Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Aufgabe 9. Zu zwey gegebnen Linien P, Q, als äussere Glieder einer Proportion, zwey andre Linien Y, X, deren Unterschied oder deren Summe einer gegebnen Linie N gleich ist, als mittlere Glieder der ...

rallellinie der Ort der Spitze des gesuchten Dreyecks*, und die Aufgabe ebenfalls unbestimmt, etc. *2. Z.

AUFGABE 9.

Zu zwey gegebnen Linien P, Q, als äussere Glieder einer Proportion, zwey andre Linien Y, X, deren Unterschied oder deren Summe einer gegebnen Linie N gleich ist, als mittlere Glieder der Proportion zu finden.

Man ziehe willkührlich zwey Linien, welche sich im Punkte F rechtwinklig durchschneiden. Fig. 60.

Im Fall des Unterschieds trage man zu entgegengesetzten Seiten des Punktes F auf die eine dieser Linien FA = P und FB = Q, und auf die zweyte Linie FH = N. Halbire AB und FH, und errichte auf beyden Linien in den halbirenden Punkten Perpendikel. Der Punkt C, wo diese Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt eines Kreises, der mit AC als Halbmesser beschrieben, auf der zweyten Linie die beyden gesuchten Linien FD, FE abschneidet.

Denn da dieser Kreis vermöge der Construction durch die Punkte A und B geht, so sind AB, DE Sehnen, die sich im Punkte F durchschneiden, folglich FA : FE = FD : FB *: und da das Perpendikel aus dem Mittelpunkte C die Sehne DE halbirt, auch EF = HD und mithin FD — FE = FH = N. *22. f. 1α.

Im Fall der Summe trage man FA = P und FB = Q zu einerley Seite des Punktes F auf, und verfahre im

übrigen wie vorhin. Durchschneidet dann die Kreislinie, die durch A und B geht, die zweyte Linie in den Punkten D, E, so sind jetzt AB, DE Sehnen, die verlängert im Punkte F sich durchschneiden, folglich wie-
22.f.1γ derum $FA:FE = FD:FB$, jetzt aber $FD + FE = FH = N$.

In diesem Fall wird jedoch der Kreis die zweyte Linie nur dann durchschneiden, wenn die Summe der beyden Abschnitte $FE + FD = N$ grösser ist, als das Zweyfache der Tangente, die aus F am Kreise gezo-
*22f.3.α gen wird *; oder, da das Quadrat dieser Tangente
* 22. 2. gleich ist dem Rechteck $FA \times FB$ *, nur dann, wenn $N^2 > 4 . FA \times FB$ ist. Ist N kleiner, so wird die Aufgabe unmöglich.

Bemerkung 1. Da das Rechteck aus der mittlern von vier Proportionallinien, stets dem Rechteck aus den äussern gleich, mithin in diesem Fall $(N - FE) \times FE = P \times Q$ ist; so läuft diese Aufgabe auf eins mit folgender hinaus: „*Ein Rechteck von gegebnem Inhalt, zu beschreiben, wenn entweder der Unterschied, oder die Summe zweyer anliegenden Seiten desselben gegeben ist.*" Noch eine andre Form und Auflösung derselben, findet sich in Aufgabe 18.

Bemerkung 2. Wo es überhaupt auf Gleichheit von Rechtecken ankömmt, wird diese Constructionsart vermittelst des Kreises, mehrentheils mit Vortheil gebraucht werden.

Zusatz. Sind die beyden gegebnen Linien P und Q gleich, so geht die gesuchte Proportion, in diese $P:X = Y:P$, und daher unsere Aufgabe (da es gleichgültig ist, ob die gesuchten Linien innere oder äussere Glieder in der Proportion ausmachen, in folgende über:

Wenn eine mittlere Proportionallinie P, und von den beyden andern proportionalen Linien, entweder die Summe, oder der Unterschied N gegeben sind, diese Linien selbst zu finden.

Oder: *Ein gegebnes Quadrat P^2 in ein Rechteck zu verwandeln, von dessen beyden anliegenden Seiten die Summe oder der Unterschied N gegeben ist.*

Oder endlich: *Auf einer gegebnen graden Linie N, oder auf deren Verlängerung einen Punkt, so zu bestimmen, dass das Rechteck aus den beyden Abschnitten, einem gegebnen Quadrate P^2 gleich sey.*

Diese drey Aufgaben fragen, nur unter verschiedner Gestalt, nach ein und dasselbe, und sind ein einzelner Fall unserer allgemeinern Aufgabe. Dadurch dass für sie die gegebnen Linien $P = FA$, und $Q = FB$ gleich sind, wird die Construction in beyden Fällen beträchtlich vereinfacht.

Im Fall des Unterschieds beschreibe über $FH = N$ Fig. 89. als Durchmesser einen Kreis, welchen $FA = P$ berührt, und ziehe von A durch den Mittelpunkt eine grade Linie, welche den Kreis in D und E durchschneide, so sind AD, AE die gesuchten Linien. Denn es ist $AD \times AE = AF^2 = P^2$ und $AD = AE + N$.

Im Fall der Summe beschreibe über $FH = N$ einen Halbkreis, ziehe mit FH in einer Entfernung gleich P, eine Parallellinie, und fälle vom Punkte, wo ſie den Kreis durchſchneidet, ein Perpendikel IK auf den Durchmeſſer, ſo ſchneidet dieſes auf dem Durchmeſſer die beyden verlangten Abſchnitte FK, KH ab. Denn es iſt $FK \times KH = IK^2 = P^2$, und $FK + KH = EH = N$.

AUFGABE 10.

Wenn zwey Rechtecke, aus den Linien A, B und P, Q, gegeben ſind, eine Linie zu finden, zu welcher ſich eine Seite des einen Rechtecks, wie der Inhalt beyder Rechtecke zu einander verhält.

Geſetzt es ſey X die Linie, zu welcher die Seite A in dem Verhältniſſe des Inhalts beyder Rechtecke ſteht, $A \times B : P \times Q = A : X$; ſo iſt das erſte Verhält-
3. f. 2. niſs auch gleich dem Verhältniſs $A \times B : X \times B$; folglich, da die Vorderglieder gleich ſind, müſſen es auch
V. 3. ε die Hinterglieder ſeyn, $P \times Q = X \times B$, oder es muſs
V. 3. γ ſich verhalten $B : P = Q : X$.

Man ſuche alſo zu der einen Seite des einen, und zu den beyden Seiten des andern Rechtecks die vierte
Afg. 7. Proportionallinie, ſo verhält ſich zu dieſer die andre Seite des erſtern, wie der Inhalt beyder Rechtecke, oder $A : X = A \times B : P \times Q$.

Bemerkung. Auf dieſe Art findet man *zwey Linien, die im zuſammengeſetzten Verhältniſs zweyer Paar*
* V. 6. *gegebner Linien ſtehn*, $A : X = (A : P) + (B : Q)$ *. Sind die gegebnen Verhältniſſe gleich, ſo iſt $A : X = 2 (A : P) = A^2 : P^2$ und $A : P = P : X$, da denn dieſe Auflöſung

in