# Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 24.] Wenn man auf dem Durchmesser AB eines Kreises, oder auf dessen Verlängerung, in einem willkürlichen Punkte D oder d ein Perpendikel errichtet, und zieht von dem einen Endpunkte des ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

[LEHRSATZ 24.]

Fig. 62. *Wenn man auf dem Durchmeſſer AB eines Kreiſes, oder auf deſſen Verlängerung, in einem willkührlichen Punkte D oder d ein Perpendikel errichtet, und zieht von dem einen Endpunkte des Durchmeſſers z. B. von A aus, grade Linien, welche die Kreislinie in Punkten F, das Perpendikel in Punkten G oder g durchſchneiden, ſo ſind die Rechtecke aus je zwey Abſchnitten AF und AG gleich dem Rechtecke aus dem Durchmeſſer AB und dem Abſchnitt AD deſſelben, der am Punkte A anliegt, und jene Rechtecke ſind insgeſammt untereinander gleich.*

Man ziehe FB, ſo iſt der Winkel AFB ein Winkel im Halbkreiſe, mithin ein rechter, und ſo auch ſein Nebenwinkel BFg. Ueberdem ſind die Winkel bey D und d, der Vorausſetzung gemäſs rechte.

Für Perpendikel welche *auf dem Durchmeſſer ſelbſt*, oder auf deſſen *Verlängerung über B hinaus* aufſtehn, ſind daher die beyden Winkel D und F oder d und F, zuſammengenommen zwey rechten gleich, daher ſich um das Viereck BDGF oder BdgF ein Kreis beſchreiben
*II, 27. läſst *, worin FG, BD oder gF, dB Sehnen ſind, die ſich verlängert im Punkte A durchſchneiden, daher ſtets AF × AG = AB × AD, ſo wie AF × Ag = AB ×
*22. f. 4. Ad iſt *.

Für Perpendikel, welche auf der *Verlängerung des Durchmeſſers über A hinaus* errichtet ſind, ſtehn die Schenkel der rechten Winkel bey F' und d' über derſelben Grundlinie Bg', daher auch in dieſem Fall B,

F', d', g' Punkte in einer Kreislinie *, und F'g', Bd' * II. 26.
Sehnen sind, die sich jetzt aber innerhalb des Kreises im Punkte A durchschneiden, so daſs auch für diesen Fall stets $AF' \times Ag' = AB \times Ad'$ ist.

Für ein Perpendikel, *welches im Endpunkte des Durchmessers B aufsteht*, und daher zugleich eine *Tangente des Kreises ist*, ist $A\gamma \times \gamma F = \gamma B^2$*, überdem $A\gamma^2$ * 22. 2.
$= \gamma B^2 + AB^2$, folglich auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, $A\gamma \times AF = AB^2$ *. * E. 3.

Wo also auch auf dem Durchmesser oder auf dessen Verlängerung, das Perpendikel aufstehe, und wie man auch aus dem Punkte A grade Linien nach dem Kreise und dem Perpendikel gezogen haben möge, immer ist das Rechteck aus den beyden Abschnitten einer solchen Linie AF, oder Ag, oder F'g, dem Rechteck $AB \times AD$, oder $AB \times Ad$ etc. gleich, daher auch *bey demselben Kreise und für dasselbe Perpendikel* (für die AB und AD von gegebner und unveränderlicher Grösse sind) *jene Rechtecke $AF \times AG$ etc. insgesammt unter einander gleich seyn müssen.*

*Folgerung* 1. *Steht das Perpendikel auf dem Durchmesser selbst auf*, so durchschneidet es die Kreislinie in irgend einem Punkte E, und dann ist $AE^2 = AB \times AD$ *. Mithin *ist* in diesem Fall *jedes der Rechtecke $AF \times AG = AE^2$, und folglich die Sehne AE die mittlere Proportionallinie zwischen je zwey Abschnitten AF und AG*; welches eine artige Verallgemeinerung der Aussage in Lehrsatz 22 Zusatz I ist. *Wenn man folglich durch den einen Endpunkt irgend einer Sehne AE einen* *22.Z.1.

*Durchmesser, und durch den andern ein Perpendikel auf diesem Durchmesser zieht, so ist die Sehne AE die mittlere Proportionallinie zwischen jeder andern Sehne, die durch den Punkt A geht, und dem an A anliegenden Stück derselben, das durch den Perpendikel abgeschnitten wird.* (Hugenii Horol. Oscillat. p. 49. Edit. 1673.)

Fig 63. α) Beschreibt man mit AE um A einen Kreis, welcher die Linien AF in Punkten H durchschneidet; so sind folglich auf ihnen allen von A aus drey stetig proportionale Stücke AG, AH, AF abgeschnitten, da $AE^2 = AH^2 = AG \times AF$ ist. (Greg. III. 39.)

Fig. 62. β) Zieht man FE, so entsteht ein Dreyeck FEG, aus dessen Spitze nach der verlängerten Grundlinie, eine grade Linie EA so gezogen ist, dass $EA^2 = GA \times FA$ ist. Folglich verhält sich stets $GE^2 : FE^2 = GA$
*20. Z. 5. $: FA$ *.

*Folgerung* 2. Verlängert man eine Sehne AF, bis sie in γ die Tangente durchschneidet, welche den Kreis im entgegengesetzten Endpunkte des Durchmessers durch A berührt; so ist *allemal der Durchmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Sehne AF und der verlängerten Sehne Ag*, weil nach unserm Beweise $AF \times A\gamma = AB^2$ ist. Fällt man von F auf diesen Durchmesser das Perpendikel Fδ, so ist überdem $AF^2 =$
*22. Z. 1. $AB \times A\delta$*, und es verhält sich daher $A\delta : AF = AF : AB = AB : A\gamma$, oder *AF und AB sind zwey mittlere Proportionallinien zwischen Aδ und Aγ*; ein Satz worauf sich mechanische Vorrichtungen gründen lassen, um zu zwey

gegebnen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden *. (Greg. III. 17.) *22. Z42

*Folgerung* 3. *Wenn man durch einen gegebnen Punkt A willkührlich grade Linien zieht, und auf diesen zwey Punkte F und G so nimmt, dass ein Rechteck aus den Abschnitten AF, AG stets einerley Flächenraum, z. B. dem gegebnen Raume S gleich ist; so muss* 1) *falls der geometrische Ort des einen dieser Punkte G eine grade Linie EE' von gegebner Lage ist, der geometrische Ort des zweyten Punktes F eine Kreislinie von gegebner Grösse und Lage seyn*: und 2) *falls umgekehrt der Ort des Punkts F eine gegebne Kreislinie ist, die durch den gegebnen Punkt A geht, der geometrische Ort des zweyten Punktes G eine grade Linie von gegebner Lage seyn.* Man fälle nemlich *in Fall* 1 von A auf die gegebne Linie EE' ein Perpendikel AD, verwandle den gegebnen Raum S in ein Rechteck über AD, und nehme auf AD oder dessen Verlängerung, AB gleich der Höhe dieses Rechtecks, so dass $AD \times AB = S$ wird, und beschreibe dann um AB als Durchmesser *eine Kreislinie*; so, behaupte ich, ist diese der geometrische Ort der Endpunkte F. Denn erstens wird diese Kreislinie von jeder Linie die durch den Punkt A geht, die einzige Tangente AK ausgenommen, in A und einem zweyten Punkte F durchschnitten*; die Tangente aber *II. 12. steht auf dem Durchmesser AB senkrecht*, läuft folglich mit der gegebnen Linie EE' parallell *, und jede andre Linie durch A durchschneidet nothwendig auch EE' in irgend einem Punkte G, weil sonst durch einen Punkt A mit einer gegebnen Linie EE' verschiedne

*II. 12. *II. 12. * I. 21.

*I 24.Z2 Parallellinien möglich wären *. Zweytens ist für jede durchschneidende Linie nach unserm Lehrsatz AF × AG = AD × AB = S weshalb alle Punkte F der so beschriebnen Kreislinie die verlangte Eigenschaft haben, aber kein Punkt ausserhalb derselben. — Verwandelt man umgekehrt *in Fall* 2 den gegebnen Raum S in ein Rechteck über dem Durchmesser AB, nimmt AD der Höhe dieses Rechtecks gleich, und errichtet durch D auf AB ein Perpendikel EE'; so ist dieses der Ort der Punkte G, grade aus denselben Gründen. In diesem Fall darf man jedoch die Bestimmung nicht überfehn, *dass der gegebne Punkt A in der gegebnen Kreislinie liegen soll.* Denn ist dieses nicht der Fall, und liegt er innerhalb des Kreises, so werden wir in der Folge sehn, dass der Ort der Punkte G keine grade Linie, sondern gleichfalls eine Kreislinie ist *.

Cf. 24 f. 1 Anm.

Dieser interessante Satz wird in *Apollonius ebnen Oertern* I. 8 und 9 Fall 1. folgendermasen ausgedrückt: „Wenn aus einem gegebnen Punkte A, auf einer graden Linie zwey Stücke AF, AG abgeschnitten werden, welche ein gegebnes Rechteck enthalten, und der Endpunkt des einen Stücks G eine der Lage nach gegebne grade Linie EE' *berührt*, so berührt der Endpunkt F des andern Stücks einen der Lage nach gegebnen Umkreis"; ein Ausdruck der keine Nacachmung verdient. Die Analysis bey Simson in Fall 1 läuft darauf hinaus, dass wenn G ein Punkt in der gegebnen Linie EE' ist, und es soll AF × AG = S = AD × AB seyn, F, G, D, B Punkte in einer Kreislinie *, folglich

*22. f. 4 wenn man FB zieht, die Winkel bey F und D gleich, und da D ein rechter ist, auch bey F stets rechte Winkel seyn müssen. Jeder solcher Winkel steht aber auf der gegebnen Linie AB; folglich ist der Ort der Punkte F eine Kreislinie über AB als Durchmesser beschrieben *. Die Analysis in Fall 2 liegt am Tage. — Mehrere analoge Sätze, findet man im nächsten Buche. *II. 26. f. 2.

Zusatz I. α) *Nimmt man dagegen auf jeder Sehne AF, die aus einem gegebnen Punkte A im Umfange eines gegebnen Kreises gezogen wird, einen Punkt G so, dass das Rechteck aus den beyden Abschnitten einem gegebnen unveränderlichen Raum gleich ist, $AG \times GF = S$; so ist der geometrische Ort der Punkte G, eine Kreislinie, welche mit der gegebnen concentrisch ist.* Fig. 64. Denn ist G ein Punkt von der bedungenen Beschaffenheit, und man zieht durch ihn einen Durchmesser HI, so ist erstens $AG \times GF = HG \times GI$ *, und zweytens, *22. 1. weil der Durchmesser in C gleich und in G ungleich getheilt ist, $HG \times GI = CI^2 - CG^2$ *. Mithin muss *11. f. 1. $AG \times GF = S = CI^2 - CG^2$ oder $CG^2 = CI^2 - S$ seyn. Nun aber ist der Kreis, also auch das Quadrat über dessen Halbmesser, $CI^2$, mithin auch CG gegeben und unveränderlich, und daher der Ort der Punkte G eine Kreislinie, die mit der Seite eines Quadrats $= CI^2 - S$ *als Halbmesser*, um den Mittelpunkt G beschrieben wird. Der Ort ist unmöglich, wenn $S < CI^2$ ist; da in der That jedes Rechteck aus den beyden Abschnitten einer Sehne kleiner als das Quadrat des Halbmessers seyn muss *. *11. Z. 1.

β) *Nimmt man auf den Verlängerungen der Sehnen AF, welche aus dem Punkte A in einer gegebnen Kreislinie gezogen sind, Punkte g so, dass die Rechtecke $Ag \times gF = S$ sind*, und zieht von g durch den Mittelpunkt gH'; so ist erstens $Ag \times gF = H'g \times gI'$ * $= S$, *22. 2.

*11. f. zweytens $H'g \times gI' = Cg^2 - CI'^2$ *, folglich $Cg^2 = S + CI'^2$, alſo wiederum *der Ort der Punkte g eine mit der gegebnen concentriſche Kreislinie*, deren *Halbmeſſer* in dieſem Fall die Seite eines Quadrats $S + CI^2$ iſt, und die alſo den gegebnen Kreis einſchlieſst.

Dieſe brauchbaren Oerter, werden bey Apollonius nicht ausdrücklich aufgeführt. Man ſieht leicht, daſs der letztere Ort auch für den Fall gilt, wenn g auf der Verlängerung der Sehne über A hinaus liegt, und $Ag' \times g'F = S$ iſt.

Zuſatz II. α) Da für jedes Perpendikel auf dem Durchmeſſer AB oder auf deſſen Verlängerung, erſtens
* 12. nach dem Pythagoreiſchen Lehrſatze $AG^2 = AD^2 + GD^2$*, oder $AG \times AG = AD \times AD + GD^2$ und zweytens nach unſerm jetzigen Lehrſatze $AG \times AF = AD \times AB$ iſt; ſo muſs, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, auch, *falls G im Kreiſe liegt*, alſo $AF > AG$ iſt, $AG \times GF = AD \times DB \times GD^2$ ſeyn, *falls* hingegen *g auſſerhalb des Kreiſes liegt*, alſo $AF < Ag$ iſt, $Ag \times gF = gd^2 \pm Ad \times dB$, wo das obere Zeichen gilt, wenn d auſserhalb des Kreiſes liegt, das *untere*, wenn d noch im Kreiſe fällt, indem in dieſem letztern Fall $Ad^2$ um das Rechteck $Ad \times dB$ kleiner als $Ad \times AB$, folglich dieſes Rechteck noch von $gd^2$ abzuziehn iſt.

β) Auf eine ähnliche Art iſt im rechtwinkligen Dreyeck AFB, $AF^2 = AB^2 - FB^2$ oder $AF \times AF = AB \times AB - FB^2$ folglich $AF \times FG = AB \times BD - FB^2$, und $AF \times Fg = FB^2 \pm AB \times dB$, wo wieder das *obere* oder

untere

*untre* Zeichen gilt, je nachdem d *außerhalb* oder *innerhalb* des Kreises liegt.

γ) Zieht man daher von irgend *einem Punkte g außerhalb des Kreises* ein Perpendikel gd nach einem beliebigen Durchmesser AB oder nach dessen Verlängerung, und zugleich irgend eine den Kreis in H und I durchschneidende Linie; so ist immer, *falls* das Perpendikel gd auf dem Durhmesser selbst aufsteht, also d im Kreise liegt, $gd^2 - Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$ *, *falls* hingegen das Perpendikel gd auf der Verlängerung des Durchmessers aufsteht, $gd^2 + Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$. (Greg. III. 87.) — Ist *G ein Punkt im Kreise*, so ist $AD \times DB - GD^2 = AG \times GF = Hg \times gI$. (Apollonius ebne Oerter II. 8. 9. Zus.)

[L E H R S A T Z 25.]

*Wenn man durch einen beliebigen Punkt M einer Sehne AH, oder durch irgend einen Punkt m in deren Verlängerung, eine grade Linie MD oder md parallel mit der Tangente AK, welche durch den einen Endpunkt A dieser Sehne geht, zieht, so werden auf jeder andern graden Linie, welche durch den Punkt A geht, und daher den Kreis in einem zweyten Punkte F, die Linie MD oder md hingegen in Punkten G oder g durchschneidet *, zwey Stücke AF und AG oder Ag so abgeschnitten, daß die Rechtecke AF × AG insgesammt dem Rechteck AH × AM, und daher auch untereinander gleich sind.* Fig. 62. *24.f.3.