UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 22.] 1) Wenn mehrere Sehnen insgesammt durch einen Punkt O im Kreise gehn, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche auf jeder Sehne durch diesen Punkt abgeschnitten werden, ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Visual Library

ist. Und *auch der Durchmesser, der durch den Punkt o geht, (folglich jede Sehne durch o)* wird mittelst des Punktes o auf diese Art eingetheilt, da dem in C gleich getheilten Durchmesser HI, in diesem Fall, ein Stück
*115.1.β Io angesetzt, folglich $Ho \times oI = Co^2 - CI^2$ ist *.

In beyden Fällen, der Punkt O liege in einer Sehne, oder in deren Verlängerung, *ist also immer das Rechteck aus den Abschnitten, die durch diesen Punkt gebildet werden, (oder noch bestimmter das Rechteck aus dem Abstand des Punktes O von den beyden Endpunkten A, B der Sehne), gleich dem Unterschiede der Quadrate aus dem Halbmesser und aus der Linie CO.*

3) Diese Linie CO selbst, und der Halbmesser CA, werden durch folgende Ausdrücke gegeben,

$$CO^2 = CA^2 \mp AO \times OB$$
$$CA^2 = CO^2 \pm AO \times OB$$

wo die obern oder die untern Zeichen gelten, je nachdem der Punkt O in der Sehne, oder in deren Verlängerung liegt.

[LEHRSATZ 22.]

Taf. III. Fig. 55. 1) *Wenn mehrere Sehnen insgesammt durch einen Punkt O im Kreise gehn, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche auf jeder Sehne durch diesen Punkt abgeschnitten werden, sowohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der halben Sehne gleich, welche mit dem Punkte O gleich weit vom Mittelpunkte absteht, z. B.* $AO \times OB = DO \times OE = OF^2$.

2) *Wenn dagegen die Verlängerungen mehrerer Sehnen insgesammt durch einen Punkt o ausserhalb des Kreises gehn, so sind die Rechtecke aus der ganzen schneidenden Linie und aus der Verlängerung, so wohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der Tangente gleich, welche vom Punkte o nach dem Kreise gezogen wird*, z. B. $Ao \times oB = Do \times oE = oG^2$.

Ist O der Mittelpunkt des Kreises, so sind alle Sehnen, welche durch diesen Punkt gehn, Durchmesser, die sich im Punkte O halbiren, mithin die Aussage 1 richtig. — Ist O nicht der Mittelpunkt, so ziehe man nach demselben die grade Linie OC. Für alle Sehnen, welche sich entweder selbst, oder verlängert in demselben Punkte O durschneiden, ist diese Linie CO, und mithin der Unterschied der Quadrate des Halbmessers und dieser Linie, von gleicher Grösse. Da nun dieser Unterschied den Rechtecken $AO \times OB$, $DO \times OE$, $HO \times OI$ etc. dem vorigen Zusatz gemäss *. gleich ist, * 21. Z.
der Punkt O liege im Kreise oder ausserhalb des Kreises, so sind auch in beyden Fällen *alle diese Rechtecke unter sich gleich*.

Im *ersten Fall* wird eine Sehne GF, welche durch den Punkt O geht, und vom Mittelpunkte um CO absteht, vom Durchmesser durch O senkrecht durchschnitten und halbirt *, so dass $GO \times OF = OF^2$ ist. Und * II. 9.
da dieses Rechteck jedem der übrigen Rechtecke aus den beyden Abschnitten der Sehnen, die durch den

Punkt O gehn, gleich ist, so muss auch *jedes dieser Rechtecke dem Quadrate über OF gleich seyn.*

Im *zweyten Fall* ist, wenn man vom Punkte o aus eine Tangente oG am Kreise, und nach dem Berührungspunkte den Halbmesser CG zieht, CG auf oG
*II. 12. senkrecht *, daher $oG^2 = oC^2 - CG^2$ *, und folglich
* 12. *das Quadrat der Tangente oG, gleich dem Rechteck aus den beyden Abschnitten jeder verlängerten Sehne, die durch den Punkt o geht*, indem jedes dieser Rechtecke, dem Unterschiede der Quadrate, über Co und über dem Halb-
*21 Z. 2 messer CG, gleich ist *.

Folgerung 1. Da in Rechtecken von gleichem
4. f. 1. Inhalt, die Seiten verkehrt proportional sind, so ergeben sich hieraus unmittelbar folgende Sätze:

α) *Zwey Sehnen, welche einen Punkt O innerhalb der Kreislinie gemein haben, durchschneiden sich in diesem*
*E. 7. *Punkte verkehrt proportional* *, so dass sich verhält $AO : DO = OE : OB$;

β) und *die Hälfte der Sehne FG, welche vom Mittelpunkte um CO absteht* (oder die auf dem Durchmesser im Punkte O senkrecht steht) *ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten einer jeden solchen Sehne*, so dass sich verhält $AO : OF = OF : OB$.

γ) *Eben so werden zwey Sehnen, die sich verlängert in einem Punkte o ausserhalb des Kreises durchschneiden, durch die Kreislinie verkehrt proportional eingetheilt*, so dass sich verhält $Ao : Do = oE : oB$;

δ) und *die Tangente, welche von diesem Punkte o nach dem Kreise geht, ist zwischen der Verlängerung und* *der ganzen durchschneidenden Linie die mittlere Proportionallinie*, so daſs sich verhält $Ao : oG = oG : oB$.

Ueberhaupt werden alſo *zwey grade Linien*, *welche von Einem Punkte O nach der Kreislinie gehn*, *von dieſer ſtets ſo geſchnitten*, daſs die Entfernungen des Punktes O von den beyden Durchſchnittspunkten einer jeden dieſer Linien, *verkehrt proportional ſind* *, oder daſs die Rechtecke aus dieſen Entfernungen insgeſammt unter einander gleich ſind. Daſs ſich auf dieſe Eigenſchaften der Sehne und der Tangenten *Methoden* gründen laſſen, *zu drey gegebnen Linien die vierte*, oder *zu zwey die dritte Proportionallinie*, ſo wie *zwiſchen zwey gegebnen die mittlere Proportionallinie zu finden*, *fällt in die Augen.* * E. 7.

Folgerung 2. Iſt *von einem Punkte einer Sehne AB, eine grade Linie OF nach dem Kreiſe ſo gezogen, daſs* $OF^2 = OB \times OA$ *iſt*; *ſo iſt OF ein Perpendikel auf dem Durchmeſſer, der durch den Punkt O geht.* Denn verlängert man die Linie FO, bis wo ſie zum zweyten male den Kreis in G durchſchneidet, ſo iſt $OG \times OF = OB \times OA$, folglich $OF^2 = OG \times OF$ und alſo $OF = OG$; d. h. die Sehne GF wird im Punkte O halbirt, uud ſteht daher auf dem Durchmeſſer durch O ſenkrecht.

Von allen Sehnen die durch den Punkt O gehn, iſt dieſe Sehne FG (*die auf dem Durchmeſſer durch O ſenkrecht ſteht*) *die kürzeſte.* Denn unter allen Rechtecken, welche von gleichem Inhalt ſind, hat das Quadrat den kleinſten Umfang *. *12.Z.1.

Folgerung 3. α) *Ist von einem Punkte in der Verlängerung einer Sehne AB, eine grade Linie oG nach dem Kreise so gezogen, dass* $oG^2 = oA \times oB$ *ist; so berührt oG den Kreis im Punkte G.* Denn zieht man von o durch den Mittelpunkt des Kreises oH, so ist $oA \times oB$
*22. 2. $= oH \times oI$ * und also $oG^2 = oH \times oI = oC^2 - CG^2$, weil dem in C halbirten Durchmesser HI, das Stück
*11f.1.β Io angesetzt ist *. Folglich muss das Dreyeck COG
* 14. bey G rechtwinklig * seyn, und daher oG den Kreis
* II. 12. im Punkte G berühren *.

Diese berührende Linie ist stets kleiner als die Hälfte der Summe aus den beyden Abschnitten Ao, Bo jeder Sehne,
*11.Z.1. *die durch den Punkt o geht* *, und je zwey Abschnitte Ao, Bo einer Sehne zusammen genommen, sind stets kleiner als die beyden Abschnitte Ho, Io auf dem Durchmesser.

β) *Sind endlich nach irgend drey Punkten A, B, o einer graden Linie, von einem Punkte K grade Linien so gezogen, dass* $Ko^2 = Ao \times Bo$ *ist*, und man beschreibt durch AKB einen Kreis, so berührt oK diesen Kreis, vermöge α, und folglich *sind dann allemal die Winkel* $BKo = KAB$,
* II 24. $AKL = ABK$ *, und als die Nebenwinkel der letztern $KBo = AKo$, mithin die Dreyecke KBo und AKo gleichwinklig.

Folgerung 4. α) *Liegen vier Punkte A, D, B, E so, dass, wenn man sie Paarweise durch grade Linie wie AB, DE verbindet, diese Linien sich entweder selbst in einem Punkte O, oder verlängert in einem Punkte o durchschneiden, und das Rechteck aus den Abschnitten AO, BO der einen, dem Rechteck aus den Abschnitten DO, EO* *der andern gleich ist*, oder, was auf eins hinauskömmt, so, dafs die Entfernungen des Durchschnittspunkts O von den beyden Punkten, die auf jeder dieser Linien gegeben sind, in verkehrtem Verhältnifs stehn; *so läfst sich durch diese vier Punkte stets eine Kreislinie beschreiben, und ein Kreis, der z. B. durch die drey Punkte A, B, C gezogen wird, mufs nothwendig auch durch den vierten E gehn.* Denn wer dieses leugnen wollte, müfste behaupten dafs ein solcher Kreis die Linie DE nicht in E, sondern in einem andern Punkte F durchschnitte, da denn das Rechteck aus DO, FO dem Rechteck aus AO, BO, mithin, der Voraussetzung gemäfs, dem Rechteck aus DO, EO gleich seyn müfste, welches nur dann möglich ist, wenn FO = EO, und also F und E einerley Punkt sind.

β) *Umgekehrt läfst sich durch vier gegebne Punkte nur dann ein Kreis ziehn, wenn sie entweder auf diese Art liegen, oder wenn sie die Eckpunkte eines Rechtecks sind.* Denn laufen unter den Linien, welche die vier Punkte verbinden, je zwey der gegenüberstehenden parallel; so bilden sie ein Parallelogramm, und um kein Parallelogramm, das Rechteck ausgenommen, läfst sich ein Kreis beschreiben *. Durchschneiden sich hingegen *II, 27ft diese Linien, und die vier gegebnen Punkte lägen nicht auf die angezeigte Art, und doch in einem Kreise, so müfste eine grade Linie einem Kreis in drey verschiedenen Punkten D, E, F schneiden können, welches unmöglich ist.

γ) *Gehn überhaupt mehrere grade Linien durch Einen Punkt O, und es liegen entweder auf allen zu einerley,* *oder auf allen zu entgegengesetzten Seiten desselben* zwey *Punkte so, daß die Rechtecke aus ihren Entfernungen vom Punkte O gleich sind; so liegen alle diese Punkte in einer Kreislinie*, und ein Kreis durch drey derselben beschrieben, geht auch durch alle übrigen. Und zwar liegt im ersten Fall der Punkt O außerhalb, im zweyten innerhalb dieses Kreises. — Umgekehrt giebt dieses eine *Bedingung* ab, unter der allein ein Kreis durch gegebne Punkte gehn kann.

Alle drey Aussagen sind für die Theorie des Kreises von Wichtigkeit, und besonders wird uns der Satz α, in Verbindung mit Lehrsatz 23 und 26 im zweyten Buch, gleich im Folgenden sehr nützlich seyn.

Fig. 56. *Folgerung* 5. *Jedes Perpendikel, welches auf dem Durchmesser eines Kreises aufsteht, und vom Durchmesser bis zur Kreislinie reicht, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken, welche es auf dem Durchmesser abschneidet*, z. B. PM zwischen AP und PB, und *das Quadrat über dem Perpendikel ist dem Rechteck aus den Abschnitten des Durchmessers gleich*, $PM^2 = AP \times PB$; Aussagen, die schon in unserm Lehrsatz und in Folgerung 1. β) liegen, und die auch unmittelbar daraus folgen, daß wenn man von dem Punkte M, wo das Perpendikel den Kreis durchschneidet, nach den Endpunkten des Durchmessers grade Linien MA, MB zieht, stets ein rechtwinkliges Dreyeck entsteht, worin der Durchmesser Hypotenuse, und MP ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ist *.

* 12. f. 2. β. γ.

Die Quadrate zweyer ſolcher Perpendikel ſtehn alſo auch zu einander in demſelben Verhältniſs, wie die Rechtecke aus den Abſchnitten, z. B. $PM^2 : QN^2 = AP \times PB : AQ \times QB$; eine Eigenſchat, worin der Kreis, wie wir in der Folge ſehn werden, mit den übrigen Kegelſchnitten übereinſtimmt, nur daſs für dieſe das Quadrat jedes Perpendikels gröſser oder kleiner iſt, als das Quadrat der beyden Abſchnitte.

Durch Perpendikel welche man aus Punkten einer Linie auf eine grade Linie AB fällt, wird die Lage dieſer Punkte, und mithin die Lage der ganzen Linie, gegen die grade Linie AB beſtimmt *. Folglich dient *dieſe Eigenſchaft der Perpendikel,* welche auf einem Durchmeſſer errichtet werden, *die Natur der Kreislinie in Beziehung auf ihren Durchmeſſer völlig zu beſtimmen,* und wir können uns ihrer als *eines unterſcheidenden Charakters der Kreislinie,* wodurch ſie ſich von allen andern Arten krummer Linien auszeichnet, bedienen, wie wir dieſes beſonders in dem Buche von den Kegelſchnitten thun werden. — Bezeichnet man den Halbmeſſer der Kreislinie mit r, folglich den Durchmeſſer mit 2r, jedes Perpendikel mit y, und den Abſchnitt des Durchmeſſers vom Anfangspunkte deſſelben A an, bis zum Perpendikel mit x, folglich den zweyten Abſchnitt mit $2r - x$, (da denn natürlich die Zeichen y und x keinen feſten unveränderlichen Werth haben, ſondern einen Werth, der für jedes Perpendikel anders iſt); ſo iſt dieſer Eigenſchaft des Kreiſes gemäſs $y^2 = x.(2r - x)$: und dieſer Gleichung bedient man ſich in der analytiſchen Geometrie als Charakter der Kreislinie, ſo wie umgekehrt mittelſt der Natur des Kreiſes ſich für jede ſolche Gleichung Linien darſtellen laſſen, welche zu einander das in der algebraiſchen Gleichung ausgedrückte Verhalten haben. Dieſe Linien darſtellen, nennt man *eine Gleichung conſtruiren.*

*I, 16, f.

Zuſatz I. *Jede Sehne AM iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Durchmeſſer und dem an ihr lie-*

genden Stücke AP, *welches durch ein Perpendikel aus dem einen Endpunkt der Sehne auf dem Durchmeſſer, der durch den andern Endpunkt geht, abgeſchnitten wird.* Denn iſt AB dieſer Durchmeſſer, und man zieht MB, ſo iſt AMB ein rechtwinkliges Dreyeck, worin AM, BM Katheten, folglich $AM^2 = AB \times AP$ und $BM^2 =$
*12.f.2α. $AB \times BP$ *, dieſe Sehnen alſo die mittleren Proportionallinien zwiſchen dem Durchmeſſer AB und den
*4.f.1. Abſchnitten AP, BP ſind *. — In einem der folgenden Lehrſätze wird dieſer fruchtbare Satz noch be-
* 24. trächtlich erweitert werden *. Hier einige Folgerungen daraus.

α) Setzt man mit der Proportion

$$AM^2 : BM^2 = AP : BP$$

*V.4.δ. die identiſche $AM : BM = AM : BM$ zuſammen *, ſo ergiebt ſich daraus

$$AM^3 : BM^3 = AM \times AP : BM \times BP.$$

Dieſe letztern Rechtecke verhalten ſich folglich wie die dritten Potenzen aus den Zahlausdrücken der Sehnen AM, BM, oder ſtehn im dreymal ſo hohen Ver-
* V. 6. hältniſs *.

*12.f.2.ε Grade ſo iſt $AM^2 : PM^2 = AB : PB$ * und mithin $AM^3 : PM^3 = AB \times AM : PB \times PM$. (Gregor. a. St. Vincentio III. 91. 92.)

Auch verhält ſich $PM^2 : AB \times PM = AB \times PM : AB^2$ indem die erſtern und die letztern Rechtecke von gleicher Höhe ſind, und ſich daher wie ihre Grundlinien PM : AB verhalten. Nun iſt $PM^2 = AP \times PB$ und
*12. f. 3. α. $AB \times PM = AM \times BM$ *. Folglich iſt auch $AP \times PB$: AM

$AM \times BM = AM \times BM : AC^2$, oder das Rechteck aus den beyden Abſchnitten, das Rechteck aus den beyden Sehnen, und das Quadrat des Durchmeſſers ſind in ſtetigem Verhältniſs (Greg. III. 81.)

β) *Zieht man von einem Punkt der Kreislinie aus mehrere Sehnen, AM, AN, AR, ſo verhalten ſich die Quadrate derſelben untereinander und zum Quadrat des Durchmeſſers, wie die Abſchnitte AP, AQ, AS unter einander und zum Durchmeſſer AD.* Denn da $AM^2 = AB \times AP$, $AN^2 = AB \times AQ$, $AR^2 = AB \times AS$ iſt, ſo verhält ſich $AM^2 : AN^2 : AR^2 : AB^2 = AP : AQ : AS : AB$. Sind alſo z. B. die letztern Abſchnitte ſtetig proportional, ſo ſind es auch die Quadrate der Sehnen, und mithin die Sehnen ſelbſt (Gregor III. 20).

Folglich verhalten ſich auch hier, aus denſelben Gründen wie in α, $AM^3 : AN^3 : AR^3 = AP \times AM : AQ \times AN : AR \times AS$, und auch dieſe Rechtecke ſtehn in dreymal ſo hohem Verhältniſs als die Sehnen AM, AN, AR. (Gregor III. 92.)

γ) *Berühren ſich zwey Kreiſe im Punkte A,* ſo ſind ihre Durchmeſſer Stücke derſelbe graden Linie, die durch den Punkt A geht *. Fig. 57.

*II. 16. f. 1.

Sind daher DF, GI etc. Perpendikel auf dieſem Durchmeſſer, welche den einen Kreis in E, H etc. den andern in F, I etc. durchſchneiden, ſo verhält ſich ſowohl $AE^2 : AH^2 = AD : AG$, als auch $AF^2 : AI^2 = AD : AG$, und mithin ſind die Quadrate der Sehnen im einen Kreiſe, mit den Quadraten der beyden Sehnen des andern Kreises, und also diese Sehnen untereinander proportional, oder $AE : AH = AF : AI$. (Greg. III. 18.)

Auch verhalten sich die Quadrate je zwey solcher Sehnen aus den verschiednen Kreisen $AF^2 : AE^2 : AD^2$ wie die Durchmesser der Kreise $AB : AC : AD$, weil $AF^2 = AD \times AB$ und $AE^2 = AD \times AC$ ist. Ist daher AD die dritte Proportionallinie zu den beyden Durchmessern, so verhält sich auch $AF^2 : AE^2 = AE^2 : AD^2$ und $AF : AE = AE : AD$, daher dann auch AE die mittlere Proportionallinie zwischen AD und AF ist. (Greg. III, 19.)

Fig. 58. Zusatz II. *Wenn sich mehrere Kreise im Punkte A berühren, und man zieht aus einem Punkte B ihrer gemeinschaftlichen Tangente grade Linien, welche diese Kreise durchschneiden, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche jeder der Kreise auf den durchschneidenden Linien abschneidet, von gleicher Grösse, z. B.* $BD \times BI = BE \times BH = BF \times BG$, *oder* $bf \times bg = bd \times be$. Denn jedes dieser Rechtecke ist dem Quadrat der berührenden Linie, AB^2 oder ab^2, gleich *. (Greg. III. 68.)

* 22. 2.

Beschreibt man daher um irgend einen Punkt B in der gemeinschaftlichen Tangente einen Kreis, der die sich berührenden Kreise in den Punkten F durchschneidet, und zieht durch diese Punkte F grade Linien, welche die Kreise zum zweyten male in Punkten G durchschneiden, so liegen alle diese Punkte G im Umfange eines mit dem erstern concentrischen Kreises. Denn die Rechtecke $BF \times BG$ und die Linien BF sind insgesammt gleich, folglich auch die Linien BG. (Greg. III. 56.)

Zusatz III. *Ist die Sehne IG dem Halbmesser des Kreises gleich, und man zieht durch den einen Endpunkt derselben einen Durchmesser, durch den andern eine Tangente, die sich beyde in o schneiden*, so wird GCI ein gleichseitiges Dreyeck, aus dessen Spitze Go nach der verlängerten Grundlinie geht. Folglich muss $Go^2 = Co \times Io + CG^2$, und da zugleich $Go^2 = Ho \times Io$ ist*, $CG^2 = Ho \times Io - Co \times Io = HC \times Io$, folglich, da $HC = CG$ ist, auch $Io = CG$ seyn. *Die Tangente durchschneidet also in diesem Fall den verlängerten Durchmesser so, dass Io dem Halbmesser gleich*, folglich $Co = HI$, und da sich die rechtwinkligen Dreyecke CGI, IGH decken, *auch* $Go = GH$ *ist*, daher $GH^2 = Io \times Ho = IG \times (IG + HI) = 3.\ CG^2$ *wird*. (Greg. III. 22). Fig. 55. * 21. * 22. 2.

Zusatz IV. α) *Sind von einem Punkte O ausserhalb eines Kreises zwey schneidende Linien OBA, OED so nach dem Kreise gezogen, dass das Quadrat der einen Verlängerung EO, dem Rechteck aus der andern Sehne AB und ihrer Verlängerung BO gleich ist, so ist umgekehrt auch das Quadrat der zweyten Verlängerung BO dem Rechteck aus der erstern Sehne DE und ihrer Verlängerung EO gleich.* Denn ist $EO^2 = AB \times BO$, so ist auch, wenn man beyderseits BO^2 hinzufügt, $EO^2 + BO^2 = AB \times BO + BO^2 = BO \times AO = EO \times DO^* = EO^2 + EO \times DE$, und mithin $BC^2 = EO \times DE$. Ist also EO eine mittlere Proportionallinie zwischen AB, BO, so ist umgekehrt auch BO eine mittlere Proportionallinie zwischen DE und EO. *22. 2.

β) *Sind dagegen die beyden Sehnen so gezogen, daſs die Rechtecke aus den Sehnen, den Rechtecken aus ihren Verlängerungen gleich sind, AB × DE = BO × EO so sind diese Verlängerungen in verkehrter Ordnung genommen, zwischen den beyden Sehnen AB, DE zwey mittlere Proportionallinien**. Denn ist

* V. 5.

α) $AB \times DE = BO \times EO$, mithin $\frac{AB}{EO} = \frac{BO}{DE}$, und

man fügt $AB \times BO$ zu den gleichen Rechtecken hinzu, so wird $AB \times DO = AO \times EO$. Nun ist,

$$EO \times DO = AO \times BO\,*,$$

* 22. 2.

mithin, wenn man Gleiches durch Gleichem dividirt,

$$\frac{AB}{EO} = \frac{EO}{BO} = \frac{BO}{DE} \text{ vermöge } \alpha).$$

Betrachtet man also diese Brüche als Exponenten von Verhältnissen, so sind alle diese Verhältnisse gleich,

$$AB : EO = EO : BO = BO : DE\,*$$

* V. 2.

und folglich sind die Verlängerungen EO, BO *zwey mittlere Proportionallinien zwischen den Sehnen AB, DE**.

* V. 5.

Auch folgt aus jenen Gleichheiten, daſs

$\frac{AB^3}{EO^3} = \frac{AB}{EO} \times \frac{EO}{BO} \times \frac{BO}{DE} = \frac{AB}{DE}$ ist, daſs mithin sich verhält $AB : DE = AB^3 : EO^3$.

Anmerkung. Wäre es also nur möglich zwey gegebne grade Linien AB, DC so in einen Kreis als Sehnen zu legen, daſs die Rechtecke aus denselben, den Rechtecken aus ihren Verlängerungen bis zu ihrem Durchschnittspunkte gleich wären; so hätte man *die Aufgabe, zu zwey gegebnen Linien AB, DE zwey*

[m]ittlere *Proportionallinien zu finden*, und zugleich auch das be[rühm]te *Delische Problem* von der *Verdopplung des Kubus* aufgelöst. [De]nn man fände auf diese Art eine grade Linie EO, deren Kubus [zu]m Kubus von AB des Verhältniss zwey beliebiger Linien DE : AB [hät]te, indem wir in der Streometrie sehn werden, dass die Wür[fel] zweyer Linien sich wie die dritten Potenzen der Zahlausdrü[cke] dieser Linien verhalten, grade so wie die Quadrate im Ver[hält]niss der zweyten Potenzen dieser Zahlausdrücke stehn. Auf [die]se Aufgabe hat *Vieta* (Opera p. 242) dieses berühmte Problem [zur]ückgeführt, doch auf einen langwierigeren und weniger ele[gan]ten Wege, als es hier geschehn ist.

Allein *zwey grade Linien auf die geforderte Art einem Kreis [e]inschreiben, ist eine Forderung, welche die Kräfte der Elemen[targ]eometrie übersteigt.* Dieses läst sich nicht durch grade Linie [und] Kreis allein, sondern nur durch Hülfe der Kegelschnitte oder [and]rer Curven wissenschaftlich bewerkstelligen, und zwar aus ähn[lic]hen Gründen, aus denen wir die Unmöglichkeit auf diesem [We]ge einen Bogen oder Winkel in drey gleiche Theile zu thei[len] deducirt haben *. *Mechanische Verfahren* und *Instrumente* dies zu bewerkstelligen, lassen sich indes mehrere erdenken. *II. 30. a. 2.

Noch einige andre Wege, dieses Problem aufzulösen, findet [ma]n in den Bemerkungen zu diesem Werke.

Zusatz V. α) *Ist in einem Dreyeck ABC, aus der* Fig. 59 *[Spi]tze nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, [ein]e grade Linie AG gezogen, und man nimmt in einem der [Sch]enkel, z. B. in AB, einen Punkt E so, dass sich verhält [AB]: AE = BG × CG : AG², und zieht GE; so ist allemal [de]r Winkel AGE, gleich dem Winkel ACG des gegebnen Dreyecks.* Denn zieht man durch B eine Parallellinie [mit] EG, welche die verlängerte Linie AG im Punkte F durchschneidet, so theilen die beyden Parallellinien

* 7. EG, BF die Schenkel des Winkels A proportional,
*3. f. 2. ſo daſs ſich verhält $BE : AE = FG : AG = FG \times AG : AG^2$. Die Verhältniſſe der Rechtecke, $BG \times CG : AG^2$ ul $FG \times AG : AG^2$ ſind alſo demſelben Verhältniſs, $BE : A$, mithin untereinander gleich, daher auch die Rechtece
* V. 2. $BG \times CG$ und $FG \times AG$ gleich ſeyn müſſen *. Da übdem BC und AF grade Linien ſind, die ſich im Punk G ſchneiden, ſo liegen die vier Punkte A, B, F, G i
*(f. 4.) einer Kreislinie *, und da in dieſer die Winkel F ud
*II23Z1 C über derſelben Sehne AB ſtehn, ſo ſind ſie gleich,
*I.25.21. alſo $\angle F = AGE^* = C$.

β) *Iſt Ag nach einem Punkt in der verlängertn Grundlinie gezogen, und man nimmt auf der Verlämrung des Schenkels AB einem Punkt e ſo, daſs ſich verhlt $Be : Ae = Bg \times Cg : Ag^2$, und zieht ge, ſo iſt, je nachan e auf der Verlängerung über A oder über B hinaus liet, der Winkel Age dem Winkel ACg, oder deſſen Nebenwinel ACB gleich.* Denn vermöge derſelben Gründe ſid, wenn man die vorige Conſtruction wiederholt, ie Rechtecke $Bg \times Cg$ und $Ag \times fg$ gleich, mithin A, B, C, f Punkte in einer Kreislinie, nur daſs die Winel ACB und $f = Age$ im erſten Fall einander gegenüer, im zweyten hingegen auf derſelben Sehne AB ſtein, und daher f im erſten Fall dem Nebenwinkel on
* II, 27. ACB *, d. h. ACg, im zweyten aber dem Winkel ACB ſelbſt gleich iſt. Dieſe Lage des Punktes e richtet ſich aber danach, *ob das Rechteck $Bg \times Cg$ gröſser der kleiner als Ag^2 iſt.* Im erſten Fall muſs der Punkt in der Verlängerung über A, im zweyten in der Verängerung über B hinaus liegen.

γ) Durch die umgekehrte Schlufsfolge erhellt auch *der umgekehrte Satz, dafs falls man GE oder ge fo zieht, dafs der Winkel AGE = ACG* oder *∠ Age im erften Fal[l] = ACg, im zweyten = ACB ift, fich allemal verhält* *BE : AE = BG × CG : AG²* oder *Be : Ae = Bg × Cg : Ag².* * II. 2[...]

Diefe Ausfagen, eigentlich Zufätze zu Lehrfatz 20, find in *Simfons* Wiederherftellung von *Apollonius* ebnen Oertern, de zweyten Buchs drittes Lemma.

[LEHRSATZ 23.]

Wenn zwey Sehnen fich unter rechten Winkeln durchfchneiden, fo find ftets die Quadrate aus den vier Abfchnitten zufammengenommen dem Quadrat des Durchmeffers gleich. Fig. 60.

Durchfchneiden fich beyde Sehnen *im Mittelpunkte*, fo find fie Durchmeffer, mithin die vier Abfchnitte Halbmeffer. Durchfchneiden fie fich *rechtwinklig in einem Punkte des Umfangs*, fo bilden fie einen Winkel der auf einem Halbkreife fteht*, und folglich mit dem *II. 23 f. 2 Durchmeffer als Hypotenufe ein rechtwinkliges Dreyeck *. In diefen beyden Fällen liegt die Wahrheit des Satzes aus Lehrfatz 4. Zufatz 3. und durch den Pythagoreifchen Lehrfatz * am Tage. * 12.

Durchfchneiden fich hingegen die beyden Sehnen AB, DE *rechtwinklig in einem Punkte F, der* entweder *innerhalb* oder *aufserhalb des Kreifes liegt*, fo verbinde man ihre Endpunkte durch grade Linien AE, DB, und ziehe durch einen derfelben einen Durchmeffer DCG.