Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 21.] Zieht man aus der Spitze A eines gleichschenkligen Dreyecks ABC nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, oder nach einem Punkte g in deren Verlängerung, eine grade Linie, so ist ...

Quadrate über diese Linien in einem gegebnen, unveränderlichen Verhältnisse stehn, z. B. $BA^2 : CA^2 : DA^2 = m : n : p$; so ist $BA^2 + CA^2 : DA^2 = m + n : p$, und mithin $BA^2 + CA^2 = DA^2 \times \frac{m+n}{p}$ oder eine Figur gegebner Gattung über DA beschrieben, gleich der Summe der Quadrate über die anderen Linien. Es ist dann also auch der Unterschied dieser Quadrate und der Figur gegebner Gattung über DA, gleich einem gegebnen Flächenraume, nämlich dem Flächenraume o, und deshalb der Ort der Punkte A eine Kreislinie, deren Mittelpunkt und Halbmesser, wie in Folgerung 2., bestimmt wird.

[LEHRSATZ 21.]

Zieht man aus der Spitze A eines gleichschenkligen Dreyecks ABC nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, oder nach einem Punkte g in deren Verlängerung, eine grade Linie, so ist stets der Unterschied der Quadrate aus dieser Linie und aus einem der gleichen Schenkel, gleich dem Rechteck aus den Abschnitten auf der Grundlinie, BG, CG, oder auf der verlängerten Grundlinie, Bg, Cg. Fig. 38.

Da ein Perpendikel AD, aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, diese im Punkte D halbirt *, so geht für diesen Punkt das Rechteck aus den beyden Abschnitten in das Quadrat der halben Grundlinie, und also die Aussage des Lehrsatzes in folgende über, $AB^2 - AD^2 = BD^2$, welche vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes wahr ist. * *117.f 2. *12. f. 1.

Ieder andre Punkt G *in der Grundlinie* theilt diese überdem in zwey ungleiche Abschnitte, BG, GC, mit-

*II.f.1.α hin ſo, daſs $BG \times GC = BD^2 - DG^2$ iſt *, oder, da im Dreyeck BAG der Unterſchied dieſer Quadrate, dem Unterſchiede der Quadrate aus den Schenkeln AB, AG
* 16. 1. gleich iſt *, ſo, daſs iſt

$$BG \times GC = AB^2 - AG^2.$$

Für jeden Punkt *in der Verlängerung der Grundlinie*, haben wir eine in D gleich getheilte Linie BC, welcher ein Stück Cg angeſetzt, für die folglich $Bg \times gC = Dg^2 - DC^2$ iſt. Und da wiederum im Dreyeck CAg der Unterſchied dieſer Quadrate aus den Abſchnitten der Grundlinie, dem Unterſchiede der Quadrate aus
* 16. 1. den Schenkeln Ag und AC = AB gleich iſt *,

$$Bg \times gC = Ag^2 - AB^2.$$

Man nehme alſo den Punkt G in der Grundlinie ſelbſt, oder in deren Verlängerung, allemal iſt *das Rechteck aus dem Abſtande dieſes Punktes von den beyden Endpunkten B, C der Grundlinie, gleich dem Unterſchiede der Quadrate aus der Linie AG und einem der gleichen Schenkel*, nur mit dem Unterſchiede, daſs im erſten Fall der Schenkel *gröſser*, im zweyten *kleiner* als die Linie AG iſt; welches ſich aus der Natur des gleichſchenkligen
* I. 16. Dreyecks von ſelbſt verſteht *.

Folgerung. Das Quadrat einer graden Linie AG, welche durch die Spitze des gleichſchenkligen Dreyecks gezogen wird, iſt folglich, je nachdem ſie auf der Grundlinie, oder auf deren Verlängerung aufſteht,

$AG^2 = AB^2 - BG \times GC$ oder $Ag^2 = AB^2 + Bg \times gC$;

Ausſagen, die man bequem in folgende zuſammenfaſst

$$AG^2 = AB^2 \mp BG \times GC$$

wo das *obere* oder das *untere* Zeichen gilt, je nachdem der Punkt G *in der Grundlinie* BC ſelbſt, oder *in deren Verlängerung* liegt. Grade ſo iſt

$$AB^2 = AG^2 \pm BG \times GC;$$

ein Satz, den wir ſchon oben gehabt haben *. *20Z3.2

Zuſatz. Iede *Sehne eines Kreiſes, welche kein Durchmeſſer iſt*, *z. B. AB*, bildet mit den beyden Halbmeſſern, die nach ihren Endpunkten gezogen werden, *ein gleichſchenkliges Dreyeck ABC*, welches den Mittelpunkt zur Spitze, die Sehne ſelbſt zur Grundlinie, und den Halbmeſſer zu Schenkeln hat. Durch unſern Lehrſatz wird mithin folgende artige *Eigenſchaft dieſer Sehnen* begründet: Taf. IV. Fig. 55.

1) Iede grade Linie, welche aus dem Mittelpunkte C eines Kreiſes nach irgend einem Punkte O *in einer Sehne wie AB, gezogen iſt*, theilt dieſe ſo in zwey Abſchnitte AO, OB, daſs $AO \times OB = CA^2 - CO^2$ iſt. Und auf dieſe Art *wird auch der Durchmeſſer HI, der durch den Punkt O geht*, (*folglich jede Sehne durch O*) mittelſt dieſes Punktes eingetheilt. Denn giebt es gleich, da der Mittelpunkt C in HI liegt, alsdann kein gleichſchenkliges Dreyeck, wie für die übrigen Sehnen, ſo iſt doch HI im Punkte C gleich, im Punkte O ungleich getheilt, und deshalb gleichfalls das Rechteck $HO \times OI = CI^2 - CO^2$ *. *11.f.1α

2) Eine grade Linie, welche aus dem Mittelpunkte nach einem Punkte o *in der Verlängerung einer Sehne wie AB* gezogen iſt, ſchneidet dagegen auf ihr zwey Abſchnitte Ao, Bo, ſo ab, daſs $Ao \times oB = Co^2 - CA^2$

ist. Und *auch der Durchmesser, der durch den Punkt o geht, (folglich jede Sehne durch o)* wird mittelst des Punktes o auf diese Art eingetheilt, da dem in C gleich getheilten Durchmesser HI, in diesem Fall, ein Stück
115.1.β Io angesetzt, folglich $Ho \times oI = Co^2 - CI^2$ ist.

In beyden Fällen, der Punkt O liege in einer Sehne, oder in deren Verlängerung, *ist also immer das Rechteck aus den Abschnitten, die durch diesen Punkt gebildet werden, (oder noch bestimmter das Rechteck aus dem Abstand des Punktes O von den beyden Endpunkten A, B der Sehne), gleich dem Unterschiede der Quadrate aus dem Halbmesser und aus der Linie CO.*

3) Diese Linie CO selbst, und der Halbmesser CA, werden durch folgende Ausdrücke gegeben,

$$CO^2 = CA^2 \mp AO \times OB$$
$$CA^2 = CO^2 \pm AO \times OB$$

wo die obern oder die untern Zeichen gelten, je nachdem der Punkt O in der Sehne, oder in deren Verlängerung liegt.

[LEHRSATZ 22.]

Taf. III. Fig. 55. 1) *Wenn mehrere Sehnen insgesammt durch einen Punkt O im Kreise gehn, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche auf jeder Sehne durch diesen Punkt abgeschnitten werden, sowohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der halben Sehne gleich, welche mit dem Punkte O gleich weit vom Mittelpunkte absteht, z. B. $AO \times OB = DO \times OE = OF^2$.*