Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 26.] 1) Wenn ein Kreis, mithin auch dessen Mittelpunkt C, und irgend ein zweyter Punkt A gegeben sind, gleich viel ob A innerhalb, oder ausserhalb, oder auf der Kreislinie liegt, und wenn ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

[LEHRSATZ 26.]

1) *Wenn ein Kreis, mithin auch dessen Mittelpunkt C, und irgend ein zweyter Punkt A gegeben sind, gleich viel ob A innerhalb, oder ausserhalb, oder auf der Kreislinie liegt, und wenn grade Linien, vom Punkte A aus gezogen, sich mit den Sehnen BD dieses Kreises je zwey und zwey so in Punkten e durchschneiden, 1) dass entweder* $Ae^2 = Be \times De$, *oder, wenn S einen gegebnen Flächenraum bedeutet,* $Ae^2 = Be \times De \mp S$ *ist: und irgend einer dieser Punkte e liegt ausserhalb des Kreises, auf der Verlängerung einer Sehne; so ist stets der geometrische Ort aller solcher Punkte e eine grade Linie von gegebner Lage. — 2) Durchschneiden sie sich hingegen, unter übrigens gleichen Umständen, so, dass* $Ae^2 = S - Be \times De$ *ist; so ist der Ort der Punkte e eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse.* Fig. 71.

2) *Wenn aber von den graden Linien, die vom gegebnen Punkte A aus gezogen werden, irgend eine sich mit einer der Sehnen BD selbst, folglich innerhalb des Kreises, in einem Punkte E so durchschneidet, 1) dass entweder* $AE^2 = BE \times DE$, *oder* $AE^2 = BE \times DE \mp S$ *ist; so ist umgekehrt stets der geometrische Ort aller Punkte E, eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse: und durchschneiden sie sich 2) so, dass* $AE^2 = S - BE \times DE$ *ist; so ist der Ort aller Punkte E eine grade Linie von gegebner Lage.*

Da diesen Voraussetzungen gemäss der Punkte A und der Mittelpunkt des Kreises, C, gegeben sind, so ist auch die grade Linie AC der Lage und Grösse nach, und überdem der Halbmesser CG oder CM des Kreises der Grösse nach gegeben. Man ziehe von dem Punkte e oder E, welcher den Bedingungen des Satzes genüge thun möge, durch den Mittelpunkt die grade Linie eH, oder EH, von der der Kreis den Durchmesser FG abschneide.

1) *Liegt dieser Punkt e ausserhalb des Kreises,* in der *Verlängerung einer der Sehnen BD*, so ist $Be \times De =$
* 22. 2. $Fe \times Ge^* = Ce^2 - CG^2$, weil in diesem Fall dem in C gleich getheilten Durchmesser CG, das Stück Gt
* II. f. 1. β. angesetzt ist*. Folglich muss *der ersten Voraussetzung* gemäss, nach welcher $Ae^2 = Be \times De \mp S$ seyn soll, $Ae^2 = Ce^2 - CG^2 \mp S$, und also $Ce^2 - Ae^2 = CG^2 \pm S$ seyn, wo das *obere* oder das *untre* Zeichen gilt, je nachdem Ae^2 um den gegebnen Raum S *kleiner* oder *grösser* als das Rechteck $Be \times De$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung durchschneiden folglich die vom Punkte A aus gezognen Linien, die verlängerten Sehnen so in Punkten e, dass in den Dreyecken CAe, die insgesammt über der gegebnen unveränderlichen Linie CA stehn, *der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln* gegeben und unveränderlich ist, nemlich gleich dem Quadrate des gegebnen Halbmessers, vermehrt oder vermindert um den gegebnen Raum S. Deshalb muss *der Ort der Durchschnittspunkte e*, als Spitzen dieser Dryecke, *ein Perpendikel auf der gegebnen*

gegebnen Linie CA *, und zwar *dasjenige Perpendikel seyn*, welches vom Punkte O, der in der Mitte der Grundlinie CA liegt, nach der Seite des kleinern Schenkels zu, um eine Linie Oh absteht, deren Grösse dadurch bestimmt wird, dass $2\,Oh \times CA = CG^2 \pm S$ oder $4\,CO \times Oh = CG^2 \pm S$ ist. Und daraus findet man Oh durch Construction grade wie in Lehrsatz 16 Folgerung 3. (*Apollonius ebne Oerter II.* 7. 8. 9.)

Ist aber der *zweyten Voraussetzung* gemäss $Ae^2 = S - Be \times De$, so muss $Ae^2 + Be \times De = S$ und folglich $Ae^2 + Ce^2 - CG^2 = S$, oder $Ae^2 + Ce^2 = S + CG^2$ seyn. Unter dieser Voraussetzung durchschneiden sich also die Schenkel der Dreyecke ACe, welche über der gegebnen Linie AC stehn, so, dass *die Summe der Quadrate aus den beyden Schenkeln* einem gegebnen Flächenraum gleich ist, weshalb nun *der Ort der Durchschnittspunkte e* keine grade Linie, sondern *eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse wird* *. Und zwar, wenn man die Linie CA im Punkte O halbirt, so ist *O der Mittelpunkt* dieser Kreislinie, und *ihren Halbmesser Oe* findet man daraus, dass $Oe^2 = \frac{1}{2}(S + CG^2) - CO^2$ seyn muss *. (*Apollonius II.* 14.)

*17. f. 1.

*17. f. 1.

2) *Liegt der Durchschnittspunkt E in der Sehne BD selbst*, und also innerhalb des Kreises, so wird diese Sehne vom Durchmesser FG, der durch den Punkt E geht, so durchschnitten, dass $BE \times DE = FE \times GE$ * $= CG^2 - CE^2$ ist, indem der Durchmesser EG in diesem Fall im Punkte C gleich, und im Punkte E ungleich getheilt ist *.

*22. 1.

*11. f. 1.

Iſt alſo nach der *erſten Vorausſetzung* $AE^2 = BE \times DE \mp S$, ſo muſs in dieſem Fall $AE^2 = CG^2 - CE^2 \mp S$, und $AE^2 + CE^2 = CG^2 \mp S$ ſeyn. Alſo iſt dann, nicht wie unter 1) der Unterſchied, ſondern *die Summe der Quadrate* aus den Linien AE, CE, welche von zwey gegebnen Punkten aus gezogen, ſich durchſchneiden, einem gegebnen Raume gleich, mithin *der Ort der Punkte E* jetzo *eine Kreislinie*, um einen Punkt O, der in der Mitte zwiſchen A und C liegt, als Mittelpunkt beſchrieben, mit einem *Halbmeſſer OE*, für den $OE^2 =$
* 17. f. $\frac{1}{2}(CG^2 \mp S) - OC^2$ iſt*. (*Apollonius* II. 11. 12. 13)

Iſt aber *nach der zweyten Vorausſetzung*, $AE^2 = S - BE \times DE$, ſo muſs in dieſem Fall $AE + BE \times DE = S$ oder $AE^2 + CG^2 - CE^2 = S$, und folglich $AE^2 - CE^2 = S - CG^2$ und umgekehrt $CE_2 - AE^2 = CG^2 - S$ ſeyn. Da alſo der *Unterſchied der Quadrate* über den Schenkeln AE, CE einem gegebnen Raume gleich iſt, ſo wird der *Ort der Punkte E* in dieſem Fall *ein Perpendikel auf AC*, welches, wie in der erſten Vorausſetzung unter 1) aus Lehrſatz 16. Folgerung 3. dadurch gegeben wird, daſs $4\,CO \times OH = CG^2 - S$ ſeyn muſs. (*Apollonius* II. 10.)

Beſtimmung, im Fall der Ort eine grade Linie iſt, und zwar 1) für Punkte e auſserhalb des Kreiſes. Da der Ort dieſer Punkte das Perpendikel eh, und für dieſes
* 16. 1. $Ce^2 - Ae^2 = CG^2 \pm S = 4\,CO \times Oh = Ch^2 - Ah^2$* iſt, ſo muſs, wenn *S gleich null* iſt, und *im Fall des obern Zeichens*, immer $Ce > Ae$ und $Ch > Ah$ ſeyn, folglich das Perpendikel zu der Seite von O, auf welcher

A liegt, aufstehn. Folglich, wenn O *ausserhalb* des Kreises liegt, oder CA $>$ 2 CM ist, auch der Punkt h und das ganze Perpendikel eh nothwendig *ausserhalb des Kreises* fallen. Dasselbe findet *im Fall des untern Zeichens* statt, wenn $CG^2 > S$ ist, da hingegen, wenn $CG^2 < S$ ist, Ce $<$ Ae wird, unddas Perpendikel eh nach der Seite von C zufällt.

Da ferner der Halbmesser CG = CM ist, muss auch $4\,CO \times Oh - CM^2 = \pm S$ seyn. *Ist A ein Punkt im Kreise*, so besteht der Halbmesser CM aus zwey gleichen Theilen CO, OA und einem dritten diesen angesetzten Stück AM, $CM = 2\,CO + AM$, und deshalb ist dann $CM^2 = 4\,CO \times OM + AM^2$*, folglich $4\,CO \times (Oh - OM) - AM^2 = \pm S$. Daher muss, wenn S gleich null ist, und im Fall des *obern* Zeichens, nothwendig Oh $>$ OM, also *h ein Punkt ausserhalb des Kreises* seyn, welches im Fall des *untern* Zeichens nicht nöthig ist, da für dieses, nach Umständen, Oh kleiner oder grösser als OM seyn, und h innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegen kann. — *Wenn A in der Kreislinie liegt*, ist $CM^2 = 4\,CO \times OA$, mithin $4\,CO \times (Oh - OA) = \pm S$. Ist folglich alsdann *S gleich null*, so muss Oh gleich OA seyn, also h in A fallen, und eh den Kreis im Punkte A berühren*. Im Fall des *obern* Zeichens liegt dagegen h *ausserhalb*, im Fall des *untern* innerhalb des Kreises. — *Wenn endlich A ausserhalb des Kreises* liegt, ist $CM = 2\,CO - AM$, folglich $CM^2 = 4\,CO^2 - 4\,CC \times AM + AM^2$* $= 4\,CO \times (AO - AM) + AM^2 = \pm 4\,CO \times OM + AM^2$, wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem M mit A oder mit C auf einerley Seite

* 11. f. 3.

* 22. 2.

* 8.

von O liegt, d. h. O ein Punkt innerhalb oder außerhalb des Kreises, und CA kleiner oder größer als 2 CM ist. Wenn daher *S gleich null* oder *additiv* genommen wird, und O liegt im Kreise, so muss $4\ CO \times (Oh - OM) - AM^2 = 0$ oder S seyn, welches nur dann möglich ist, wenn $Oh > OM$, also h ein Punkt außerhalb des Kreises ist. — *Folglich liegt, wenn S gleich null oder additiv ist, das Perpendikel eh, als Ort der Punkte e, unter allen Umständen außerhalb des gegebnen Kreises*, nur dass es den Kreis in dem Fall, wenn S gleich null und A ein Punkt der Kreislinie ist, *berührt*.

2) *Für Punkte E innerhalb des Kreises*, für welche der Ort ein Perpendikel EH auf dem Durchmesser AE oder dessen Verlängerung ist, muss der Fußpunkt H
*I. 16. 1. immer *innerhalb* des Kreises liegen, weil $CH < CE$* und E ein Punkt im Kreise ist, und es ist für dasselbe $CE^2 - AE^2 = CH^2 - AH^2 = CM^2 - S = 4\ CO \times OH$. Ist also der gegebne Raum S dem Quadrate über dem Halbmesser des gegebnen Kreises gleich, $S = CM^2$, so ist $CA = AH$, H fällt in O, und das Perpendikel EH steht im Punkte O selbst auf. — Ist $S < CM^2$, so fällt H mit A auf einerley Seite von O, indem dann $CH > AH$ ist, und dann muss nothwendig O ein Punkt im Kreise, also $CA < 2\ CM$ seyn, und, wie wir eben gesehn haben, $CM^2 = 4\ CO \times OM + AM^2$ oder $CM^2 - AM^2 = 4\ CO \times OM$ seyn. Da nun $OM > OH$ ist, so muss in diesem Fall immer $CM^2 - AM^2 > CM^2 - S$ und daher $S > AM^2$ seyn. Wenn der gegebne Raum kleiner als dieses Quadrat ist, so giebt es keine Punkte

E welche den Voraussetzungen, die sich widersprechen, genüge thun könnten. — Ist endlich $S > CM^2$, so ist $AH > AC$ und der Punkt H fällt mit dem Mittelpunkte C zu einerley Seite des Punktes O; und in diesem Fall können die Punkte A und O auch ausserhalb des Kreises liegen.

Bestimmung im Fall der Ort eine Kreislinie ist. 1) Für *Punkte e ausserhalb* des Kreises, wird der Ort eine Kreislinie, wenn $Ae^2 + Ce^2 = S + CM^2$ ist; und dann ist O der Mittelpunkt, und für den Halbmesser $2\,Oe^2 = S + CM^2 - 2\,CO^2$. Ist O ein Punkt im gegebnen Kreise; so muss immer $S > AM^2$ seyn, sonst ist der Ort unmöglich. Ist O ein Punkt ausserhalb des gegebnen Kreises, und $S < AM^2$, so liegen der Ort und der gegebne Kreis ganz ausserhalb einander; ist $S > AK^2$, so schliesst der Ort den gegebnen Kreis ringsum ein, und ist $S < AK^2$ aber $> AM^2$, so durchschneidet der Ort den gegebnen Kreis, da denn einige Punkte e ausserhalb, andre innerhalb des gegebnen Kreises liegen; daher sich daraus, dass ein Punkt e auf der Verlängerung der Sehne BD liegt, keineswegs schliessen lässt, dass auch alle andre Punkte e auf Verlängerungen der Sehnen BD liegen müssen.

2) Für *Punkte E innerhalb des* Kreises, wird der Ort eine Kreislinie, wenn $AE^2 + CE^2 = CM^2 \mp S$ ist, und dann ist O der Mittelpunkt, und für den Halbmesser des Orts $2\,OE^2 = CM^2 - 2\,CO^2 \mp S$. In diesem Fall muss, wenn *S gleich null ist*, der Ort von dem gegebnen Kreise ringsum eingeschlossen werden. *Im Fall*

des obern additiven Zeichens durchschneiden sich der Ort und der gegebne Kreis, wenn O *ausserhalb* des gegebnen Kreises liegt; ist aber O ein Punkt *in diesem* Kreise, so wird, je nachdem OM gröser, gleich, oder kleiner als ON ist, der Ort ganz innerhalb des gegebnen Kreises fallen, oder ihn innerlich berühren, oder ihn schneiden. *Im Fall des untern subtractiven Zeichens* wird der Ort wiederum vom gegebnen Kreise eingeschlossen.

Anmerkung. Diese Bestimmungen lassen sich mit Hülfe der Aussagen in Lehrsatz 11, Folgerung 2 und Lehrsatz 17 auf eine ähnliche Art, als für den Fall, wenn der Ort eine grade Linie ist, entwickeln, weshalb ich aber auf Simsons Wiederherstellung von Apollonius ebnen Oertern verweisen muss, um mich hier nicht in zu grosse Weitläufigkeit zu verlieren.

Simson macht aus den Theilen dieses Orts acht verschiedne Sätze, und seine Entwicklung derselben nimmt 18 Seiten ein. In *Pappus* Bericht über den Inhalt der Ebnen Oerter des Apollonius, findet sich nur ein eingeschränkter Fall der ersten Voraussetzung unter 1) und selbst dieser ist durch die Abschreiber entstellt worden. Auch stimmt Lemma 33 aus *Euklids Porismen* (Pappus VII, 159) mit dem einfachsten Fall von 1) überein, indem dieser Lehrsatz aussagt, dass falls eh auf dem verlängerten Durchmessr LM so senkrecht steht, dass $Lh \times hM = Ch2$ ist, auch für jeden Punkt e in diesem Perpendikel, wenn man eL zieht, $Fe \times eG = Ce^2$ seyn muss.

Man sieht leicht, dass man die Aussage dieses Orts nach Art der vorigen Oerter noch erweitern und verallgemeinern kann, welches aber, wie es scheint, schon Simson für überflüssig gehalten hat. Ich endige daher mit diesem Satze nach Simsons Beyspiel diesen Hauptheil der Lehre von den Ebnen Oertern, den ich hier ziemlich ausführlich vorgetragen habe, weil theils meine Absicht, wo möglich, die Geometrie in ihrem ganzen Umfange, wie sie von Alten und Neuern behandelt worden ist, im Kurzen darzustellen, dieses erforderte, theils die Sätze an sich so nett und brauchbar sind, theils sehr gute Uebungen in der geometrischn Analysis, und Beyspiele von zusammenhängenderen geometrischen Untersuchungen an die Hand geben.

Auf *algebraischem Wege*, wo man die Eigenschaften der Curven lediglich aus ihrer Gleichung *, durch algebraische Mittel, und nicht wie hier durch Darstellung der Figur und durch geometrische Constructionen erforscht, läßt sich indess schon manches von dem hier Vorgetragnen erleichtern, und überdem der Kreis noch auf allgemeinere Arten als Ort eines bestimmten Punktes darstellen, und die Bedingung, unter welcher ein Kreis allein der Ort von Punkten seyn kann, allgemein entwickeln, daher man die weitre Ausbildung dieser Lehre, billig der algebraischen Analysis vorbehält.

*22. f. 5.

Ich wende mich nun zu den Aufgaben, welche zu diesem Buche gehören, werde hier aber nicht viel mehr als die unentbehrlichsten Constructionsarten, auf die ich mich zum Theil schon berufen habe, vortragen. Andre Aufgaben, und besonders den Gebrauch der aufgestellten Oerter in Auflösung geometrischer Aufgaben, verspare ich für das Buch des folgenden Theils, welches der geometrischen Analysis bestimmt ist.