Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Vorrede des Uebersetzers.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52886

Vorrede
des
Uebersetzers.

Den Inhalt des Werks, wovon ich hier den Liebhabern der höhern Mathematik den ersten Theil übergebe, findet man hinter der Uebersetzung der Vorrede des Verfassers. Den Werth desselben druckt der für die Mathematik zu früh verstorbene Urheber des Lehrbegriffs der gesammten Mathematik in seinen Mathematischen Abhandlungen, S. 92, eben so kurz als vollkommen passend dadurch aus, daß er es unser vornehmstes classisches Werk von der Differenzial-Rechnung nennt; und Hr. Fuß bestimmt ihn in seiner Lobrede auf Hrn. Leonhard Euler, Basel 1786, S. 65. 66 auf folgende Art: „Das vornehmste Verdienst der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung besteht insbesondere in dem Gesichtspunkte, aus dem der Verfasser die Grundsätze der Differenzial-Rechnung betrachtet; in dem systematischen Zusammenhange, mit dem sie geordnet sind; in dem darin herrschenden methodischen Vortrage; in der Deutlichkeit, mit der er den Nutzen dieser Rechnung, in Absicht auf die Theorie der unendlichen Reihen und der Lehre der Maxima und Minima, zeigt. Da dieser Theil der Infinitesimal-Rechnung schon von den Erfindern ziemlich zur Vollkommenheit gebracht worden war: so sind darin seine eigene Erfindungen mit denen der ersten Urheber untermischt; aber die Spuren des Genies sind unvertilgbar. Auch da, wo der große Geist nicht selbst erfinden kann, bringt er doch die Erfindungen anderer zur Reife, giebt ihren Grundsätzen einen höhern Grad von Simplicität und Evidenz, und leitet neue Schlußfolgen daraus her. Wer verkennt wohl diese Zeichen des Genies in Eulers Werken?" Wenn ich auch gleich den methodischen Vortrag und die erforderliche Simplicität hie und da vermisse: so unterschreibe ich doch Hrn. Fuß Urtheil gern; und ich hoffe, dadurch einigen Dank zu verdienen, daß ich mein Original in einer so treuen Uebersetzung, als mir nur möglich gewesen, und ohne alle Abkürzungen und Veränderungen liefere, und was ich etwa darüber zu sagen habe, den Anmerkungen und Zusätzen einverleibe, womit ein jeder Theil begleitet werden soll. Auf diese Art bleibt mir aber auch hier bloß von den zum ersten Theile hinzugefügten Anmerkungen und Zusätzen zu reden übrig.

Der Verfasser der Beurtheilung der Erläuterungen über Hrn. Karstens mathematische Analysis und höhere Geometrie

metrie von Hrn. Rode, in der Allgemeinen Litteratur-Zeitung vom Jahr 1789 Nr. 320, sagt in seiner Recension unter andern: „Vollkommen zweckmäßige Erläuterungen über ein solches Buch sollten eigentlich den Mittelweg gehen zwischen diesem und dem mündlichen Vortrage des Lehrers; sie sollten auf das Philosophische der Wissenschaft mehr Rücksicht nehmen; sie sollten nebst der etwa nöthigen Entwickelung und Verbesserung der Rechnungen auch die Schwierigkeiten bey allgemeinen auf besondere Fälle angewandten Methoden heben; paradoxscheinende Sätze erklären; nicht nur den Gebrauch des vorgetragenen, sondern auch die Ordnung beym Gebrauch, und die Fälle anzeigen, wo eine Methode der andern vorzuziehen ist; Berechnungen und Vergleichungen bey Sätzen lehren, die einen wirklich praktischen Nutzen haben u. dgl.“ Ich finde diese Bemerkungen vortreflich, und habe sie, so weit es die Natur meines Originals erlaubte, bereits bey den Anmerkungen und Zusätzen zum ersten Theile desselben vor Augen gehabt, und werde vielleicht bey dem folgenden Theile noch mehr Gelegenheit haben, mich darnach zu richten. Allein die Eulerische Anleitung zur Differenzial-Rechnung unterscheidet sich dadurch von der Karstenschen Analysis, daß diese bestimmt ist, beym mündlichen Unterrichte zum Grunde gelegt zu werden, dagegen jene wegen ihrer Ausführlichkeit an den meisten Orten gar keines Commentars bedarf. Ich habe daher geglaubt, bey meinen Anmerkungen und Zusätzen, insbesondere zu gegenwärtigem ersten Theile, einen andern Gesichtspunkt nehmen zu müssen. Vorausgesetzt nemlich, was bey einem

Werke

Werke dieser Art vorausgesetzt werden muß, Kenntniß und Fertigkeit in der gemeinen, bestimmten und unbestimmten, Mathematik: so befindet sich der Schüler der Differenzial-Rechnung, wenn er dieselbe nach dem gegenwärtigen classischen Buche zu studiren unternimmt, am Anfange eines freyen Gefildes, wo er, auch ohne Führer, keine Gefahr läuft sich zu verirren, ob er gleich hie und da Wege wahrnimmt, die ihm irregulär scheinen, bisweilen einem Steine ausweichen, oder darüber hinwegschreiten muß, und am Ziele, bey aller Kenntniß der Theile, doch das Ganze noch nicht überblickt. Gäbe es jenseits dieses Gefildes in der Nähe einen Berg, dessen sich schlängelnder Aufweg zwar einige Mühe verursachte, auf dessen Gipfel aber das ganze Gefilde mit allen seinen Schätzen auf einmal dem Auge sich darstellte, so daß man zugleich den Standpunkt und die Wege erblickte, von welchem aus und auf denen man es durchwandern müßte, um nirgends einen Stein des Anstoßes, nirgends einen dunkeln oder gar entstellenden Fleck anzutreffen: was wäre dann die Pflicht dessen, der sich zum Führer anbieten wollte? Sollte es nicht hinlänglich seyn, wenn er erst am Fuße dieses Berges sich mit dem Wanderer vereinigte, ihm voran die Spitze desselben zu ersteigen suchte, und da ihm sagte, was er sähe? Ich bin mir des geringen Maßes meiner Kräfte zu sehr bewußt, als daß ich mich mit einem solchen Führer vergleichen könnte; nur eine Anhöhe erst habe ich erreicht, vom Gipfel jenes Berges bin ich noch weit entfernt. Auch trifft der, der Wege suchen muß, noch nicht unter mehreren schon betretenen wählen kann, nicht gleich

den

den kürzesten und bequemsten, und außerdem mußte ich öfters zurück und nach den Seiten hinblicken. Leicht wird es andern seyn, auf angenehmern Wegen und mit weniger Mühe und in kürzerer Zeit eine größere Höhe zu erreichen; leicht auch, mir anzuzeigen, wo ich gefehlt habe. Sollte ich es aber deswegen für ganz unnütz halten, den Weg, welcher sich mir darbot, so wie ich ihn gegangen bin, also auch mit allen seinen Unvollkommenheiten, vor Augen zu legen? Für ganz unnütz vielleicht nicht, aber doch für weit weniger nützlich, als die bloße Mittheilung des am Ende Gefundenen hätte seyn können? Wohl! auch nach diesem Urtheile will ich mich richten, und also hier die Resultate der in den Anmerkungen und Zusätzen angestellten Untersuchungen hersetzen.

So wie die reine Mathematik überhaupt nichts anders ist als reine Vernunftwissenschaft aus der Construction der Begriffe, (Critik der reinen Vernunft, von Immanuel Kant, 2te Aufl. S. 741.): so sind solches auch alle ihre Theile; und da durch das in dieser Definition enthaltene Kennzeichen das Wesen der Mathematik erschöpft wird, und aus demselben der Gegenstand dieser Wissenschaft abgeleitet und bestimmt werden muß: so müssen auch, bey der Festsetzung der Theile der Mathematik, die Constructionen der erste, und der Gegenstand oder die Größe der zweyte Eintheilungsgrund seyn.

Nun sind die Constructionen entweder

1. natürliche, d. h. solche, welche die Größen in ihren unterscheidenden Merkmalen; oder

2. will=

2. willkührliche, d. h. solche, welche die Größen durch gleichartige Größen und durch ihr Verhältniß zu diesen vorstellen. Ferner theilen sich die willkührlichen Constructionen ein

a. in ganz bestimmte, d. h. in solche, welche Einheit und Verhältniß bestimmt ausdrucken;

b. in nicht ganz bestimmte, d. h. in solche, welche entweder die Einheit, oder das Verhältniß unbestimmt lassen. Diese sind wieder

α. in Ansehung der Einheit bestimmte, d. h. solche, wobey man sich die Größen als unbestimmte Mengen bestimmter, und in jeder Größe durchaus einander gleicher Einheiten;

β. unbestimmte, d. h. solche, wobey man sich die Größen als unbestimmbare, aber bey allen gleich große Mengen, bald gleicher, bald ungleicher Einheiten gedenkt.

Was die Größe betrifft, so ist sie nur in so fern der Gegenstand der Mathematik, in so fern sie construirt werden kann, und dadurch fallen die unendlichen Größen, wenn der Gegenstand der Mathematik festgesetzt werden soll, durchaus und von selbst weg, und es bleiben bloß die endlichen Größen übrig. Diese aber sind entweder continuirliche, oder discrete, und dabey zugleich entweder bestimmte oder unbestimmte. Hierauf beruht die Eintheilung der Mathematik, welche S. 380 steht, und über deren logische Richtigkeit oder Unrichtigkeit nun das Urtheil leicht ist.

Die

Die höhere Mathematik ist also reine Vernunftwissenschaft aus unbestimmten Constructionen. Hieraus fließen folgende Behauptungen.

1. Da die endlichen Größen nicht anders in unbestimmten Constructionen untersucht werden können, als wenn sie veränderliche Größen ohne Einschränkung (S. 379.) sind: so machen eben deswegen diese veränderlichen Größen den Gegenstand der höhern Mathematik aus.

2. Da die Mengen der Einheiten in denen Größen, welche in unbestimmten Constructionen untersucht werden, bey allen gleich groß gedacht werden: so können sich die Untersuchungen der höhern Mathematik auch lediglich auf die Einheiten der veränderlichen Größen, nicht aber auf die Zahlen, welche ihre Menge in jeder Größe ausdrucken, erstrecken. Folglich bleibt

3. der höhern Mathematik nichts weiter möglich, als entweder

   a. aus gegebenen veränderlichen Größen ihre Einheiten, oder

   b. aus gegebenen Einheiten veränderlicher Größen diese Größen zu finden.

4. Jeder von diesen beyden Fällen hat aber wieder zwey andere unter sich, indem die Einheiten der veränderlichen Größen entweder bloß unbestimmt aber doch bestimmbar, oder unbestimmbar, mit andern Worten, unbestimmbar, klein seyn können. Folglich theilt sich

5. die

5. die ganze höhere Mathematik zunächst, d. h. ohne auf ihre Anwendungen zu sehen,

   a. in die Lehre von der Erfindung der Einheiten der veränderlichen Größen aus diesen Größen, wozu

      α. die Lehre von den Differenzen,

      β. die Differenzial-Rechnung gehört;

   b. in die Lehre von der Erfindung der veränderlichen Größen aus ihren gegebenen Einheiten, und diese theilt sich

      α. in die Lehre von den Summen,

      β. in die Integral-Rechnung.

6. Die Hauptsache in der Lehre von den Differenzen besteht in der deutlichen Darstellung der Differenzen, und die Hauptsache der Differenzial-Rechnung in der deutlichen Darstellung der Differenzialien, wenn die veränderlichen Größen, wozu sie gehören, gegeben sind: so wie das Eigenthümliche der Lehre von den Summen und der Integral-Rechnung, in der Erfindung der veränderlichen Größen aus ihren deutlich ausgedruckten Differenzen oder Differenzialien. Was die Erfindung des Verhältnisses betrifft, welches deutlich ausgedruckte Differenzen oder Differenzialien zu einander haben: so ist dieselbe eben so als die Erfindung des Verhältnisses aus gegebenen Differenzen und Differenzialien gefundener veränderlicher Größen ein Werk des Gebrauchs der gemeinen und unbestimmten Mathematik.

7. Da

7. Da die Lehre von den Summen die umgekehrte Methode der Differenzen, und die Integral-Rechnung die umgekehrte Methode der Differenzialien ist: so beruhet die Gewißheit der ganzen höhern Mathematik lediglich auf der Gewißheit des Weges, auf welchem man die Differenzen und die Differenzialien findet.

8. Die Regeln der Erfindung der Differenzen und Differenzialien können nur dann den erforderlichen Grad der Gewißheit haben, wenn sie aus dem Begriffe der Lehre von den Differenzen und der Differenzial-Rechnung selbst und unmittelbar fließen; eine Behauptung, wobey man sich nur daran zu erinnern braucht, daß die ganze reine Mathematik reine Vernunftwissenschaft seyn muß, und daß die allgemeine Mathematik nicht aus Constructionen, sondern vermittelst Constructionen aus Begriffen schöpft.

9. Da der in den Anmerkungen und Zusätzen eingeschlagene Weg nach diesem Gesichtspunkte gewählt ist: so kann er zwar in Nebendingen noch sehr vieler und großer Verbesserungen fähig seyn. Wenn ich dieses nicht selbst gestehen wollte, so könnte man mich mit Recht einer verblendenden Eigenliebe beschuldigen. Allein daß er im Wesentlichen gleichwohl allen übrigen bisher eingeschlagenen vorzuziehen sey, dies zu behaupten berechtigt mich die Zeit, und die mit äußerster Sorgfalt verbundene Anstrengung, welche er mir gekostet hat.

10. Die Vorstellung von den Differenzialien, bey welcher man sich dieselben, an sich, als verschwindende Größen, oder als = 0 gedenkt, ist bey der Erfindung der Regeln der Differenzial-Rechnung durchaus unnöthig, und führt außerdem, man mag sie unmittelbar, wie die meisten, oder mittelbar, wie einige, annehmen und brauchen, zu Dunkelheiten und Schwierigkeiten. Hierdurch fallen zugleich die von einander verschiedenen unendlich großen Größen einer Art weg.

11. Wenn man sich die Differenzialien als unbestimmte, aber gleichwohl nicht als unbestimmbar kleine Theile vorstellt, so verwandelt man dadurch die ganze Differenzial-Rechnung in weiter nichts, als in eine Beynahe-rechnung, wenn man mir anders diesen Ausdruck erlaubt.

12. Wenn man bey der Erfindung der Regeln der Differenzial-Rechnung die Exhaustions-Methode der Alten mit Recht und mit Vortheil brauchen zu können glaubt: so widerspreche ich dieser Behauptung in meinen Anmerkungen und Zusätzen nicht, weil es Eine Seite wenigstens giebt, von welcher betrachtet, ich Unrecht haben würde, und ich an dem gedachten Orte nur gelegentlich darauf komme. Allein wenn diese Sache genauer und nach der Strenge untersucht werden sollte, so zeigte sich vielleicht auch, daß die Exhaustions-Methode lediglich in die Elementar-Mathematik gehöre, und höchstens bey den Anwendungen der Differenzial-Rechnung auf elemen-

elementarische Gegenstände mit Nutzen gebraucht werden könne, ohne doch deswegen dabey nothwendig zu seyn.

Ich lasse es hierbey bewenden, um noch Platz zu einigen andern Anmerkungen zu behalten.

Vielleicht ist es einigen nicht unangenehm, den Beweis der Hauptregel der Differenzial- und Integral-Rechnung hier ebenfalls in größerer Kürze zu lesen, als ich denselben in den Anmerkungen und Zusätzen habe liefern können.

Wenn Größen in unbestimmten Constructionen (S. 378) untersucht, folglich als unbestimmbare, aber allenthalben gleich große Mengen, bald gleicher, bald ungleicher Einheiten gedacht werden sollen: so kann man jede dieser Größen, wenn man den Buchstaben δ, und das Zeichen ∞ so gebraucht, als es S. 373. geschehen ist, folglich das Zeichen ∞ nicht eine unendliche, sondern nur eine unveränderliche unbestimmbar große Zahl bedeuten läßt, durch ein Produkt aus der Zahl ∞ und der Einheit der gegebenen Größe ausdrucken. So ist z. B. unter den angeführten Bedingungen $x = \infty\delta x$; $x^2 = (\infty\delta x)^2 = \infty^2\delta x^2 = \infty\delta \,.\, x^2$, ꝛc. Ferner findet die Möglichkeit, die Einheit einer Größe, deren Construction zu den unbestimmten gehört, deutlich auszudrucken, nur in so fern statt, daß man dabey die Einheit irgend einer gleichartigen Größe in dem gedachten deutlichen Ausdrucke als Einheit braucht, und z. B. $\delta \,.\, x^2$ durch δx und andere Größen bestimmt, S. 292 und 312. Da hierdurch die Bedeutung von x auf keine Weise eingeschränkt wird, so kann man sich darunter jede bestimmte Größe derjenigen Art, welche x vorstellt, gedenken, und es haben daher die unbestimmten Constructionen, und folglich auch die ganze höhere Mathematik, die veränderlichen Größen zum Objekte. Es sey also x eine veränderliche Größe, und die Einheit irgend einer Funktion von x durch ∂x deutlich auszudrucken. Da $x = \infty \partial x$ ist, so läßt sich vermittelst dieser Substitution auch die gegebene Funktion von x so abändern, daß man allenthalben $\infty \partial x$ anstatt x setzt, ohne daß dadurch die Funktion eine andere Bedeutung bekomme. Da ferner $\partial x = \frac{x}{\infty}$ ist, so kann man auch diesen Werth für ∂x gebrauchen, wo man es nützlich findet. So lange man indeß bloß dieses thut, erreicht man seinen Zweck, die Einheit der gegebenen Funktion deutlich auszudrucken, nicht. Man setze also $x = \infty \partial x + \frac{x}{\infty}$, oder die Anzahl der Einheiten in den gegebenen Größen $= \infty + 1$, welches, wenn es allenthalben geschieht, wegen der Erklärung der höhern Mathematik, erlaubt ist. Da man hierdurch statt der vorhergehenden veränderlichen Größen andere zu eben der Art gehörige, und nur bloß darin von ihnen unterschiedene veränderliche Größen bekommt, daß sie eine Einheit mehr enthalten: so ist offenbar, daß man, nach gehöriger Entwickelung und der Subtraction jener von diesen, die gesuchte Einheit finden werde.

Es sey z. B. x^2 gegeben, um $\partial . x^2$ zu suchen, wenn der Punkt zwischen dem Buchstaben ∂ und der Construction

der

der gegebenen Funktion eben die Bedeutung hat, welche ihm zwischen dem Zeichen des Differenzials und der Construction, wovon das Differenzial gesucht werden soll, beygelegt zu werden pflegt. Alsdenn ist nach dem Vorhergehenden

$$\infty . \delta . x^2 = x^2, \text{ und}$$

$$(\infty + 1)\delta . x = (x + \delta x)^2 = x^2 + 2x\delta x + \delta x^2$$

folglich

$$\delta . x^2 = 2x\delta x + \delta x^2.$$

Ferner sey $d.x^n$ zu suchen; so ist auf ähnliche Art

$$\infty . \delta . x^n = x^n$$

$$(\infty + 1)\delta . x^n = (x + \delta x)^n =$$

$$x^n + n x^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{1 . 2}x^{n-2}\delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}x^{n-3}\delta x^3 +$$

etc.

folglich

$$\delta . x^n = n x^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{1 . 2}x^{n-2}\delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}x^{n-3}\delta x^3 +$$

etc.

Oder man kann auch auf folgende Weise verfahren, wobey man aber eigentlich nur andere Bezeichnungen braucht. Soll $\delta . x^2$ gesucht werden, so ist

$$\infty . \delta . x^2 = x^2 = \infty^2 \delta x^2$$

und

$$(\infty + 1)\delta . x^2 = ((\infty + 1)\delta x)^2 = (\infty^2 + 2\infty + 1)\delta x^2$$

$$= \infty^2 \delta x^2 + 2\infty\delta x^2 + \delta x^2 =$$

$$\infty^2 \delta x^2 + 2x\delta x + \delta x^2$$

weil $\infty\delta x = x$ ist. Folglich findet man auch hier

$$\delta . x^2 = 2x\delta x + \delta x^2,$$

und auf ähnliche Art läßt sich das andere Exempel behandeln. Verbindet man hiermit dasjenige, was in den Anmerkungen und Zusätzen S. 321 - 323 steht: so ist dasselbe für den gegenwärtigen Ort und die gegenwärtige Absicht hinreichend. Uebrigens kann δx sowohl unbestimmte, aber dabey bestimmbare, als unbestimmbare, oder genauer, unbestimmbar kleine Einheiten anzeigen. Im ersten Falle erhält man durch die Verwechselung des Buchstabens δ mit $\triangle$ deutliche Ausdrücke für die Differenzen, und im andern durch die Verwechselung eben desselben Buchstabens mit dem Zeichen der Differenzialien, d, deutliche Ausdrücke unbestimmter kleiner Theile. Setzt man darin, wenn man sie auf die letzte Art gesucht hat, mit Beybehaltung des dx, wenn es bloß mit bestimmten und unbestimmten Größen verbunden ist, $\frac{x}{\infty}$ für dx, $\frac{x^2}{\infty^2}$ für dx^2 ꝛc., wobey denn ∞ eine unbestimmbar große Zahl bedeutet: so fallen die Glieder, welche ohne Nachtheil der mathematischen Strenge weggelassen werden können, und zugleich auch der Grund, warum solches geschehen kann, von selbst in die Augen. So wird

$$d.x^2 = 2xdx + \frac{x^2}{\infty^2} = 2xdx$$

$$d.x^3 = 3x^2dx + \frac{3x^3}{\infty^3} + \frac{x^3}{\infty} = 3x^2dx$$

u. s. f.

Weiter bin ich, was die Entwickelung der Regeln der Differenzial-Rechnung betrifft, in den Anmerkungen und

Zusätzen

Zusätzen zum gegenwärtigen ersten Theile der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung deswegen nicht gegangen, weil das Angeführte für denjenigen, der das Eulerische Werk bey der Erlernung der genannten Wissenschaft zum Grunde legen will, hinreichend seyn kann, um ihn in den Stand zu setzen, ohne Führer weiter fortzugehen. Aber da man in der Differenzial- und Integral-Rechnung so viel von dem Unendlichen zu reden pflegt, daß man sogar beyde Wissenschaften mit dem stolzen Namen der Analysis des Unendlichen belegt, und doch in denselben nichts weniger thut, als das Unendliche aufzulösen: so verdiente auch das sogenannte unendlich Große und unendlich Kleine der Mathematiker, am Ende noch besonders erwogen zu werden. Was ich über den Abschnitt, worin solches geschehen ist, zu sagen habe, ist kürzlich folgendes.

Einmal habe ich darin, wegen mancherley Rücksichten, die ich zu nehmen hatte, nicht wohl vermeiden können, hie und da Excursionen zu machen. Wenn daraus für einen oder den andern eine größere Weitläuftigkeit geflossen seyn sollte, als er wünscht, so bitte ich dieselbe nicht meiner Materie zuzuschreiben, sondern mir anzurechnen.

Ferner habe ich mich an einigen Orten auf meine vorhergehenden Schriften berufen müssen, insbesondere auf meine Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Algebra, auf die Zusätze zum ersten Theile meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, und auf meine Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik und die Art, die Vollkommenheit und Brauchbarkeit derselben zu vergrößern. Daß ein Schriftsteller seine eigene Schriften citirt, ist eine Sache die keiner Entschuldigung bedarf, er müßte denn dieselbe durch die Art, wie er es thut, nothwendig machen. Allein verschiedenes, was ich aus meinen Schriften voraussetze, gehört mit zu dem, von einigen meiner Recensenten für problematisch, desgleichen für überflüssig, und insbesondere für Anfänger zu schwer erklärten. Was heißt problematisch? Auch das, was aus richtigen Begriffen nach ausgemachten Regeln gefolgert werden kann, und beym Gebrauche unter andern auch dadurch sich bewährt, daß es, sonst unwiderleglichen Schwierigkeiten selbst die Quelle verstopft? Es kann etwas diese Beschaffenheit haben, wenn es gleich, vielleicht wegen Unvollkommenheit der Darstellung, nicht jedem darin erscheint. Ferner giebt es Werkzeuge, die mehr kosten, als Eins von den Dingen, welche man dadurch zu Stande bringt, die aber derjenige nicht entbehren kann, der die Kunst treibt, zu welcher es gehört. Soll man deswegen Grundbegriffe und Grundlehren nicht in möglichster Genauigkeit und Vollständigkeit vortragen, weil dazu von Seiten des Schülers eine größere Aufmerksamkeit nöthig ist, als man ihm zutraut, und etwas mehr Zeit erfordert wird, als wenn man ihn nur oberflächlich damit bekannt machte? Wer stimmt nicht darin mit mir überein, daß ein Weg, der anfänglich rauh ist, aber bald darauf eben wird, und dann durch reizende Fluren geht, dem vorzuziehen sey, der kurze Zeit ergötzt, aber zu unersteiglichen Klippen führt?

Wer

Wer nicht darin, daß gut angewandte Zeit edlere und reichlichere Zinsen trage, als sicher angelegtes Geld? und daß ein Jüngling keine Zeit besser anlege als die, welche er zur Uebung des Auges seines Geistes anwendet? Doch es haben mich die meisten von denen, welche meine für Anfänger in der Mathematik geschriebenen Bücher beurtheilt haben, durch eben so ehrenden als gütigen Beyfall ermuntert, und es ist daher meine Pflicht, lieber allen Tadel bloß zu meiner Belehrung zu nutzen. Von der Nothwendigkeit und Richtigkeit der Neuerungen also überzeugt, welche ich in der Mathematik theils schon gemacht, theils nur erst vorgeschlagen habe, wozu kann der Tadel, insbesondere von einem Kästner, Klügel, und einigen andern, mir dem Namen nach unbekannten, aber gewiß sehr einsichtsvollen Mathematikern, mich bewegen? Anzunehmen, dünkt mich, daß ich noch nicht tief genug eingedrungen sey; daß ich nicht immer bloß auf meinen Gegenstand gesehen, sondern öfters zu ängstlich auf diejenigen, für welche ich schrieb, Rücksicht genommen; insbesondere aber, daß ich bey der Mittheilung meiner, nicht sowohl neuen, sondern nur genauer entwickelten und allgemeiner gemachten Theorien, einen höhern Grad der Deutlichkeit, Leichtigkeit und Kürze zu erreichen aufs sorgfältigste mich bestreben müsse. Männern, wie die vorhin genannten, dankt man am besten durch die That, und so will auch ich ihnen meinen Dank bringen. Deswegen habe ich bereits meine Theorie von der allgemeinen Multiplication und Division, ohne gleichwohl irgend eine von meinen Behauptungen darin zurück zu nehmen, so umgearbeitet, daß ich mich nun auch nicht einmal im Ausdrucke, von dem Gewöhnlichen zu erfernen scheine, und im Stande bin, dieselbe ersten Anfängern, in kürzerer Zeit und mit weniger Anstrengung von ihrer Seite beyzubringen, als sonst der gewöhnlichen Multiplication und Division der Buchstabenrechnung mit Bereitwilligkeit eingeräumt zu werden pflegt. Ich werde dieselbe nächstens in meinen Beyträgen zur Beförderung des Studiums der Mathematik, wovon, vom April dieses Jahres an, monatlich ein Stück erscheinen wird, zur öffentlichen Prüfung vorlegen, und auf ähnliche Art mit dem Uebrigen verfahren. Jetzt wage ich eine Bitte, und setze sie zugleich mit ihren Gründen her.

Meine Neigung zur Mathematik rührt ursprünglich daher, weil ich sie immer als die vollkommenste unter allen Wissenschaften hatte rühmen hören, und Euclides, dessen Elemente ich bey der Erlernung der Geometrie zum Grunde legte, diesen Lobspruch mir immer mehr bewährte. Die Anfangsgründe der Analyse machte ich mir aus des Hrn. Obrist-Lieutenants von Tempelhof Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen bekannt, angereizt durch ein öffentliches Urtheil des verstorbenen Hrn. Geh. R. von Segner über diese Schrift: Der Herr Verfasser ist in meine Fußstapfen getreten, aber er hat mich übertroffen. Daß ich des Hrn. Hofrath Kästners Schriften wegen des darin verborgenen reichen Schatzes mathematischer Kenntnisse, in so großer Präcision und Schärfe dargelegt, stets als jedem Mathematiker unentbehrlich betrachtet habe, brauche ich

kaum

kaum zu berühren. Meine Lage gab mir früh Gelegenheit, meine wenigen mathematischen Kenntnisse beym Unterrichte studirender Jünglinge zu gebrauchen, und seit zwanzig Jahren ist fast kein Tag verflossen, an welchem ich diese Gelegenheit nicht gehabt hätte. Dieser Umstände wegen, und insbesondere, weil ich durch die Schriften des Hrn. Obrist-Lieutenants von Tempelhof auf die wahre Quelle in der allgemeinen Mathematik aufmerksam gemacht war, und die Euclideische Methode durch das Studium der Elemente des Euclides vorher schon, wenigstens empfinden gelernt hatte, war es sehr natürlich, daß ich längst, in Rücksicht auf die Methode, bald hier bald da, und je länger desto mehr, Unvollkommenheiten in der Mathematik wahrnahm; und vieles, was ich anfänglich nur für Schein hielt, der von der Eingeschränktheit meiner Einsichten herrührte, zeigte sich mir in einem sehr hellen Lichte, als ich nach der Erscheinung der Critik der reinen Vernunft von Hrn. Kant, durch die Entwickelung der darin vorkommenden Definition der Mathematik, und also auf einem ganz andern Wege, zu eben den Resultaten gelangte. Gern gestehe ich es, daß ich mich, so oft ich an diese Definition denke, (und beym Anblick einer Eiche, die durch ihre Größe und Stärke zur Bewunderung zwingt, drängt sich die Vorstellung von der Eichel, aus der sie entsprang, unwiderstehlich hervor) des Gedankens nicht erwehren kann: es werde ihrem Urheber, den Moses Mendelssohn der alles zermalmenden nannte, die Nachwelt den Namen des tief gründenden geben. Von Zeit zu Zeit habe ich meine Meinungen, wenn ich dazu bey meinen schriftstelleri-

schen

schen Arbeiten Gelegenheit fand, öffentlich geäußert, und das meiste, obgleich viel weniger als ich hätte sagen können, in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik zur Prüfung vorgelegt. Meine Absicht und mein Wunsch dabey ist weit mehr gewesen, mir dadurch Gelegenheit zur Belehrung von Kennern zu verschaffen, als Ruhm zu erwerben, wozu vorzüglichere Talente gehören, als ich fühle. Eine günstige Witterung hat mich auf diese Art in den Stand gesetzt, einen Boden, der in Ansehung der Fruchtbarkeit höchstens zu den mittlern gehört, wenigstens so zuzubereiten, daß er den Namen eines undankbaren Landes nicht verdiene. Hr. Kant legte zum allgemeinen Gebrauch ein Samenkorn hin. Ich habe es aufgenommen, einem bearbeiteten Boden anvertraut, dasselbe gepflegt, die Pflanze, welche daraus hervorsproß, gewartet, bis sie Ansatz zu Blüthen zeigte. Was rückständig ist, erfordert geschicktere Gärtner, und belohnende Ehre soll es mir seyn, wenn sie mich nicht unfähig halten, unter ihrer Aufsicht und Leitung meine bisherige Arbeit fortzusetzen. Und an wen könnte hierbey meine Bitte sich wenden, als an eben die Männer, deren Namen ich bereits mit aller Dankbarkeit eines Schülers genannt habe, den Hrn. Obrist-Lieutenant von Tempelhof, den Hrn. Hofrath Kästner, und den Hrn. Professor Kant, das heißt, an Deutschlands erste Mathematiker und größten Philosophen. Noch fehlt der Mathematik in Ansehung der Methode und von ihrer philosophischen Seite betrachtet, bey aller ihrer übrigen unläugbaren großen Vollkommenheit, viel, ob sie gleich den Namen der vollkommensten Wissenschaft,

selbst

selbst der bloßen Möglichkeit nach, nicht verdienen würde, wenn sich dieses Viele nicht auch auf weniges zurückführen ließe. Die gewöhnlichen Erklärungen der Mathematik reichen noch nicht einmal hin, den Gegenstand dieser Wissenschaft so zu bestimmen, daß man ihn in jedem Falle deutlich unterscheiden könnte. Die Eintheilungen ferner, welche man daraus nach logischen Regeln ableiten kann, sind größtentheils so unvollkommen, so unvollständig und verworren, daß ihnen nichts weniger als der Name logischer Eintheilungen zukommt. Was die Sätze der Mathematik betrifft, so giebt es darunter eine große Menge, deren Gewißheit nur scheinbar, oder höchstens hypothetische Gewißheit ist; und das natürlich, weil man ihre Beweise aus unrechten entweder, oder aus unlautern Quellen schöpfte. Insbesondere aber erscheint die Mathematik zu oft in einem Gewande, welches ihr ihre vornehmsten und wichtigsten Reize raubt; noch gewährt sie insbesondere den formellen Nutzen, den man in so reichem Maaße von ihr erhalten kann, nur selten; noch hält sie die Schätze der Erkenntniß von der Art, wie unser Geist bey seinen Operationen verfährt, größtentheils verschlossen. Man betrachte Hrn. Kants Definition der Mathematik als Samenkorn, vertraue es einem fruchtbaren Boden an, und pflege es. Was für eine genaue Bestimmung des Gegenstandes der Mathematik, was für eine vollkommene Eintheilung sprießt daraus hervor! Man entwickele diese Erklärung, und versuche, ob das ganze Gebäude der Mathematik nicht durchaus einer solchen, und vielleicht noch größern Festigkeit fähig sey, als die Elemente vom Euclides

des haben? Man überlege den außerordentlichen Grad von Leichtigkeit, den die Mathematik auf diese Art, und zwar in Verbindung mit einer größern Gründlichkeit und Vollständigkeit, erreichen kann. Und dann, was allerdings noch wichtiger, aber mit dem Vorhergehenden auf das genaueste verbunden ist, so ist bekannt, daß Plato urtheilte: Das Studium der Mathematik reinige und belebe das Organ der Seele, was durch die gewöhnlichen Beschäftigungen des Lebens versinstert und unterdrückt werde. Aber dieser Vortheil ist uns in einem um eben so viel höhern Grade möglich, als der Umfang der Mathematik jetzt größer ist, als zur Zeit Platos. Endlich eröffnet sie dem Philosophen und dem Lehrer unversiegbare, noch nicht genug besuchte Quellen der wichtigsten Wahrheiten: selbst dem Moralisten bietet sie Beyspiele dar, an welchen er, wie mit den Augen, wahrnehmen kann, unter was für Umständen sogar die deutlichsten, festesten Grundsätze nichts wider die Gewalt der Sinne vermögen, und wenn auf der andern Seite jeder noch so lebhafte sinnliche Eindruck gleichsam von der Oberfläche abgleitet. Wäre es möglich, aus der unübersehbaren Menge der Materialien, welche die Mathematik in ihrem jetzigen Zustande dazu enthält, ein Lehrgebäude aufzuführen, welches durch seine Simplicität bloß das Auge des Kenners reizte; dessen Theile zwar jedem Blicke sichtbar wären, aber, in Ansehung ihrer Verbindung unter einander und ihrer Zweckmäßigkeit, nur erst beym Gebrauch erkannt werden könnten, dabey erst in immer hellern und anziehendern Lichte sich zeigten: ein Lehrgebäude, dessen Gebrauch jedem von dem

Augen-

Augenblicke an frey stünde und leicht wäre, sobald derselbe für ihn Bedürfniß würde, und welches, bey sorgfältiger Benutzung, alle vorhin gerühmte Vortheile gewähren könnte: sollte ein Versuch dasselbe wirklich zu errichten der Mühe unwerth, sollte er tadelswürdig seyn, wenn man dabey bloß dem Ziele sich näherte, es nicht ganz errichte? dürfte man nicht mit Cicero denken: Prima sequentem honestum est in secundis tertiisque consistere? Zwanzig volle Jahre habe ich mich zu einem solchen Versuche vorbereitet, so daß ich in der ersten Hälfte lediglich durch die Lagen, in welchen ich mich befand, angetrieben und geleitet wurde, die dazu erforderlichen Wege zu gehen, und in der andern erst anfing mein Ziel wahrzunehmen. Aber auch von dieser Periode verfloß ein Theil, wo ich es nur in der Ferne und dunkel erblickte, und mehr als einmal bin ich im Begriffe gewesen, Wege zu erwählen, welche mich gänzlich davon abgeführt haben würden. Immer wieder zu demselben hingeleitet, ist nun seit mehrern Jahren mein ganzes Streben allein nach ihm gerichtet gewesen, und ich würde, so wie bisher, nur in der Stille gesucht haben, mich ihm immer mehr und mehr zu nähern, wenn mir nicht die Größe und Wichtigkeit der Sache Belehrung und Leitung von Kennern unentbehrlich machte. Die Mathematik ist die erste unter den Wissenschaften, welche sich mit den Formen, das heißt, mit demjenigen beschäftigen, wobey unser Geist der wirklichen Dinge und der Hülfe der Erfahrung nicht bedarf; und wenn sich also der gründliche Gelehrte dadurch unterscheidet, daß er vermittelst der Kenntniß von den Formen die Natur wirkli-

cher

cher Gegenstände in reellen Begriffen untersucht: so gehört das Studium der ganzen Mathematik zu den allerersten Vorbereitungsstudien zur gründlichen Gelehrsamkeit. Ueberhaupt genommen, giebt man dieses zu, und hat es längst und oft gesagt. Aber man hält dabey das Studium der Mathematik für schwerer, als es ist, wenn es mit möglich größter Gründlichkeit getrieben werden soll (und doch ist möglich größte Gründlichkeit, so paradox auch diese Behauptung klingen mag, gerade das sicherste Mittel, die Mathematik selbst Kindern angenehm und leicht zu machen) glaubt deswegen, daß es erst für die spätern Jahre gehöre, und befürchtet wohl gar, wie Hr. Rehberg im Januar der Berlinischen Monatsschrift vom Jahr 1789, von der frühen Betreibung desselben schädliche Folgen. Darf ich ein Urtheil wagen, an dessen Richtigkeit schon die Vorstellung der Natur der Mathematik und die Beschaffenheit des von ihrem Studium zu erwartenden formellen Nutzens mich nicht zweifeln läßt, worin ich aber auch durch andere hier nicht her gehörige Gründe bestärkt worden bin: so ist es möglich

das Studium der Mathematik so einzurichten, daß diejenigen, welche die Fähigkeiten besitzen, die zur Erlernung der Wissenschaften überhaupt erfordert zu werden pflegen, in dem Zeitraume von ihrem zehnten bis zum sechszehnten Jahre, bey zwey Stunden wöchentlich dem Unterrichte, und so viel zu eigenen Arbeiten bestimmt, als auf zwey Stunden Unterweisung in andern Wissenschaften Niemanden zu viel scheinen, dasselbe so weit vollenden können, als nöthig ist, um entweder, wenn

sie

sie sich ganz der theoretischen, reinen und angewandten Mathematik widmen wollen, weiter keines Führers zu bedürfen, oder, wenn sie sich andern Wissenschaften bestimmen, daraus am Ende des gedachten Zeitraums bereits alle ihnen nöthige Denkfertigkeiten gezogen zu haben, oder endlich, wenn die praktische Anwendung der mathematischen Wissenschaften ihr Ziel ist, auch dazu vollkommen vorbereitet zu seyn.

Die Regeln, welche das Verfahren des Lehrers hierbey bestimmen, sind der Zahl nach so wenige, daß sie, vollständig hingesetzt, noch keine Octavseite füllen würden, und, dem Wortverstande nach, so leicht, daß sie jedem, der ihre Kraft und Umfang nicht aus Erfahrung kennt, den Namen der Regeln gar nicht zu verdienen scheinen müssen. Wer das, was Seneca im Anfange des vier und neunzigsten seiner Briefe von der Moral-Philosophie behauptet, als wahr empfunden hat, und dabey die Regeln, wornach ein Lehrer bey der Unterweisung sein Verhalten einrichten muß, als einen Theil der Moral-Philosophie betrachtet, der wird durch leichte Modification jener allgemeinen Behauptung, was ich hier sagen könnte, von selbst finden, welches auch nöthig ist, wenn man es wirklich kennen gelernt haben will. Also bloß ein Gleichniß für diejenigen, welchen obige Forderung zu groß dünkt. Durch Maschinen ist selbst ein Kind im Stande, Lasten zu bewegen, welche, ohne Gebrauch eines Werkzeugs, Männerkraft nicht von der Stelle bringt. In der Mathematik ist vieles möglich, was beym ersten Anblick jede Kraft zu übersteigen scheint; aber die Mathematik bietet auch jedem, der sie wahrnehmen und brauchen will, die Maschinen dar, welche dazu erfordert werden.

Auf diese Art also denke ich, durch die im Anfange dieser Excursion beschriebenen Umstände geleitet, und nachdem ich die meisten meiner Behauptungen Jahrelang mannigfaltigen Prüfungen unterworfen habe, von der Mathematik, und insbesondere von dem, was, in Ansehung ihrer, auf Schulen und Gymnasien geschehen könnte und sollte. Wagte ich mich aus meiner Sphäre, redete ich von dem, was andere, vorzüglich in höhern Posten, thun sollten, und spräche ich früher, ehe ich fest überzeugt seyn könnte, daß nicht eine erwärmte, noch weniger eine erhitzte, Einbildungskraft mich verführe: so wüßte ich, was ich zu erwarten hätte: Vorwurf der Ruhmredigkeit, und bittern Tadel. Allein ins zwölfte Jahr öffentlicher Schullehrer, also so lange, daß ich, wo ich nicht irre, nach Luthers Meinung, nach gerade unter die Märterer mich rechnen könnte, (ob ich gleich gern gestehe, daß ich bis jetzt das Angenehme des Schullebens je länger desto mehr, und das Unangenehme nur dann empfunden habe, wenn ein schwacher oder kränkelnder Körper mich außer Stand setzte, meine Arbeiten ganz so wie ich es wünschte zu verrichten,) darf ich unstreitig gütige Beurtheilung hoffen, wenn ich Ein Mal ausführlich sage, was mir scheint, und dabey in meiner Sphäre bleibe. „Handeln ist besser als reden.“ Doch mit der Einschränkung, daß man kein Bedenken tragen darf, das letzte zu thun, wenn man dadurch hoffen kann, in Ansehung des ersten weiter zu kommen? Ich

habe

habe Jahre nöthig gehabt, um die, sowohl in Ansehung der Mathematik selbst, als auch in Ansehung ihres Vortrags auf Schulen, geäußerten, allerdings großen Forderungen zuerst an sich nicht für übertrieben zu halten; und dann sind wieder Jahre nöthig gewesen, ehe ich von mir glauben konnte, ich werde vielleicht selbst einst im Stande seyn, ihnen ein Genüge zu leisten. Noch bin ichs nicht, dies gestehe ich frey, aber ich werde mich dem beschriebenen Ziele immer mehr und mehr zu nähern suchen, und dieses mit weit stärkern Schritten als bisher zu thun im Stande seyn, wenn Kenner, und insbesondere diejenigen Männer, deren Namen gegenwärtiges Buch zieren, meine Behauptungen Ihrer Prüfung, und mich Ihrer Belehrung nicht unwerth halten. Ich glaube einiges Recht zu haben, an Sie vorzüglich mich zu wenden. Denn theils ist Ihre gütige Herablassung bekannt, und theils kann ich durch Proben belegen, daß jeder Ihrer Winke von mir aufs gewissenhafteste benutzt wird. Um nur einige anzuführen, so habe ich bey meiner Entwickelung der ersten Gründe der Differenzial-Rechnung, die ich gegen jeden Einwurf vertheidigen zu können hoffe, ob gleich, so lange ich sie nicht weiter führe, als hier geschehen ist, manche dagegen möglich scheinen müssen, das wichtigste einem unverwandten Blicke auf ein Urtheil zu danken, welches der Hr. Obrist-Lieutenant von Tempelhof, bey einer mündlichen Unterredung mit mir, gelegentlich äusserte: Der Gebrauch der Grenzen der Verhältnisse bey dem Beweise der Regeln der Differenzial-Rechnung ist unzweckmäßig, die höhern Potestäten der Differenzialien fallen, wenn niedrigere da sind, deswegen weg, weil sie überflüssig sind. Der Hr. Hofrath Kästner hat unter allen Recensenten meiner bisherigen für Anfänger geschriebenen Schriften, denselben zuerst und anhaltend den Vorwurf einer zu großen, und in die Länge abschreckenden Weitläuftigkeit gemacht. Man vergleiche das, was S. XIII-XXII. dieser Vorrede steht, mit dem in den Anmerkungen und Zusätzen für Schüler der Differenzial-Rechnung geschriebenen; schließe daraus auf die Art, wie ich jenen Tadel benutzt habe, und traue mir zu, daß ich künftig bey dem, was ich für Männer schreibe, die erworbene Fertigkeit nicht unbenutzt lassen werde. Was endlich Hrn. Kant betrifft, so verweise ich auf das, was ich von dessen Definition der Mathematik gesagt habe. Daß ich aber den gegenwärtigen Gegenstand an diesen Ort gezogen, hat folgende Ursachen. Einmal glaubte ich, die Namen solcher Männer, welche die Nachwelt zu den Classikern zählen wird, keiner Uebersetzung als der eines classischen Werks vorsetzen zu dürfen. Zum andern war es mir, nach meinen Grundsätzen, so gern ich es sonst schon früher gethan hätte, nicht eher erlaubt, ohne alle Zurückhaltung zu reden, ehe ich nicht überzeugt war, daß ich auf meinem Wege keine unübersteigliche Hindernisse antreffen würde. Zuvor mußte ich daher, um bloß dies anzuführen, weil es das wichtigste ist, nach Versuchen mich im Stande wissen, die ersten Gründe der Differenzial- und Integral-Rechnung, wenn es verlangt würde, selbst demjenigen abzufragen, der außer der Elementar-Geometrie und den allerersten Anfangsgründen der Buchstabenrechnung in der Mathematik nichts weiß. Uebrigens

ist

ist nunmehr der Plan zu meinen künftigen Beschäftigungen in Ansehung der Mathematik auf meine ganze Lebenszeit entworfen; ein Lehrgebäude der Mathematik, wie es Lehrer an Schulen und Gymnasien brauchen, werde ich unter dem Titel: Euclid's Elemente, für den gegenwärtigen Zustand der Mathematik bearbeitet und fortgesetzt; und die Erläuterungen, welche ihnen dabey nützlich seyn können, in meinen Beyträgen zur Beförderung des Studiums der Mathematik zu liefern versuchen: das Uebrige daraus dann, wenn ich es ausgeübt haben werde.

Ehe ich schließe, muß ich noch einem Einwurfe begegnen, welcher durch die Behauptung S. XXIX, XXX. veranlaßt werden kann; es sey ein vollständiges Lehrgebäude der Mathematik möglich, welches eben dieselbe, und vielleicht noch eine größere Festigkeit habe, als Euclid's Elemente. Meine Entwickelung, oder vielmehr mein Beweis der Hauptregel der Differenzial-Rechnung, sagt man vielleicht, bestätige diese Behauptung nicht, indem dadurch bloß gezeigt werde, daß wir in Rücksicht unserer, nicht aber, daß wir an sich ein Recht haben, die so genannten unvollständigen Differenzialien statt der vollständigen zu brauchen. Ich antworte darauf dreyerley. Zuvörderst läßt sich noch fragen, ob sich mein Beweis wirklich nicht weiter erstrecke? Aber zugegeben, daß er so eingeschränkt sey, so reicht zweytens das Auge öfters weiter als die Füße Kraft zum Gehen haben; und wenn ich ein Ziel nicht erreichen kann, so wird es ein anderer vermögen. Endlich ist vielleicht drittens, um allen

Anstoß in dieser Sache aus dem Wege zu räumen, nichts weiter nöthig, als auf dem betretenen Wege noch einen Schritt weiter vorwärts zu thun. Darf ich nemlich mit Hrn d'Alembert, in der Encyclopédie méthodique, in dem Artikel, Différentiel, annehmen, daß sich die Regeln der Differenzial-Rechnung auf folgende drey zurückführen lassen:

$$d(x + y + z) = dx + dy + dz$$

$$d \,.\, xy = ydx + xdy$$

und

$$d \,.\, x^n = nx^{n-1}dx,$$

so ist klar, daß es hier beym Beweise hauptsächlich auf die beyden letzten ankomme. Angenommen also, daß d^n und d^{n+1} zwey unmittelbar auf einander folgende Elemente der veränderlichen Größen, vor welchen sie stehen, anzeigen, und auf ähnliche Art ∂^n und ∂^{n+1} zwey unmittelbar auf einander folgende Bestandtheile der veränderlichen Größen, mit deren Construction sie verbunden sind, andeuten: so ist zwar, ohne Ausnahme und ohne Bedingung,

$$\partial^0 \,.\, xy = xy - (x - \partial x)(y - \partial y) = y\partial x + x\partial y - \partial x \partial y$$

und

$$\partial^1 \,.\, xy = (x + \partial x)(y + \partial y) - xy = y\partial x + x\partial y + \partial x \partial y$$

so wie auch

$$\delta^{\circ} . x^n = nx^{n-1}\delta x - \frac{n(n-1)}{1 . 2}x^{n-2}\delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}x^{n-3}\delta x^3 - \text{rc.}$$

und

$$\delta^{1} . x^n = nx^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{1 . 2}x^{n-2}\delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}x^{n-3}\delta x^3 + \text{rc.}$$

Allein wenn wir deswegen glauben wollten, es sey auch ohne Ausnahme und ohne Bedingung,

$$d^{\circ} . xy = ydx + xdy - dxdy$$
$$d^{1} . xy = ydx + xdy + dxdy$$

desgleichen

$$d^{\circ} . x^n = nx^{n-1}dx - \frac{n(n-1)}{1 . 2}x^{n-2}dx^2 + \text{rc.}$$

$$d^{1} . x^n = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 . 2}x^{n-2}dx^2 + \text{rc.}$$

so begiengen wir keinen geringern Fehler als den, daß wir den Schein für die wahre Beschaffenheit nähmen. So lange man zwey unmittelbar auf einander folgende Bestandtheile irgend einer veränderlichen Größe noch so ausdrucken muß, daß sich zwischen beyden ein von beyden verschiedener, zwischen ihnen liegender, Bestandtheil denken läßt: so lange hat man es, und dieses nach dem Begriffe der unbestimmten und der unbestimmbar kleinen Theile, nur mit unbestimmten, aber nicht mit unbestimmbaren Theilen oder Elementen zu thun. Der einzige uns übrige Weg, einen allgemeinen, völlig genauen, Ausdruck für die Elemente zu finden, ist der, daß man aus zweyen vollständigen Ausdrücken unmittelbar auf einander folgender unbestimmt kleiner Bestandtheile das Mittel suche. Bedeuten daher die römischen Zahlen oberhalb neben dem Buchstaben d, daß die zweyte Hälfte folgender Gleichungen nicht unbestimmbare, sondern nur unbestimmt kleine Bestandtheile darstelle, und wird dabey der Buchstabe d ohne diese römische Zahlen wie gewöhnlich als das Zeichen der Elemente oder der Differenzialien betrachtet: so ist, absolut und völlig genau:

$$d \,.\, xy = \frac{d^{0} \,.\, xy + d^{I} xy}{2} = y dx + x dy$$

und

$$d \,.\, x^{n} = \frac{d^{0} \,.\, x^{n} + d^{I} x^{n}}{2} = n x^{n-1} dx.$$

Wollte man hiergegen einwenden, daß auf diese Art zwar

$$d \,.\, xy = y dx + x dy$$

und

$$d \,.\, x^{2} = 2 x dx$$

gefunden würde, daß sich aber nach eben der Regel

$$d \,.\, xyz = zy dx + zx dy + xy dz + dz dx dy$$

$$d \,.\, x^{3} = 3 x^{2} dx + dx^{3};\ d \,.\, x^{4} = 4 x^{3} dx + 4 x dx^{3}$$

ꝛc.

ergebe: so wäre dieser Einwurf mir unter allen sonst noch möglichen der angenehmste. Denn einmal stehen die Sätze

welche

welche man zur Wegräumung dieses Einwurfs nöthig hat, ganz vollständig und deutlich, in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, S. 68 f. §. 98-102, und es träfe daher derselbe mich um so weniger, da ich ausserdem, ein Jahr darauf, in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik, insbesondere S. 181 f. gezeigt habe, in was für Schwierigkeiten die gewöhnliche Theorie von den Zeichen + und —, wegen ihrer Unvollständigkeit, selbst schon bey den Anwendungen der Buchstabenrechnung auf die Elementar-Geometrie, führe. Ferner erhielte ich dadurch Gelegenheit, an eine Behauptung zu erinnern, die ich im Jahr 1784, kurz nach der Bekanntmachung der Preisaufgabe der hiesigen Königl. Akademie der Wissenschaften, eine genaue Theorie des Unendlichen zu liefern, aber freylich in einem Buche geäußert habe, was den Bellettristen ein Anstoß, und den Critikern ein Aergerniß geworden ist, in meiner Uebersetzung von Horazens Dichtkunst; nemlich: Man werde das Verlangte schwerlich in der höhern Mathematik zu leisten im Stande seyn, ohne zuvor etwas ähnliches in der gemeinen gethan zu haben. Endlich bekäme ich dadurch ein Recht, mich gegen den Vorwurf zu vertheidigen, als überhäufe ich die Mathematik mit problematischen Behauptungen, und brauche Unterscheidungen, welche die Erlernung derselben erschweren, und am Ende nur dazu dienen, zu verhüten, daß man durch jene problematische Sätze nicht verführt werde. Noch thue ich dies nicht, am wenigsten hier, sondern sage nur, daß ich mir einer Absicht bewußt bin, die etwas weiter geht, und daß ich die

Mathematik nicht zu erschweren sondern leichter zu machen wünsche und strebe, ob ich gleich nicht dafür kann, daß ich in Ansehung der Leichtigkeit wie Hr. Kästner denke, (Geometrische Abhandlungen, erste Sammlung,) denn es hat mich mein Vater von Kindheit an gewöhnt, auf wirkliche Muster zu sehen. Also; was drucken diejenigen Differenzialien, welche man bisher fälschlich für unvollständig gehalten hat, eigentlich aus? Das Differenzial einer Linie dasjenige, was sich zwischen zweyen Punkten in ihr denken läßt, wenn man dieselben so nahe neben einander annimmt, daß sie nicht näher gedacht werden können, ohne zusammen zu fallen; das Differenzial einer Fläche dasjenige, was sich auf ähnliche Art und unter ähnlichen Umständen zwischen zweyen Linien in ihr, und das Differenzial eines Körpers dasjenige, was sich eben so zwischen zweyen Flächen in ihm denken läßt. Ueberhaupt aber ist das Differenzial jeder veränderlichen Größe dasjenige, was sich zwischen zweyen so nahe einander liegenden Werthen derselben denken läßt, daß man diese Werthe einander nicht näher bringen kann, ohne dadurch beyde Werthe in einen Einzigen zu verwandeln; und wenn dieses der Begriff ist, den man, nach der Meinung der Erfinder der Differenzial- und Integral-Rechnung, mit dem Worte Differenzial verknüpfen muß: so haben und brauchen wir, nicht unvollständige, sondern die vollständigsten und genauesten Ausdrücke dafür. Also ist das Differenzial einer Linie kein Punkt, das Differenzial einer Fläche keine Linie, das Differenzial eines Körpers keine Fläche, überhaupt kein Differenzial irgend einer

verän-

veränderlichen Größe eine Null; und eben so wenig bloß eine unbestimmt kleine Größe, oder etwas, was man auf dem Wege der Exhaustions-Methode finden könnte. Aber wenn man die Gründe der Differenzialien, genau und frey von allem Widerspruche, einsehen zu lernen, deswegen sich nicht ernstlich vorsetzen kann, weil man dazu kein Bedürfniß fühlt, und bloß durch Befolgung der, von andern mitgetheilten, Regeln der Differenzial-Rechnung des Nutzens dieses Calculs theilhaftig werden will: so gleicht die Mathematik darin der Religion, daß sie die schädlichen Folgen theoretischer Irrthümer nur denen zu empfinden giebt, deren Pflicht es war, nach deutlichen Einsichten zu streben, weil sie nicht bloß handeln, sondern auch andere lehren sollten; daß sie die Fehler der verzeihlich Irrenden auf Wegen unschädlich macht, die dem flach Urtheilenden Verirrungen auf ihrer Seite zu seyn scheinen; daß sie aber auch denen, welche ihr bloß um der Vortheile willen, nicht wegen ihrer Vortreflichkeit und aus Neigung dienen, nur die Schätze gewährt, die sie ihren wahren Verehrern bloß als Zugabe bestimmt. Daher läßt es sich erklären, wie es möglich gewesen, in der Differenzial-Rechnung so viele wahre Lehrsätze aus einer widersprechenden Behauptung zu ziehen; daher ist begreiflich, wie sich sogar manche gerade in diesen widersprechenden Behauptungen vorzüglich haben gefallen könnnen; daher soll es am allerwenigsten mich befremden, wenn ich durch das Bisherige nicht jedermann überzeuge.

Und vielleicht habe ich, mir selbst unbemerkbar, hier oder da einen Fehltritt begangen, der dieses als eine ganz

natür-

natürliche Folge bey demjenigen nach sich ziehen muß, welcher ihn wahrnimmt. Ich weiß aus Erfahrung, wie leicht man sich, oft da am ersten täuscht, wo man es am wenigsten glaubt. Es hat tiefen Eindruck auf mich gemacht, daß sogar ein Euler bey der Widerlegung der Newtonschen Theorie des Lichts auf eben die Klippe stieß, welche zu vermeiden er des Des Cartes Hypothese verfeinerte. Man belehre mich; meine etwanigen Fähigkeiten kann ich nicht vergrößern, sondern nur üben, aber eine freye Brust jeder Belehrung darzubieten, das steht in meiner Gewalt, das halte ich für Pflicht, und werde es thun.

Den zweyten Theil der Eulerischen Differenzial-Rechnung werde ich in zweyen Abtheilungen, jede so wie diesen ersten Theil, mit Anmerkungen und Zusätzen, liefern; die erste, wenn nicht ganz unerwartete Hindernisse eintreten, Michaelis dieses, und die andere Ostern künftigen Jahres. Läßt sich alsdann mein Hr. Verleger dazu bereitwillig finden, so erscheint die Messe darauf ein dritter Theil, welcher die Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Geometrie und eine vollständige Geschichte dieses Theils der höhern Mathematik enthalten soll. Berlin, den 12ten Merz 1790.