Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 25.] Wenn man durch einen beliebigen Punkt M einer Sehne AH, oder durch irgend einen Punkt m in deren Verlängerung, eine grade Linie MD oder md parallel mit der Tangente AK, welche durch ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

untre Zeichen gilt, je nachdem d *außerhalb* oder *innerhalb* des Kreises liegt.

γ) Zieht man daher von irgend *einem Punkte g außerhalb des Kreises* ein Perpendikel gd nach einem beliebigen Durchmesser AB oder nach dessen Verlängerung, und zugleich irgend eine den Kreis in H und I durchschneidende Linie; so ist immer, *falls* das Perpendikel gd auf dem Durhmesser selbst aufsteht, also d im Kreise liegt, $gd^2 - Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$ *, *falls* hingegen das Perpendikel gd auf der Verlängerung des Durchmessers aufsteht, $gd^2 + Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$. (Greg. III. 87.) — Ist *G ein Punkt im Kreise*, so ist $AD \times DB - GD^2 = AG \times GF = Hg \times gI$. (Apollonius ebne Oerter II. 8. 9. Zus.)

[LEHRSATZ 25.]

*Wenn man durch einen beliebigen Punkt M einer Sehne AH, oder durch irgend einen Punkt m in deren Verlängerung, eine grade Linie MD oder md parallel mit der Tangente AK, welche durch den einen Endpunkt A dieser Sehne geht, zieht, so werden auf jeder andern graden Linie, welche durch den Punkt A geht, und daher den Kreis in einem zweyten Punkte F, die Linie MD oder md hingegen in Punkten G oder g durchschneidet *, zwey Stücke AF und AG oder Ag so abgeschnitten, daß die Rechtecke AF×AG insgesammt dem Rechteck AH×AM, und daher auch untereinander gleich sind.* Fig. 62. *24. f. 3.

Denn ist AB der Durchmesser, der durch den Endpunkt A der gegebnen Sehne AH geht, so steht die Tangente AK, und also auch jede der Linien MD und md, welche mit ihr parallel laufen, auf dem Durchmesser AB, oder dessen Verlängerung senkrecht *. Die
*II. 12.
graden Linien, welche durch den Punkt A gezogen werden, durchschneiden folglich ein solches Perpendikel MD, wo es auch auf dem Durchmesser, oder dessen Verlängerung aufsteht, und durch welchen Punkt der Sehne A oder deren Verlängerung es folglich geht, stets so, dass die Rechteck AF × AG insgesammt untereinander, also auch insgesammt dem Rechteck AH × AM gleich sind *, so wie die Rechtecke AF × Ag alle untereinander und mit dem Rechteck AH × Am gleiche Grösse haben.
* 24.

Diese Verallgemeinerung des vorigen Lehrsatzes, lässt sich auch leicht durch eine ähnliche Schlussfolge, wie jener, oder aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke beweisen. Da der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne macht, die durch den Berührungspunkt geht, den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitten, z. B. KAm′ den Winkeln im Abschnitt AEH, und KAH den Winkeln im Abschnitt ABH, gleich ist; so lässt sich die Lage der Linien MD auch dadurch bestimmen, dass sie *die Sehne unter Winkeln durchschneiden, welche den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitten gleich sind*, und so drückt Greg. a St. Vinc. III. 73 diesen Satz aus.

Folgerung. 1. *Werden von einem gegebnen Punkte A aus, willkührlich grade Linien gezogen, und auf jeder derselben von diesem Punkte an zwey Abschnitte AF und AG, so genommen, dass, (wenn man von den Punkten G mit ei-*

ner gegebnen Linie Q Parallellinien zieht, und dieſe eine der Gröſse und Lage nach gegebne grade Linie AH entweder ſelbſt, oder deren Verlängerung über H hinaus, in Punkten M durchſchneiden,) immer das Rechteck AF × AG = AH × AM iſt; ſo iſt der geometriſche Ort der Punkte F, eine der Lage und Gröſse nach gegebne Kreislinie.

Denn zieht man durch den gegebnen Punkt A, parallel mit der gegebnen Linie Q, die Linie Kk, und beſchreibt zu dieſer Linie als Tangente und über AH als Sehne einen Kreis; ſo hat, unſerm Lehrſatz zu Folge, dieſe Kreislinie die Eigenſchaft, daſs wenn man aus A irgend eine Sehne AF, und aus irgend einem Punkte G auf ihr, oder auf ihrer Verlängerung, parallel mit der Tangente die Linie GM zieht, AF × AG = AH × AM iſt. Folglich thut jeder Punkt F dieſer Kreislinie unſrer Bedingung genüge. Hingegen kein Punkt P, der nicht in ihr, und doch mit ihr zu einerley Seite der Tangente Kk liegt, weil ſonſt ſowohl AG × AP als auch AG × AF gleich AM × AH, und doch AP gröſser oder kleiner als AF ſeyn müſste, welches unmöglich iſt.

Verlängert man AH über A hinaus, auf die entgegengeſetzte Seite der Tangente Kk, nimmt AH′ gleich AH, und auch hier auf die durch A gezognen Linien zwey Abſchnitte AF, AG ſo, daſs Parallellinien GM mit der Tangente Kk gezogen, auf AH′ Linien AM′ ſo abſchneiden, daſs AF × AG = aH′ × AM′ iſt; ſo muſs der Ort der Punkte F ebenfalls eine über AH′ als Sehne zu Kk als Tangente beſchriebne Kreislinie ſeyn; welche folglich mit der erſtern gleich iſt, ſich mit ihr im Punkte

A berührt, und deren Mittelpunkt mit dem der erstern zu entgegengesetzten Seiten der Linie HH' liegt.

Deshalb ist es einerley ob die Abschnitte AF und AG *auf einerley*, oder *zu verschiedner Seite des Punktes A* genommen werden. Immer sind *zwey gleiche* im Punkte A sich berührende *Kreislinien*, von der erwähnten Beschaffenheit, der Ort Punkte F. Auf dieselbe Art gilt der Ort in Lehrsatz 24 Folg. 3 auch für den Fall, wenn AF und AG Abschnitte einer graden Linie sind, *die zu entgegengesetzten Seiten des Punktes A liegen.*

Uebrigens *bleibt der Ort der Punkte G* unter unsrer gegenwärtigen Voraussetzung gänzlich unbestimmt, da G jeden Punkt in jeder Sehne AF bedeutet. Kömmt aber eine zweyte Bedingung hinzu, so wird dadurch auch der Ort der Punkte G bestimmt. Noch einen andern Beweis für die Aussage in dieser Folgerung findet man in Zusatz. 1.

Folgerung. 2. Durchschneidet die Linie MD die Kreislinie in irgend einem Punkte E, und man zieht AE, so fallen die Punkte F und G beyde in E zusammen, und es ist $AE^2 = AM \times AH$. — Zieht man durch H eine Parallellinie mit der Tangente AK, so fallen die Punkte M und H zusammen, und es ist $AE \times A\gamma = AH^2$. *Man findet also zu zwey gegebnen Sehnen AH, AE, oder AF, AH, die von demselben Punkte A aus gezogen sind, die dritte Proportionallinie AM oder Aγ, wenn man durch den zweyten Endpunkt der Sehne,* welche die mittlere Proportionallinie seyn soll, *eine Parallellinie mit der Tangente durch den Punkt A zieht.*

Fig. 65. *Folgerung* 3. Zieht man von den beyden Endpunkten einer Sehne AH nach irgend einem Punkte im

Kreiſe grade Linien AE, HE, und parallel mit den Tangenten durch die Endpunkte der Sehne die Linien EM, EN, ſo iſt alſo $AE^2 = AH \times AM$ und $HE^2 = AH \times HN$. Daraus folgt

α) daſs ſich verhält $AE^2 : HE^2 = AM : HN$ und, wenn man dieſe gleichen Verhältniſſe beyde mit dem Verhältniſs $AE : HE$ zuſammenſetzt *, $AE^3 : HE^3 = AM \times AE : HN \times HE$. Dieſe Rechtecke ſtehn alſo im dreyfachen Verhältniſſe der Sehnen AE, HE; eine Ausſage, denen in Lehrſatz 22, Zuſatz 1 analog. (Greg. III. 93.) * V. 6.

β) Da im Dreyeck HEM aus der Spitze E nach der verlängerten Grundlinie eine grade Linie EA geht, deren Quadrat gleich iſt dem Rechteck aus den Abſchnitten HA, MA auf der verlängerten Grundlinie, $AE^2 = HA \times MA$; ſo müſſen ſich die Quadrate über den Schenkeln dieſes Dreyecks, wie die Abſchnitte verhalten, oder $HE^2 : ME^2 = HA : MA$ *, und aus denſelben Gründen $AE^2 : NE^2 = AH : NH$. Folglich verhält ſich auch *erſtens* $HE^2 : ME^2 = HA \times LN : MA \times HN$ *. Nun aber iſt dem obigen zu Folge $HE^2 = HA \times HN$, alſo muſs auch $ME^2 = MA \times HN$ ſeyn *, und aus ähnlichen Gründen $NE^2 = NH \times AM$, mithin $ME^2 = NE^2$. *Die beyden mit den Tangenten parallel gezognen Linien EM, EN ſind alſo ſtets von gleicher Länge, und ſchneiden von der Sehne zwey Stücke AM, HN ſo ab, daſs $ME^2 = NE^2 = AM \times HN$ iſt*, (ein Satz den *Clairaut* als zwölfjähriger Knabe gefunden haben ſoll; Krafft Inſtit. geom. ſubl. §. 105.) *20. Z. 5. *3. f. 1. * V. 6.

γ) Iſt *zweytens*, zu Folge der erſten Proportion in β, $HE^2 : ME^2 = HA : MA$; ſo verhält ſich auch

*3. f. 1. $HE^2 : ME^2 = HA^2 : HA \times MA$ * oder, da Folgerung 2 gemäſs $HA \times MA = AE^2$ ist, $HE^2 : ME^2 = HA^2 : AE^2$. Folglich ſind auch die Seiten dieſer Quadrate propor-
4. f. 3. tional $HE : ME = HA : AE$, und mithin iſt $AE \times HE = AH \times EM$. Folglich *muſs in jedem Dreyeck, welches einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, wenn man von der Spitze nach der Grundlinie eine Parallellinie EM mit einer der Tangenten durch die Endpunkte der Grundlinie zieht, das Rechteck aus den beyden Schenkeln AE, HE gleich ſeyn dem Rechteck aus der Grundlinie AH in dieſe Parallellinie EM.* (*Greg. III. 70.*)

Fig. 66. δ) *Zieht man hingegen in einem Dreyeck*, *welches dem Kreiſe eingeſchrieben iſt, aus der Spitze E, durch den Punkt O, der in der Mitte der Grundlinie AH liegt, eine*
* 17. *Sehne EOF*, ſo iſt $AE^2 + EH^2 = 2\,AO^2 + 2\,EO^2$*, oder, da $AO^2 = AO \times OH = EO \times OF$*, und $EO \times OF + EO^2 = EO \times EF$ iſt, *ſtets* $AE^2 + EH^2 = 2\,EO \times EF$.

Fig. 67. *Folgerung 4. Wenn eine grade Linie AH der Gröſse und Lage nach gegeben iſt, und grade Linien MN, welche auf AH oder auf deren Verlängerung über H hinaus in Punkten M aufſtehn, und mit einer gegebnen Linie parallel laufen, werden jede von einer aus dem Punkte A gezognen graden Linie, ſo in einem Punkte E durchſchnitten, daſs das Quadrat über AE, dem Rechteck aus den Linien AH und AM gleich iſt,* $AE^2 = AH \times AM$; *ſo iſt der Ort der Durchſchnittspunkte E ſtets eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse.* Und zwar eine Kreislinie, die man findet, wenn man mit der gegebnen Linie Q, durch den gegebnen Punkt A eine Parallellinie

Kk zieht, und dann über der gegebnen Linie AH, als Sehne, einen Kreis beschreibt, den Kk im Punkte A berührt *. Denn nach Folgerung 2, hat jeder Punkt E in dieser Kreislinie die Eigenschaft, dass wenn man AE, und parallel mit der Tangente durch A, EM zieht, $AE^2 = AH \times AM$ ist: und kein Punkt F, der nicht in der Kreislinie liegt, kann diese Eigenschaft haben, weil sonst entweder eine grade Linie den Kreis in drey Punkten E, F, E durchschneiden, oder es eine Sehne geben müsste, die grösser als der Durchmesser wäre. *II. Afg. 16. 2.

Nimmt man auch auf der Verlängerung der gegebnen Linie AH über A hinaus solche Parallellinien, so wird für diese der Ort der Durchschnittspunkte E' eine der vorigen gleiche Kreislinie, welche jene im Punkte A so berührt, dass die Mittelpunkte und die gleichen Abschnitte zu entgegengesetzten Seiten der verlängerten Linie AH liegen.

Apollonius ebne Oerter II. 3. Fall 1. Simsons Analysis führt dort den Beweis dieses Orts noch auf andre Sätze zurück. Gesetzt nemlich E' sey ein solcher Punkt, für welchen $AE'^2 = AH' \times AM'$ ist, so muss, wenn man durch die drey Punkte E', H', M' einen Kreis beschreibt, AE' diesen Kreis im Punkte E' berühren *; folglich, wenn man E'H' zieht, der Winkel AE'H', dem Winkel AM'E', gleich seyn *. Nun sind für alle Parallellinien M'E', die äussern Winkel AM'E' zu einerley Seite der Linie AH', von gleicher gegebner Grösse, nemlich gleich KAH oder kAH, mithin auch der Winkel AE'H' von gegebner, unveränderlicher Grösse. Jeder der Durchschnittspunkte E' ist also die Spitze eines Dreyecks AE'H' welches über der gegebnen, unveränderlichen Grundlinie AH' steht, und dessen Winkel an der Spitze E', gleichfalls von gegebner Grösse ist, liegt mithin *22 f. 3 α *22 f. 3. β im Bogen, *entweder* des Kreisabschnitts über AH', welcher den gegebnen Winkel KAH faſst, oder des *Kreisabschnitts* unter AH' der den Nebenwinkel kAH faſst, mithin in einem *Kreiſe*, den man findet, wenn man über AH als Sehne und zu Kk als Tangente, einen Kreis beschreibt.

Fig. 68. Zuſatz I. *Bleibt alles, wie im vorigen Fall, nur mit dem Unterſchied, daſs die Linien aus dem Punkte A gezogen, die parallelen Linien MN ſo in Punkten E durchſchneiden, daſs entweder 1) das Quadrat über AE um einen gegebnen Raum S gröſser oder kleiner als das Rechteck aus den Abſchnitten AH, AM iſt, $AE^2 = AH \times AM \pm S$; oder daſs 2) $AE^2 = S - AH \times AM$ iſt; ſo iſt ebenfalls der geometriſche Ort der Durchſchnittspunkte E, eine Kreislinie von gegebner Gröſse und Lage.*

1) Geſetzt es ſind ME und AE zwey Linien, von der Beſchaffenheit, daſs $AE^2 = AH \times AM \pm S$ iſt; ſo muſs für den Fall des obern Zeichens AE^2 *gröſser*, im Fall des untern *kleiner* als das Rechteck $AH \times AM$ ſeyn, und daher muſs es in jenem Fall auf AE ſelbſt, in dieſem auf der Verlängerung von AE über E hinaus, einen Punkt von der Beſchaffenheit geben, daſs das Rechteck $AE \times AD = AH \times AM$ iſt; und zugleich muſs in beyden Fälln $AE \times ED = S$ ſeyn. Dann liegen aber *erſtens* die vier Punkte E, D, H, M auf derſelben Kreis-
*22. f. 4. linie *, und zieht man DH, ſo ſind die Winkel ADH und AME von gleicher Gsöſse, weil entweder die Nebenwinkel von beyden, Winkel am Umfange ſind, die
* II. 23. auf demſelben Bogen ſtehn *, oder weil der Nebenwinkel von ADH dem Winkel AmE, in einem Vierecke, welches dem Kreiſe eingeſchrieben iſt, gegenüberſteht,

oder umgekehrt*. Nun ist der Voraussetzung gemäss *II. 27.
ME der gegebnen Linie AK parallel, also der Winkel AME immer von einerley Grösse; folglich auch ADH; und da überdem AH von gegebner unveränderlicher Grösse ist, so ist *der geometrische Ort der Punkte D eine Kreislinie*, welche über AH als Sehne, und zu AK als Tangente beschrieben wird, die mithin durch den Punkt A geht, und deren *Halbmesser* CA seyn mag. Nun liegen *zweytens* auf den Sehnen AD dieser Kreislinie, die insgesammt aus dem gegebnen Punkte A ausgehn, die Punkte E so, dass im Fall des *obern* Zeichens $AE \times ED = S$, im Fall des *untern* $AE \times Ed = S$ ist. Mithin muss vermöge des Orts in Lehrsatz 24 Zusatz 1, *der geometrische Ort der Punkte E, eine der vorigen concentrische Kreislinie*, und zwar *ihr Halbmesser CE* die Seite eines Quadrats seyn, welches im Fall des *obern* Zeichens gleich $CA^2 + S$*, *24Z1.β
im Fall des *untern* $CA^2 - S$ ist *.— Nimmt man auch *24Z.1α
auf der Verlängerung der gegebnen Linie AH über A hinaus Parallellinien M′E′, so sind *zwey gleiche Kreise*, die im Fall des *obern* Zeichens sich duchschneiden, im Fall des *untern* aber um den doppelten Unterschied der beyden Halbmesser von einander abstehn, und in denen AH verlängert zwar gleiche, aber entgegengesetzt liegende Abschnitte bildet, *der Ort der Punkte E* *. *.24.f.1,

2) Soll $AE^2 = S - AH \times AM$ seyn, so müssen die Parallellinien MN so von den Linien AE durchschnitten werden, dass $AE^2 + AH \times AM = S$ ist, folglich $AE^2 < S$ seyn. In diesem Fall muss es also auf der Verlängerung jeder Linie AE, über A hinaus, einen Punkt

D' geben, der so liegt, daſs das Rechteck aus AE und ED' dem gegebnen Raume S gleich, oder AE × ED' = S ist, da denn $AE^2 + AH \times AM = AE \times ED'$, mithin, wenn man beyderseits AE^2 fortnimmt, AH × AM = AE × AD' seyn muſs. Nimmt man daher auf der Verlängerung von AH über A hinaus, AH' gleich AH, so ist auch AH' × AM = AE × AD', und da H'M und D'E grade Linien sind, die sich im Punkte A schneiden, so liegen die vier Punkte H', D', E, M in einer
* II. 23. Kreislinie, und es ist der Winkel AD'H = AME *, mithin, von gegebner, unveränderlicher Gröſse: und da er über AH' steht, so muſs *der Ort der Punkte D'*, für Perpendikel, welche auf AH und deren Verlängerung über H hinaus genommen werden, eine *Kreislinie* seyn, die über AH' als Sehne, und zu Kk als Tangente beschrieben wird. Und da überdem AE × ED' = S ist, so wird zugleich *der Ort der Punkte E, eine mit jener concentrische Kreislinie*, deren *Halbmesser* C'E die Seite eines Quadrats ist, welches das Quadrat des erstern Halbmessers C'A um den Raum S übertrifft, oder $C'E^2 = C'A^2 + S$. Dieses wird auf dieselbe Art wie in Lehrsatz 24. Z. I. 2. bewiesen. — Für *alle* Parallellinien machen wiederum *zwey gleiche, sich schneidende, um C' und C beschriebne Kreislinien, den Ort der Punkte E aus.*

Apollonius ebne Oerter II. 3. Fall 2, wo jedoch dieser Ort etwas anders ausgedrückt wird. Unmittelbar auf ihn lassen sich mehrere ebne Oerter, die zu den Zusammengesetztesten gehören, mit Leichtigkeit zurückführen, welches ich im Folgenden Zusatz (den der, wer Lehrsatz 20 überschlagen hat, gleichfalls übergehe) wenigstens andeuten will.

Zusatz II. α) *Der Ort der Punkte E ist auch in dem Fall eine gegebne Kreislinie, wenn der Anfang der parallelen Linien MN auf irgend einer andren, der Grösse und Lage nach gegebnen Linie BL genommen wird, die nicht durch den Punkt A geht.* Fig. 69. Denn man mache AH gleich und parallel BL, und ziehe durch B, parallel mit AK, die grade Linie BC; so schneidet jede der Linien MN, welche mit AK parallel laufen, auf beyden Linien und deren Verlängerungen, von B und C an gleiche Stücke ab, so dass $BL \times BM = AH \times (AM' \pm AC) = AH \times AM' \pm AH \times AC$, wird, wo das Rechteck $AH \times AC$ ein gegebner Flächenraum P ist. Ist daher $AE^2 = BL \times BM \pm S$; so wird auch $AE^2 = AH \times AM' \pm S \pm P$, mithin dem vorigen Zusatz gemäss, der Ort des Punktes E eine gegebne *Kreislinie* seyn. (Apollonius II. 3. Fall 3.)

β) *Der Ort der Punkte E ist ferner auch dann eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse, wenn die Linien AE die Parallellinien so durchschneiden, dass eine Figur gegebner Gattung über AE beschrieben, $AE^2 \times \frac{m}{q}$*, entweder gleich ist dem Rechtecke aus irgend einer Linie BI, und dem Stück BM derselben, welches die Parallellinien auf ihr oder ihrer Verlängerung abschneiden, $BI \times BM$: oder gleich diesem Rechtecke vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum, $BI \times BM \pm S$: oder endlich einem gegebnen Raum weniger diesem Rechteck, $S - BI \times BM$.* *20. f. 1. Denn da die Figur über AE der Gattung nach gegeben ist, so ist ihr Verhältniss zum Quadrat über AE, m : q, gegeben. Man nehme auf der gegebnen Linie BH oder

deren Verlängerung, einen Abschnitt so, dass sich verhält $BI : BL = m : q$, so ist BL gegeben, und $BI = BL \times \frac{m}{q}$.
Setzt man diesen Werth statt BI, und dividirt dann beyderseits durch $\frac{m}{q}$; so verwandeln sich unsere Voraussetzungn in folgende: $AE^2 = BL \times BM$; oder $AE^2 = BL \times BM \pm S$; oder $AE^2 = S - BL \times BM$. Und für alle drey ist nach α) der Ort der Punkte E ein Kreis von gegebner Lage und Grösse. (*Camerers* Bemerkungen zu *Apollonius* ebnen Oertern.)

γ) *Endlich ist der Ort der Punkte E auch unter der Voraussetzung* e i n e K r e i s l i n i e *von gegebner Lage und Grösse, dass, wenn zwey Punkte A, C und die graden Linien Q und BH der Lage, und die letztere auch der Grösse nach, in einer Ebne, gegeben sind; grade Linien von den Punkten A und C aus gezogen, sich in den Punkten E so durchschneiden, dass eine mit Q durch E parallel gezogne Linie, auf BH, oder deren Verlängerung, ein Stück BM so abschneide, dass die Summe oder der Unterschied zweyer Figuren gegebner Gattung über AE und CE beschrieben, dem Rechteck aus den Abschnitten BH und BM gleich ist,* $AE^2 \times \frac{m}{q} \pm CE^2 \times \frac{n}{q} = BH \times BM$. Denn da die Figuren über AE und CE der Gattung nach gegeben sind, so ist dass Verhältniss $m : n : q$ gegeben. Man nehme im Fall der Summe auf AC, im Fall des Unterschieds auf deren Verlängerung zwey Abschnitte CG, AG, und überdem eine Linie Ge so, dass sich verhält $m : n : q =$

$CG : AG : Ge$, so ist $AE^2 \times \frac{m}{q} \pm CE^2 \times \frac{n}{q} = AE^2 \times \frac{CG}{Ge} + CE^2 \times \frac{BG}{Ge}$, und diese Summe ist nach Lehrsatz 20 Form. γ gleich $\frac{AC}{Ge} \times (AG \times CG \pm EG^2)$, also auch dieser Raum der Bedingung unserer Aussage gemäss, gleich $BH \times BM$. Nun sind die Punkte A, C und G, mithin auch AC und das Rechteck $AG \times CG = R$ gegeben, überdem die Linie Ge, also auch der Raum $R \times \frac{AC}{Ge} = S$, und also ist $EG^2 \times \frac{AC}{Ge} = BH \times BM - S$ im Fall der Summe, oder $= S - BH \times BM$ im Fall des Unterschieds. Folglich sind dann vom gegebnen Punkte G aus, die Linien GE so gezogen, dass eine Figur gegebner Gattung über GE beschrieben, gleich ist dem Rechteck $BH \times BM$ vermindert um den gegebnen Raum S, oder umgekehrt, und daher vermöge β, der Ort der Punkte E *eine Kreislinie* von gegebner Lage und Grösse. (*Apollonius* II. 6. wo jedoch der Fall des Unterschieds übersehn ist, und dieser Ort in allen seinen Fällen 10 Seiten einnimmt. Auch ist er dahin einzuschränken, dass wenn im *Fall des Unterschieds die Figuren gegebner Gattung ähnlich sind*, es keinen Punkt G giebt, und der Ort der Punkte E keine Kreislinie, sondern eine der Lage nach gegebne *grade Linie* wird.

Ist die Summe oder der Unterschied der beyden Figuren gegebner Gattung, *vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum P*, dem Rechteck $BH \times BM$, oder jene Summe oder Unterschied dem Raume P weniger diesem Rechteck gleich; so ändert dieses weiter nichts, als dass statt des gegebnen Raums S, ein andrer gegebner Raum in die letzte Bestimmung mit eingeht, daher auch für diese Fälle der Ort der Punkte E eine Kreislinie ist, mit der eben erwähnten Einschränkung.

Ueberdem läst dieser Ort sich grade so, wie der in den Folgerungen zu Lehrsatz 20 vorgetragne, *auch auf drey, vier, und jede beliebige Zahl von Punkten ausdehnen*: „Sind nemlich beliebig viel Punkte A, C, D, etc. in einer Ebne gegeben, und grade Linien aus ihnen gezogen durchschneiden sich insgesammt in einem Punkte E so, dass die Summe oder der Unterschied von Figuren gegebner Gattung, über diese Linien beschrieben, dem Rechtecke $BH \times BM \pm S$ gleich ist; so ist der Ort der Punkte E *eine Kreislinie* von gegebner Lage und Grösse, doch mit der erwähnten Einschränkung." (*Camerers* Bemerkungen zu *Apollonius ebnen Oertern*).

Anmerkung. Die Sätze in Folgerung 4 und in diesem Zusatze betreffen den Ort der Durchschnittspunkte E, worinn grade Linien, von einem gegebnen Punkte A aus gezogen, *Parallellinien* so durchschneiden, dass das Quadrat über AE entweder allein, oder in Verbindung mit beständigen Grösen, durch ein veränderliches Rechteck bestimmt wird, dessen Grösse zuletzt *vom dem veränderlichen Abstande dieser Parallellinien vom gegebnen Punkte A abhängt.* — Der folgende Ort betrifft die Durchschnittspunkte E, worin grade Linien, von einem gegebnen Punkte A aus gezogen, *Sehnen eines gegebnen Kreises* so durchschneiden, dass das Quadrat über AE *durch das Rechteck aus den beyden Abschnitten jeder Sehne* bestimmt wird. Diesen Ort führe ich im folgenden Lehrsatz auf, um mit demselben nach *Simsons* Beyspiel diesen Haupttheil aus der Lehre der ebnen Oerter zu beschliessen.