Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Aufgabe 22. Das Verhältniss zwischen der Seite AB und der Diagonale AC eines Quadrats zu finden.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Denn verhält ſich $AG : AE = M : P$, ſo iſt auch $AG^2 : AE^2 = M^2 : P^2$. Und da AG und M mittlere Proportionallinien, erſtere zwiſchen AF, AE, letztere zwiſchen $P + Q$ und P ſind; ſich mithin verhält $AF : AE = AG^2 : AE^2$, und $P + Q : P = M^2 : P^2$; ſo verhält ſich auch $AF : AE = P + Q : P$ und $FE : AE = Q : P$.

Beſtimmung. Geht ABD durch den Mittelpunkt des Kreiſes, ſo iſt AB die kleinſte, AD die gröſste von allen Linien, die von A aus nach dem Kreiſe gezogen werden können *, und daher hat von allen ähnlichen Verhält- * II. 15. niſſen, das der Abſchnitte $AB : BD$ den gröſsten Exponenten *. Folglich darf $\frac{Q}{P}$ nicht gröſser als $\frac{BD}{AB}$ ſeyn, * V. 1. 2. ſonſt iſt die Aufgabe unmöglich. (Greg. III. 46.)

AUFGABE 22.

Das Verhältniſs zwiſchen der Seite AB und der Fig. 93. *Diagonale AC eines Quadrats zu finden.*

Beſchreibe um C mit der Seite BC als Halbmeſſer einen Kreis, ſo berührt die Seite AB dieſe Kreislinie, denn ſie ſteht auf dem Endpunkte des Halbmeſſers CB ſenkrecht *. Daher verhält ſich $AD : AB = AB : AE$, * II. 12. und AD iſt derſelbe Theil von AB, als AB von AE oder $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$ *. Nun aber iſt AE gleich $2\,CD + AD$, * V. 1. 2. folglich auch $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{2\,AB + AD} = \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}$ *. In dem * Afg 19. Z. 2.

letzten Ausdruck läſst ſich für $\frac{AD}{AB}$ dieſer Ausdruck ſelbſt wieder ſetzen, da denn $\frac{AD}{AB} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}}$ wird, und da ſich der Stuffenbruch, der ſo entſteht, immer wieder mit dem Bruch $\frac{AD}{AB}$ endigt, ſo kann man mit dieſer Subſtitution ohne Ende fortfahren, daher der Exponent $\frac{AD}{AB}$ durch einen Stufenbruch von der Form $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$, der ohne Ende fortläuft, gegeben wird. Es läſst ſich alſo AD nicht in Theilen von AB ausdrücken,
*Afg. 19 und beyde Linien ſind incommenſurabel *. Mithin auch die Diagonale und die Seite des Quadrats, da die Diagonale AC gleich AB + AD iſt, und alſo, wenn man die Seite AB als Einheit annimmt, der Zahlausdruck der Diagonale AC, $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$ wird; ein Ausdruck, deſſen Werth ſich nie genau in Zahlen darſtellen läſst, weil er ohne Ende fortgeht, und dem man ſich nur nähern kann, ohne ihn je völlig zu erreichen.

Anmerkung. Auf dieſem Wege wird die Incommenſurabilität zwiſchen der Diagonale und der Seite eines jeden Quadrats, die wir übrigens ſchon oben dargethan haben *, noch evidenter. Zugleich iſt dieſes ein unterrichtendes Beyſpiel der leichteſten Methode, wie ſich die Incommenſurabilität von Ausdehnungen, in geometriſchen Unterſuchungen erweiſen läſst. * 12. Z.