt aus *Proklus Lehnsatz* in Anmerk. 1*, indem nach der Form γ dieses Lehnsatzes, auch für jene beyden Punkte, $NB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm NC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm MG^2)$ ist.

Fig. 54. *Nimmt man in oder ausserhalb der Kreislinie willkührlich drey Punkte, B, C, D, und zieht von ihnen nach Einem Punkte M der Kreislinie grade Linien, so haben auf dieselbe Art drey Figuren bestimmter Gattungen über diese Linien beschrieben, für jeden Punkt M einerley Summe, oder nach Umständen einerley Unterschied.* Und zwar, wenn man BC, und von D nach dem Mittelp. G, DG zieht, und diese beyden Linien sich in einem Punkte H durchschneiden, so wird die Gattung der Figuren über BM, CM, DM, durch das Verhältniss der Abschnitte CH : BH und HG : DG, wie in Folgerung 2. bestimmt. *Und dasselbe gilt für 4, für 5, kurz für jede beliebige Zahl willkührlich angenommener Punkte,* wofür der Beweis nach Anleitung des Beweises in Folgerung 2. sich ohne Schwierigkeit, grade so wie für 2 Punkte führen lässt.

Anmerkung 2. Diese interessanten Folgerungen aus unserm allgemeinen Lehrsatz, habe ich unmittelbar auf die Auslegung der verschiednen Formen desselben folgen lassen, weil sie sich lediglich auf diese gründen. In den folgenden *Zusätzen* füge ich nun noch *die Entwickelung einiger besondrer Sätze* hinzu,
* 20. *die in unserm allgemeinen Lehrsatze* liegen*, und aus deren grosser Brauchbarkeit in geometrischen Untersuchungen, die Wichtigkeit dieses Lehrsatzes noch einleuchtender werden wird.

Zusatz I. 1) *Wenn in einem Dreyeck ABC aus der Spitze nach der Verlängerung der Grundlinie BC eine grade Linie Ag so gezogen ist, daſs*, wenn S einen gegebnen Raum bedeutet, *sich verhält* $AB^2 - S : AC^2 = Bg : Cg$; *so ist allemal das Rechteck aus der Grundlinie und dem grössern Abschnitt BG, gröſser als der gegebne Raum S.* Fig. 45.

Denn es ist alsdann $AB^2 - S = AC^2 \times \frac{Bg}{Cg}$ *, *V. 3. α.

folglich $S = AB^2 - AC^2 \times \frac{Bg}{Cg} = BC \times Bg - Ag^2 \times \frac{BC}{Cg}$ *, *20. β.

und mithin $S > BC \times Bg$.

2) *Wird hingegen AG nach einem Punkte in der Grundlinie selbst so gezogen, daſs sich verhält* $S - AB^2 : AC^2 = BG : CG$, *so muſs daſs Rechteck* $BC \times BG$ *kleiner als der gegebne Raum S seyn.* Denn alsdann ist $S = AB^2 + AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG + AG^2 \times \frac{BC}{CG}$ *, also *20. β.

$S > BC \times BG$.

Beyde Sätze kommen in *Apollonius* ebnen Oertern II Lemma 4 und 5 vor, und ihr Beweis wird dort weit hergehohlt.

Zusatz II. Nach der Aussage δ unsers Lehrsatzes, ist, wenn man in einem Dreyeck ABC, die Linie AG willkührlich nach einem Punkte der Grundlinie oder deren Verlängerung zieht, immer Fig. 45.

$$AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2,$$

wo die obern Zeichen für den erstern, die untern für den letztern Fall gelten.

Fig. 36. 1) *Zieht man folglich AG nach dem Punkte in der Mitte der Grundlinie,* da dann $BG = CG = \frac{1}{2} BC$ wird, so ist immer $\frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AC^2 = BG^2 + AG^2$; unser Lehrsatz 17, welcher also der einfachste Fall dieses allgemeinen Satzes ist. — Zieht man Ag nach einem Punkte in der verlängerten Grundlinie, so dass $BC = Cg$ wird, so erhält man ebenfalls die Aussage jenes Lehrsatzes.

Fig. 45. 2) *Zieht man AG so, dass $BG = 2 CG$, und mithin $BC = 3 CG$ ist,* so ist $\frac{1}{3} AB^2 + \frac{2}{3} AC^2 = 2 CG^2 + AG^2$ u. s. f.

3) *Ist überhaupt $BG = m . CG$,* folglich, im Fall G in der Grundlinie liegt $BC = (m + 1) CG$, falls aber G in der verlängerten Grundlinie liegt $BC = (m - 1) CG$; so ist

im *ersten Fall* $$\frac{AB^2 + m . AC^2}{m + 1} = m . CG^2 + AG^2$$

im *zweyten* $$\frac{AB^2 - m . AC^2}{m - 1} = m . CG^2 - AG^2;$$

Aussagen, welche sich beyde in folgende Formel zusammenziehn lassen,

$$AG^2 = \frac{1}{1 \pm m} . AB^2 \pm \frac{m}{1 \pm m} . AC^2 \mp m . CG^2$$

wo die obern Zeichen für den ersten, die untern Zeichen für den zweyten Fall gelten.

Fig. 48. Zusatz III. 1) *Zieht man AG senkrecht auf die Grundlinie oder deren Verlängerung,* so wird $AG^2 = AB^2 - BG^2$, und setzt man diesen Werth in δ, so

geht die allgemeine Ausſage, je nachdem der Winkel B ſpitz oder ſtumpf (d. i. BC = BG + CG oder BG − CG) iſt, in die beyden Ausſagen des dreyzehnten Lehrſatzes über; eine Ableitung, die ich dem Leſer überlaſſe. Auch dieſer Satz iſt alſo nur ein beſondrer Fall unſers Allgemeinen.

2) *Iſt das Dreyeck ABC gleichſchenklig, und AG von der Spitze nach der Grundlinie oder deren Verlängerung gezogen*, ſo verwandeln ſich in δ die Theile links vom Fig. 48.

Gleichheitszeichen in dieſe $AB^2 \times (\frac{CG \pm BG}{BC}) = \pm AL^2$,

indem, im Fall G in der Verlängerung der Grundlinie liegt, der Vorausſetzung bey unſern Formeln gemäſs, Bg — Cg = BC iſt. Es iſt alſo im gleichſchenkligen Dreyeck $\pm AB^2 = BG \times CG \pm AG^2$ oder $AB^2 = AG^2 \pm BG \times CG$; ein fruchtbarer Satz, bey dem ich mich hier weiter nicht verweile, weil ich ihn, zum Behuf derer, die unſern allgemeinen Lehrſatz überſchlagen haben, bald als einen beſondern Lehrſatz aufführen und noch auf andre Art beweiſen werde *. 21.

Zuſatz IV. 1) *Zieht man in einem Dreyeck ABC die grade Linie AG ſo nach der Grundlinie BC oder nach deren Verlängerung, daſs ſich die beyden Abſchnitte BG, CG, wie die Schenkel, an welchen ſie anliegen, verhalten, BG : CG = AB : AC; ſo iſt das Rechteck aus den beyden Schenkeln, gleich, im erſten Fall der Summe, im zweyten dem Unterſchiede des Rechtecks aus den beyden Abſchnitten BG, CG, und des Quadrats der theilenden Linie, oder* $AB \times AC = BG \times CG \pm AG^2$. Fig. 50.

Denn aus der vorausgesetzten Proportion fließt auch die Proportionalität folgender Grössen
V. 4. β. $BG \pm CG : BG : CG = AB \pm AC : AB : AC$, d. h. da im ersten Fall $BG + CG = BC$, im zweyten aber, der Bedingung unsers Lehrsatzes gemäss, $BG - CG = BC$ ist, $BC : BG : CG = AB \pm AC : AB : AC$. Folglich ist $\frac{BG}{BC} = \frac{AB}{AB \pm AC}$ und $\frac{CG}{BC} = \frac{AC}{AB \pm AC}$.

Setzt man diese Werthe in unsrer Form δ, so wird in diesem Fall der Theil links vom Gleichheitszeichen, das ist $AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC}$

$$= \frac{AB^2 \times AC}{AB \pm AC} \pm \frac{AC^2 \times AB}{AB \pm AC} = AB \times AC \times \frac{AB \pm AC}{AB \pm AC}$$

$= AB \times AC$; und mithin ist in diesem Fall immer

$$AB \times AC = BG \times CG \pm AG^2.$$

Auch dieser bekannte und brauchbare Satz, der gewöhnlich aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke bewiesen wird, und der auch bey *Le Gendre* und *van Swinden* vorkömmt, ist also ein besonderer Fall unsers allgemeinen Lehrsatzes. Daß er auch für einen Punkt in der Verlängerung der Grundlinie, nur mit der Verschiedenheit gelte, daß dann die Summe in den Unterschied übergeht, scheint man bey dem gewöhnlichen Beweise desselben übersehn zu haben.

2) Es sey $AB = m . AC$, und folglich, da $BG : CG$, dem Verhältnisse $AB : AC$ gleich ist, $BG = m . CG$, so erhält unsere Aussage folgende Gestalt, $m . AC^2 = m . CG^2 \pm AG^2$, so daß also unter der Bedingung dieses Zusatzes für jeden Punkt G *in der*

BG

Grundlinie, $AG^2 = m.(AC^2 - CG^2) = \frac{1}{m}.(AB^2 - BG^2)$, und für jeden Punkt g *in der verlängerten Grundlinie* $Ag^2 = m\ (Cg^2 - AC^2) = \frac{1}{m}\ (Bg^2 - AB^2)$ ist.

Zusatz V. 1) *Zieht man endlich von der Spitze eines Dreyecks ABC, die grade Linie Ag so nach der Verlängerung der Grundlinie, dass die Abschnitte Bg, Cg sich wie die Quadrate der Schenkel, an welche sie anliegen verhalten,* $Bg : Cg = AB^2 : AC^2$; *so ist allemal das Rechteck aus den Abschnitten, dem Quadrat der theilenden Linie gleich,* $Bg \times Cg = Ag^2$, *oder diese Linie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten.*

Denn aus der angenommnen Proportion folgt, dass $AB^2 \times Cg = AC^2 \times Bg$, folglich $AB^2 \times \frac{Cg}{BC} - AC^2 \times \frac{Bg}{BC} = o$ sey. Da nun dieser Unterschied, nach unserer Form δ, gleich ist $Bg \times Cg - Ag^2$, so müssen auch diese Räume keinen Unterschied haben, also gleich seyn, oder es ist alsdann immer $Bg \times Cg = Ag^2$, und folglich $Bg : Ag = Ag : Cg$ *. *4. f. 1.

Apollonius ebne Oerter II. Lemma 2, und *Pappus* VII. 119, wo dieser Hülfssatz aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke abgeleitet wird.

2) *Für einen Punkt G in der Grundlinie*, der diese so schneidet, dass die Abschnitte sich wie die Quadrate der anliegenden Schenkel verhalten, ist $2\ AB^2 \times \frac{CG}{BC}$

$= BG \times CG + AG^2$; eine Erweiterung dieses Hülfssatzes, die ich nicht erwähnt finde.

Zusatz VI. *Wenn man von zwey gegebnen Punkten B, C aus, grade Linien zieht, die sich in einem Punkte A so durchschneiden, dass je zwey dieser Linien zwar ungleich sind, aber ein gegebnes und unveränderliches Verhältniss zu einander haben; so ist der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes, eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse.*

Denn ist das Verhältniss dieser Linien AB, AC gegeben, so ist auch das Verhältniss ihrer Quadrate bekannt. Nimmt man daher auf der Verlängerung der Linie BC einen Punkt g so, dass Bg, Cg in diesem Verhältniss der Quadrate über AB, AC stehn, und zieht Ag, so ist nach Zusatz V, $Ag^2 = Bg \times Cg$. Nun sind die Punkte B, C, und g gegeben und unveränderlich; also auch Ag^2, und die Seite Ag. Mithin ist *der Ort der Spitze A*, eine mit Ag um g beschriebne *Kreislinie.*

Ist das gegebne Verhältniss der Linien BA : CA, das Verhältniss der Gleichheit, so ist kein Punkt in der Verlängerung der Linie BC möglich, für welchen Bg : Cg in dem gegebnen Verhältnisse stünden, da Bg immer um BC grösser oder kleiner als Cg ist. — Hingegen giebt es einen solchen Punkt G in der Linie BC selbst, für welchen $BG = CG = \frac{1}{2}$ BC ist, und für diesen wird, laut der zweyten Aussage in Zusatz V, $AB^2 = BG^2 + AG^2$, also der Ort der Durchschnittspunkte A für diesen Fall ein Perpendikel auf der Mitte der Linie BC *.

Zusatz VII. Umgekehrt hat *jede Kreislinie die Eigenschaft*, daſs *wenn man innerhalb oder auſserhalb des Kreiſes willkührlich einen Punkt, z. B. C nimmt, und auf dem Durchmeſſer durch C, nach derſelben Seite hin, einen zweyten Punkt B ſo, daſs das Rechteck aus den Entfernungen dieſer beyden Punkte vom Mittelpunkte g, dem Quadrat des Halbmeſſers gN gleich iſt, gC × gB = gN²*, oder, was auf eins hinaus kömmt, *ſo daſs gB die dritte Proportionallinie zu gC und dem Halbmeſſer gN iſt; ſo ſtehn je zwey grade Linien, MB : MC, welche man von dieſen Punkten C, B aus, nach demſelben Punkte M der Kreislinie zieht, insgeſammt in gleichem Verhältniſs, und zwar im Verhältniſs des Halbmeſſers und eines der Abſchnitte, gB : gN*, oder *der beyden Linien NB : NC*, oder *BP : CP*.

Denn zieht man nach demſelben Punkte M der Kreislinie BM, CM, gM, ſo entſteht ein Dreyeck BMC, von deſſen Spitze nach der verlängerten Grundlinie, Mg ſo gezogen iſt, daſs $Bg \times Cg = Ng^2 = Mg^2$ iſt, daher vermöge ∂ auch $MB^2 \times Cg = MC^2 \times Bg$ ſeyn *, und folglich ſich verhalten muſs $MB^2 : MC^2 = Bg : Cg$. Nun aber iſt der Mittelpunkt g, der Halbmeſſer gN, und einer der Punkte B, C, mithin auch der andre, alſo das Verhältniſs der Linien Bg : Cg, folglich das dieſen gleiche Verhältniſs der Quadrate $MB^2 : MC^2$, und alſo auch *das Verhältniſs* der Seiten dieſer Quadrate *MB : MC gegeben und unveränderlich*. * 20. ∂.

Da nun die Punkte B und C, der Vorausſetzung nach ſo beſtimmt ſind, daſs ſich verhält gB : gN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$= gN : gC$, oder, wenn man dieſe gleichen und ſte-
*V. 6. tigen Verhältniſſe zuſammen ſetzt * $gB : gC = gB^2 : gN^2$
oder auch wie $gN^2 : gC^2$; ſo verhalten ſich die Quadrate $MB^2 : MC^2 = gB^2 : gN^2$, und folglich je zwey Linien $MB : MC = gB : gN$ *oder wie* $gN : gC$, *oder endlich* wie $gB \mp gN : gN \mp gC$ d. i. wie $BN : NC$ oder wie
*V. 4. β. $BP : CP$ *. Mithin *verhält ſich die gröſsere je zwey ſolcher Linien MB, MC zur kleinern, wie der gröſsere Abſchnitt zum Halbmeſſer*, oder *wie der Halbmeſſer zum kleinern Abſchnitt*, oder *wie die beyden an dieſen Linien anliegenden Abſchnitte, in welche BC durch die Kreislinie getheilt wird.*

Da der Halbmeſſer die mittlere Proportionallinie zwiſchen den Entfernungen der beyden Punkte B, C, vom Mittelpunkte g iſt; ſo können die Linien gB, gC, nicht beyde zugleich gröſser, oder beyde zugleich kleiner als der Halbmeſſer ſeyn, folglich die Punkte B, C nicht beyde zugleich innerhalb oder auſserhalb des Kreiſes, eben ſo wenig als zu entgegengeſetzten Seiten des Mittelpunktes genommen werden.

Anmerkung. Die Ausſagen in Zuſatz 6 und 7, welche zu den ſchönſten Sätzen über den Kreis gehören, machen in *Apollonius ebnen Oertern* den zweyten Ort des zweyten Buchs aus, und laſſen ſich auch aus Sätzen des nächſten Buchs folgern. In der That ſind ſie aber nur der einfachſte Fall der Ausſage C
*F. 1. D. in Folgerung 1 *, und *laſſen ſich daher noch ſehr verallgemeinern.*

Wenn nemlich beliebig viel Punkte z. B. B, C, D in einer Ebne gegeben ſind, und grade Linien von dieſen Punkten aus gezogen ſich (in dieſem Fall je drey) ſo in Punkten, A durchſchneiden, daſs ſie zu einander ſtets in demſelben gegebnen Verhältniſſe ſtehn, ſo iſt der Ort der Durchſchnittspunkte A ſtets eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse. Denn da alsdann auch die

Quadrate über diese Linien in einem gegebnen, unveränderlichen Verhältnisse stehn, z. B. $BA^2 : CA^2 : DA^2 = m : n : p$; so ist $BA^2 + CA^2 : DA^2 = m + n : p$, und mithin $BA^2 + CA^2 = DA^2 \times \frac{m+n}{p}$ oder eine Figur gegebner Gattung über DA beschrieben, gleich der Summe der Quadrate über die anderen Linien. Es ist dann also auch der Unterschied dieser Quadrate und der Figur gegebner Gattung über DA, gleich einem gegebnen Flächenraume, nemlich dem Flächenraume o, und deshalb der Ort der Punkte A eine Kreislinie, deren Mittelpunkt und Halbmesser, wie in Folgerung 2., bestimmt wird.

[LEHRSATZ 21.]

Zieht man aus der Spitze A eines gleichschenkligen Dreyecks ABC nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, oder nach einem Punkte g in deren Verlängerung, eine grade Linie, so ist stets der Unterschied der Quadrate aus dieser Linie und aus einem der gleichen Schenkel, gleich dem Rechteck aus den Abschnitten auf der Grundlinie, BG, CG, oder auf der verlängerten Grundlinie, Bg, Cg. Fig. 38.

Da ein Perpendikel AD, aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, diese im Punkte D halbirt *, so geht für diesen Punkt das Rechteck aus den beyden Abschnitten in das Quadrat der halben Grundlinie, und also die Aussage des Lehrsatzes in folgende über, $AB^2 - AD^2 = BD^2$, welche vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes wahr ist. *

*117. f. 2.

*12. f. 1.

Jeder andre Punkt G *in der Grundlinie* theilt diese überdem in zwey ungleiche Abschnitte, BG, GC, mit-