Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Vorrede des Verfassers.

Vorrede des Verfassers.

Es ist schwer, die Differenzial-Rechnung und die Analysis des Unendlichen *), wovon jene ein Theil ist, denen zu erklären,

*) So üblich diese Benennung ist, so unschicklich oder unpassend ist sie auch. Die Gründe davon habe ich schon gelegentlich angeführt. Der Buchhändler, welchem ich gegenwärtige Uebersetzung vor meinem jetzigen Hrn. Verleger anbot, äußerte sich so: Eine Differenzial-Rechnung in Verlag zu nehmen, sey er zwar nicht abgeneigt, aber zu einer Analysis des Unendlichen könne er sich nicht verstehen, weil dergleichen nur für wenige gehöre. Daß er das Wort Differenzial-Rechnung eben so wenig als die Benennung Analysis des Unendlichen verstand, ist ohne mein Erinnern klar; aber in gleichem Falle sind in diesem Stücke mit ihm die Schüler der höhern Mathematik im Anfange, daher es denn auch kein Wunder ist, wenn so mancher bloß

klären, die darin noch gar keine Kenntniß besitzen *), und man kann deswegen hier nicht füglich, so wie in andern Wissenschaften, von der Erklärung ausgehen **). Zwar irrte man, wenn man behaupten wollte, die Differenzial-Rechnung und die Analysis des Unendlichen ließen sich gar nicht definiren; allein da dazu mehrere Begriffe erfordert werden, die nicht bloß im gemeinen Leben, sondern selbst in der Analysis des Endlichen ungebräuchlich sind, und erst in der

bloß durch den Namen, weil er ihn etymologisch nimmt, abgeschreckt wird. Daß Wörter den Münzen ähnlich sind, ist freylich wahr, aber noch ist mir kein Fall bekannt, wo diejenigen, die das Münzrecht auszuüben befugt sind, Gold mit dem Stempel des Kupfergeldes hätten prägen lassen.

*) Also wären die Mathematiker in Ansehung des wichtigsten Theils ihrer Wissenschaft in dem Falle, in welchem sich diejenigen befinden, die wegen der Undeutlichkeit ihrer Vorstellungen die Objekte derselben bloß herbeyführen und zeigen können?

**) Dies hieße mit andern Worten: Die Differenzial-Rechnung läßt sich nicht scientifisch behandeln. Aber da die ganze Mathematik reine Vernunftwissenschaft, und die höhere ein Theil der allgemeinen Mathematik ist: so gilt Ciceros bekannter Ausspruch hier mehr als sonst irgendwo: *Quaecunque a ratione suscipitur* de aliqua re institutio, *debet a definitione proficisci*, ut intelligatur, quid sit id, de quo disputetur. Nach Hrn. Garvens Uebersetzung: Mit Recht soll jede methodisch angestellte Untersuchung, von der Erklärung des Gegenstandes anfangen, um den Leser bestimmt wissen zu lassen, was eigentlich untersucht werden soll.

der Differenzial-Rechnung erworben werden müssen *): so bleibt die gedachte Definition so lange unverständlich, bis man die Gründe des Differenzial-Calculs deutlich gefaßt hat. Es hat also zuvörderst dieser Calcul die veränderlichen Größen zum Gegenstande **). Denn obgleich jede Größe ohne Ende vermehrt oder vermindert werden kann ***): so betrachtet man doch, wenn man einzelne oder vielmehr specielle Fälle untersucht, einige Größen so, daß man sich dieselben als unveränderlich, und andere dagegen als aller Grade der Vermehrung und Verminderung fähig gedenkt. Jene pflegt man beständige, diese veränderliche Größen zu nennen; eine Unterscheidung, welche nicht sowohl in der Natur der Sache, als vielmehr in den Bedingungen ihren Grund hat, unter welchen man eine Aufgabe auflöset. Um

dieselbe

*) Größen die kleiner sind als jede Größe, welche sich angeben läßt, kommen schon in der Elementar-Mathematik vor, und Fälle, wo man nicht aus Constructionen, sondern vermittelst Constructionen aus Begriffen schöpft, sind in der gemeinen Mathematik nicht seltner als in der höhern. Es ist daher auch alles, was auf obigen Grund gebauet wird, ungegründet.

**) Nicht die veränderlichen Größen jeder Art, sondern nur die veränderlichen Größen ohne Einschränkung, S. 373, und auch diese nicht überhaupt, sondern nur, wenn man sich dieselben als unbestimmbare Mengen von Elementen gedenkt; oder man muß Differenzial-Rechnung und Lehre von den Differenzen, und vielleicht gar unbestimmte und höhere Mathematik nicht von einander unterscheiden.

***) S. S. 307.

dieselbe durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir annehmen, es werde eine Bombe geworfen. Hier kommen verschiedene Größen in Betrachtung. Zuerst die Menge des Pulvers; dann die Richtung des Mörsers; drittens die Weite des Wurfs; viertens die dazu erforderliche Zeit: und wenn Versuche mit verschiedenen Mörsern gemacht werden, ausserdem noch die Länge derselben und die Schwere der Bomben. Diese beyden letzten Dinge wollen wir indeß bey Seite setzen, um den Fall nicht zu sehr zu verwickeln. Aendert man also, bey stets gleicher Menge des Pulvers die Richtung des Mörsers, und will man die zugehörige Weite des Wurfs nebst der Zeit finden: so hat man in der Menge des Pulvers, oder der gegebenen Kraft, eine beständige, in den übrigen Dingen aber veränderliche Größen, wenn die Aufgabe allgemein aufgelöset werden soll. Sollte bey unveränderter Richtung des Mörsers die Menge des Pulvers verschiedentlich angenommen, und die dabey entstehenden Wirkungen untersucht werden: so wäre die Richtung eine beständige, und die Menge des Pulvers, die Weite und Dauer des Wurfs veränderliche Größen. Es gehören daher die Größen, nach Verschiedenheit der Umstände, bald zu den beständigen, bald zu den veränderlichen; und außerdem erhellet aus diesem Beyspiele, worauf es bey der Untersuchung der veränderlichen Größen vorzüglich ankomme, nemlich, die Abhängigkeit einer veränderlichen Größe von andern veränderlichen Größen zu bestimmen. Bleibt nemlich, im ersten Falle, die Menge des Pulvers unverändert dieselbe, so ändert sich die Weite und die Dauer des Wurfs, mit der Richtung des

Mörsers,

Mörsers, und es sind folglich die Weite und die Dauer des Wurfs veränderliche Größen, die von der Richtung des Mörsers abhangen, und sich mit derselben ändern: im andern Falle hingegen hangen sie von der Menge des Pulvers ab. Sind nun Größen auf die Art von einander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der andern zu bewirken: so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der andern betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch andere bestimmt werden kann, unter sich begreift *). Wenn also x eine veränderliche Größe bedeutet, so heißen alle Größen, welche auf irgend eine Art von x abhangen, oder dadurch bestimmt werden, Funktionen von x: z. B. das Quadrat xx, und jede Potenz von x, so wie

*) Vielleicht ist Hr. Prof. Pfaff in Helmstädt durch diese Stelle zu der Behauptung veranlaßt worden, womit er sein Programm: De peculiari differentialia investigandi ratione, ex theoria functionum deducta, Helmstädt, 1788, anfängt. Ich sage vielleicht; denn so weit ich Hrn. Pfaff kenne, gehört er zu denen, welche dergleichen eben so leicht aus sich selbst schöpfen, als von andern nehmen. Wem meine obigen Behauptungen von den der Mathematik noch immer anklebenden Mängeln übertrieben scheinen, der findet in diesem Programm auf der vierten Seite folgende Worte: Nec prorsus inepte judicaveris, quod hactenus condere licuit Analyseos systema, esse veluti compagem fragmentorum.

wie auch alle daraus auf irgend eine Art zusammengesetzte, ja selbst die transcendenten, und also überhaupt alle Größen, welche auf die Art von x abhängen, daß jede Veränderung dieser x eine Veränderung in ihnen nach sich zieht. Dieses vorausgesetzt entsteht die Frage: Was für eine Veränderung die Funktionen von x erfahren, d. h. um was für Größen dieselben vermehrt oder vermindert werden, wenn x um eine gegebene Größe vermehrt oder vermindert wird? In den einfachern Fällen hat die Beantwortung derselben keine Schwierigkeit. Denn wird x um die Größe ω vermehrt, so bekommt das Quadrat xx den Zuwachs $2x\omega + \omega\omega$, und es verhält sich daher der Zuwachs von x zum Zuwachse von xx, wie ω zu $2x\omega + \omega\omega$, d. h. wie 1 zu $2x + \omega$, und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen. Es ist aber die Untersuchung des Verhältnisses dieser Incremente nicht nur an sich von der größten Wichtigkeit, sondern es beruht darauf auch die ganze Analysis des Unendlichen. Um dieses deutlicher zu machen, so haben wir gesehen, daß sich der Zuwachs, den xx bekommt, wenn x um ω vermehrt wird, zu dem Incremente von x verhalte, wie $2x + \omega$ zu 1. Hieraus erhellet, daß sich das Verhältniß $2x + \omega : 1$ dem Verhältnisse $2x : 1$ desto mehr nähere, je kleiner ω angenommen wird, daß aber nicht eher $2x + \omega : 1 = 2x : 1$ sey, bevor nicht $\omega = 0$ geworden *). Ferner ist klar, daß der Zuwachs von xx, ob er

*) Wer könnte hierwider das Mindeste einwenden? Aber nun die Folge? Wenn A und B in Ansehung ihres Vermögens in einem solchen Verhältnisse zu einander stehen, daß B anfänglich x^2 hatte,

er gleich, wenn der Zuwachs von x in Null übergeht, mit demselben verschwindet, dennoch zu ihm das Verhältniß $2x : 1$ hat, und was hier von dem Quadrate gesagt worden ist, das

 läßt

hatte, als A bloß x besaß, und beyde darauf dieses Capital auf die Art vermehrt haben, daß einmal keiner das seinige vergrößerte, ohne daß es der andere nicht auch gethan hätte, und zweytens jeder zu dem, was er hatte, stets so vielmal ω legte, als er bereits x besaß: so stehen allerdings die Incremente des Vermögens von beyden, diese Incremente mögen groß oder klein seyn, in dem Verhältnisse $2x\omega + \omega\omega : \omega$ oder $2x + \omega : 1$. Aber nun angenommen, daß die Quelle der Einnahmen beyder versiegen, daß weder A noch B das Mindeste mehr einnehmen, und daß nun die Frage aufgeworfen werde: Wie sich in diesem Falle und von diesem Zeitpunkte an die Incremente des Vermögens von A und B verhalten? Der schlichte Verstand antwortet: Dann fallen die Incremente, also auch das Verhältniß zwischen ihnen, und folglich sogar die Frage weg. Eben das sagen die Mathematiker, so lange sie keine Mittel brauchen, welche den schlichten Verstand in Schlummer wiegen, nur mit andern Worten. Freylich könnte man, wenn es nicht Euler gethan hätte, mit einigem Schein behaupten, es sey Stolz und Begierde, Blöße zu bedecken, wenn man anstatt der Redensart: es findet gar kein Verhältniß statt; die Worte braucht: es kann jedes Verhältniß angenommen werden. Allein warum sollten nicht auch die Mathematiker bisweilen uneigentlich, oder bedingter Weise reden, ohne jedesmal die aus dem Zusammenhange leicht sich ergebende Bedingung ausdrücklich beyzufügen? Aber das ist ausgemacht, daß die Mathematik, wenn man sie zwingt, Constructionen zu gebrauchen, welche deutliche und

genau

läßt sich auf alle übrige Funktionen von x ausdehnen, als deren verschwindende *) Incremente, oder diejenigen, welche sie bekommen, wenn x um einen verschwindenden Zuwachs ver-

genau bestimmte Begriffe nur verworren und mangelhaft ausdrücken, und dabey gleichwohl Resultate von ihr erwartet, in welchen man, selbst durch einen flüchtigen Blick, auch dasjenige wahrzunehmen im Stande sey, was sie wegen des Fehlers der gedachten Constructionen unmöglich zeigen können: es ist ausgemacht, sage ich, daß die Mathematik alsdann *n'embarasse* pas seulement l'Infini, wie in den Zusätzen, S. 353. vor der Correctur anstatt *n'embrasse* pas seulement l'Infini gesetzt worden war. Das übrige in der folgenden Anmerkung.

*) Was heißt incrementum evanescens? Wenn nicht Euler S. 77. des Originals gesagt hätte: Si quantitas tam fuerit parva, ut omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla; so würde ich incrementum evanescens durch Increment übersetzen, welches im Begriff ist zu verschwinden. Auf diese Art entfernte ich mich eben nicht vom Lateinischen, und hätte gleichwohl den Begriff des Differenzials gerade so, als ich ihn S. XLII f. gegeben habe, und wie er seyn muß, um, wenn es verlangt wird, aus dem Begriffe des Differenzials, mit Hülfe der gemeinen und unbestimmten Mathematik, die ganze Differenzial- und Integral-Rechnung zu entwickeln. Allein wollte ich behaupten, daß Euler den Ausdruck incrementum evanescens so habe verstanden wissen wollen: so könnte ich außer der angeführten Stelle auch alle diejenigen nicht erklären, in welchen er von verschiedenen unendlich großen Größen spricht, und mein ganzes Bestreben wäre vielleicht weiter nichts, als Bemü-

vermehrt wird, zu diesem Zuwachse ein gewisses und bestimmbares Verhältniß haben. Und auf diese Art sind wir zu der Definition des Differenzial-Calculs gelangt, welcher nichts

 anders

Bemühung, aus einem vollkommnen Gemälde Schatten wegzubringen, ohne welchen dasselbe kein vollkommnes, und noch weniger ein natürliches Gemälde seyn würde. Euler war Architect genug, um selbst schwache Balken zu einem starken Gerüste zu verbinden, aber nachahmen dürfen wir ihn in diesem Stücke nicht, weil wir seinen Blick und seine Kenntnisse nicht besitzen. Warum hätte ich also Bedenken tragen sollen, da, wo es um der Nachahmer willen nöthig war, zu sagen: Euler habe schwache Balken gebraucht? da ich nicht einmal dem daraus zusammengesetzten Gerüste, und noch vielweniger dem von ihm aufgeführten herrlichen Gebäude, seine Festigkeit abspreche. Oder soll ich von Mathematikern befürchten, sie werden Hinweisen nach einer Feder auf dem Kleide eines verdienstvollen Mannes für Angriff auf seinen Ruhm ansehen? denn alles, was ich in den Eulerschen Schriften bis jetzt getadelt habe, ist, zusammengenommen, gegen das viele, über allen Tadel erhobene, was wir von diesem Analysten erster Größe besitzen, doch in der That so wenig, daß mein Tadel nichts anders als Hinweisen nach einer Feder auf dem Kleide genennt werden kann. Zwar haben in einem andern Falle drey Männer mich belehrt, daß außer der Mathematik dergleichen Verwechselungen bisweilen sogar zu dem Gewöhnlichen gehören; und einer darunter hat sich dabey so genommen, daß ich, wenn ich ein Gleichniß brauchen sollte, warlich kein anderes wüßte, als das von einem Hunde, der, um seinen Herrn zu beschützen, schon bellt, wenn jemand nach demselben hinweiset: dagegen bey der Strafe,

welche

anders ist, als die Methode, das Verhältniß der verschwindenden Incremente zu bestimmen, welche die Funktionen veränderlicher Größen bekommen, wenn die veränderliche Größe, wovon sie Funktionen sind, um ein verschwindendes Increment vermehrt worden. Daß diese Erklärung die Natur des Differenzial-Calculs ausdrucke, ja sogar erschöpfe, wird jeder einsehen, der in diesem Theile der höhern Mathematik kein gänzlicher Fremdling ist. Es beschäftiget sich also die Differenzial-Rechnung nicht sowohl mit diesen Incrementen selbst, denn diese sind Nullen; sondern vielmehr mit der Erforschung des Verhältnisses, welches sie zu einander haben: und da sich diese Verhältnisse durch endliche Größen ausdrucken lassen, so muß man auch eigentlich sagen, daß die Differenzial-Rechnung endliche Größen zum Gegenstande habe. Denn obgleich die Regeln derselben gewöhnlich so vorgetragen werden, als ob man dabey die Bestimmung der verschwindenden Incremente zur Absicht habe:

welche die beyden andern wegen meiner καταβασεως εἰς ἀλλο γενος über mich zu verhängen geruht haben, mir doch wenigstens übrig blieb, Horazens Urtheil anzuwenden:

— — Esto — — — — —
— — — — — censorque moveret
Appius, ingenuo si non essem patre natus?
Vel merito; quoniam in propria non pelle quiessem.

Indeß der Erfolg sey, welcher er wolle, so sind mir bittere Arzneyen allemal lieber als süßliche, und ich nehme sie bereitwillig selbst von dem Arzte an, den ich wegen seiner Einsichten hochschätze, und wegen seiner niedrigen Denkart verachte.

habe: so schließt man doch aus ihnen, an sich genommen, nie, sondern allemal aus ihren Verhältnissen zu einander *).

*) Ich habe in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik irgendwo gesagt: Es sey zur Erfüllung der von mir gemachten Forderungen nicht nöthig, neue Sätze und Methoden zu erfinden, sondern nur das bereits erfundene Gute allgemeiner und stärker zu benutzen. **Euler** nennt in der gegenwärtigen Stelle die Differenzialien incrementa evanescentia. Man nehme das Beywort evanescentia in der Bedeutung, die ihm, ob es gleich ein Participium der gegenwärtigen Zeit ist, beygelegt werden kann, und halte sich daran: so sieht man an der Quelle der wahren und leichtesten Regeln der Differenzial-Rechnung. Ferner sagt er: hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Was ist das anders, als Bestreitung der Behauptung des M. de l'Hopital: L'Analyse des infiniment petits pénétre jusques dans l'infini même; — on peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini? Man behalte auch dieses unverrückt vor Augen, so fallen sicher alle Schwierigkeiten der Differenzial-Rechnung, die nicht aus der gemeinen und unbestimmten Mathematik entspringen, durchaus weg. Endlich sagt Euler, daß die Bestimmung der Differenzialien nicht die eigentliche oder nicht Hauptabsicht der Differenzial-Rechnung sey Nun kann nicht geleugnet werden, daß die Differenzial-Rechnung im Anfange doch nichts anders thue, als die Differenzialien der Funktionen veränderlicher Größen durch die Differenzialien dieser Größen und durch gegebene beständige und veränderliche Größen bestimmen. Oder soll dies nicht Bestimmung der Differenzialien seyn, weil darin die Differenzialien der gegebenen veränderlichen Größen enthalten sind?

Auf ähnliche Art verhält es sich mit der Integral-Rechnung, welche man füglich durch die Methode erklärt, aus dem Ver-
hältnisse

sind? Dann müßte man auch behaupten, daß alle unsere Bestimmungen aller endlichen, selbst der bestimmtesten beständigen Größen keine Bestimmungen derselben wären, weil doch in jeder der Begriff der Einheit zu den bloß klaren Begriffen gehöre. Ferner läßt sich zeigen, daß es nur Schein sey, wenn man sagt, die Hauptabsicht der Differenzial-Rechnung bestehe in der Erforschung der Verhältnisse der Differenzialien, oder vielmehr, man findet dieses sehr bald und von selbst, wenn man die Bestätigung jener Behauptung in dem Eulerischen Werke sucht. Die ganze Differenzial-Rechnung beschäftiget sich nemlich darin, entweder mit der Bestimmung oder der Erfindung deutlicher Ausdrücke der Differenzialien, oder sie erforscht die allgemeinen Beziehungen, in welchen die Differenzialien mit ihren veränderlichen Größen stehen; alles übrige ist Anwendung derselben. Endlich enthält das gegenwärtige Werk vom fünften Capitel an eine so vortrefliche Auseinandersetzung des Gebrauchs der Hauptregeln der Differenzial-Rechnung bey der Bestimmung der Differenzialien der einzelnen Arten der veränderlichen Größen, und eine so meisterhafte Entwickelung der Kennzeichen der möglichen und der imaginären Differenzialien, so wie auch das Meiste von dem, was zur Bestimmung des Umfangs des durch Differenzialien gegebenen nöthig ist: daß man dasselbe nicht anders als classisch nennen kann. Es war also die angeführte Behauptung kein unverdientes, oder aus Nebenabsichten geheucheltes Compliment; denn was ich hier an einem Beyspiele gezeigt habe, könnte ich eben so leicht durch mehrere darthun. Allein eben so wenig wünschte ich, daß öfterer gesagt würde, es sey das Meiste von dem, was
ich

hältnisse der verschwindenden Incremente die Funktionen zu finden, von welchen sie dergleichen Incremente sind.

ich empföhle, vielleicht schon geleistet, und wo ich ziemlich allgemein angenommenes Verfahren tadele, sey ich vielleicht im Grunde damit eins, nur in Vorstellungsart und Ausdrückungen unterschieden. Ich will mich daher der gegenwärtigen Gelegenheit bedienen, um mich auch über die Endabsicht meiner Forderungen zu erklären. Da also, wo es nöthig ist, dunkele, unvollständige und einseitige Begriffe aus dem Wege zu räumen, und deutliche, vollständige und allgemeinere an deren Stelle zu setzen; desgleichen, nachdem man dieses gethan, die auf jene Begriffe gebauten Theorien, wo sie es bedürfen, von ihren Fehlern, sie mögen Namen haben wie sie wollen, zu befreyen, und wo es angeht, zu erweitern und fortzuführen; scheint mir freylich auch in der Mathematik noch immer eine Sache zu seyn, worin viel zurück gelassen worden ist. Allein mein Wunsch geht weiter. Das Studium der Mathematik kann die edelsten Dinge für den Geist des Menschen, Wahrheit und Gewißheit, früh dem Jünglinge zum dringenden Bedürfnisse machen; es kann die Anlagen, womit ihn der Schöpfer begabt hat, früh zu Fertigkeiten erheben, durch deren Gebrauch er dieses Bedürfniß, und zwar so zu befriedigen im Stande ist, daß er dadurch zu neuer Thätigkeit gereizt wird; es kann ihn früh mit den Wegen bekannt machen, welche er überall gehen muß, wenn er sich wahre, d. h. durch eigenen Gebrauch seiner Denkkräfte erworbene, Kenntnisse auf die Art verschaffen will, daß ihm selbst die dabey nöthige Anstrengung eine Quelle des Vergnügens werde. Wenn nur diejenige Speise dem Körper Nahrung wird, welche der Magen verdauen kann: so ist nach der Milch, welche die Natur durch

Um aber diese Verhältnisse desto leichter zu erkennen, und durch brauchbare Zeichen vorzustellen, hat man für die ver-

schwin-

die Sinne einflößt, die Mathematik die erste wirkliche Nahrung des jugendlichen Geistes, weil er, gut geführt, darin vom Anfang an nichts zu lernen braucht, was er nicht ganz lernen könnte. Wenn wir bey Kindern erst alle Theile ihres Körpers zu der erforderlichen Größe und Stärke gelangen lassen, ehe wir einzelnen Gliedern besondere Fertigkeiten zu geben suchen: warum sollten wir nicht, wenn wir sie einzelnen Wissenschaften bestimmen, zuvor alle ihre Seelenkräfte zu der eben so nothwendigen Stärke erheben? Bey dem Körper leitet uns die Natur, bey der Seele sollen wir, durch Vernunft geleitet, selbstthätig uns beweisen. Eine erhabene Bestimmung! aber ist es nicht auch Pflicht, bey der Größe und Wichtigkeit derselben vorzüglich das Mittel zu brauchen, wodurch wir am allerersten und sichersten ihr ein Genüge zu leisten vermögen? Was außer dem Schulkreise liegt, das Wort Schule in der Bedeutung genommen, in welcher Schulen und Academien einander entgegengestellt werden, betrachte ich auch als außerhalb meiner Sphäre liegend. Aber eben auf und für Schulen ist in der Mathematik bisher nur das Wenigste und Geringste gethan; höchstens hat man sie theilweise benutzt, um das Organ der Seele zu reinigen und zu beleben, und sollte sie da hierzu allein und ganz zu benutzen suchen. Entwürfe von einem Menschen meiner Art taugen nichts, sobald zu ihrer Erfüllung Unterstützung von andern und ermunternde Belohnungen nöthig sind. Zur Erfüllung meines Wunsches ist jene nicht erforderlich, und diese überflüssig. Verzeiht man es mir, daß ich gelegentlich so viel von einer Sache rede, die mir, da sie mit meiner Pflicht zusammenhängt, im höchsten Grade wich-

tig

schwindenden Incremente, ob sie gleich Nullen sind, dennoch besondere Zeichen erwählt, bey welchen es leicht ist, denselben auch unterscheidende Namen beyzulegen. Man nennt sie also Differenzialien, und außerdem, weil sie gar keine Größe haben, unendlich kleine Größen, so daß man sich dabey immer etwas gedenken muß, was $= 0$ oder nichts ist. Wenn daher der Größe x das Increment ω gegeben, und x also in $x + \omega$ verwandelt wird: so geht das Quadrat x^2 in $x^2 + 2x\omega + \omega\omega$ über, und bekommt folglich das Increment $2x\omega + \omega\omega$. Es verhält sich demnach das Increment von x, oder ω, zu dem Incremente von x^2, oder $2x\omega + \omega\omega$, wie 1 zu $2x + \omega$; und dieses Verhältniß wird nicht anders dem Ver-

tig ist; betrachten mich die Edlen, an die ich mich in dieser Angelegenheit wenden kann, nicht als einen Menschen, den die Sucht sich zu zeigen leitet;

— — — quod vitium procul abfore chartis
Atque animo prius, ut si quid promittere de me
Possum aliud, vere promitto;

würdigen sie vielmehr meine Gedanken ihrer einsichtsvollen Prüfung; belehren sie mich; ertheilen sie mir Winke und gütigen Rath; und vor allen Dingen fristet dabey der Erhalter aller Dinge mein Leben: so hoffe ich, daß zur Befriedigung meines Wunsches bald nichts weiter mehr erfordert werden soll, als ein Lehrer, der durch eigenen Gebrauch seiner Denkkräfte in dem, was er lehren soll, deutliche Kenntnisse sich erworben hat, und dabey ein Herz besitzt, welches die Wichtigkeit des Berufs eines Jugendlehrers fühlt; und so kränkend wird man doch nicht von dem Schulstande denken, daß man dergleichen Lehrer unter die Seltenheiten rechnete?

Verhältnisse 1 : 2x gleich, als wenn ω verschwindet. Wird also $\omega = 0$, so ist das Verhältniß der verschwindenden Incremente, welches allein in der Differenzial-Rechnung betrachtet wird, allerdings dem Verhältnisse 1 : 2x gleich; und umgekehrt würde dieses Verhältniß der Wahrheit nicht gemäß seyn, wofern nicht das Increment ω verschwände, und gänzlich nichts würde. Wenn daher dieses durch ω angezeigte Nichts als das Increment der Größe x betrachtet wird, so ist das Increment des Quadrats $x^2 = 2x\omega$, weil sich jenes zu diesem wie 1 zu 2x verhält, und also auch das Increment des Quadrats $= 0$; woraus erhellet, daß das Verhältniß verschwindender Incremente, ihres Verschwindens ohnerachtet, ein bestimmtes Verhältniß sey *). Nun bezeichnet man das

*) Daß Euler bey der Aufführung seines schönen Gebäudes der Differenzial-Rechnung ein Gerüste brauchte, welches er aus schwachen Balken künstlich zusammensetzte, und davon auch hier eine Probe giebt; das darf man, wie schon gesagt, ihm nicht zum Vorwurfe machen, das Gebäude, welches er aufführen wollte, steht da. Wenn ferner die Gebäude der Wissenschaften unsern Wohngebäuden auch darin glichen, daß man nach ihrer Vollendung das Gerüste niederreißen, und die Materialien derselben, wenn sie zu nichts weiter brauchbar wären, verbrennen könnte: so sähe jeder von selbst, was man zu sagen und zu thun berechtiget wäre. Aber wenn man in dem Gebäude einer Wissenschaft wohnen will, so muß es unser eigen seyn; und da man es seiner Natur nach nicht von andern kaufen kann, sondern dasselbe nach einem Risse, welchen man von ähnlichen, wirklich dastehenden Gebäuden genommen hat,

das Nichts, welches hier durch ω ausgedruckt worden ist, in der Differenzial-Rechnung durch dx, und nennt es das Diffe-

hat, selbst gründen, aufführen und vollenden muß: so ist bekannt, daß eine Copie nicht gut seyn kann, wenn das Original fehlerhaft ist, und daß Palläste Gerüste nöthig machen, die mehr kosten als Hütten, worin ein Arbeiter zur Miethe wohnt. Und was ich hier Gerüste genennt habe, kann, von einer andern Seite betrachtet, mit eben dem Rechte, Fundament genennt werden. Eulers Differenzial-Rechnung ist ein schönes, ein vortrefliches Gebäude; dies sage und wiederhole ich mit vollkommner Ueberzeugung. Auch das Non plus ultra? Das mögen diejenigen behaupten, welche das, Inventis addere facile est, nicht auf sich angewandt wissen, oder ihre Hände in den Schooß legen wollen. Wessen Haus einen Riß bekommt, der sucht die Ursache im Fundamente. Wem das seinige nicht geräumig, nicht hoch und nicht bequem genug ist, reißt lieber das alte nieder, und bauet auf tiefer gelegtem, festerm Grunde ein neues, mehrerer Etagen fähiges Gebäude auf, als daß er jenes erhöhte, um das aufgesetzte wegen der Schwäche des Grundes bald wieder abnehmen zu müssen. Sollen auch in den Wissenschaften die Kinder dieser Welt klüger seyn, als die Kinder des Lichts? In der Länge und Breite verhindern uns die Besitzungen unserer Nachbaren, uns nach Gefallen auszudehnen; wie hoch wir bauen wollen, dabey kommt es außer der Art, wie wir bauen, freylich auch darauf mit an, wie hoch die Gebäude unserer Nachbaren sind, aber in gerader Linie brauchen wir gleichwohl nicht mit ihnen zu bleiben. Die Höhe, zu welcher das Gebäude der Differenzial-Rechnung aufgeführt werden kann, hängt allerdings von der ab, welche die übrigen Theile der Mathematik erreicht haben; allein

Differenzial von x, so daß daher das Differenzial von $x^2 = 2xdx$ wird. Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß das Diffe-

allein was hindert uns, wenn diese noch nicht hoch genug sind, neue Etagen aufzusetzen? Hr. Prof. Bürja redet in seinem Selbstlernenden Algebristen im zehnten Hauptstücke von logarithmischen Proportionen und Progressionen? Vielleicht läßt sich mehr als bisher damit anfangen, wenn man die Regeln einer Differenzial-Rechnung darauf anwendet, welche aus einer eben so vollkommenen Erklärung der Differenzial-Rechnung ausführlich abgeleitet worden, als Hrn. Kants Definition der Mathematik? Kurz! ich räume gern ein, daß es Maxima gebe; aber ich behaupte auch, daß wir dieselben zwar in Gedanken, aber in der Wirklichkeit nie erreichen; und bin dabey überzeugt, daß unwichtig scheinende Dinge große Folgen haben können, so wie auch, daß wir keine Früchte erndten werden, wenn wir die Bäume, welche sie tragen sollen, nicht im Samen oder in Ablegern pflanzen. Deswegen sage ich also hier, alles kurz zusammen zu fassen, noch einmal: daß die hier zusammengedrängte Theorie der Differenzialien voller Fehlschlüsse sey; daß alle übrige philosophische Entwickelungen der Hauptregeln des Differenzial-Calculs, der Richtigkeit dieser Regeln selbst unbeschadet, ihr in Ansehung des Fehlerhaften nicht weit nachstehen; daß es aber nicht nur für die leichtere Erlernung, sondern selbst für die Erweiterung der Differenzial-Rechnung und zwar sowohl ihrer selbst als ihrer Anwendungen, eine Sache von der äußersten Wichtigkeit sey, eine vollkommen genaue Theorie derselben zu haben; und daß diese Theorie auf keinem andern Wege möglich sey, als

Differenzial von $x^3 = 3x^2dx$, und überhaupt das Differenzial von $x^n = nx^{n-1}dx$ sey. Ueberhaupt mögen Funktionen gegeben seyn, von was für Art man wolle, so lehrt die Differenzial-Rechnung, wie ihre Differenzialien gefunden werden, nur muß man dabey beständig vor Augen haben, daß man daraus, weil sie im strengen Verstande Null sind, nichts weiter ableite, als das Verhältniß derselben zu einander, welches man allerdings im Stande ist, durch endliche Größen anzugeben. Wenn aber die Principien des Differenzial-Calculs auf diese Art festgesetzt werden, und sie allein ist der Vernunft gemäß: so fallen alle Vorwürfe, welche man diesem Theile der höhern Mathematik gemacht hat, von selbst weg; und dagegen behielten sie ihre ganze Stärke, wenn die Differenzialien der unendlich kleinen Größen nicht im strengen Verstande $= 0$ wären. Es haben aber mehrere von denen, welche die Differenzial-Rechnung vorgetragen haben, geglaubt, man müsse die Differenzialien von nichts unter-

scheiden,

als wenn man dieselbe aus einer wirklichen Definition der Differenzial-Rechnung, ohne die Exhaustions-Methode dabey zu gebrauchen, ableitet. Was ich in dieser Rücksicht in den Anmerkungen und Zusätzen, und in meiner Vorrede gethan habe, bitte ich indeß für nichts weiter als für *Vorbereitung zu einem Versuche* anzusehen, welchen ich den Kennern nächstens vorlegen werde. Vielleicht dient das zum voraus zu einiger Empfehlung, daß ich, wenn mein Versuch mir nicht mißlingen sollte, am Ende würde darthun können, daß ich bloß die Grundvorstellung, von welcher Newton bey der Erfindung der Differenzial-Rechnung ausgieng, entwickelt hätte.

scheiden, und unendlich kleine Größen annehmen, die nicht Null, sondern nur kleiner wären, als jede Größe, welche sich angeben läßt *). Hiergegen kann man mit Recht einwenden, daß sich alsdann die Differenzial-Rechnung von der geometrischen Schärfe entferne, und daß ihre Resultate, wegen der Vernachläßigung dieser unendlich kleinen Größen mit Recht verdächtig wären, weil durch die Vernachläßigung, nicht einzelner, sondern vieler, ja selbst unzähliger solcher Größen ein enormer Fehler entstehen könne **). Es ist vergebliche Mühe ***), wenn man diesem Einwurfe die Beyspiele

*) Wider diese Größen überhaupt ist nichts einzuwenden, wofern man nicht selbst die Hauptsätze der Elementar-Mathematik umstoßen will.

**) Sobald richtig ist, was ich S. XXXVI-XL behauptet habe, fällt dieser Einwurf gänzlich über den Haufen. Allein das sehe ich auch voraus, daß ich davon alle diejenigen nicht überzeugen werde, die dasselbe mit der gewöhnlichen, verworrenen Theorie der positiven und negativen Größen beurtheilen, und z. B. glauben, daß, allgemein und ohne Einschränkung, nicht nur das Quadrat positiv sey, dessen beyde Seiten positiv sind, sondern auch das, welches beyde Seiten negativ hat. Aber eine Frage, (die ich mir zwar zu beantworten weiß, aber auch deswegen nicht hersetze, um ihre Antwort erst zu lernen): Ist $+a : -b = +b : -d$, vorausgesetzt, daß absolute genommen, $d = \frac{b^2}{a}$ sey, eine stetige Proportion? und wenn sie es ist, welches ist, vollständig ausgedruckt, das mittlere Glied, $-b$ oder $+b$?

***) Wenigstens ist es sehr unmathematisch gehandelt.

spiele entgegensetzt, wo man durch die Differenzial-Rechnung eben die Resultate findet, welche die Elementar-Geometrie giebt. Denn wenn die unendlich kleinen Größen, welche man in der Differenzial-Rechnung wegläßt, nicht = o sind, so muß nothwendig ein Fehler, und ein desto größerer Fehler entstehen, je mehrere solcher Größen weggelassen worden sind; und geschieht das nicht, so wäre es viel wahrscheinlicher, daß man den begangenen Fehler durch einen entgegenstehenden verbessert hätte, als daß die befolgten Regeln nicht mangelhaft wären. Da aber dergleichen Verbesserung durch einen neuen Fehler nicht statt findet, so beweiset solches unwidersprechlich, was ich behaupte, nemlich: es seyen die weggelassenen Größen, schlechterdings und absolut genommen, Null, und es finde zwischen dem unendlich Kleinen in der Differenzial-Rechnung und dem absoluten Nichts kein Unterschied statt *). Eben so wenig erreicht man seinen Zweck,

*) Wenn bloß auf die Art bewiesen werden soll, daß die Differenzialien Nullen seyen, wie es fast scheint, als halte man es (exceptis excipiendis) bey den wichtigsten Gegenständen der allgemeinen und insbesondere der höhern Mathematik für hinlänglich: so kann selbst auf dem Wege, den ich S. XXXVII f. gegangen bin, ein neuer Beweis dafür gefunden werden, der vielleicht vor andern noch den Vorzug eines tiefer versteckten Fehlers hat. Doch es wird wichtiger seyn, die Frage aufzuwerfen und zu beantworten:

Ob der sogenannte *rigor geometricus* die höchste Stufe der in der Mathematik möglichen Strenge und Schärfe sey?

Zweck, wenn man die unendlich kleinen Größen auf die Art beschreibt, daß man sie sich wie Staubkörner, in Vergleichung mit

Da Euler, bald nach dem Gebrauche dieser Benennung, der Elementar-Geometrie gedenkt, und man Euclid's Elemente immer als Muster in Ansehung der Methode empfiehlt, welches sie auch in der Elementar-Geometrie größtentheils, und wenigstens mehr als irgend ein anderes Buch verdienen: so irre ich doch wohl nicht, wenn ich unter dem rigore geometrico die Strenge und Schärfe verstehe, welche in der Elementar-Geometrie erreicht werden kann? Also angenommen, daß ich nicht irre, so beweiset die Elementar-Geometrie ihre Sätze allemal an individuellen Constructionen, und sagt dann oder setzt voraus: auf diese Art könne man in jedem dem betrachteten ähnlichen Falle verfahren. So bekommen wir freylich allgemeine, aber doch immer nur specielle, nicht generelle Kenntnisse; wir werden überzeugt, und schauen an, ja ich will zugeben, daß wir gewiß sind. Allein, ob nun diese Gewißheit, Gewißheit im höchsten Verstande sey, oder nur so eine Art von Gewißheit, wie das Kind hat, dem sein Vater das Verhalten eines sinnlichen Objekts unter gewissen Umständen in einem einzelnen Falle gezeigt, und dann hinzugefügt hat: eben so ists bey allen Dingen, die diesem gleich sind, wenn du eben das mit ihnen thust; insbesondere, wenn der Vater ihm Beschaffenheiten gezeigt hat, die unveränderlich sind? will ich deswegen nicht entscheiden, weil ich nicht Lust habe, mich in Streit einzulassen. Im gemeinen Leben indeß pflegen wir zu kennen, was wir gesehen haben, sagen ferner, wir seyen überzeugt, wenn wir Gründe angeben können, und gewiß, wenn diese Gründe unwidersprechlich sind, weil sie aus der Natur der Sache hergenommen sind, und durch Versuche bewährt werden können. Wie, wenn es in der Mathematik eine ähnliche mit einem großen Berge, oder selbst der ganzen Erde, gedenken müsse. Denn ob man gleich bey der Bestimmung

ähnliche Stufenfolge gäbe? Wenn die Elementar-Mathematik zeigte, die allgemeine, bestimmte und unbestimmte, Mathematik bewiese, und die höhere unwidersprechlich darthäte? Ἀπόδειξις und demonstratio wurden von den Griechen und Römern von geometrischen Beweisen gebraucht, ich weiß nicht, ob nicht, wenn gleich in tropischer Bedeutung, doch in der, welcher der eigentlichen am nächsten liegt? Doch ich will einen Schritt näher treten. Die Elementar-Mathematik betrachtet die Größen unmittelbar in natürlichen Constructionen, die allgemeine untersucht dieselben vermittelst willkührlicher Constructionen in Begriffen. Es verhalten sich also die Elementar-Kenntnisse in der Mathematik zu den allgemeinen, wie sonst die sinnlichen zu den vernünftigen. Ferner sind die Größen-Begriffe, welche in der bestimmten Mathematik untersucht werden, weniger allgemein als die in der unbestimmten, und diejenigen, in welchen die höhere Mathematik die Größen betrachtet, transcendent. Soll also die Gewißheit, welche wir in der Elementar-Mathematik erreichen können, die höchste Stufe der menschlichen Gewißheit seyn; so hat man auch ein Recht zu sagen: die Sinne dringen tiefer in die Natur der Dinge als die Vernunft; so braucht man kein Bedenken zu tragen, alle diejenigen, die sich den Wissenschaften widmen, Thoren, und die Philosophen unter ihnen das zu nennen, wofür die Stoiker den Unwissenden hielten. So wie wir glauben, daß die Ausdrücke für die Differenzialien beschaffen seyn müssen, wenn sie vollständig seyn sollen, sind sie keine Ausdrücke für Differenzialien im wahren Verstande; sondern gerade das ist in ihnen zu viel, was die meisten daraus bloß deswegen weglassen, weil sie nichts damit anzufander Größe der Erde, selbst eine beträchtliche Menge von Staubkörnern, als etwas nicht zu achtendes ansehen kann; so leidet doch die geometrische Schärfe nicht den geringsten Fehler, und der Vorwurf bliebe wichtig, wofern er die geringste Kraft behielte. Auch ist es schwer zu sagen, was man von der Unterscheidung der Differenzialien von Null für Vortheile habe? *) Allein es scheint, man befürchte, daß dadurch die Vergleichung der Differenzialien unmöglich werde, weil zwischen absoluten Nichtsen dergleichen nicht angestellt werden könne. Man glaubt also, den Differenzialien einige Größe lassen zu müssen, sieht sich aber dabey gezwungen, dieselbe so klein anzunehmen, daß die Differenzialien dabey mit eben so vielem Rechte, als wenn sie Nullen wären, weggelassen werden können. Bey dem allen getraut man sich indeß

gen wissen. Auf diese Art läßt sich also die Differenzial-Rechnung nicht einmal durch unsere Kurzsichtigkeit und falsche Behandlung zwingen, andere als vollkommen wahre und genaue Sätze zu liefern; und sollte nicht allenfalls dieses statt aller Beweise dienen können, daß die Differenzial Rechnung den höchsten Grad der Gewißheit habe und gewähre?

*) Um der Schüler der Differenzial-Rechnung willen, welche diese Stelle lesen, will ich einige hersetzen. Zuvörderst fällt dadurch das Anstößige weg, was nicht unbemerkt bleiben kann: daß zwey Nullen bald jedes, bald nur ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben können. Zum andern werden durch einen richtigern Begriff von den Differenzialien alle Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung gewisser, indem man dabey die Richtigkeit derselben a priori einsehen kann. Drittens wird der Grund und die Art der Anwendung der gedachten Regeln dabey viel klärer, u. s. f. Daß man durch die Eulerische Theorie dem Spötter Gelegenheit gebe, zu sagen: die Mathematiker schaffen aus dem Endlichen und Nichts, nicht blos das Unendliche, sondern sogar das Unendliche vom Unendlichen; will ich nicht weiter berühren.

deß nicht, denselben eine gewisse und bestimmte, wenn auch unerreichbare Größe beyzulegen, weil sich die Vergleichung bey einer zwey und dreymal kleinern Größe ebenfalls anstellen lassen und eben dieselben Resultate geben würde. Hieraus erhellet, daß die Größe der Differenzialien zur Untersuchung ihres Verhältnisses nichts beyträgt, und daß diese selbst dann noch möglich bleibt, wenn sie gänzlich verschwinden *). Hingegen ist aus dem Obigen offenbar, daß die

*) Wie groß ein Differenzial sey? kann allenfalls unbestimmt bleiben, indeß ist solches nicht nöthig. Ich hoffe zu einer andern Zeit zu beweisen, daß die Differenzialien aller reellen veränderlichen Größen, nicht bloß Größen seyen, die kleiner gedacht werden müssen, als jede anzugebende Größe, sondern daß man ein Recht habe, dieselben Elemente im strengsten Verstande zu nennen. Daß man dergleichen nie auf dem Wege der Division erhalte, ist wahr; allein daraus folgt weiter nichts, als daß man sie nicht auf diesem Wege suchen müsse, und das ist ganz meine Meinung. Ja ich habe nichts dawider, wenn man fordern will, daß, so wie das Wort, unendlich, aus der ganzen Mathematik verwiesen, also die Benennung, unbestimmbar, bey dem Beweise der Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung, schlechterdings nicht gebraucht werden müsse. Mir scheint nemlich dieses eine höchst billige Forderung zu seyn, und thut man sie an mich, so will ich mich darnach bey dem gedachten Versuche richten. Dann wird sich auch deutlich darthun lassen, daß die mathematische Schärfe in der Differenzial und Integral-Rechnung den höchsten Grad erreiche; und wenn man dabey die Leichtigkeit bedenken will, mit welcher die höhere Mathematik Sätze erfindet und beweiset, und dazu die Nothwendigkeit und ausgedehnte Brauchbarkeit derselben setzt: so wird man reichen Stoff zu einer Lobrede haben; aber auch nicht ohne Unwillen gegen alle diejenigen bleiben, welche diese herrliche Wissenschaft durch den Nebel, worin sie dieselbe hüllten, einem großen Theile selbst von denjenigen unerreichbar machten, welchen sie doch nach ihrem eigenen Urtheile unentbehrlich war.

Vergleichung, welche die Differenzial-Rechnung anstellt, gar nicht einmal statt finden könne, wenn die gedachten Incremente nicht gänzlich verschwinden. Denn das Increment von x, welches wir überhaupt durch ω angezeigt haben, hat zu dem Incremente des Quadrats xx, nemlich $2x\omega + \omega\omega$ das Verhältniß 1 zu $2x + \omega$, und dieses Verhältniß ist allemal von dem 1 zu 2x unterschieden, so lange nicht $\omega = 0$ ist; dagegen, sobald $\omega = 0$ wird, in voller Schärfe $1 : 2x + \omega = 1 : 2x$ ist. Nun ist es leicht, sich davon zu überzeugen, daß man sich dem Verhältnisse $1 : 2x$ desto mehr nähere, je kleiner ω angenommen wird, und es ist daher nicht bloß erlaubt, sondern der Natur der Sache vollkommen angemessen, die Incremente erst als endlich zu betrachten, und in den Figuren, welche man etwa zur Erläuterung brauchen will, endlich darzustellen, und dann dieselben immer kleiner und kleiner werden zu lassen; wo man finden wird, daß sich ihr Verhältniß immer mehr und mehr einer gewissen Grenze nähere, die es aber nicht eher als bey der Verschwindung der Incremente erreicht. Diese Grenze, welche gleichsam *) das letzte Verhältniß der gedachten Incremente ist, macht eigentlich den Gegenstand der Differenzial-Rechnung aus; und der hat eigentlich den Grund zu dieser Wissenschaft gelegt, der zuerst auf den Gedanken gerieth, diese letzten Verhältnisse zu untersuchen *). Spuren von dieser Unter-

*) Also ist der eigentliche Gegenstand der Differenzial-Rechnung etwas, was nur gleichsam das ist, was es seyn soll?

**) Hiernach hätte derjenige das vorher wankende Gebäude der Differenzial-Rechnung unerschütterlich befestiget, der dasselbe auf dem Grunde der letzten Verhältnisse aufgeführt hätte. Dies hat bekannter Maßen mehr als andere Hr. L'Huilier in seiner Exposition élémentaire des principes des calculs superieurs gethan.

Untersuchung finden wir schon bey den ältesten Mathematikern, welchen man daher auch nicht alle Kenntniß in der Analysis des Unendlichen absprechen kann. Nach und nach bekam diese Wissenschaft Wachsthum, und sie hat sich nicht plötzlich oder auf einmal zu der Größe emporgeschwungen, in welcher wir sie jetzt erblicken; obgleich immer noch mehr in ihr zu entdecken, als bereits wirklich gefunden ist. Denn da sich der Differenzial-Calcul über alle Arten der Funktionen verbreitet, sie mögen so zusammengesetzt seyn, als sie irgend wollen, so konnte die Methode, die verschwindenden Elemente aller Funktionen unter einander zu vergleichen, nicht auf einmal entdeckt werden, sondern man sah sich gezwungen, die zusammengesetzten Funktionen nach und nach zu untersuchen *). Was nemlich die rationalen Funktionen betrifft, so

gethan. Ich setze aus der Vorrede folgende S. 6. stehende Worte her: Je me propose donc comme but principal, de montrer avec la rigueur et la clarté requises par mes Juges: Que, la methode des anciens, connue sous le nom de Methode d'Exhaustion, convenablement etendue, suffit pour établir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs; sans que cependant cette réduction entraine après elle des longueurs et des difficultés propres à rebuter des les premiers pas ceux qui veulent entrer dans la carrière des Mathematiques sublimes.

*) Ein bereits gebrauchtes Gleichniß noch einmal anzuwenden, so kann man freylich bey jedem Gebäude nur nach und nach die Etagen aufsetzen, allein, will man, so läßt sich gleichwohl, selbst bey einem königlichen Pallaste, zuvor der ganze Grund legen, ehe man über der Erde zu bauen anfängt. Man sagt: jedes Gleichniß hinke; das gegenwärtige wäre falsch angewandt, wenn man bloß sagen wollte: in der Mathematik könne etwas ähnliches geschehen, denn da sollte es eigentlich so seyn. Der Grund liegt darin, weil sowohl die Mathematik überhaupt, als jeder ihrer Theile so aus der Definition desselben entwickelt seyn sollte, als ein

kannte man das letzte Verhältniß ihrer verschwindenden Incremente schon lange vor Newton und Leibnitzen, so daß die Differenzial-Rechnung, in so fern sie die rationalen Funktionen zum Gegenstande hat, schon geraume Zeit vor ihrer Periode erfunden worden ist. Dagegen leidet es keinen Zweifel, daß wir denjenigen Theil des Differenzial-Calculs, welcher sich mit den irrationalen Funktionen beschäftiget, dem unsterblichen Newton verdanken, und der Binomische Lehrsatz war es vorzüglich, wodurch er der Differenzial-Rechnung diese glückliche Erweiterung verschaffte. Leibnitzen sind wir nicht weniger verpflichtet. Er brachte nemlich diesen Calcul, den man bis dahin bloß als einen besondern Kunstgriff betrachtet hatte, in die Form einer Wissenschaft, bildete aus den Regeln derselben ein System, und stellte dasselbe in einem hellen Lichte dar *). Hierdurch bekam man die schätzbarsten Hülfsmittel, denselben zu erweitern, und das Fehlende, aus gewissen Principien abgeleitet, hinzu zu fügen. Bald darauf wurden durch die Bemühung Leibnitzens, und der von ihm dazu ermunterten Bernouillier die transcendenten Funktionen in das Gebiet der Differenzial-Rechnung aufgenommen, welches bisher noch nicht geschehen war, und nun auch ein fester Grund zur Integral-Rechnung gelegt, auf welchem die folgenden Architecten das angefangene Gebäude immer mehr erweiterten und aufführten. Es hatte aber

ein fruchtbarer Boden aus den empfangenen Kernen Bäume hervortreibt, welche durch ihre Früchte der Nachwelt nützen. Uebrigens verspare ich den Commentar zu diesem historischen Theile der Eulerischen Vorrede bis zu dem versprochenen dritten Theile.

*) Eine genaue Auseinandersetzung dieser Behauptung, und darauf gegründete Bestimmung der Verdienste Leibnitzens um die Differenzial-Rechnung scheint mir von großer Wichtigkeit zu seyn, aber dabey in eine vollständige Geschichte der höhern Mathematik zu gehören.

aber schon Newton sehr wichtige Versuche aus der Integral-Rechnung geliefert, und man kann eigentlich den Ursprung dieser Wissenschaft, wegen ihrer so engen Verbindung mit der Differenzial-Rechnung, gar nicht genau angeben; so wie, da der größte Theil derselben noch im Dunkeln liegt, und also die Quelle noch nicht erschöpft ist, alles, was jeder nach seinen Kräften zu ihrer Erweiterung beytragen kann, Dank verdient. Und dies ists ohngefähr, was man sich aus der Geschichte, von dieser so ruhmvollen Erfindung, worüber viel gestritten worden ist, zu merken hat. Was aber die Namen betrifft, womit man die Differenzial-Rechnung bey verschiedenen Völkern belegt hat, so sind sie insgesammt so beschaffen, daß sie vollkommen zu der gegebenen Erklärung passen: denn man mag die verschwindenden Incremente, deren Verhältniß untersucht wird, Differenzialien oder Fluxionen nennen, so muß man sie sich stets als Nullen vorstellen, und das ist der wahre Begriff, den man sich davon zu machen hat. Hierdurch wird auch die Beantwortung aller der Fragen, welche man, mehr aus Neugierde als des Nutzens wegen, über die Differenzialien der zweyten und der übrigen Ordnungen aufgeworfen hat, leicht und deutlich, da alle diese Differenzialien an sich verschwindende Größen sind, und bloß ihr Verhältniß untersucht wird *). Denn eigentlich hat man alsdenn, wenn das Verhältniß zweyer verschwindenden Incremente durch eine Funktion ausgedruckt, und nun das In-

*) Auf die zweyten und übrigen Differenzialien habe ich mich in meinen Anmerkungen und Zusätzen, so wie auch überhaupt bisher nicht ausgedehnt, theils weil ich mir hier kein vollständiges System der Differenzial-Rechnung zur Absicht vorsetzen konnte, theils weil ich es für Pflicht hielt, erst das Urtheil der Kenner über den Grund zu vernehmen, ehe ich auf demselben ein Gebäude aufführe.

crement dieser Funktion mit andern verglichen wird, ein zweytes Differenzial und gelangt ferner auf ähnlichem Wege zu dem dritten und den folgenden, so daß man sich im Grunde immer mit endlichen Größen beschäftiget, und bloß der Bequemlichkeit wegen die Differenzialien mit besondern Zeichen bezeichnet. Beym ersten Anblick wird diese Beschreibung der Analysis des Unendlichen den meisten flach und unfruchtbar scheinen, obgleich die geheimnißvolle Sprache von unendlich kleinen Größen in der That nicht das mindeste voraus hat. Allein wenn wir die Verhältnisse der verschwindenden Incremente der Funktionen genau kennen, so ist diese Kenntniß nicht nur an sich häufig von der größten Wichtigkeit, sondern auch bey einer Menge schwerer Untersuchungen so unentbehrlich, daß man ohne sie seinen Zweck gar nicht zu erreichen vermag. Sollte z. B. der Weg einer geworfenen Bombe bestimmt, und dabey auf den Widerstand der Luft Rücksicht genommen werden: so erschwert das die Auflösung dieser Aufgabe sehr, daß sowohl die Richtung des Weges, welchen die Bombe nimmt, als auch die Geschwindigkeit der Bombe, von welcher der Widerstand der Luft abhängt, jeden Augenblick sich verändern. Allein diese Veränderlichkeit wird desto geringer, je kleiner die Zeit angenommen wird; und wenn man dieselbe ganz verschwinden läßt, so können wir die Wirkungen des Widerstandes, weil nun alle Ungleichheit in der Richtung des Weges und der Geschwindigkeit wegfällt, nach den Regeln von der Bewegung genau bestimmen, und die einem Augenblicke zugehörige Veränderung der Bewegung angeben. Kennt man aber diese augenblickliche Veränderungen, oder vielmehr, da sie eigentlich keine Bewegungen sind, ihr wechselseitiges Verhältniß: so hat man schon viel gewonnen, und bedarf nur noch der Hülfe der Integral-Rechnung, um daraus die Veränderung der Bewegung durch

einen

einen endlichen Raum zu finden *). Doch ich halte es für überflüssig, den Nutzen der Differenzial- und Integral-Rechnung an mehrern Beyspielen zu zeigen, da bereits ausgemacht ist, daß wir bey allen Untersuchungen, wo es mit auf Bewegungen fester oder flüssiger Körper ankommt, nicht nur ohne die Hülfe der Analysis des Unendlichen keine genaue Resultate finden können, sondern auch, daß wir dazu diese Wissenschaft noch nicht einmal vervollkommnet genug besitzen. Es erstreckt sich nemlich der Nutzen dieser höhern Analyse auf alle Theile der Mathematik, so daß man das, was man ohne sie bisher hat entwickeln können, fast für nichts zu halten hat.

Ich habe mir daher vorgenommen, im gegenwärtigen Werke die ganze Differenzial-Rechnung aus wahren Principien abzuleiten, und so ausführlich abzuhandeln, daß ich von dem bis jetzt darin erfundenen nichts übergienge. Ich habe dasselbe in zwey Theile getheilt. In dem ersten beweise ich zuvörderst die Hauptregel der Differenzial-Rechnung, und zeige dann, wie man von allen Arten der Funktionen, sowohl einer als mehrerer veränderlicher Größen, nicht nur die ersten, sondern auch die Differenzialien aller übrigen Ordnungen findet. In dem andern beschäftige ich mich mit den Anwendungen dieses Calculs theils in der Analysis des Endlichen, theils in der Lehre von den Reihen, und setze dabey vorzüglich die Lehre vom Größten und Kleinsten (de Maximis et Minimis) auseinander. Von seinem Nutzen in der Geometrie aber rede ich nicht, weil man darüber Werke genug hat, da sogar die ersten Principien der Differenzial-Rechnung aus der Geome-

*) Der Artilleriste wird hier verschiedene Dinge vermissen, die bey wirklichen Fällen allerdings mit in Betrachtung gezogen werden müssen, wenn man sich nicht wundern will, wenn angestellte Versuche den Resultaten der Theorie nicht ganz entsprechen.

Geometrie hergenommen*) und dieselbe auf diese Wissenschaft, gleich nach ihrer ersten Entwickelung, mit der größten Sorgfalt

*) Hieran hat man Unrecht gethan, weil das Transcendente nicht unmittelbar vom Sinnlichen genommen werden kann; man hätte sich durch die Geometrie bloß auf die Differenzialien führen, und dann die wahren Principien derselben am rechten Orte aufsuchen, und nun erst genau und vollständig entwickeln sollen. Die Gegenstände der Elementar-Mathematik sind die mathematische Sinnenwelt; in der allgemeinen, bestimmten und unbestimmten Mathematik wandert man in den Regionen der Abstraction und des Gedenkbaren; in der höhern weidet man seinen Blick in den Sphären des Transcendenten. Die Mathematik kann bey dem grenzenlosen Raume, den wir zuerst in einer totalen Anschauung wahrnehmen, anfangen, und bey Elementen, im strengsten Sinne genommen, aufhören; so lange sie das nicht thut, und zwar in der Ordnung, daß jeder folgende Schritt dem, der den vorhergehenden mit Festigkeit gethan hat, eben so leicht als jeder vorhergehende ist, so lange ist sie, was auch unsere Kenntnisse darin immer für einen Umfang haben mögen, ein **Geschenk des Zufalls, nicht unser Werk, kein durch eigenes Streben erworbenes Eigenthum.** Wie kann sie es werden? Irrdische Bedürfnisse zwangen die Menschen die Keime der Mathematik früher, als die, irgend einer andern Wissenschaft, zu sammlen und zu pflegen. Das war Veranstaltung dessen, der alles mit Vater-Gesinnung so ordnete, daß wir im Schweiße des Angesichts unser Brod essen sollten, aber nicht länger, als bis wir wieder zu Erde würden; oder wenn man lieber Worte eines Dichters lieset, Veranstaltung dessen, der

— — — curis acuens mortalia corda
Non torpere gravi passus sua regna veterno. *Virg.*

Man ziehe die Geschichte dieser Wissenschaft zu Rathe, und frage sie: Welchen Ursachen die Mathematik ihre wichtigsten Erweiterungen und Vervollkommnungen, insbesondere was für Ursachen sie die Vorzüge verdanke, wodurch sie sich über alle übrige Disciplinen erhebt? Man wird finden, daß es das edlere Bedürfniß war, falt angewandt worden sind. Das gegenwärtige Werk hält sich durchaus innerhalb der Grenzen der reinen Analyse, so daß

war, die Bestimmung zu erfüllen, welche Ovid so schön in folgender Stelle beschreibt:

> Pronaque cum spectent animalia cetera terram
> Os homini sublime dedit (opifex rerum): coelumque tueri
> Jussit, et erectos ad sidera tollere vultus.

wird finden, daß der Mensch durch die Erfüllung dieser erhabenen Bestimmung zugleich seine irrdischen Bedürfnisse veredeln, und nach ihrer Veredlung auf würdigen Wegen befriedigen lernte. Also ist die Mathematik eine Wissenschaft, zu welcher uns der Schöpfer selbst durch die Natur geleitet, und zu den ersten Entdeckungen darin, durch weise Anordnungen, gezwungen hat. Dies sey der erste Sporn, sie unserer ganzen Aufmerksamkeit werth zu achten. Aber nun betrachte man auch die übrigen Geschenke, welche die gütige Hand des Vaters der Menschen so reichlich um uns hergelegt hat, und lerne bey denen, welche wir ganz kennen, die Art, mit welcher er schenkt. Wo ist etwas, was wir nicht bloß betrachten, sondern brauchen sollen, in einer solchen Vollkommenheit von ihm uns gegeben, daß unsere Wirksamkeit ruhen, und allein die Begierde zu genießen sich thätig beweisen dürfte? Aber auch darauf schränkt sich sein Vaterwille nicht ein, daß wir aus dargegebenem Stoffe nach seinem Muster schaffen sollen; es giebt noch ein erhabeneres Glück, zu dessen Genusse er uns bestimmt hat: unabhängig von dem, was außer uns ist, aus uns selbst Kenntniß zu schöpfen, in unserer Seele zu lesen die Schrift, die er ihr, mit unauslöschlichen aber leserlichen Buchstaben, wenn der Staub abgewischt ist, eingrub; in uns selbst zu entdecken die Quelle der Wahrheit, in deren Anblicke wir nach dem Tode Seligkeit schmecken, und hier Ueberzeugung einer ewigen Fortdauer finden sollen. Ob Raum und Zeit reine Anschauungen im strengen Verstande seyen oder nicht? läßt der Mathematiker unentschieden, denn er hasset Streit; genug, daß sie Anschauungen sind, die er, bey gebildeten Seelenkräften, unabhängig daß ich auch nicht einmal eine einzige Figur zur Erläuterung nöthig gehabt habe.

abhängig von aller Erfahrung entwickeln, und dann zu seinen Kenntnissen, auch Ungebildete aber Wißbegierige, ohne sich auf Erfahrungen zu berufen, hinleiten kann. So weit uns reine Vernunftwissenschaft zu erlangen möglich ist, können wir sie lediglich, durch und in einer vervollkommneten Mathematik und Philosophie, d. h. durch und in einer solchen Mathematik und Philosophie erlangen, wovon die Quellen in uns selbst liegen; und darum sind diese Wissenschaften auch allein die Mittel, wodurch wir die uns hier mögliche Vorbereitung zu jener erhabenen Bestimmung vollenden können. Auch den Anfang zur Erreichung dieser Bestimmung können wir hier machen: durch herzliche Annehmung und Befolgung der Religion, davon Jesus uns die Elemente gegeben hat; deren vollkommne Kenntniß und Ausübung uns dereinst den Zustand einer vollkommnen, ewig dauernden, und ewig wachsenden Glückseligkeit verschaffen soll; und die, damit Gott auch für die Unmündigen sorgte, in den Vorschriften: Liebe deinen Nächsten als dich selbst; und: Was du nicht willst, das dir die Leute thun sollen, das thue ihnen auch nicht; mehr Weisheit des Lebens lehrt, als Chrysippus und Crantor. Dies lehre uns, nicht zu glauben, daß wir bereits auf der höchsten Stufe stehen; dies reitze unsere Strebsamkeit, selbst bey der Unmöglichkeit das Ziel ganz zu erreichen, doch redlich demselben entgegen zu eilen. Endlich sey die unerreichbare Simplicität und Leichtigkeit der über alle menschliche Wissenschaften erhabenen göttlichen Religion Jesu, nach der Art, wie wir uns ihr nähern, der Probierstein, auf welchem wir dasjenige untersuchen, was wir geleistet haben. Es ist angenehm, die Wahrheit erblicken, auch wenn wir dazu Werkzeuge gebrauchen, die nur wir besitzen, und andern bloß leihen können; aber es ist Freude, wenn wir das, was wir mit Entzücken sehen, auch eben so leicht jedem, der es sehen will, vor Augen zu legen im Stande sind. Und wenn alles, was den Namen, reine Vernunftwissenschaft, mit Recht trägt, bey aller seiner Wichtigkeit und Vortreflichkeit doch am Ende bloß Mittel ist, das Organ

unserer

unserer Seele zu reinigen, zu beleben, und zu stärken; wenn alle reine Kenntnisse eigentlich nur unsere Führerinnen bey dem Streben nach reeller Wahrheit seyn sollen: Was helfen Maschinen, zu deren Gebrauche neue Maschinen erfordert werden? Was sollen Wegweiser, die selbst eines Führers bedürfen? Insbesondere sey denen, welchen die erste Anleitung der Jugend zu den reinen Vernunftwissenschaften anvertraut ist, stets das vor Augen, daß sie die Erfüllung ihres wichtigen Berufs lediglich nach dem Grade der Aufmerksamkeit, den ihre Schüler beweisen, nach der Anstrengung, welche sie mit Vergnügen übernehmen, nach der Leichtigkeit und Schnelligkeit, mit welcher sie das Wahrgenommene fassen, nach den Proben der Wißbegierde, welche sie durch Fragen und Einwürfe geben, und endlich darnach beurtheilen müssen, ob sich ihre Schüler des Erlernten um sein selbst willen freuen. Es ist wahr, daß dieses strenge Regeln sind, aber sie sind nicht zu strenge für den Jugendlehrer in den Wissenschaften, von welchen ich rede. Ich gebe es zu, daß zu ihrer Erfüllung nöthig sey, daß man an seiner Berufsarbeit selbst Vergnügen finde; aber welcher Lehrer der Jugend kann das nicht, wenn er sie mit Redlichkeit thut? Es gehört dazu Nachdenken und Uebung, und Vergessen seiner selbst über dem Ziele, nach welchem man hinstrebt; aber man kann dabey schon als Mann die Wahrheit des Ciceronianischen Ausspruchs erfahren: Quid jucundius, quid dulcius senectute, stipata studiis juventutis? Man muß dabey oft auf Ruhm Verzicht thun, aber man darf hoffen, einst Gelegenheit zur Erinnerung an die Worte zu geben: Serit arbores posteritati profuturas.

Inhalt