Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Aufgabe 13. 1) Zwischen zwey gegebnen graden Linien P und Q eine mittlere Proportionallinie zu finden, und 2) zwischen einer graden Linie AB und einem gegebnen Abschnitt derselben AD, eine mittlere ...

Setzt man diese stetigen Verhältnisse Schrittweise zusammen *, so erhält man * V. 6.

$KA : KC = 2\,(KA : KB) = KA^2 : KB^2$

$KA : KD = 3\,(KA : KB) = KA^3 : KB^3$

$KA : KE = 4\,(KA : KB) = KA^4 : KB^4$ etc.

Man wird daher durch diese Construction im Stande gesetzt *Linien zu bilden, welche sie wie irgend zwey Potenzen von gleichem Grade aus den Zahlausdrücken zweyer gegebner Linien KA, KB verhalten.*

Allein wenn zwey Linien, wie KA, KE gegeben sind, die Linie KB zu finden, so dass KA : KE sich z. B. wie $KA^4 : KB^4$ verhielte, dazu erhalten wir durch diese Construction kein Mittel.

Anmerkung 1. Andere Mittel eine ganze Reihe solcher stetig proportionaler Linien zu bilden, giebt Lehrsatz 24. Folgerung 1, und Lehrsatz 25. Folgerung 3 an die Hand, und wer diese Construction interessant findet, wird sie ohne Schwierigkeit daraus entwickeln können. Die leichteste Methode verspare ich für das folgende Buch.

Anmerkung 2. *Um ein gegebnes Quadrat in ein Rechteck, oder in ein Dreyeck etc. über gegebner Grundlinie zu verwandeln*, muss man auf eine ähnliche Art, wie in Aufgabe 8, zur gegebnen Grundlinie und zur Seite des gegebnen Quadrats eine dritte Proportionallinie suchen. Dieses drückt z. B. *Tacquet* folgendermassen aus: *ad datam rectam AB, datae rectae M quadratum facile est applicare, inveniendo rectis AB, M tertiam proportionalem CD et rectangulum ABCD construendo. Est enim dato quadrato M2 aequale rectangulum, ad rectam AB applicatum**. Fig. 83. *Afg. 3. a. 1.

AUFGABE 13.

1) *Zwischen zwey gegebnen graden Linien P und Q eine mittlere Proportionallinie zu finden, und* Fig.

2) *zwischen einer graden Linie AB und einem gegebnen Abschnitt derselben AD, eine mittlere Proportionallinie darzustellen.*

1) Man trage die beyden gegebnen Linien auf eine willkührlich gezogne grade Linie nebeneinander, AD = P und DB = Q, beschreibe um die Summe beyder AB als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte auf AB im Punkte D ein Perpendikel. Durchschneidet dieses den Kreisbogen im Punkte E, *so ist DE die gesuchte mittlere Proportionallinie.* Denn es verhält sich dann vermöge der Natur des Kreises AD : DE = DE :
*22.f.1α DB *.

2) Soll zu AB und dem Abschnitt AD dieser Linie, die mittlere Proportionallinie gefunden werden, so beschreibe man wiederum um die ganze Linie AB als Durchmesser einen Kreis, errichte in D das Perpendikel DE, und ziehe von Punkte E, wo dieses die Kreislinie durchschneidet, nach A eine Sehne AE, *so ist diese Sehne die gesuchte mittlere Proportionallinie.* Denn vermöge der Natur des Kreises verhält sich dann AD : AE
*22.Z.1 = AE : AB *.

Oder man beschreibe um AB irgend einen beliebigen Kreisabschnitt, ziehe durch A *eine Tangente* an demselben, da mit durch D eine Parallellinie, und nach dem Punkte F, wo diese den Kreisbogen durchschneidet AF, so ist AF, die gesuchte mittlere Proportio-
*25.f.3. nallinie *.

Oder man beschreibe um den übrigen Theil DB der gegebnen Linie, als Sehne, oder Durchmesser, einen Kreis, und ziehe an diesen vom Punkte A aus *eine Tangente AG*, so ist AG die gesuchte mittlere Proportionallinie *. *22f.1 δ

Folgerung. Die mittlere Proportionallinie zwischen zwey Linien, kann nie grösser seyn, als die Hälfte der Summe beyder Linien. Denn kein Perpendikel auf dem Durchmesser, das bis an die Kreislinie reicht, kann grösser seyn als der Halbmesser. Und so folgt auch aus der Construction, dieser aus der Arithmetik bekannte Satz.

Bemerkung 1. Da zu den Zahlausdrücken zweyer Linien P, Q die mittlere Proportionalzahl $\surd(P \times Q)$ ist *, so muss diese auch der Zahlausdruck * V, 5. für die mittlere Proportionallinie M seyn. *Ein Ausdruck, wie $\surd(P \times Q)$, d. i. eine Quadratwurzel, lässt sich* daher mittelst des Verfahrens in dieser Aufgabe in Lineargrössen darstellen, und folglich durch Verbindung derselben mit den Verfahren der vorigen Aufgaben, jede *reine Quadratische Gleichung construiren.* Was die *Construction einer unreinen quadratischen Gleichung* betrifft, so verspare ich sie für die Bemerkungen am Ende der Planimetrie.

Bemerkung 2. Ist M die mittlere Proportionallinie zwischen P und Q, so verhält sich $P:M = M:Q$, und $P:Q = P^2:M^2 = M^2:Q^2$, wie wir schon in der vorigen Aufgabe bemerkt haben *. *Afg.12 f. 2.

α) Sind vier Linien proportional, $A:B = C:D$, und man nimmt zwischen den ersten A, B und zwischen den letzten C, D mittlere Proportionallinien M, N, so sind auch

diese mit den Vordergliedern, und eben so mit den Hintergliedern der gegebnen Proportion, proportional. Denn es verhält sich $A:B = A^2:M^2 = M^2:B^2$ und $C:D = C^2:N^2 = N^2:D^2$. Wenn also die vordern Verhältnisse gleich sind, so sind es auch die hintern, $A^2:M^2 =$
*4. f. 2. $C^2:N^2$, also auch $A:M = C:N$ *: oder $M:B = N:D$, oder $A:M = N:D$.

β) *Grade so sind in gleichen Verhältnissen $A:B = C:D$ die dritten Proportionallinien P, Q mit den Vordergliedern, und folglich auch mit den Hintergliedern proportional.* Denn es verhält sich $A^2:B^2 = A:P$ und
*Afg. 12 f. 2. $C^2:D^2 = C:Q$ *, mithin $A:P = C:Q$ und $A:C = B:D = P:Q$.

γ) Da *im Kreise* die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen einer verlängerten Sehne und der
*22. f. 1 δ Verlängerung ist, $AE:AG = AG:AF$ *, so *verhält sich immer $AE:AF = AE^2:AG^2$*: und auf diese Art lassen sich andere brauchbare Sätze mittelst dieser Bemerkung aus unsern Lehrsätzen ableiten.

Bemerkung 3. Sucht man erst zwischen zwey gegebnen Linien P, Q, die mittlere Proportionallinie M, und fährt dann fort zwischen P, M und zwischen M, Q mittlere Proportionallinien zu suchen, so erhält man zwischen P, Q, 2 + 1, d. i. *drey*, und fährt man mit diesen wieder eben so fort, 4 + 3, d. i. *sieben mittlere Proportionallinien* u. s. f. Aber *auf zwey, vier oder fünf mittlere Proportionallinien kömmt man durch diese Construction nicht.* Jene geben *Constructionen von Wurzeln des vierten, achten, sechzehnten Grades* u. s. f.

Diese würden Constructionen von Wurzeln des dritten, fünften Grads, u. s. f. an die Hand geben; allein zu solchen Constructionen reicht die Elementargeometrie nicht hin. Man lese deshalb Lehrsatz 22 Zusatz 4, Lehrsatz 24. Folgerung 2, und die Bemerkungen am Ende dieses Werkes nach.

AUFGABE 14.

Eine gegebne gradelinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Dieses geschieht durch Auffindung *mittlerer Proportionallinien*, und also durch die Verfahren der vorigen Aufgabe, durch welche man jedesmal die Seite des gesuchten Quadrats, und zwar auf verschiednen Wegen, finden kann.

α) Bey einem gegebnen *Rechteck* ABCD, suche zwischen den beyden anliegenden Seiten AB, BC die mittlere Proportionallinie M, so ist $M^2 = AB \times BC$ *, folglich das gesuchte Quadrat. Fig. 84.

*14. f. 3.

β) Bey einem gegebnen *Parallelogramm*, suche eben so zwischen der Grundlinie, g, und Höhe, h; — bey einem gegebnen *Dreyeck* zwischen der Grundlinie, g, und halben Höhe, $\frac{1}{2}$ h; — und bey eine gegebnen *Trapezoid* zwischen der halben Summe beyder Grundlinien, $\frac{1}{2}(G+g)$, und der Höhe, h, die mittlere Proportionallinie M, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats. Denn es ist dann M^2 im ersten Fall gleich gh, im zweyten $\frac{1}{2}$ gh, im dritten $\frac{1}{2}(G+g)$ h,