Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 23.] Wenn zwey Sehnen sich unter rechten Winkeln durchschneiden, so sind stets die Quadrate aus den vier Abschnitten zusammengenommen dem Quadrat des Durchmessers gleich.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

γ) Durch die umgekehrte Schlufsfolge erhellt auch *der umgekehrte Satz, dafs falls man GE oder ge fo zieht, dafs der Winkel AGE = ACG* oder *∠ Age im erften Fall = ACg, im zweyten = ACB ift, fich allemal verhält* $BE : AE = BG \times CG : AG^2$ *oder* $Be : Ae = Bg \times Cg : Ag^2$. * II. 23

Diefe Ausfagen, eigentlich Zufätze zu Lehrfatz 20, find in *Simfons* Wiederherftellung von *Apollonius* ebnen Oertern, des zweyten Buchs drittes Lemma.

[LEHRSATZ 23.]

Wenn zwey Sehnen fich unter rechten Winkeln durchfchneiden, fo find ftets die Quadrate aus den vier Abfchnitten zufammengenommen dem Quadrat des Durchmeffers gleich. Fig. 60.

Durchfchneiden fich beyde Sehnen *im Mittelpunkte*, fo find fie Durchmeffer, mithin die vier Abfchnitte Halbmeffer. Durchfchneiden fie fich *rechtwinklig in einem Punkte des Umfangs*, fo bilden fie einen Winkel der auf einem Halbkreife fteht*, und folglich mit dem Durchmeffer als Hypotenufe ein rechtwinkliges Dreyeck *. In diefen beyden Fällen liegt die Wahrheit des Satzes aus Lehrfatz 4. Zufatz 3. und durch den Pythagoreifchen Lehrfatz * am Tage. *II. 23 f. 2 * 12.

Durchfchneiden fich hingegen die beyden Sehnen AB, DE *rechtwinklig in einem Punkte F, der* entweder *innerhalb* oder *aufserhalb des Kreifes liegt*, fo verbinde man ihre Endpunkte durch grade Linien AE, DB, und ziehe durch einen derfelben einen Durchmeffer DCG.

Im *ersten Fall*, wenn F im Kreise liegt, hat der Winkel DFB zu seinem Maasse die halbe Summe der
* II. 25. Bogen DB, AE *, welche seine Schenkel umspannen. Da er nun als ein rechter Winkel den vierten Theil der Kreislinie zu seinem Maasse hat, so müssen die Bogen DB + AE dem Halbkreise, folglich dem Bogen DB + BG gleich seyn. Mithin sind die Bogen AE und BG, also auch ihre Sehnen, untereinander gleich. Ueberdem ist, wenn man BG zieht, DBG ein Dreyeck im Halbkreise, folglich rechtwinklig. Es ist also vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes in den drey rechtwinkligen Dreyecken AFE, DFB, DBG, erstens $BG^2 = AE^2 = AF^2 + FE^2$, zweytens $DB^2 = DF^2 + FB^2$, und drittens $DG^2 = BG^2 + DB^2$, folglich $DG^2 = AF^2 + FE^2 + DF^2 + FB^2$. (Greg. III. 77)

Im *zweyten Fall*, wenn F *ausserhalb* des Kreises liegt, hat der Rechte Winkel F zu seinem Maasse den halben Unterschied der beyden Bogen BMD — AE, die
* II. 25. seine Schenkel umspannen *, daher der Unterschied dieser Bogen dem Halbkreise BMD — BG, mithin AE = BG seyn muss. Alles übrige ist wie im vorigen Fall. Auch hier haben wir wieder drey rechtwinklige Dreyecke AFE, BFD, GBD, und aus der Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes auf sie, folgt eben so wie vorhin,

$$DG^2 = AF^2 + BF^2 + DF^2 + EF^2;$$

so dass also in allen Fällen die Quadrate der abgeschnittnen Stücke zusammengenommen dem Quadrat des Durchmessers gleich sind.

Zusatz I. *Zieht man, falls beyde Sehnen sich im Kreise rechtwinklig durchschneiden, noch AD und EB, so sind in dem Viereck ABED die Quadrate von je zwey der gegenüberstehenden Seiten zusammengenommen untereinander, und mit dem Quadrat des Durchmessers von gleicher Grösse,* $AD^2 + EB^2 = AE^2 + DB^2 = DG^2$, indem sie vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes den Quadraten aus den vier Abschnitten der Sehnen, die sich in F rechtwinklig durchschneiden, gleich sind. Der *Inhalt des Vierecks AEBD ist gleich* $\frac{1}{2}$ *AB × DE* *, oder wie wir im folgenden Buche sehn werden, vermöge des Ptolemäischen Lehrsatzes gleich $\frac{1}{2}$ AD × EB + $\frac{1}{2}$ AE × BD. (Greg. III. 75. 76.)(— *Liegt der Durchschnittspunkt F ausserhalb des Kreises,* so durchschneiden sich zwar die Linien AD, BE, und bilden mit AE, BD kein Viereck, aber dem ungeachtet gilt auch von ihren Quadraten dieser Zusatz. * 5.

Zusatz II. *Eine Sehne FG, welche mehrere parallele Sehnen DE rechtwinklig in den Punkten H, und den mit ihnen parallelen Durchmesser AB im Punkte K durchschneidet, theilt jede derselben so ein, dass* $DH \times HE + HK^2$ *stets von einerley Grösse, und zwar dem Rechteck AK × KB gleich ist.* Denn da der Durchmesser AB die Sehne FG, die auf ihn senkrecht steht, im Punkte K halbirt *, und diese von jeder der parallelen Sehnen in einem Punkte H ungleich getheilt wird; so ist stets GH × HF $= KF^2 - KH^2$ *, und zugleich GH × HF = DH × HE *, so wie $KF^2 = AK \times KB$ *, folglich DH × HE = AK × KB $- KH^2$ und DH × HE + KH^2 = AK × KB. (Greg. III. 72). Fig. 61. * II. 9. * II f. 1. α * 22. 1. * (f. 5.)