Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung. Erster Theil welcher die Differenzial-Rechnung selbst enthält.

Vollständige Anleitung

zur

Differenzial-Rechnung.

Erster Theil

welcher

die Differenzial-Rechnung selbst enthält.

Erstes Capitel.

Von den Differenzen.

§. 1.

Aus dem, was ich in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Größen und ihren Funktionen gesagt habe, erhellet, daß alle Funktionen einer veränderlichen Größe eine Veränderung leiden, wenn diese Größe wirklich verändert wird. Wenn z. B. die veränderliche Größe x den Zuwachs ω bekommt, und also $x + \omega$ für x gesetzt wird: so erhalten alle Funktionen von x, dergleichen xx; x^3; $\frac{a+x}{xx+aa}$, sind, andere Werthe. Es geht nemlich xx in $xx + 2x\omega + \omega\omega$; x^3 in $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$; und $\frac{a+x}{aa+xx}$ in $\frac{a+x+\omega}{aa+xx+2x\omega+\omega\omega}$ über. Dergleichen Veränderung erfolgt also allezeit, wofern nicht etwa die Funktion bloß die Form einer Funktion hat, in der That aber eine beständige Größe ist, wie x^0: denn in diesem Falle bleibt die Funktion unverändert, man mag die Größe x verändern wie man will.

§. 2.

Da dieses hinlänglich aus einander gesetzt worden ist, so wollen wir uns zur Betrachtung derjenigen Eigenschaften der

Funktionen wenden, auf welchen die gesammte Analysis des Unendlichen beruht. Es sey also y irgend eine Funktion der veränderlichen Größe x, und für x setze man nach und nach die Werthe, x; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; ꝛc. Ferner bedeute y^{I} den Werth, welchen die Funktion y bekommt, wenn darin $x + \omega$ für x gesetzt wird; auf eine ähnliche Art stelle y^{II} den Werth von y, wenn $x + 2\omega$ anstatt x, und eben so y^{III}; y^{IV}; y^{V}; ꝛc. die Werthe von y vor, wenn $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; ꝛc. an die Stelle von x gesetzt wird, so daß sich die verschiedenen Werthe von x und y auf folgende Art auf einander beziehen:

$$x;\; x+\omega;\; x+2\omega;\; x+3\omega;\; x+4\omega;\; x+5\omega;\; \text{ꝛc.}$$
$$y;\; y^{I};\; y^{II};\; y^{III};\; y^{IV};\; y^{V};\; \text{ꝛc.}$$

§. 3.

So wie die arithmetische Reihe x; $x + \omega$; $x + 2\omega$; ꝛc. ohne Ende fortgesetzt werden kann, so läuft auch die aus y entspringende Reihe y; y^{I}; y^{II}; ohne Ende fort, und die Beschaffenheit derselben hängt von der Natur der Funktion y ab. Ist z. B. $y = x$; oder $y = ax + b$; so ist auch die Reihe y; y^{I}; y^{II}; ꝛc. eine arithmetische Reihe: ist aber $y = \frac{a}{bx + c}$, so entsteht daher eine harmonische, so wie, wenn $y = a^{x}$ ist, eine geometrische Reihe. Ja es läßt sich keine Reihe gedenken, die nicht auf diese Art aus einer gewissen Funktion von x abgeleitet werden könnte. Man nennt aber eine solche Funktion von x, in Ansehung der Reihe, welche aus ihr entsteht, das allgemeine Glied dieser Reihe; und so wie eine jede nach einem bestimmten Gesetze formirte Reihe ein allgemeines Glied hat, so läßt sich dieselbe

selbe auch umgekehrt aus einer gewissen Funktion von x ableiten. Dieses pflegt in der Lehre von den Reihen ausführlich auseinander gesetzt zu werden.

§. 4.

Hier richten wir aber unsere Aufmerksamkeit vorzüglich auf die Differenzen, wodurch sich die Glieder der Reihe $y; y^{I}; y^{II}; y^{III};$ rc. von einander unterscheiden; und damit wir dieselben nach der Natur der Differenzialien einrichten, so wollen wir sie auf die Art bezeichnen, daß

$$y^{I}-y=\Delta y;\ y^{II}-y^{I}=\Delta y^{I};\ y^{III}-y^{II}=\Delta y^{II};\ \text{rc.}$$

sey. Es zeigt also Δy den Zuwachs an, den die Funktion y bekommt, wenn man darin $x + \omega$ anstatt x setzt, und ω bedeutet hier jede nach Belieben angenommene Zahl. In der Lehre von den Reihen pflegt zwar $\omega = 1$ gesetzt zu werden; allein zu unserer gegenwärtigen Absicht ist es besser, demselben einen allgemeinen Werth beyzulegen, den man nach Gefallen vergrößern oder vermindern kann. Man pflegt auch diesen Zuwachs Δy der Funktion y die Differenz derselben zu nennen, um welche der folgende Werth y^{I} den ersten y übertrift, und man sieht denselben stets als einen Zuwachs an, ob er gleich oft eine wirkliche Verminderung hervorbringt. Dies erkennt man denn an dem negativen Werthe desselben.

§. 5.

Da y^{II} aus y entsteht, wenn man $x + 2\omega$ für x setzt, so ist offenbar, daß man eben denselben Werth erhält, wenn man erst $x + \omega$ anstatt x, und dann nochmals $x + \omega$ für x setzt. Es entsteht daher y^{II} aus y^{I}, wenn man darin $x + \omega$ für x setzt; so daß Δy^{I} der Zuwachs wird, den y^{I} bekommt, wenn man darin $x + \omega$ anstatt x setzt, und es heißt deswegen auch auf eine ähnliche Art $\triangle y^{I}$ die Differenz von y^{I}. Aus eben dem Grunde ist $\triangle y^{II}$ die Differenz von y^{II}, oder der Zuwachs, den y^{II} bekommt, wenn man darin $x + \omega$ für x setzt, und $\triangle y^{III}$ die Differenz oder der Zuwachs von y^{III}, und so ferner. Auf diese Art erhält man aus der Reihe der Werthe von y, welche y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; rc. sind, die Reihe der Differenzen $\triangle y$; $\triangle y^{I}$; $\triangle y^{II}$; rc. wenn man von jedem Gliede derselben das vorhergehende abzieht.

§. 6.

Hat man die Reihe der Differenzen gefunden, so erhält man, wenn man abermals die Differenzen sucht, indem man jede Differenz der Reihe von der folgenden abzieht, Differenzen von Differenzen. Diese pflegte man mit dem Namen, zweyte Differenzen, zu belegen, und auf die Art zu bezeichnen, daß

$$\begin{aligned} \triangle\triangle y &= \triangle y^{I} - \triangle y \\ \triangle\triangle y^{I} &= \triangle y^{II} - \triangle y^{I} \\ \triangle\triangle y^{II} &= \triangle y^{III} - \triangle y^{II} \\ \triangle\triangle y^{III} &= \triangle y^{IV} - \triangle y^{III} \\ &\text{rc.} \end{aligned}$$

ist. Es wird also $\triangle\triangle y$ die zweyte Differenz von y; $\triangle\triangle y^{I}$ die zweyte Differenz von y^{I} u. s. f. genennt. Auf eine ähnliche Art findet man aus den zweyten Differenzen, wenn man aufs neue ihre Differenzen sucht, die dritten Differenzen, die man auf diese Art schreibt, $\triangle^{3} y$; $\triangle^{3} y^{I}$; rc.; aus

diesen

diesen ferner die vierten Differenzen $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{I}$; rc.; und so immer weiter, so weit man will.

§. 7.

Wir wollen diese verschiedenen Arten von Differenzen in eine Tabelle bringen, damit der Zusammenhang derselben desto deutlicher in die Augen falle.

Arithmetische Progression.

x; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; rc.

Werthe der Funktion.

y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; y^{V}; rc.

Erste Differenzen.

Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; Δy^{III}; Δy^{IV}; rc.

Zweyte Differenzen.

$\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta y^{I}$; $\Delta\Delta y^{II}$; $\Delta\Delta y^{III}$; rc.

Dritte Differenzen.

$\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^{I}$; $\Delta^3 y^{II}$; rc.

Vierte Differenzen.

$\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{I}$; rc.

Fünfte Differenzen.

$\Delta^5 y$; rc.

rc.

Eine jede von diesen Differenzen entsteht aus den vorhergehenden, indem man jede derselben von der folgenden abzieht. Da man nun die Werthe y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; rc. jedesmal durch die bekannten Zusammensetzungs-Arten der Grössen leicht finden kann, so kann man auch allezeit, was auch für eine Funktion von x für y gesetzt werden mag, daraus ohne Mühe die einzelnen Reihen der Differenzen erhalten.

§. 8.

Es sey $y = x$; so wird $y^{I} = x^{I} = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$; u. s. f. Nimmt man also die Differenzen, so wird $\Delta x = \omega$; $\Delta x^{I} = \omega$; $\Delta x^{II} = \omega$; ꝛc., und es sind daher die ersten Differenzen von x insgesammt beständige Größen, und die zweyten Differenzen so wie auch die dritten und alle folgende $= 0$. Da $\Delta x = \omega$ ist, so kann man das Zeichen Δx mit Vortheil für den Buchstaben ω setzen. Wenn also die auf einander folgenden Werthe x; x^{I}; x^{II}; x^{III}; ꝛc. einer veränderlichen Größe x in einer arithmetischen Progression stehen: so sind ihre Differenzen Δx; Δx^{I}; Δx^{II}; ꝛc. beständige Größen und einander gleich; und folglich $\Delta\Delta x = 0$; $\Delta^{3} x = 0$; $\Delta^{4} x = 0$; u. s. f.

§. 9.

Wir haben hier für die Werthe, die x nach und nach beygelegt werden, eine arithmetische Progression angenommen, so daß die ersten Differenzen dieser Werthe beständig sind, und die zweyten Differenzen, so wie auch alle folgenden, verschwinden. Dies hängt nun zwar von unserer Willkühr ab, indem wir eben so gut jede andere Progression hätten annehmen können; allein es hat gleichwohl der Gebrauch der arithmetischen Progression vor jeder andern einen sehr großen Vorzug. Denn außerdem, daß sie unter allen die einfachste und leichteste ist, so läßt sie auch, und darauf kommt es hier vorzüglich an, alle nur mögliche Werthe, die x erhalten kann, zu. Denn legt man ω sowohl die positiven als die negativen Werthe bey, so enthält die Reihe der

Werthe von x alle reelle Werthe, die anstatt x gesetzt werden können; wollte man aber eine geometrische Reihe zum Grunde legen, so würde man auf keine Weise zu den negativen Werthen gelangen. Aus dieser Ursache läßt sich die Veränderlichkeit der Funktionen y aus solchen Werthen von x, die eine arithmetische Progression ausmachen, am besten beurtheilen.

§. 10.

So wie $\Delta y = y^{I} - y$ ist, so lassen sich auch die folgenden Differenzen aus den Gliedern der ersten Reihe $y; y^{I}; y^{II}; y^{III};$ rc. bestimmen. Denn da

$$\Delta y^{I} = y^{II} - y^{I}$$

ist; so ist

$$\Delta\Delta y = y^{II} - 2y^{I} + y$$

und

$$\Delta\Delta y^{I} = y^{III} - 2y^{II} + y^{I}$$

und folglich

$$\Delta^{3}y = \Delta\Delta y^{I} - \Delta\Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y.$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$\Delta^{4}y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

und

$$\Delta^{5}y = y^{V} - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^{I} - y$$

u. s. f.

Die Zahl-Coefficienten dieser Formeln richten sich nach eben dem Gesetze, welches man bey den Potestäten des Binomiums wahrnimmt. So wie also die erste Differenz aus zwey Gliedern der Reihe $y; y^{I}; y^{II}; y^{III};$ rc. bestimmt wird: so wird die zweyte aus drey, die dritte aus vier Gliedern, und eben so alle übrigen auf eine ähnliche Art gefunden. Kennt man aber die Differenzen von y von einer jeden Ordnung, so lassen sich auch die Differenzen jeder Ordnung von y^{I}; y^{II}; ꝛc. finden.

§. 11.

Ist daher irgend eine Funktion y gegeben, so kann man alle ihre Differenzen, die erste sowohl als die folgenden, insofern sie sich auf die Differenz ω beziehen, um welche die Werthe von x unterschieden sind, finden. Auch hat man dazu nicht nöthig, die Reihe der Werthe von y weiter fortzusetzen. Denn so wie man die erste Differenz $\triangle y$ findet, wenn man in y für x den Werth $x + \omega$ setzt, und von dem gefundenen Werthe y^{I} die Funktion y abzieht: so erhält man die zweyte Differenz $\triangle\triangle y$ wenn man in der ersten Differenz $\triangle y$ den Werth $x + \omega$ für x setzt, um $\triangle y^{I}$ zu bekommen, und darauf $\triangle y$ von $\triangle y^{I}$ abzieht. Auf eine ähnliche Art gelangt man zur dritten Differenz $\triangle^3 y$, wenn man die Differenz der zweyten Differenz $\triangle\triangle y$ sucht, indem man diese von dem Werthe abzieht, welchen sie bekommt, wenn man $x + \omega$ für x setzt; und eben so findet man ferner die vierte Differenz $\triangle^4 y$ aus der dritten, u. s. f. Ist man daher nur im Stande die erste Differenz einer jeden Funktion zu erforschen, so kann man auch die zweyte, die dritte und alle folgende Differenzen finden; indem die zweyte Differenz nichts anders, als die erste Differenz von $\triangle y$, so wie die dritte nichts anders als die erste Differenz von $\triangle\triangle y$ ist; und die übrigen Differenzen sich insgesammt auf eine ähnliche Art bestimmen lassen.

§. 12.

Wenn die Funktion y aus zwey oder mehreren Theilen zusammengesetzt und z. B. $y = p + q + r +$ ꝛc. ist: so wird, weil

weil $y^I = p^I + q^I + r^I +$ ꝛc. ist, $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r +$ ꝛc., und eben so $\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r +$ ꝛc.; und hierdurch wird die Erfindung der Differenzen, wenn die Funktion aus Theilen besteht, nicht wenig erleichtert. Ist aber die Funktion y ein Produkt aus zweyen andern Funktionen p und q, oder $y = pq$; so wird $\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$, weil $y^I = p^I q^I$; $p^I = p + \Delta p$; $q^I = q + \Delta q$; und also $p^I q^I = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$ ist. Ist daher p eine beständige Größe $= a$, so ist, weil $\Delta a = 0$ ist, die erste Differenz der Funktion $y = aq$ diese, $\Delta y = a\Delta q$, und auf eine ähnliche Art wird die zweite Differenz $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$, die dritte $\Delta^3 y = a\Delta^3 q$, u. s. f.

§. 13.

Da eine jede ganze rationale Funktion ein Aggregat verschiedener Potestäten von x ist: so ist man im Stande, alle Differenzen der ganzen rationalen Funktionen zu finden, wofern man nur die Differenzen der Potestäten zu finden weiß. Aus dieser Ursach wollen wir die Differenzen der Potestäten einer veränderlichen Größe x in folgenden Exempeln zu erforschen suchen.

Da $x^0 = 1$ ist, so ist $\Delta x^0 = 0$; indem x^0 nicht verändert wird, wenn man gleich $x + \omega$ für x setzt.

Ferner haben wir gesehen, daß $\Delta x = \omega$ und $\Delta\Delta x = 0$ ist; und so verschwinden zugleich die Differenzen aller folgenden Ordnungen. Da dies bekannt ist, so wollen wir von der zweyten Potestät anfangen.

Erstes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät x^2 zu finden.

Da hier $y = x^2$ ist, so ist $y^I = (x + \omega)^2$; und folglich $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$, und dies ist die erste Differenz. Da ferner ω eine beständige Größe ist, so ist $\Delta\Delta y = 2\omega\omega$, und $\Delta^3 y = 0$; $\Delta^4 y = 0$; ꝛc.

Zweytes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät x^3 zu finden.

Man setze $y = x^3$, so wird, weil alsdann $y^I = (x + \omega)^3$ ist,

$$\Delta y = 3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3$$

und dies ist die erste Differenz. Da ferner

$$\Delta xx = 2\omega x + \omega\omega$$

ist, so wird

$$\Delta \cdot 3\omega xx = 6\omega\omega x + 3\omega^3$$

und

$$\Delta \cdot 3\omega^2 x = 3\omega^3; \text{ und } \Delta \cdot \omega^3 = 0.$$

Zieht man nun das Gefundene zusammen, so wird

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3; \text{ und } \Delta^3 y = 6\omega^3;$$

die übrigen Differenzen aber verschwinden.

Drittes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät x^4 zu finden.

Setzt man $y = x^4$, so wird, weil alsdenn $y^I = (x + \omega)^4$ ist,

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4;$$

und dies ist die erste Differenz. Dann ist aber aus dem Vorhergehenden

$$\triangle \,.\, 4\omega x^3 = 12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x + 4\omega^4$$
$$\triangle \,.\, 6\omega^2 x^2 = \ldots + 12\omega^3 x + 6\omega^4$$
$$\triangle \,.\, 4\omega^3 x = \ldots\ldots + 4\omega^4$$
$$\triangle \,.\, \omega^3 = \ldots\ldots\ldots 0.$$

Vereiniget man dieses, so findet man die zweyte Differenz

$$\triangle\triangle y = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^4.$$

Weil nun ferner

$$\triangle \,.\, 12\omega^2 x^2 = 24\omega^3 x + 12\omega^4$$
$$\triangle \,.\, 24\omega^3 x = \ldots + 24\omega^4$$
$$\triangle \,.\, 14\omega^3 = \ldots\ldots 0$$

ist, so erhält man für die dritte Differenz

$$\triangle^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$$

und endlich für die vierte

$$\triangle^4 y = 24\omega^4.$$

Da diese vierte Differenz beständig ist, so verschwinden alle folgende.

Viertes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät x^n zu finden.

Man setze $y = x^n$; und da dann $y^I = (x + \omega)^n$; $y^{II} = (x + 2\omega)^n$; $y^{III} = (x + 3\omega)^n$; rc. ist, so erhält man durch die Entwickelung der Potestäten:

$$y = x^n$$

$$y^I = x^n + \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\omega^3 x^{n-3} + \text{rc.}$$

y^{II}

$$y^{II} = x^n + \frac{n}{1} 2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 8\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$y^{III} = x^n + \frac{n}{1} 3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 27\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$y^{IV} = x^n + \frac{n}{1} 4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 64\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

Nimmt man daher die Differenzen, so wird

$$\Delta y = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$\Delta y^{I} = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 3\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 7\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$\Delta y^{II} = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 5\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 19\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$\Delta y^{III} = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 7\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 37\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

Nimmt man abermals die Differenzen, so wird

$\Delta\Delta y$

$$\Delta\Delta y = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} 6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} 14\omega^4 x^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta\Delta y^{\mathrm{I}} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} 12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} 50\omega^4 x^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta\Delta y^{\mathrm{II}} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} 18\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} 110\omega^4 x^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man die Subtraction weiter fort, so wird

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} 36\omega^4 x^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^3 y^{\mathrm{I}} = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} 60\omega^4 x^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

und hieraus ferner

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

§. 14.

Damit das Gesetz, nach welchem diese Differenzen der Potestät x^n fortgehen, desto deutlicher erkannt werden möge, so wollen wir der Kürze wegen

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

u. s. f.

setzen. Ferner wollen wir folgende Tabelle machen, die zur Erfindung der einzelnen Differenzen dienen soll.

y	1;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	ꝛc.
Δy	0;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	ꝛc.
$\Delta^2 y$	0;	0;	2;	6;	14;	30;	62;	126;	254;	ꝛc.
$\Delta^3 y$	0;	0;	0;	6;	36;	150;	540;	1806;	5796;	ꝛc.
$\Delta^4 y$	0;	0;	0;	0;	24;	240;	1560;	8400;	40824;	ꝛc.
$\Delta^5 y$	0;	0;	0;	0;	0;	120;	1800;	16800;	126000;	ꝛc.
$\Delta^6 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	720;	15120;	191520;	ꝛc.
$\Delta^7 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	5040;	141120;	ꝛc.

Man findet aber eine jede Zahl dieser Tabelle, wenn man die vorhergehende Zahl eben derselben Reihe zu der darüber stehenden Zahl addirt, und die Summe durch den Anzeiger des vorne stehenden Zeichens Δ multiplicirt. So findet man in der Reihe, welche zu der Differenz $\Delta^5 y$ gehört, das Glied 16800, wenn man das vorhergehende 1800 zu dem darüber stehenden 1560 addirt, und die Summe 3360 durch 5 multiplicirt.

§. 15.

Hat man diese Tabelle verfertiget, so verhalten sich die Differenzen der Potestät $x^n = y$ auf folgende Art:

$$\Delta y = A\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\omega^4 x^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^2 y = 2B\omega^2 x^{n-2} + 6C\omega^3 x^{n-3} + 14D\omega^4 x^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^3 y = 6C\omega^3 x^{n-3} + 36D\omega^4 x^{n-4} + 150E\omega^5 x^{n-5} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^4 y = 24D\omega^4 x^{n-4} + 240E\omega^5 x^{n-5} + 1560F\omega^6 x^{n-6} + \text{ꝛc.}$$

Ueber=

Ueberhaupt aber wird die Differenz der Potestät x^n von der Ordnung m, oder $\Delta^m y$ auf folgende Art ausgedruckt.

Es sey

$$I = \frac{n(n-1)(n-2)\,\ldots\ldots\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,m};$$

$$K = \frac{n-m}{m+1}I;$$

$$L = \frac{n-m-1}{m+2}K;$$

$$M = \frac{n-m-2}{m+3}L;$$

u. s. f.

Ferner sey

$$\alpha = (m+1)^m - \frac{m}{1}m^m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-2)^m + \text{ꝛc.}$$

$$\beta = (m+1)^{m+1} - \frac{m}{1}m^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-1)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-2)^{m+1} + \text{ꝛc.}$$

$$\gamma = (m+1)^{m+2} - \frac{m}{1}m^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-2)^{m+2} + \text{ꝛc.}$$

Hat man diese Werthe gefunden, so ist

$$\Delta^m y = \alpha I \omega^m x^{n-m} + \beta K \omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma L \omega^{m+2} x^{n-m-2} + \text{ꝛc.}$$

Der Grund von diesem Ausdrucke läßt sich aus der Art, wie die verschiedenen Differenzen aus den Werthen y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; ꝛc. gefunden werden, leicht herleiten.

§. 16.

Hieraus erhellet, daß man, wenn der Exponent n eine ganze positive Zahl ist, endlich auf beständige Differenzen kommen muß, und daß alle darauf folgende = o sind. So ist

$$\Delta \,.\, x = \omega$$
$$\Delta^2 \,.\, x^2 = 2\omega^2$$
$$\Delta^3 \,.\, x^3 = 6\omega^3$$
$$\Delta^4 \,.\, x^4 = 24\omega^4, \text{ und endlich}$$
$$\Delta^n \,.\, x^n = 1\,.\,2\,.\,3 \ldots\ldots\ldots n\,.\,\omega^n$$

Es kann daher eine jede ganze rationale Funktion endlich auf beständige Differenzen gebracht werden. Es hat nemlich jede Funktion von x vom ersten Grade, oder $ax + b$, schon die erste Differenz beständig. Bey einer Funktion vom zweyten Grade hingegen, oder $axx + bx + c$ ist die zweyte Differenz beständig; bey einer Funktion vom dritten Grade ist es die dritte; bey einer vom vierten Grade die vierte, u. s. f.

§. 17.

Es erstreckt sich aber die Art, wie wir die Differenzen der Potestät x^n gefunden haben, noch weiter, und läßt sich auch auf die Potestäten anwenden, bey welchen der Exponent n eine negative Zahl, oder ein Bruch, oder selbst eine Irrational-Zahl ist. Damit dieses deutlicher werde, wollen wir bloß die ersten Differenzen der vornehmsten von diesen Potestäten hersetzen, weil das Gesetz der zweyten und der folgenden Differenzen nicht so leicht in die Augen fällt. Es ist also

$$\Delta \,.\, x = \omega$$
$$\Delta \,.\, x^2 = 2\omega x + \omega$$
$$\Delta \,.\, x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$$
$$\Delta \,.\, x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4$$

Auf

Auf eine ähnliche Art aber ist auch

$$\Delta \,.\, x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta \,.\, x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta \,.\, x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta \,.\, x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Ferner ist auf gleiche Weise

$$\Delta \,.\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta \,.\, x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta \,.\, x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta \,.\, x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \text{ꝛc.}$$

§. 18.

Es erhellet hieraus, daß diese Differenzen, wenn der Exponent von x keine ganze Zahl ist, ohne Ende fortlaufen, oder aus einer ganz unbegrenzten Anzahl von Gliedern bestehen. Es lassen sich aber dieselben gleichwohl auch durch endliche Ausdrücke darstellen. Denn da, wenn man $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ setzt, $y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{x+\omega}$ wird, so ist $\Delta \,.\, x^{-1} = \Delta \,.\, \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$. Wenn man daher den Bruch $\frac{1}{x+\omega}$

in eine Reihe verwandelt, so bekommt man den obigen Ausdruck. Auf eine ähnliche Art ist

$$\Delta . x^{-2} = \Delta . \frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

und für die Irrational-Größen

$$\Delta . \sqrt{x} = \sqrt{(x+\omega)} - \sqrt{x}, \text{ und } \Delta . \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\omega)}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Verwandelt man diese Ausdrücke auf die gewöhnliche Art in Reihen, so erhält man dadurch die vorhergehenden Bestimmungen.

§. 19.

Auf diese Art kann man aber auch die Differenzen der gebrochenen und irrationalen Funktionen finden. Soll z. B. die erste Differenz der gebrochenen Funktion $\frac{1}{aa+xx}$ gefunden werden, so setze man $y = \frac{1}{aa+xx}$; und weil nun $y^{1} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega}$ ist, so ist $\Delta y = \Delta . \frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega} - \frac{1}{aa+xx}$: ein Ausdruck, der ebenfalls in eine unendliche Reihe verwandelt werden kann.

Man setze nemlich

$$aa+xx = P; \text{ und } 2\omega x+\omega\omega = Q$$

so ist

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{etc.}$$

und

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{etc.}$$

Setzt man also für P und Q ihre Werthe, so ist:

$$\Delta y = \Delta.\frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x - \omega\omega}{(aa+xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx + 4\omega^3 x + \omega^4}{(aa+xx)^3}$$
$$- \frac{8\omega^3 x^3 - 12\omega^4 x^2 + 6\omega^5 x - \omega^6}{(aa+xx)^4} + \&c.$$

und ordnet man die Glieder nach den Potestäten von ω, so wird

$$\Delta.\frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x}{(aa+xx)^2} + \frac{\omega^2(xx-aa)}{(aa+xx)^3} - \frac{4\omega^3(x^3-aax)}{(aa+xx)^4} + \&c.$$

§. 20.

Durch ähnliche unendliche Reihen ist man auch im Stande, die Differenzen der irrationalen Funktionen auszudrucken.

Es sey die Funktion

$$y = \sqrt{(aa+xx)}$$

gegeben. Da nun

$$y^1 = \sqrt{(aa+xx+2\omega x+\omega\omega)}$$

ist, so setze man auch hier

$$aa+xx = P; \text{ und } 2\omega x + \omega\omega = Q.$$

Alsdann ist

$$\Delta y = \sqrt{(P+Q)} - \sqrt{P} = \frac{Q}{2\sqrt{P}} - \frac{Q^2}{8P\sqrt{P}} + \frac{Q^3}{16P^2\sqrt{P}} - \&c.$$

Hieraus wird

$$\Delta y = \Delta.\sqrt{(aa+xx)} = \frac{2\omega x + \omega\omega}{2\sqrt{(aa+xx)}} - \frac{4\omega^2 x^2 - 4\omega^3 x - \omega^4}{8(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}} + \&c.$$

oder

$$\Delta y = \frac{\omega x}{\sqrt{(aa+xx)}} + \frac{aa\omega^2}{2(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}} -$$
$$\frac{aa\omega^3 x}{2(aa+xx)^2\sqrt{(aa+xx)}} + \&c.$$

Hieraus ziehen wir daher den Schluß, daß die Differenz einer jeden Funktion von x, die wir y nennen wollen, auf folgende allgemeine Art ausgedruckt werden könne, daß

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + ꝛc.$$

und P, Q, R, S ꝛc. gewisse Funktionen von x sind, die für einen jeden Fall aus der Funktion y hergeleitet werden können.

§. 21.

Es sind selbst von dieser Form die transcendenten Funktionen nicht ausgeschlossen, wie aus folgenden Exempeln erhellen wird.

Erstes Exempel.

Die erste Differenz des hyperbolischen Logarithmen von x zu finden.

Es sey $y = lx$, und da alsdann $y^{\mathrm{I}} = l(x + \omega)$ ist, so wird

$$\Delta y = y_{\mathrm{I}} - y = l(x + \omega) - lx = l(1 + \frac{\omega}{x})$$

Von dergleichen Logarithmen aber wissen wir [aus dem 7ten Capitel des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen] wie dieselben in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Thun wir nun solches, so ist

$$\Delta y = \Delta . lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4\omega^4} + ꝛc.$$

Zweytes Exempel.

Die erste Differenz der Exponential-Größe a^x zu finden.

Setzt man $y = a^x$, so wird $y^{\mathrm{I}} = a^{x+\omega} = a^x . a^\omega$. Nun ist aber oben [Einleit. in d. Anal. des Unendl. 1. B. §. 125.] gezeigt worden, daß

a^ω

$$a^{\omega} = 1 + \frac{\omega l a}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

ist, und gebraucht man diesen Werth, so wird

$$\Delta . a^x = y^1 - y = \Delta y = \frac{a^x \omega la}{1} + \frac{a^x \omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{a^x \omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

Drittes Exempel.

Die Differenz des Sinus eines Bogens x zu finden, wenn der Halbmesser des Kreises = 1 ist.

Es sey $\sin. x = y$, und folglich $y^1 = \sin. (x + \omega)$; also

$$\Delta y = y^1 - y = \sin. (x + \omega) - \sin. x.$$

Nun ist aber

$$\sin. (x + \omega) = \cos. \omega . \sin. x + \sin. \omega . \cos. x$$

und, durch unendliche Reihen bestimmt, [nach Einl. in die Anal. des Unendl. 1. B. §. 134.]

$$\cos. \omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.}$$

und

$$\sin. \omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

Gebraucht man diese Reihen, so wird

$$\Delta . \sin. x = \omega . \cos. x - \frac{\omega^2}{2} \sin. x - \frac{\omega^3}{6} \cos. x + \frac{\omega^4}{24} \sin. x + \frac{\omega^5}{120} \cos. x - \text{ꝛc.}$$

Viertes Exempel.

In einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 ist; die Differenz des Cosinus des Bogens x zu finden.

Es sey $y = \cos. x$, so ist, weil $y^1 = \cos. (x + \omega)$ ist,

$$y^1 = \cos. \omega . \cos. x - \sin. \omega . \sin. x$$

und

$$\Delta y = \cos. \omega . \cos. x - \sin. \omega . \sin. x - \cos. x.$$

Gebraucht man nun wieder die vorher angeführten Reihen, so wird

$$\Delta.\cos.x = -\omega.\sin.x - \frac{\omega^2}{2}.\cos.x + \frac{\omega^3}{6}.\sin.x + \frac{\omega^4}{24}.\cos.x - \frac{\omega^5}{120}.\sin.x - \text{ꝛc.}$$

§. 22.

Da also die erste Differenz einer jeden Funktion y von x, es mag nun dieselbe zu den algebraischen oder zu den transcendenten Funktionen gehören, eine solche Form hat, daß

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

ist: so ist leicht einzusehen, daß, wenn man in der Aufsuchung der Differenzen fortgeht, die zweyte Differenz von y diese Form:

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + S\omega^5 + \text{ꝛc.}$$

die dritte folgende

$$\Delta^3 = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + S\omega^6 + \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

haben werde. Hierbey ist aber zu bemerken, daß die Buchstaben P, Q, R, S, ꝛc. keine bestimmte Werthe anzeigen, und daß überdies ein und derselbe Buchstabe bey verschiedenen Differenzen nicht gerade eben dieselbe Funktion von x bedeutet. Es sind bloß deswegen dieselben Buchstaben bey den verschiedenen Differenzen genommen worden, damit es nicht an einer hinlänglichen Anzahl verschiedener Buchstaben fehlen mögte.

Uebrigens sind diese Formen der Differenzen wohl zu merken, weil sie in der Analysis des Unendlichen den größten Nutzen gewähren.

§. 23.

Da ich also die Art und Weise erklärt habe, die erste Differenz einer jeden Funktion und aus derselben dann auch die Differenzen der folgenden Ordnungen zu finden, indem dieselben aus den auf einander folgenden Werthen der Funktion y, nemlich y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; 2c. erhalten werden können: so sind wir nunmehr auch im Stande, aus den Differenzen von y von jeder Ordnung jene verschiedenen Werthe von y zu finden. Es ist nemlich

$$y^{I} = y + \Delta y$$
$$y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$
$$y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y$$
$$y^{IV} = y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$

2c.

wo die Zahl-Coefficienten wiederum [wie §. 10.] aus der Entwickelung eines Binomiums entspringen. So wie daher y^{I}; y^{II}; y^{III}; 2c. Werthe von y sind, die entstehen, wenn man anstatt x nach und nach die Werthe $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; 2c. setzt, so läßt sich der Werth von $y^{(n)}$, der hervorgebracht wird, wenn man $x+n\omega$ für x setzt, sogleich angeben. Es ist nemlich derselbe:

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \text{2c.}$$

Hiernach lassen sich selbst die Werthe von y angeben, wenn n eine negative Zahl ist. Wird z. B. $x-\omega$ für x gesetzt, so geht y in diesen Ausdruck über:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \text{2c.}$$

nimmt man aber $x-2\omega$ für x, so erhält man für die Funktion y:

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \text{2c.}$$

§. 24.

Nun wollen wir kürzlich die umgekehrte Methode betrachten, wodurch man aus der gegebenen Differenz einer Funktion diese Funktion findet. Da dieses indeß viel schwerer ist, und öfters selbst den Gebrauch der Analysis des Unendlichen nothwendig macht: so wollen wir nur einige leichter Fälle erwägen. Zuvörderst also kann man, wenn man die Differenz einer Funktion gefunden hat, und nun wieder diese Differenz gegeben ist, dadurch, daß man rückwärts geht, aus dieser Differenz die Funktion, woraus sie entstanden ist, finden. So ist, wenn man die Funktion finden soll, deren Differenz $a\omega$ ist, da man weiß, daß die Funktion $ax + b$ die Differenz $a\omega$ hat, die Antwort leicht, nemlich, daß die gesuchte Funktion $ax + b$ sey. Hier findet man also eine beständige Größe, welche sich in der Differenz nicht befand, und welche also von unserer Willkühr abhängt. Wenn aber die Differenz einer Funktion $P = Q$ ist, so ist auch die Differenz der Funktion $P + A$, (wo A jede beständige Größe bedeutet) $= Q$. Wenn also die Differenz Q gegeben ist, so ist die Funktion, aus welcher sie gefunden wird, $P + A$, und es hat daher dieselbe keinen bestimmten Werth, da A willkührlich genommen werden kann.

§. 25.

Die gesuchte Funktion, deren Differenz gegeben ist, wollen wir Summe nennen; denn dieser Name ist sehr schicklich, theils, weil die Summe der Differenz entgegensteht, theils, weil die gesuchte Funktion in der That die Summe aller vor der Differenz vorhergehenden Werthe ist. So wie nemlich $y^{I} = y + \Delta y$, und $y^{II} = y + \Delta y + \Delta y^{I}$ ist: so ist auch, (wenn man die Werthe von y rückwärts fortsetzt, und denjenigen, der zu dem Werthe $x - \omega$ gehört, durch

durch y_{I}; so wie den vorhergehenden durch y_{II}; und die weiter vorhergehenden y_{III}; y_{IV}; y_{V}; rc. bezeichnet, und darauf die rückwärts fortgehende Reihe mit ihren Differenzen,

$$y_{V};\quad y_{IV};\quad y_{III};\quad y_{II};\quad y_{I};\ y$$

und

$$\Delta y_{V};\ \Delta y_{IV};\ \Delta y_{III};\ \Delta y_{II};\ \Delta y_{I}$$

formirt,) $y = \Delta y_{I} + y_{I}$; und da $y_{I} = \Delta y_{II} + y_{II}$; und $y_{II} = \Delta y_{III} + y_{III}$ rc. ist, so ist ferner

$$y = \Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_{V} + \text{rc.}$$

oder es ist die Funktion y, deren Differenz Δy ist, die Summe aller der Werthe, die vor der Differenz Δy vorhergehen, und welche entstehen, wenn man für x die vorhergehenden Werthe $x-\omega$; $x-2\omega$; $x-3\omega$; rc. setzt.

§. 26.

So wie wir nun die Differenz zu bezeichnen das Zeichen Δ gebraucht haben: so wollen wir uns zur Bezeichnung der Summe des Zeichens Σ bedienen. Ist nemlich die Differenz einer Funktion $y = z$, so ist $z = \Delta y$; und wenn y gegeben ist, so wissen wir, wie z gefunden wird. Wenn aber die Differenz z gegeben ist, und ihre Summe y gefunden werden soll, so wird $y = \Sigma z$; und man findet $y = \Sigma z$ aus der Gleichung $z = \Delta y$, indem man den entgegenstehenden Weg nimmt. Wegen der angeführten Gründe muß man indeß eine beständige Größe dazu setzen, so daß die Gleichung $z = \Delta y$, wenn umgekehrt wird, $y = \Sigma z + C$ giebt. Da ferner die Größe ay die Differenz $a\Delta y = az$ hat, so ist $\Sigma az = ay$, wofern a eine beständige Größe ist. Da also $\Delta x = \omega$ ist, so ist $\Sigma\omega = x + C$, und $\Sigma ax = ax + C$; und

weil

weil ω eine beständige Größe ist, $\Sigma\omega^2 = \omega x + C$; $\Sigma\omega^3 = \omega^2 x + C$; und so ferner.

§. 28.

Wenn wir daher die oben gefundenen Differenzen der Potestäten von x umkehren, so wird

$$\Sigma\omega = x; \text{ und also } \Sigma 1 = \frac{x}{\omega}.$$

Ferner haben wir

$$\Sigma(2\omega x + \omega^2) = x^2$$

und daher

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma\frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Dann ist

$$\Sigma(3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

oder

$$3\omega\Sigma xx + 3\omega^2\Sigma x + \omega^3\Sigma 1 = x^3$$

folglich

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega\Sigma x - \frac{\omega^2}{3}\Sigma 1$$

oder

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}.$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2}\Sigma x^2 - \omega^2\Sigma x - \frac{\omega^3}{4}\Sigma 1$$

und setzt man darin für Σx^2, Σx und $\Sigma 1$ die dafür gefundenen Werthe, so wird

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega xx}{4}.$$

Da ferner

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega\Sigma x^3 - 2\omega^2\Sigma x^2 - \omega^3\Sigma x - \frac{\omega^4}{5}\Sigma 1$$

ist,

ist, so findet man, wenn man wieder die bereits gefundenen Werthe gebraucht,

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}\omega x^3 - \tfrac{1}{30}\omega^3 x$$

Auf eine ähnliche Art kann man weiter fortgehen, und dann findet man

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}\omega x^4 - \tfrac{1}{12}\omega^3 x^2$$

und

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}\omega x^5 - \tfrac{1}{6}\omega^3 x^3 + \tfrac{1}{42}\omega^5 x;$$

indeß wird weiter unten ein leichterer Weg, diese Ausdrücke zu finden, vorkommen.

§. 28.

Wenn also die gegebene Differenz eine ganze rationale Funktion von x ist, so kann man ihre Summe (oder die Funktion, wovon sie die Differenz ist) aus diesen Formeln ohne Mühe finden. Da nemlich die Differenz aus mehrern Potestäten von x bestehen wird, so suche man die Summe eines jeden Gliedes, und vereinige darauf das Gefundene zu einem Aggregate.

Erstes Exempel.

Man soll die Funktion finden, deren Differenz $= axx + bx + c$ ist.

Man suche die Summe der einzelnen Glieder nach den vorhin gefundenen Formeln. Dadurch findet man

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

$$\Sigma bx = \ldots\ldots \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

$$\Sigma c = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{cx}{\omega}$$

Dann

Dann vereinige man diese Summen, wodurch denn

$$\Sigma(axx+bx+c)=\frac{a}{3\omega}x^3-\frac{a\omega-b}{2\omega}x^2+\frac{a\omega^2-3b\omega+6c}{6\omega}x+C$$

wird, und dies ist die Funktion, deren Differenz $axx+bx+c$ ist

Zweytes Exempel.

Man soll die Funktion finden, deren Differenz $x^4-2\omega^2xx+\omega^4$ ist.

Verfährt man hier auf eine ähnliche Art, so wird

$$\Sigma x^4=\frac{1}{5\omega}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}\omega x^3-\frac{1}{30}\omega x^3$$

$$-\Sigma 2\omega^2x^2=\ldots-\frac{2\omega}{3}x^3+\omega^2x^2-\frac{\omega^3}{3}x$$

$$+\Sigma\omega^4=\ldots\ldots\ldots\ldots\omega^3x$$

und die gesuchte Funktion ist daher

$$\frac{1}{5\omega}x^5-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}\omega x^3+\omega^2x^2+\frac{19}{30}\omega^3x+C.$$

Denn setzt man darin $x+\omega$ für x und zieht man von dem dadurch gefundenen Ausdrucke jenen Ausdruck ab, so bleibt die gegebene Differenz $x^4-2\omega^2x^2+\omega^4$ übrig.

§. 29.

Wenn man die Summen, die wir für die Potestäten von x gefunden haben, mit Aufmerksamkeit betrachtet, so nimmt man zwar in den ersten, zweyten und dritten Gliedern derselben bald das Gesetz wahr, nach welchem sie fortschreiten: allein bey den folgenden Gliedern ist dieses Gesetz nicht so deutlich, daß man daraus die Summe der allgemeinen Potestät x^n sollte schließen können. In der Folge aber wird bewiesen werden, daß

$$\Sigma x^n =$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2\,.\,3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}x^{n-5}$$

$$- \frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-6)\omega^7}{2\,.\,3\ldots\ldots 8\,.\,9}x^{n-7}$$

$$+ \frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-8)\omega^9}{2\,.\,3\ldots\ldots 10\,.\,11}x^{n-9}$$

$$- \frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-10)\omega^{11}}{2\,.\,3\ldots\ldots 12\,.\,13}x^{n-11}$$

$$+ \frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-12)\omega^{13}}{2\,.\,3\ldots\ldots 14\,.\,15}x^{n-13}$$

$$- \frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-14)\omega^{15}}{2\,.\,3\ldots\ldots 16\,.\,17}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-16)\omega^{17}}{2\,.\,3\ldots\ldots 18\,.\,19}x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-18)\omega^{19}}{2\,.\,3\ldots\ldots 20\,.\,21}x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-20)\omega^{21}}{2\,.\,3\ldots\ldots 22\,.\,23}x^{n-21}$$

$$- \frac{1181820455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-22)\omega^{23}}{2\,.\,3\ldots\ldots 24\,.\,25}x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-24)\omega^{25}}{2\,.\,3\ldots\ldots 26\,.\,27}x^{n-25}$$

$$- \frac{23749461029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-26)\omega^{27}}{2\,.\,3\ldots\ldots 28\,.\,29}x^{n-27}$$

$$+ \frac{8615841276005}{462}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-28)\omega^{29}}{2\,.\,3\ldots\ldots 30\,.\,31}x^{n-29}$$

ꝛc. + C.

Bey dieser Progression sind die Coefficienten, die aus blossen Zahlen bestehen, das wichtigste; allein die Art, wie man sie findet, kann hier noch nicht gelehret werden.

§. 30.

Das aber fällt in die Augen, daß dieser Ausdruck der Summe, wenn n keine ganze positive Zahl ist, ohne Ende fortlaufen muß, und daß alsdann die Summe durch keine endliche Form dargestellt werden kann. Uebrigens bemerke man, daß nicht alle Potestäten von x, die niedriger sind als die gegebene x^n, vorkommen. Es fehlen nemlich die Glieder x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}, ꝛc. weil ihre Coefficienten $= 0$ sind, obgleich der Coefficient des zweyten Gliedes x^n diesem Gesetze nicht folgt, sondern $= -\frac{1}{2}$ ist. Es können also die Summen der Potestäten, deren Exponenten negative oder gebrochene Zahlen sind, vermittelst dieses Ausdrucks in der gewöhnlichen unendlichen Form dargestellt werden, den Fall ausgenommen, wenn $n = -1$ ist, weil alsdenn das Glied $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$, weil $n + 1 = 0$ wird, unendlich ist. Setzt man z. B. $n = -2$, so wird

$$\Sigma \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{3x^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^3}{5x^5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega}{7x^7}$$

$$+ \frac{3}{10} \cdot \frac{\omega^7}{9x^9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210} \cdot \frac{\omega^{11}}{13x^{13}} - \frac{35}{2} \cdot \frac{\omega^{13}}{15 \cdot x^{15}}$$

$$+ \frac{3617}{30} \cdot \frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \text{ꝛc.}$$

§. 31.

Wenn also die gegebene Differenz irgend eine Potestät von x ist, so kann man hiernach beständig die Summe derselben

selben angeben, oder die Funktion, wovon sie eine Differenz ist, darstellen. Wenn aber die gegebene Differenz eine andere Form hat, so daß man sie nicht in Poteståten von x, als in Theile, zerfållen kann: so ist es håufig sehr schwer, und oft unmöglich, ihre Summe zu finden, es sey denn daß man wüßte, daß sie aus einer gewissen Funktion entstanden sey. Aus dieser Ursache ist es sehr nůtzlich, von so vielen Funktionen als möglich die Differenzen zu suchen und sich dieselben zu merken, um, wenn kůnftig eine solche Differenz vorkommen sollte, die Summe derselben, oder die Funktion, woraus sie entstanden, sogleich angeben zu können. Es wird indeß die Betrachtung des Unendlichen mehrere Regeln an die Hand geben, wodurch die Erfindung der Summen ungemein erleichtert wird.

§. 32.

Wenn aber die gegebene Differenz aus einfachen Faktoren besteht, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, so kann man die gesuchte Summe auf eine leichtere Art finden. Sollte z. B. die Differenz der Funktion $(x + \omega)(x + 2\omega)$ gefunden werden: so würde diese Funktion, wenn man darin $x + \omega$ für x setzte, in diese $(x + 2\omega)(x + 3\omega)$ übergehen, und ihre Differenz also $2\omega(x + 2\omega)$ seyn. Wird also umgekehrt die Differenz $2\omega(x + 2\omega)$ gegeben, so ist ihre Summe $(x + \omega)(x + 2\omega)$ und daraus

$$\Sigma(x + 2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + \omega)(x + 2\omega).$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn die Funktion $(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)$ gegeben ist, da dieselbe die Differenz $2\omega(x + (n + 1)\omega)$ hat,

$$\Sigma(x + (n + 1)\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)$$

und

$$\Sigma(x+n\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega).$$

§. 33.

Wenn die Funktion aus mehrern Faktoren besteht, so daß

$$y = (x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

ist, so wird, da alsdenn

$$y' = (x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)$$

ist, die Differenz

$$\Delta y = 3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

und also

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega) = \frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega).$$

Auf eben die Art findet man

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega) = \frac{1}{4\omega}(x+(n-1)\omega) +$$
$$(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega);$$

und hieraus fällt die Regel zur Erfindung der Summen, wenn die Differenz aus mehrern Faktoren von dieser Art besteht, von selbst in die Augen. Ob nun gleich diese Differenzen ganze rationale Funktionen sind, so werden doch ihre Summen auf dem jetzt beschriebenen Wege leichter als nach der vorhergehenden Methode gefunden.

§. 34.

Hierdurch ist nun auch der Weg zur Erfindung der Summen der gebrochenen Differenzen gebahnt. Denn ist der Bruch

$$y = \frac{1}{x+n\omega}$$

gege-

gegeben, so wird, weil

$$y^{I} = \frac{1}{x + (n + 1)\omega}$$

ist, die Differenz

$$\Delta y = \frac{1}{x + (n + 1)\omega} - \frac{1}{x + n\omega} = \frac{-\omega}{(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)}$$

und folglich

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x + n\omega}.$$

Es sey ferner

$$y = \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)}$$

so wird, weil

$$y^{I} = \frac{1}{(x + (n + 1)\omega)(x + (n + 2)\omega)}$$

ist, die Differenz

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)(x + (n + 2)\omega)}$$

und folglich

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)(x + (n + 2)\omega)} = \frac{-1}{2\omega} \cdot \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)}.$$

Auf eine ähnliche Art ist ferner

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)(x + (n + 2)\omega)(x + (n + 3)\omega)} = \frac{-1}{3\omega} \cdot \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)(x + (n + 2)\omega)}.$$

§. 35.

Diese Art die Summe zu finden ist deswegen wohl zu merken, weil man die Summen von dergleichen Differen-

 zen

zen auf dem vorhin beschriebenen Wege nicht erhält. Hat aber die Differenz außerdem auch einen Zähler, oder stehen die Faktoren des Nenners nicht in einer arithmetischen Progression, so ist der sicherste Weg die Summen zu erforschen der, daß man die gegebene Differenz in ihre einfachen Brüche auflöset. Denn ob man gleich nicht jeden für sich summiren kann, so kann man doch, wenn man immer zwey und zwey mit einander verbindet, die Summe so ofte finden, als solches möglich ist. Es kommt dabey nemlich nur darauf an, ob man die Summe vermittelst dieser Formel

$$\Sigma \frac{1}{(x + (n + 1)\omega)} - \Sigma \frac{1}{x + n\omega} = \frac{1}{x + n\omega}$$

zu finden im Stande ist. Denn ist man gleich von diesen beyden Summen keine für sich zu finden im Stande, so kann man doch ihre Differenz angeben.

§. 36.

In diesen Fällen kommt es also vorzüglich auf die Auflösung eines jeden Bruchs in seine einfachen Brüche an, wozu in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen eine ausführliche Anweisung gegeben worden ist. Jetzt wellen wir an einigen Beyspielen zeigen, wie man vermittelst derselben die Summen findet.

Erstes Exempel.

Man soll die Summe finden, deren Differenz

$$\frac{3x + 2\omega}{x(x + \omega)(x + 2\omega} \text{ ist.}$$

Man löse diese Differenz in ihre einfachen Brüche auf, welche sind

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x + \omega} - \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{x + 2\omega}.$$

Da

Da nun nach der vorhergehenden Formel

$$\Sigma \frac{1}{x + n\omega} = \Sigma \frac{1}{x + (n+1)\omega} - \frac{1}{x + n\omega}$$

ist, so wird

$$\Sigma \frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{x + \omega} - \frac{1}{x}.$$

Es ist daher die gesuchte Summe

$$\frac{1}{\omega} \Sigma \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \Sigma \frac{1}{x + \omega} - \frac{2}{\omega} \Sigma \frac{1}{x + 2\omega} = \frac{2}{\omega} \Sigma \frac{1}{x + \omega} -$$

$$\frac{2}{\omega} \Sigma \frac{1}{x + 2\omega} - \frac{1}{\omega x}.$$

Da aber

$$\Sigma \frac{1}{x + \omega} = \Sigma \frac{1}{x + 2\omega} - \frac{1}{x + \omega}$$

ist, so wird die gesuchte Summe

$$- \frac{1}{\omega x} - \frac{2}{\omega(x + \omega)} = \frac{-3x - \omega}{\omega x (x + \omega)}.$$

Zweytes Exempel.

Man soll die Summe finden, deren Differenz

$$\frac{3\omega}{x(x + 3\omega)} \text{ ist.}$$

Setzt man diese Differenz $= z$, so ist $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 3\omega}$,

und folglich

$$\Sigma z = \Sigma \frac{1}{x} - \Sigma \frac{1}{x + 3\omega} = \Sigma \frac{1}{x + \omega} - \Sigma \frac{1}{x + 3\omega} - \frac{1}{x}$$

$$= \Sigma \frac{1}{x + 2\omega} - \Sigma \frac{1}{x + 3\omega} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \omega}$$

$$= - \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \omega} - \frac{1}{x + 2\omega}$$

und dies ist die gesuchte Summe. So oft sich also auf diese Art die summirenden Zeichen Σ endlich einander aufheben, so oft lassen sich die Summen der gegebenen Differenzen finden; wenn aber diese Vernichtung nicht erhalten werden kann, so ist dies ein Zeichen, daß man die Summe nicht zu finden im Stande ist.

Zweytes Capitel.

Von dem Nutzen der Differenzen in der Lehre von den Reihen.

§. 37.

Daß die Natur der Reihen durch die Differenzen am deutlichsten vor Augen gelegt werden könne, ist selbst aus den ersten Anfangs-Gründen bekannt. Die vornehmste Eigenschaft der arithmetischen Progression, welche unter allen Reihen zuerst betrachtet zu werden pflegt, ist die, daß ihre ersten Differenzen einander gleich, und folglich die zweyten Differenzen, so wie auch alle übrigen Nullen sind. Dann giebt es Reihen, deren zweyte Differenzen erst einander gleich werden, und die man deswegen sehr bequem mit dem Namen der Reihen der zweyten Ordnung belegt, so wie man die arithmetischen Reihen Reihen der ersten Ordnung nennt. Reihen der dritten Ordnung sind demnach solche, deren dritte Differenzen beständig sind, und zu der vierten und den folgenden Ordnungen rechnet man diejenigen, die erst die vierte oder eine von den folgenden Differenzen beständig haben.

§. 38.

In dieser Eintheilung sind unendlich viele Arten von Reihen begriffen, und gleichwohl gehören nicht alle Arten der Reihen darunter. Es giebt nemlich unendlich viel Reihen, bey denen man, wenn man die Differenzen aufsucht, nie auf beständige Differenzen kommt. Hieher gehören ausser unzähligen andern die geometrischen Progressionen, die nie beständige Differenzen geben, wie man an folgendem Beyspiele sehen kann:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ꝛc.
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ꝛc.
1, 2, 4, 8, 16, 32, ꝛc.

Denn da die Reihen der Differenzen jeder Ordnung der gegebenen Reihe gleich werden, so läßt sich gar keine Gleichheit der Differenzen gedenken. Man muß daher mehrere Classen von Reihen annehmen, und eine davon enthält die Reihen, die endlich auf beständige Differenzen reducirt werden, als Gattungen unter sich. Diese Classe nun ist die, welche wir in dem gegenwärtigen Capitel genauer untersuchen wollen.

§. 39.

Es werden aber zur Erkennung der Natur der Reihen vorzüglich zwey Stücke erfordert, das allgemeine Glied und die Summe oder das summirende Glied. Das allgemeine Glied ist ein unbestimmter Ausdruck, welcher jedes Glied der Reihe unter sich begreift, und folglich eine solche Funktion der veränderlichen Größe x, daß man daraus, wenn man $x = 1$ setzt, das erste Glied der Reihe, wenn man $x = 2$ setzt, das zweyte Glied der Reihe, wenn man $x = 3$ setzt, das dritte Glied der Reihe, wenn man $x = 4$ setzt, das vierte Glied der Reihe u. s. w. erhält. Kennt man also das allgemeine Glied, so kann man jedes Glied der Reihe finden, ohne dabey auf das Gesetz, nach welchem die Glieder der Reihe auf einander folgen, zu sehen. Setzt man z. B.

z. B. $x = 1000$, so findet man sogleich das tausendste Glied. So ist von dieser Reihe

$$1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ 66,\ 91,\ 120,\ \text{ꝛc.}$$

das allgemeine Glied $= 2xx - x$. Denn setzt man darin $x = 1$, so erhält man daraus das erste Glied 1; setzt man $x = 2$, so bekommt man das zweyte Glied 6; setzt man $x = 3$, so gelangt man zu dem dritten Gliede 15; u. s. f. Hieraus erhellet, daß das hundertste Glied dieser Reihe, wo man also $x = 100$ nehmen muß $= 2 . 10000 - 100 = 19900$ seyn werde.

§. 40.

Anzeiger oder Exponenten heißen bey jeder Reihe die Zahlen, welche anzeigen, das wievielste Glied ein jedes Glied in der Ordnung ist. So ist der Anzeiger des ersten Gliedes 1, des zweyten 2, des dritten 3, u. s. f. Daher pflegt man die Anzeiger über die einzelnen Glieder der Reihe zu schreiben, wie hier

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ꝛc.

Glieder.

A, B, C, D, E, F, G, H, I, ꝛc.

So sieht man gleich, daß G das siebente Glied der Reihe ist, weil es den Anzeiger 7 hat. Hiernach ist das allgemeine Glied nichts anders als dasjenige Glied der Reihe, dessen Anzeiger oder Exponent die unbestimmte Zahl x ist. Zuvörderst wollen wir nun zeigen, wie man von jeder Reihe, deren erste oder zweyte oder irgend welche von den folgenden Differenzen beständig sind, das allgemeine Glied finden könne; und dann zur Erforschung der Summe fortgehen.

§. 41.

Wir wollen von der ersten Ordnung anfangen, welche die arithmetischen Progressionen enthält, deren erste Differenzen beständig sind. Es sey also a das erste Glied der Reihe, und b das erste Glied der Reihe der Differenzen, welchem alle folgende Glieder gleich sind. Hiernach wird die Reihe also beschaffen seyn

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

Glieder.

a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, $a + 4b$, $a + 5b$, ꝛc.

Differenzen.

b, b, b, b, b, ꝛc.

Man sieht hier beym ersten Anblicke, daß das Glied, dessen Anzeiger $= x$ ist, $a + (x-1)b$, und also das allgemeine Glied $= bx + a - b$ seyn wird; und es ist daher das allgemeine Glied aus den ersten Gliedern theils der Reihe selbst, theils der Reihe der Differenzen zusammengesetzt. Wenn man aber das zweyte Glied der Reihe $a + b = a^{I}$ setzt, so wird, weil alsdenn $b = a^{I} - a$ ist, das allgemeine Glied $= (a^{I} - a)x + 2a - a^{I} = a^{I}(x-1) - a(x-2)$. Kennt man daher das erste und zweyte Glied einer arithmetischen Progression, so kann man daraus das allgemeine Glied formiren.

§. 42.

Es sey nunmehr das erste Glied der Reihe der zweyten Ordnung $= a$; das erste Glied der Reihe der ersten Differenzen $= b$, und das erste Glied der Reihe der zweyten Differenzen $= c$. Bey diesen Annahmen wird die Reihe nebst ihren Differenzen folgende Gestalt haben:

Anzei-

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

Glieder.

a; $a+b$; $a+2b+c$; $a+3b+3c$; $a+4b+6c$; $a+5b+10c$; ꝛc.

Erste Differenzen.

b; $b+c$; $b+2c$; $b+3c$; $b+4c$; ꝛc.

Zweyte Differenzen.

c, c, c, c, ꝛc.

Hier lehrt der Anblick, daß das Glied, welches den Anzeiger x hat, $= a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}c$ ist, und dieses ist das allgemeine Glied der gegebenen Reihe. Setzt man aber das zweyte Glied dieser Reihe $= a^{I}$, und das dritte $= a^{II}$; so wird, (weil $b = a^{I} - a$; und $c = a^{II} - 2a^{I} + a$ ist, wie aus der Natur der Differenzen [§. 10.] erhellet,) das allgemeine Glied:

$$a + (x-1)(a^{I}-a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(a^{II} - 2a^{I} + a)$$

und dieses läßt sich auf diese Form

$$\frac{a^{II}(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} - \frac{2a^{I}(x-1)(x-3)}{1 \cdot 2} + \frac{a(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$$

oder auf diese

$$\frac{a^{II}}{2}(x-1)(x-2) - \frac{2a^{I}}{2}(x-1)(x-3) + \frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

oder endlich auf diese bringen

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{II}}{x-3} - \frac{2a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right)$$

und es wird also das allgemeine Glied aus dreyen Gliedern der Reihe bestimmt.

§. 43.

§. 43.

Es sey a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, ꝛc. eine Reihe der dritten Ordnung; ihre ersten Differenzen, b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, ꝛc. ihre zweyten Differenzen c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, ꝛc. und ihre vierten Differenzen d, d, d, ꝛc. weil diese beständig sind.

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

Glieder.

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, ꝛc.

Erste Differenzen.

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, ꝛc.

Dritte Differenzen.

d, d, d, ꝛc.

Da $a^{I} = a + b$; $a^{II} = a + 2b + c$; $a^{III} = a + 3b + 3c + d$; $a^{IV} = a + 4b + 6c + 4d$; ꝛc. ist: so ist das allgemeine Glied, oder dasjenige, dessen Anzeiger x ist

$$a + \frac{(x-1)}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1\,.\,2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d$$

und auf diese Art wird das allgemeine Glied aus den Differenzen formirt. Da aber

$b = a^{I} - a$; $c = a^{II} - 2a^{I} + a$; $d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$

ist: so erhält man durch die Substitution dieser Werthe für das allgemeine Glied den Ausdruck

$$a^{III}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3} - 3a^{II}\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1\,.\,2\,.\,3}$$
$$+ 3a_{I}\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1\,.\,2\,.\,3} - a\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

welcher auch auf folgende Form reducirt werden kann:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{a^{III}}{x-4} - \frac{3a^{II}}{x-3} + \frac{3a^{I}}{x-2} - \frac{a}{x-1}\right)$$

§. 44.

§. 44.

Es seyen endlich allgemein für die Reihen aller Ordnungen

die Anzeiger

1, 2, 3, 4, 5, 6, 2c.

die Glieder

$a, \quad a_{I}, \quad a^{II}, \quad a^{III}, \quad a^{IV}, \quad a^{V}$, 2c.

die ersten Differenzen

$b, \quad b^{I}, \quad b^{II}, \quad b^{III}, \quad b^{IV}$, 2c.

die zweyten Differenzen

$c, \quad c^{I}, \quad c^{II}, \quad c^{III}$, 2c.

die dritten Differenzen

$d, \quad d^{I}, \quad d^{II}$, 2c.

die vierten Differenzen

$e, \quad e_{I}$, 2c.

die fünften Differenzen

f, 2c.

so wird das allgemeine Glied aus dem ersten Gliede der Reihe, und aus den ersten Gliedern der Reihen der Differenzen b, c, d, e, f, 2c. auf diese Art ausgedruckt

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \text{2c.}$$

bis man auf beständige Differenzen kommt. Wenn man also nie auf beständige Differenzen kommt, so ist dieses ein Kennzeichen, daß das allgemeine Glied nicht anders als durch einen unendlichen Ausdruck dargestellt werden kann.

§. 45.

§. 45.

Da die Differenzen aus den Gliedern der gegebenen Reihe formirt werden, so erhält man, wenn man die Werthe derselben substituirt, das allgemeine Glied auf eine solche Art ausgedruckt, als wir es bey den Reihen der ersten, zweyten und dritten Ordnung gehabt haben. Es ist nemlich das allgemeine Glied für die Reihen der vierten Ordnung

$$\frac{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)\,(x-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$+\left(\frac{a^{IV}}{x-5}-\frac{4a^{III}}{x-4}+\frac{6a^{II}}{x-3}-\frac{4a^{I}}{x-2}+\frac{a}{x-1}\right)$$

und hieraus läßt sich das Gesetz, nach welchem die allgemeinen Glieder der Reihen der folgenden Ordnungen zusammengesetzt werden müssen, leicht abnehmen. Es erhellet aber hieraus, daß das allgemeine Glied für jede Ordnung eine ganze rationale Funktion von x ist, worin die höchste Dimension von x mit der Ordnung, zu welcher die Reihe gehört, übereinstimmt. So ist das allgemeine Glied einer Reihe der ersten Ordnung eine Funktion vom ersten Grade, das allgemeine Glied einer Reihe der zweyten Ordnung eine Funktion vom zweyten Grade und so ferner.

§. 46.

Die Differenzen aber entspringen, wie wir vorhin gesehen haben, aus den Gliedern der Reihe auf die Art, daß

$$b = a^{I} - a$$
$$b_{I} = a^{II} - a_{I}$$
$$b^{II} = a^{III} - a^{II}$$

ꝛc.

$$c = a^{II} - 2a^{I} + a$$
$$c_{I} = a^{III} - 2a^{II} + a_{I}$$
$$c^{II} = a_{I}^{V} - 2a^{III} + a^{II}$$

ꝛc.

d =

$$d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$
$$d^{I} = a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^{I}$$
$$d^{II} = a^{V} - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II}$$
ꝛc.

ist. Da also in den Reihen der ersten Ordnung alle Werthe von $c = 0$ sind, so ist

$$a^{II} = 2a^{I} - a;\ a^{III} = 2a^{II} - a^{I};\ a^{IV} = 2a^{III} - a^{II};\ \text{ꝛc.}$$

woraus erhellet, daß diese Reihen auch zu den wiederkehrenden Reihen gehören, deren Beziehungs-Scale 2, — 1 ist. Da ferner in den Reihen der zweyten Ordnung alle Werthe von $d = 0$ sind, so ist

$$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a;\ a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I};\ \text{ꝛc.}$$

und es sind daher auch diese Reihen wiederkehrende Reihen, deren Beziehungs-Scale 3, — 3, + 1 ist. Auf eine ähnliche Art erhellet, daß alle Reihen dieser Classe, sie mögen zu einer Ordnung gehören, zu welcher sie wollen, zugleich wiederkehrende Reihen sind, und zwar auf die Art, daß ihre Beziehungs-Scale aus den Coefficienten der Potestät des Binomiums besteht, welche um einen Grad höher ist, als die Ordnung, zu welcher die Reihe gehört.

§. 47.

Da aber für die Reihen der ersten Ordnung auch alle Werthe von d und e, so wie auch aller folgenden Differenzen $= 0$ sind, so ist auch in diesen Reihen

$$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$$
$$a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$$
ꝛc.

und

$$a^{IV} = 4a^{III} - 6a^{II} + 4a^{I} - a$$
$$a^{V} = 4a^{IV} - 6a^{III} + 4a^{II} - a^{I}$$
+ ꝛc.

Es

Es gehören daher auch in dieser Rücksicht diese Reihen zu den wiederkehrenden, und zwar auf unendlich viele Arten, da die Beziehungs-Scale

$$3, -3, +1;\ 4, -6, +4, -1;\ 5, -10, +10, -5, +1;$$
$$\text{ꝛc.}$$

seyn kann. Auf eine ähnliche Art überzeugt man sich, daß eine jede Reihe der Classe, mit deren Untersuchung wir uns jetzt beschäftigen, auf unzählige Arten eine wiederkehrende Reihe ist; indem die Beziehungs-Scale

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, +\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

ist, wenn nur n eine ganze und eine größere Zahl bedeutet, als diejenige, welche die Ordnung der Reihe anzeigt. Es kann daher diese Reihe auch aus der Entwickelung eines Bruchs erhalten werden, dessen Nenner $(1-y)^n$ ist, wie wir solches in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen bey der Betrachtung der wiederkehrenden Reihen ausführlich gezeigt haben.

§. 48.

So wie wir gesehen haben, daß die allgemeinen Glieder aller Reihen dieser Classe ganze rationale Funktionen von x sind: so läßt sich auch umgekehrt zeigen, daß alle Reihen, deren allgemeine Glieder dergleichen Funktionen von x sind, zu dieser Classe gehören, und endlich auf beständige Differenzen gebracht werden. Ist das allgemeine Glied eine Funktion vom ersten Grade, $ax + b$ so hat die daraus entspringende Reihe, weil sie eine Reihe der ersten Ordnung oder eine arithmetische Progression ist, die ersten Differenzen beständig. Ist hingegen das allgemeine Glied eine Funktion vom zweyten Grade, $axx + bx + c$; so gehört die

Reihe,

Reihe, die daraus entspringt, wenn man darin nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, ꝛc. für x setzt, zu den Reihen der zweyten Ordnung, deren zweyte Differenzen beständig sind. Auf eine ähnliche Art giebt das allgemeine Glied vom dritten Grade $ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine Reihe der dritten Ordnung und so ferner.

§. 49.

Man kann nemlich aus dem allgemeinen Gliede nicht bloß alle Glieder der Reihe selbst, sondern auch die Reihen der Differenzen, der ersten sowohl als der folgenden finden. Denn so wie man das erste Glied der Reihe der Differenzen erhält, wenn man das erste Glied der Reihe von dem zweyten abzieht, und das zweyte, wenn man das zweyte Glied der Reihe von dem dritten subtrahirt: so findet man auch das Glied in der Reihe der Differenzen, dessen Anzeiger x ist, wenn man das Glied der Reihe, welches den Anzeiger x hat, von dem folgenden, dessen Anzeiger $x + 1$ ist, abzieht. Wenn man also in dem allgemeinen Gliede $x + 1$ anstatt x setzt, und das allgemeine Glied von diesem Werthe subtrahirt: so bleibt das allgemeine Glied der Reihe der Differenzen übrig. Ist daher X das allgemeine Glied der Reihe, so ist seine Differenz $\triangle X$ (welche man auf die im vorhergehenden Capitel beschriebene Art findet, wenn man $\omega = 1$ setzt,) das allgemeine Glied der Reihe der ersten Differenzen; und auf eine ähnliche Art wird $\triangle\triangle X$ das allgemeine Glied der Reihe der zweyten Differenzen, $\triangle^3 X$ das allgemeine Glied der Reihe der dritten Differenzen, und so weiter.

§. 50.

Wenn aber das allgemeine Glied X eine ganze rationale Funktion von x ist, so daß darin die höchste Potestät von x den Exponenten n hat: so ist nach dem vorhergehenden Capitel

pitel die Differenz $\triangle X$ eine Funktion von einem um 1 niedrigern Grade, oder vom Grade $n-1$. Ferner ist $\triangle\triangle X$ eine Funktion vom Grade $n-2$; $\triangle^3 X$ eine Funktion vom Grade $n-3$; u. s. f. Wenn daher X eine Funktion vom ersten Grade, wie $ax+b$ ist: so ist seine Differenz $\triangle X$ eine beständige Größe $= b$; und da dieselbe das allgemeine Glied der Reihe der ersten Differenzen ist, so erhellet, daß die Reihe, deren allgemeines Glied X eine Funktion vom ersten Grade ist, zu den arithmetischen Reihen oder zur ersten Ordnung gehört. Auf eine ähnliche Art gehört die Reihe, deren allgemeines Glied X eine Funktion vom zweyten Grade ist, weil $\triangle\triangle X$ eine beständige Größe wird, und also die zweyten Differenzen beständig sind, zu den Reihen der zweyten Ordnung; und überhaupt jede Reihe, die aus einem allgemeinen Gliede X entspringt, zu der Ordnung, deren Exponent dem höchsten Exponenten des allgemeinen Gliedes gleich ist.

§. 51.

Aus diesem Grunde haben die Reihen der Potestäten der natürlichen Zahlen beständige Differenzen, wie aus folgender Tabelle erhellet.

Erste Potestäten.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, rc.

Erste Differenzen.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, rc.

Zweyte Potestäten.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, rc.

Erste Differenzen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, rc.

Zweyte Differenzen.

2, 2, 2, 2, 2, 2, rc.

Dritte

Dritte Potestäten.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, ꝛc.

Erste Differenzen.

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

12, 18, 24, 30, 36, 42, ꝛc.

Dritte Differenzen.

6, 6, 6, 6, 6, ꝛc.

Vierte Potestäten.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, ꝛc.

Erste Differenzen.

15, 65, 175, 369, 671, 1105, 1695, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

50, 110, 194, 302, 434, 590, ꝛc.

Dritte Differenzen.

60, 84, 108, 132, 158, ꝛc.

Vierte Differenzen.

24, 24, 24, 24, ꝛc.

Was wir also in dem vorhergehenden Capitel von der Erfindung der Differenzen einer jeden Ordnung gesagt haben, das dient hier zur Erfindung der allgemeinen Glieder für alle Differenzen, die aus den Reihen entspringen.

§. 52.

Wenn das allgemeine Glied irgend einer Reihe bekannt ist, so kann man vermittelst desselben nicht bloß alle Glieder dieser Reihe finden, sondern auch die Reihe rückwärts fortsetzen, und die Glieder, deren Exponenten negative Zahlen sind, darstellen, indem man für x negative Zahlen setzt. Ist

z. B. das allgemeine Glied $\frac{xx + 3x}{2}$, so erhält man, wenn man für x sowohl die negativen als die positiven Anzeiger setzt, folgende Reihe:

Anzeiger.

rc. −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, rc.

Reihe.

rc. +5, +2, 0, −1, −1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, rc.

Erste Differenzen.

−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, rc.

Zweyte Differenzen.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, rc.

Da also das allgemeine Glied aus den Differenzen formirt wird, so kann auch jede Reihe aus den Differenzen rückwärts fortgesetzt werden; und wenn die Differenzen endlich beständige Größen werden, so kann solches in bestimmten Gliedern, ist dieses aber nicht, durch unendliche Ausdrücke geschehen. Ja man kann aus dem allgemeinen Gliede selbst die Glieder finden, deren Anzeiger gebrochene Zahlen sind, worin die Interpolation der Reihen besteht.

§. 53.

Nach diesen Betrachtungen über das allgemeine Glied der Reihen wollen wir zur Untersuchung der Summe oder des summirenden Gliedes der Reihen aller Ordnungen fortgehen. Es ist aber das summirende Glied einer Reihe, eine Funktion von x, welche der Summe so vieler Glieder gleich ist, als die Zahl x Einheiten enthält. Demnach besteht die Natur des summirenden Gliedes darin, daß man daraus, wenn man x = 1 setzt, das erste Glied der Reihe, wenn man x = 2 setzt, die Summe der beyden ersten Glieder der

Reihe, wenn man $x = 3$ setzt, die Summe der drey ersten Glieder der Reihe u. s. f. erhält. Wenn man daher aus der gegebenen Reihe auf die Art eine neue Reihe formirt, daß das erste Glied von dieser dem ersten Gliede von jener, das zweyte Glied von dieser der Summe der beyden ersten Glieder von jener, das dritte Glied von dieser der Summe der drey ersten Glieder von jener gleich ist, u. s. f.: so wird diese neue Reihe die summirende Reihe von jener genannt, und das allgemeine Glied dieser summirenden Reihe ist das summirende Glied der gegebenen Reihe. Es kommt also bey der Erfindung des summirenden Gliedes auf die Erfindung eines allgemeinen Gliedes an.

§. 54.

Es sey also die Reihe

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \text{ꝛc.}$$

gegeben, und die summirende Reihe derselben sey

$$A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III}\ A^{IV},\ A^{V},\ \text{ꝛc.}$$

Alsdenn ist nach der eben erklärten Beschaffenheit dieser Reihe

$$\begin{aligned} A &= a \\ A^{I} &= a + a^{I} \\ A^{II} &= a + a^{I} + a^{II} \\ A^{III} &= a + a^{I} + a^{II} + a^{III} \\ A^{IV} &= a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Folglich sind die Differenzen der summirenden Reihe

$$A^{I} - A = a^{I};\quad A^{II} - A^{I} = a^{II};\quad A^{III} - A^{II} = a^{III};\ \text{ꝛc.}$$

und also die gegebene Reihe, nachdem man das erste Glied davon weggenommen hat, die Reihe der ersten Differenzen der summirenden Reihe. Setzt man daher der summirenden Reihe das Glied $= 0$ vor, so daß man

$$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},\ \text{rc.}$$

erhält, so ist die Reihe der ersten Differenzen von dieser Reihe die gegebene Reihe

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \text{rc.}$$

selbst.

§. 55.

Es sind daher die ersten Differenzen der gegebenen Reihe die zweyten Differenzen der summirenden Reihe, die zweyten Differenzen der gegebenen Reihe die dritten Differenzen der summirenden Reihe, die dritten Differenzen der gegebenen Reihe die vierten Differenzen der summirenden Reihe u. s. f. Wenn daher die gegebene Reihe endlich beständige Differenzen hat, so wird die summirende Reihe ebenfalls dergleichen haben, und also eine Reihe von eben der Art, aber um eine Ordnung höher seyn. Von dergleichen Reihen kann daher auch das summirende Glied allezeit durch einen endlichen Ausdruck dargestellt werden. Denn das allgemeine Glied der Reihe

$$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},\ \text{rc.}$$

oder dasjenige, dessen Anzeiger x ist, giebt die Summe von $x - 1$ Gliedern der Reihe $a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV}$, rc. und wenn man darin $x + 1$ für x setzt, so bekommt man die Summe von x Gliedern, und der gefundene Ausdruck ist daher das summirende Glied.

§. 56.

Es sey also von der gegebenen Reihe

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ a^{VI},\ \text{rc.}$$

die Reihe der ersten Differenzen

$$b,\ b^{I},\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV},\ b^{V},\ b^{VI},\ \text{rc.}$$

die Reihe der zweyten Differenzen

$$c,\ c^{I},\ c^{II},\ c^{III},\ c^{IV},\ c^{V},\ c^{VI}\ \text{rc.}$$

die

die Reihe der dritten Differenzen

$d, \ d^{I}, \ d^{II}, \ d^{III}, \ d^{IV}, \ d^{V}, \ d^{VI}$, ꝛc.

und so ferner, bis man auf beständige Differenzen kommt. Dann formire man die summirende Reihe, welche sich, da sie das Glied o anstatt des ersten Gliedes hat, mit ihren Differenzen auf folgende Art verhalten wird:

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ꝛc.

Summirende Reihe.

$0, \ A, \ A^{I}, \ A^{II}, \ A^{III}, \ A^{IV}, \ A^{V}$, ꝛc.

Gegebene Reihe.

$a, \ a^{I}, \ a^{II}, \ a^{III}, \ a^{IV}, \ a^{V}, \ a^{VI}$, ꝛc.

Erste Differenzen.

$b, \ b^{I}, \ b^{II}, \ b^{III}, \ b^{IV}, \ b^{V}, \ b^{VI}$, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

$c, \ c^{I}, \ c^{II}, \ c^{III}, \ c^{IV}, \ c^{V}, \ c^{VI}$, ꝛc.

Dritte Differenzen.

$d, \ d^{I}, \ d^{II}, \ d^{III}, \ d^{IV}, \ d^{V}, \ d^{VI}$, ꝛc.

Dieses vorausgeschickt, so ist das allgemeine Glied der summirenden Reihe, oder dasjenige Glied, dessen Anzeiger x ist,

$$0 + (x-1)a + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} b + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \text{ꝛc.}$$

und dasselbe giebt zugleich die Summe von $x-1$ Gliedern der gegebenen Reihe, $a, \ a^{I}, \ a^{II}, \ a^{III}, \ a^{IV}$, ꝛc.

§. 57.

Wenn man also in dieser Summe $x+1$ für x setzt, so bekommt man das summirende Glied der gegebenen Reihe, welches die Summe von x Gliedern in sich begreift,

$$=xa + \frac{x(x-1)}{1.2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}d$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Wenn man daher den Buchstaben b, c, d, e, die ihnen beygelegten Werthe läßt, so hat

die Reihe

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \text{ꝛc.}$$

das allgemeine Glied

$$a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1\,.\,2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d +$$
$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}e + \text{ꝛc.}$$

und das summirende Glied

$$xa + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}d$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Hat man also auf die beschriebene Art von einer Reihe irgend einer Ordnung das allgemeine Glied gefunden, so läßt sich daraus das summirende Glied mit leichter Mühe ableiten, indem dasselbe aus eben den Differenzen besteht.

§. 58.

Diese Art, das summirende Glied aus den Differenzen der Reihe zu finden, ist vorzüglich bey den Reihen brauchbar, wobey man endlich zu beständigen Differenzen gelangt; denn in den übrigen Fällen läßt sich kein endlicher Ausdruck finden. Wenn man aber das, was wir von der Natur des summirenden Gliedes gesagt haben, genauer erwägt, so bietet sich ein anderer Weg dar, das summirende Glied unmittelbar aus dem allgemeinen Gliede zu erhalten, der sich viel weiter erstreckt, und in vielen Fällen zu endlichen

chen Ausdrücken führt, wo man auf dem vorhergehenden Wege zu unendlichen gelangt. Es sey nemlich die allgemeine Reihe

$$a, \; b, \; c, \; d, \; e, \; f, \; \text{ꝛc.}$$

gegeben, und das allgemeine Glied derselben, oder dasjenige, dessen Anzeiger x ist, sey $= X$, das summirende Glied hingegen $= S$. Da also S die Summe so vieler Glieder vom Anfang an bedeutet, als x Einheiten hat, so wird die Summe von $x - 1$ Gliedern $= S - X$, und also X die Differenz des Ausdrucks $S - X$, weil es übrig bleibt, wenn man den Ausdruck $S - X$ von dem folgenden S abzieht.

§. 59.

Da also $X = \Delta\,(S - X)$, auf die Art genommen, ist, wie wir in dem vorhergehenden Capitel gezeigt haben, bloß mit dem Unterschiede, daß die dort vorkommende beständige Größe ω hier $= 1$ sey; so ist, wenn wir rückwärts die Summe nehmen, $\Sigma X = S - X$, und also das gesuchte summirende Glied

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Es muß folglich die Summe der Funktion X auf die vorhin erklärte Art gesucht, und zu derselben das allgemeine Glied X addirt werden, wo denn das Aggregat das summirende Glied giebt. Da aber die zu nehmenden Summen eine beständige Größe in sich schließen, so muß man dieselbe nach dem gegenwärtigen Falle einrichten. Es ist aber offenbar, daß die Summe, so oft man $x = 0$ setzt, in welchem Falle also gar keine Glieder zu summiren sind, allezeit auch selbst $= 0$ werden muß, und man muß daher die beständige Größe daraus zu bestimmen suchen, daß für $x = 0$ auch $S = 0$ wird. Setzt man daher in der Gleichung $S = \Sigma X + X + C$ sowohl $S = 0$, als $x = 0$, so findet man den Werth von C.

§. 60.

Da also das ganze gegenwärtige Geschäfte auf die oben erklärte Summirung der Funktionen ankommt: so wollen wir dadurch, daß wir $\omega = 1$ setzen, von daher die nöthigen Summen entlehnen. Zuvörderst ist also für die Potestäten von x

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$\Sigma x^6 = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x.$$

und dazu setze man noch die Summe der allgemeinen Potestät x^n §. 29, indem man darin allenthalben 1 für ω schreibt. Vermittelst dieser Formeln lassen sich also die summirenden Glieder aller Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind, sehr leicht finden.

§. 61.

Es bedeute S. X das summirende Glied der Reihe, deren allgemeines Glied $= X$ ist, so ist, wie wir gesehen haben,

$$S.X = \Sigma X + X + C$$

wofern C auf die Art angenommen wird, daß das summirende Glied S. X verschwindet, wenn man $x = 0$ setzt.

Hieraus

Hieraus wollen wir nun die summirenden Glieder der Reihen der Potestäten, oder der Reihen, die in dieser Form x^n begriffen sind, ausdrucken. Setzt man also

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots\ldots + x^n$$

so wird

$$S.x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \tfrac{1}{2} x^n + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n}{2.3} x^{n-1} - \tfrac{1}{6} \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4.5} x^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5.6.7} x^{n-5}$$

$$- \frac{3}{10} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-6)}{2.3\ldots\ldots 8.9} x^{n-7}$$

$$+ \frac{5}{6} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-8)}{2.3\ldots\ldots 10.11} x^{n-9}$$

$$- \frac{691}{210} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-10)}{2.3\ldots\ldots 12.13} x^{n-11}$$

$$+ \frac{35}{2} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-12)}{2.3\ldots\ldots 14.15} x^{n-13}$$

$$- \frac{3617}{30} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-14)}{2.3\ldots\ldots 16.17} x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-16)}{2.3\ldots\ldots 18.19} x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-18)}{2.3\ldots\ldots 20.21} x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{6} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-20)}{2.3\ldots\ldots 22.23} x^{n-21}$$

$$- \frac{1181820455}{546} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-22)}{2.3\ldots\ldots 24.25} x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-24)}{2.3\ldots\ldots 26.27} x^{n-25}$$

ꝛc.

§. 62.

Hieraus ergeben sich die Summen für die verschiedenen Werthe von n auf folgende Art:

$$S.x^0 = x$$

$$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$$

$$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$$

$$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3$$
$$- \frac{1}{30}x$$

$$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4$$
$$- \frac{3}{20}x^2$$

$$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5$$
$$- \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$$

$$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^{8} + \frac{11}{6}x^{6}$$
$$- \frac{11}{8}x^{4} + \frac{5}{12}x^{2}$$

$$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + \quad x^{11} - \frac{11}{6}x^{9} + \frac{22}{7}x^{7}$$
$$- \frac{33}{10}x^{5} + \frac{5}{3}x^{2} - \frac{691}{2730}x$$

$$S.x^{13} = \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{1}x^{13} + \frac{13}{12}x^{12} - \frac{143}{160}x^{10} + \frac{143}{28}x^{8}$$
$$- \frac{143}{20}x^{6} + \frac{65}{12}x^{4} - \frac{691}{420}x^{2}$$

$$S.x^{14} = \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{91}{30}x^{11} + \frac{143}{18}x^{9}$$
$$- \frac{143}{10}x^{7} + \frac{91}{9}x^{5} - \frac{691}{9}x^{3} + \frac{7}{6}x$$

$$S.x^{15} = \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{5}{4}x^{14} - \frac{91}{24}x^{12} + \frac{143}{12}x^{10}$$
$$- \frac{429}{16}x^{8} + \frac{455}{12}x^{6} - \frac{691}{24}x^{4} + \frac{35}{4}x^{2}$$

$$S.x^{16} = \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{14}{3}x^{13} + \frac{52}{3}x^{11}$$
$$- \frac{143}{3}x^{9} + \frac{260}{3}x^{7} - \frac{1382}{15}x^{5} + \frac{140}{3}x^{3} - \frac{3617}{510}x$$

ꝛc.

Man kann diese Formeln aus der allgemeinen Formel bis zur neun und zwanzigsten Potestät fortsetzen, und man könnte noch weiter fortgehen, wenn die Zahl-Coefficienten weiter bekannt wären.

§. 63.

Uebrigens läßt sich bey diesen Formeln ein gewisses Gesetz bemerken, vermittelst dessen man jede derselben aus der vorher-

vorhergehenden leicht finden kann, das letzte Glied allein ausgenommen, wenn es die erste Potestät von x enthält; denn alsdenn kommt in der folgenden Summe ein neues Glied hinzu. Dies aber bey Seite gelassen, so ist, wenn

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \text{etc.}$$

ist, die folgende Summe

$$S.x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2} + \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4} - \frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8} - \text{etc.}$$

Wenn also n eine gerade Zahl ist, so erhält man hiernach das folgende Glied; wenn n aber eine ungerade Zahl ist, so fehlt in der folgenden Summe das letzte Glied, dessen Form $\pm \varphi x$ ist. Indeß kann man dasselbe ohne andere Hülfsmittel auf folgende Art finden. Da sich, wenn man $x = 1$ setzt, die Summe eines einzigen Gliedes, (d. h. das erste Glied selbst, welches $= 1$ ist) ergeben muß: so setze man in allen schon gefundenen Gliedern $x = 1$, und die Summe selbst auch $= 1$. Ist dies geschehen, so kann man den Werth von φ entwickeln, und alsdenn weiter fortgehen. Auf diese Art hätten alle jene Summen gefunden werden können. Da z. B.

$$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

ist, so ist

$$S.x^6 = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}x^7 + \frac{6}{6}\cdot\frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3}\cdot\frac{1}{12}x^3 + \varphi x$$

oder

$$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \varphi x.$$

Nun

Nun setzte man $x = 1$ so wird

$$1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \varphi$$

und also

$$\varphi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

wie wir es aus der allgemeinen Formel gefunden haben.

§. 64.

Vermittelst dieser summirenden Formeln lassen sich nun die summirenden Glieder aller Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind, finden, und zwar viel leichter und schneller als nach der vorhergehenden Methode durch die Differenzen.

Erstes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, ꝛc.

deren allgemeines Glied

$$\frac{3xx + x}{2}$$

ist, zu finden.

Da das allgemeine Glied aus zwey Theilen besteht, so suche man das summirende Glied für einen jeden Theil aus den obigen Formeln,

$$S \,.\, \tfrac{3}{2}xx = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$
$$S \,.\, \tfrac{1}{2}x = \ldots\ldots \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

Hierdurch erhält man

$$S \,.\, \frac{3xx + x}{2} = \tfrac{1}{2}x^3 + xx + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x(x+1)^2$$

welches das gesuchte summirende Glied ist. Setzt man z. B. $x = 5$, so wird $\frac{5}{2}.6^2 = 90$ die Summe der fünf ersten Glieder

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

Zwey-

Zweytes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe

1, 27, 125, 343, 729, 1331, ꝛc.

welche die Würfel der ungeraden Zahlen enthält, zu finden.

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$= (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1,$$

und man erhält demnach das summirende Glied aus folgenden Theilen

$$\begin{array}{lllllll}
+ & 8.S\,x^3 & = 2x^4 & + 4x^3 & + 2x^2 & & \\
- & 12.S.x^2 & = \ldots & - 4x^3 & - 6x^2 & - 2x & \\
+ & 6.S.x & = \ldots\ldots & \ldots & + 3x^2 & + 3x & \\
- & 1.S.x^0 & = \ldots\ldots & \ldots & \ldots & - x &
\end{array}$$

Es ist also das gesuchte summirende Glied

$$= 2x^4 - x^2 = xx(2xx - 1).$$

Setzt man z. B. $x = 6$, so wird $36.71 = 2556$ die Summe von sechs Gliedern der gegebenen Reihe $= 1 + 27 + 125 + 343 + 1331 = 2556$.

§. 65.

Wenn das allgemeine Glied ein Produkt aus einfachen Faktoren ist, so kann man das summirende Glied leichter durch das finden, was § 32 u. f. gelehret worden ist. Denn da, wenn man $\omega = 1$ setzt,

$$\Sigma(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$$

und

$$\Sigma(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$$

und

$$\Sigma(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

ꝛc.

ist: so erhält man, wenn man zu diesen Summen die allgemeinen Glieder selbst addirt, und außerdem eine beständige

Größe

Größe dazu setzt, die für $x = 0$ das summirende Glied ebenfalls in Null verwandelt, folgende summirende Glieder:

$$S.(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n)(x+n+1) - \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

und

$$S.(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

und

$$S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

und so ferner.

Ist also $n = 0$, oder $n = -1$, so ist in diesen Summen auch die beständige Größe $= 0$.

§. 66.

Das summirende Glied der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 2c., deren allgemeines Glied x ist, ist also $= \tfrac{1}{2}x(x+1)$, und die summirende Reihe folglich diese: 1, 3, 6, 10, 15, 2c. Von dieser Reihe hingegen ist das summirende Glied $= \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, und die summirende Reihe folgende: 1, 4, 10, 20, 35, 2c. Diese Reihe hat wieder das summirende Glied $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, und dieses ist das allgemeine Glied der Reihe, 1, 5, 15, 35, 70, 2c., deren summirendes Glied $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ ist. Da man von diesen Reihen allenthalben den wichtigsten Gebrauch machen kann, so sind sie vor andern wohl zu merken. Man nimmt nemlich aus ihnen die Coefficienten des zu einer Potestät erhobenen Binomiums, und wie weit sich der Gebrauch von diesen erstrecke, weiß jeder, der sich damit nur einigermaßen abgegeben hat.

§. 67.

Hieraus findet man auch die summirenden Glieder, die wir vorhin aus den Differenzen ableiteten, leicht. Denn da wir daselbst für das allgemeine Glied folgende Form gefunden haben:

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \text{ꝛc.}$$

so erhalten wir, wenn wir die summirenden Glieder aller Theile einzeln suchen, und sie darauf zu einem Aggregate vereinigen, das summirende Glied, welches zu diesem allgemeinen Gliede gehört. Da also

$$S.1 = x$$

$$S.(x-1) = \tfrac{1}{2} x(x-1)$$

$$S.(x-1)(x-2) = \tfrac{1}{3} x(x-1)(x-2)$$

$$S.(x-1)(x-2)(x-3) = \tfrac{1}{4} x(x-1)(x-2)(x-3)$$

ꝛc.

ist, so ist das gesuchte summirende Glied

$$xa + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \text{ꝛc.}$$

und diese Form stimmt ganz mit der überein, welche wir oben [§. 37.] aus den Differenzen erhielten.

§. 68.

Ferner kann diese Art die summirenden Glieder zu finden auch auf Brüche angewandt werden. Da wir nemlich oben §. 34. gesehen haben, daß für $n = 1$

$$\Sigma \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 \cdot \frac{1}{x+n}$$

ist, so wird

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 \cdot \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Au

Auf eine ähnliche Art erhalten wir, wenn wir zu den oben gefundenen Summen die allgemeinen Glieder selbst addiren, oder, welches einerley ist, in diesen Ausdrücken $x+1$ für x setzen

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

und

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = -\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}$$
$$+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

und diese Formeln lassen sich nach Belieben leicht fortsetzen.

§. 69.

Da $S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$ ist, so ist auch

$$S.\frac{1}{x+n} - S.\frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}.$$

Ob also gleich keines von diesen beyden summirenden Gliedern besonders dargestellt werden kann, so ist doch ihr Unterschied bekannt, und man kann darnach in vielen Fällen die Summen der Reihen mit hinlänglicher Leichtigkeit finden. Dies geschiehet nemlich alsdann, wenn das allgemeine Glied ein Bruch ist, dessen Nenner in einfache Faktoren aufgelöset werden kann. Wenn dieses statt findet, so löse man den ganzen Bruch in seine Partial-Brüche auf, und dann wird man nach dem gegenwärtigen Satze leicht beurtheilen, ob das summirende Glied dargestellt werden könne, oder nicht?

Erstes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \text{etc.}$$

deren allgemeines Glied $= \frac{2}{xx+x}$ ist, zu finden.

Durch die Auflösung erhält man aus dem gegebenen allgemeinen Gliede die Partial-Brüche $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$. Demnach ist das summirende Glied $= 2S.\frac{1}{x} - 2S.\frac{1}{x+1}$, und folglich nach dem vorhergehenden Satze $= 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$.

Ist z. B. $x=4$, so ist $\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$.

Zweytes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{21}, \frac{1}{45}, \frac{1}{77}, \frac{1}{117}, \text{etc.}$$

deren allgemeines Glied $= \frac{1}{4xx+4x-3}$ ist, zu finden.

Da der Nenner des allgemeinen Gliedes die Faktoren $2x-1$, und $2x+3$ hat, so läßt er sich in folgende Theile auflösen:

$$\tfrac{1}{4}.\frac{1}{2x-1} - \tfrac{1}{4}.\frac{1}{2x+3} = \tfrac{1}{8}.\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

Nun ist aber

$$S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}} = S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}} + 2 - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

und

$$S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}} = S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

folglich

$$S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}} = 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

und hiervon giebt der achte Theil das gesuchte summirende Glied, nemlich

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8x+4} - \frac{1}{8x+12} = \frac{x}{4x+2} + \frac{x}{3(4x+6)} = \frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}.$$

§. 70.

Da die figurirten Zahlen, welche die Coefficienten des zu einer Potestät erhobenen Binomiums geben, vorzüglich gemerkt zu werden verdienen: so wollen wir die Summen der Reihen aufsuchen, deren Zähler $= 1$, die Nenner aber die figurirten Zahlen sind, und solches ist nach §. 68 leicht. Es haben also die Reihen

deren allgemeines Glied ist	das summirende Glied
$\frac{1.2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$
$\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1.3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1.2.3.4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3} - \frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1.2.3.4.5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4} - \frac{1.2.3.5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
ꝛc.	ꝛc.

und hieraus fällt das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortgehen, sehr bald in die Augen. Das summirende Glied, welches zu dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{x}$ gehört, kann aber hieraus nicht geschlossen werden, weil man nicht im Stande ist, solches durch einen endlichen Ausdruck darzustellen.

§ 71.

Da das summirende Glied die Summe so vieler Glieder giebt, als der Anzeiger x Einheiten enthält: so ist offenbar, daß man die Summen dieser Reihen, ohne Ende fortgesetzt, erhalten wird, wenn man den Anzeiger x unendlich groß annimmt. In diesem Falle verschwinden aber die letzten Glieder der gefundenen Ausdrücke, weil die Nenner unendlich groß werden, und es haben also die betrachteten Reihen endliche Summen. Diese sind:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \text{ꝛc.} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \text{ꝛc.} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \text{ꝛc.} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \text{ꝛc.} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \text{ꝛc.} = \frac{6}{5}$$

ꝛc.

Es können also alle ohne Ende fortlaufende Reihen, deren summirende Glieder bekannt sind, wenn man $x = \infty$ setzt, summirt werden, vorausgesetzt, daß die Summen endlich sind; und dies findet statt, wenn x in dem summirenden Gliede eben so viel Dimensionen im Nenner als im Zähler hat.

Drit-

Drittes Capitel.

Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen.

§. 72.

Da eine jede Größe, so groß sie auch immer seyn mag, doch noch weiter vermehrt werden kann, und nichts uns verhindert, zu einer jeden gegebenen Größe eine andere von eben der Art hinzu zu setzen: so läßt sich auch eine jede Größe ohne Ende vermehren, und kann nie so groß werden, daß sie weiter keines Zuwachses fähig wäre. Es giebt daher auch keine so große Größe, daß man nicht eine noch größere sollte denken können, und es ist daher eine außer allem Zweifel gesetzte Behauptung, daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden könne. Denn wollte jemand solches leugnen, so müßte er eine Grenze annehmen, über welche hinaus die Größe nicht kommen könnte, und also eine Größe zugeben, zu welcher nichts weiter hinzugefügt werden könnte. Allein dies ist ungereimt und dem Begriffe der Größe zuwider, und man muß daher eingestehen, daß eine jede Größe immer fort ohne Ende, das heißt, ins Unendliche vermehrt werden könne.

§. 73.

Bey den einzelnen Arten der Größen fällt dies noch deutlicher in die Augen. So wird wohl Niemand behaupten, daß die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

 irgendwo

irgendwo so begrenzt sey, daß man sie nicht weiter fortsetzen könne. Denn es giebt keine Zahl, zu der sich nicht noch die Einheit setzen, und aus welcher sich also nicht eine folgende größere Zahl machen ließe; es geht daher die Reihe der natürlichen Zahlen ohne Ende fort, und man kommt nie zu einer größten Zahl in dem Verstande, daß eine größere unmöglich wäre. Auf eine ähnliche Art kann eine gerade Linie nie so weit fortgezogen werden, daß man außer Stande seyn sollte, sie noch weiter zu verlängern. Es erhellet hieraus, daß man sowohl die Zahlen ins Unendliche vermehren, als die Linien ins Unendliche verlängern kann. Und da dies Arten der Größen sind, so ist daraus zugleich klar, daß es, so groß man auch eine Größe annehmen mag, doch immer eine noch größere Größe gebe, daß sich, wenn man diese annimmt, vom neuen eine größere Größe gedenken lasse, und daß man auf diese Art ohne Ende immer weiter fortgehen, und also jede Größe ins Unendliche vermehren könne.

§. 74.

So offenbar dieses ist, und es ist es in einem so hohen Grade, daß man es ohne Widerspruch mit sich selbst nicht leugnen kann: so haben doch viele von denen, welche die Theorie des Unendlichen vorzutragen unternommen haben, dieselbe so verdunkelt, und mit so vielen Schwierigkeiten und selbst Widersprüchen überhäuft, daß ihnen gar kein Weg übrig blieb, um aus diesem Labyrinthe zu kommen. Daraus, daß die Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, haben einige geschlossen, daß es in der That eine unendliche Größe gebe, und dieselbe so beschrieben, daß sie gar keines Zuwachses weiter fähig sey. Dadurch aber stoßen sie den Begriff der Größe über den Haufen, weil sie eine solche Größe annehmen, die nicht weiter soll vermehrt werden können.

können. Außerdem sind aber die, die unendliche Größen annehmen, auch mit sich selbst im Widerspruche; denn dadurch, daß sie dem Wachsen der Größe eine gewisse Grenze sez, leugnen sie zugleich, daß eine Größe ohne Ende vermehrt werden könne. Sie leugnen also auch, daß eine Größe ins Unendliche vermehrt werden könne; denn beyde Redensarten bedeuten einerley; und sie heben daher, indem sie eine unendliche Größe annehmen, dieselbe zugleich wieder auf. Denn wenn eine Größe nicht ohne Ende oder ins Unendliche vermehrt werden kann, so ist es unmöglich, daß es eine unendliche Größe gebe.

§. 75.

Daraus also, daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, fließet selbst, daß es keine unendliche Größe giebt. Denn eine Größe, die immer fort vermehrt wird, wird nicht eher unendlich, ehe sie nicht ohne Ende gewachsen ist; was aber ohne Ende geschehen muß, das kann man nicht als schon geschehen betrachten. Indeß kann man gleichwohl eine solche Größe, zu welcher man durch ohne Ende fortgesetzte Hinzufügung eines Zuwachses gelangt, nicht nur durch ein gewisses Zeichen bezeichnen, und sie auf diese Art auf die gehörige Weise in die Rechnung einführen, wie bald ausführlicher gezeigt werden soll; sondern es lassen sich auch aus der Welt Fälle anführen, wo eine unendliche Zahl statt zu finden scheint. Denn wenn die Materie unendlich theilbar ist, wie mehrere Philosophen behauptet haben, so ist ja die Anzahl der Theile, woraus eine jede gegebene Quantität von Materie besteht, in der That eine unendliche Zahl; weil die Materie, wenn man diese Zahl endlich annehmen wollte, nicht unendlich theilbar wäre. Auf eine ähnliche Art könnte die Zahl der Körper, die das Universum ausmachen, wenn das Universum selbst unendlich wäre, wie verschiedene behauptet haben, ebenfalls keine endliche Zahl seyn, und wir würden also auch darin eine unendliche Zahl haben.

§. 76.

So sehr dies auch mit einander zu streiten scheint, so fallen doch bey genauer Erwägung desselben alle Schwierigkeiten weg. Wenn nemlich jemand behauptet, daß die Materie ins Unendliche theilbar sey, so leugnet er, daß man bey einer fortgesetzten Theilung der Materie endlich auf so kleine Theile komme, daß man dieselben nicht weiter sollte theilen können; es hat daher die Materie keine untheilbare Theile, da sich jeder von den Theilen, auf welche man durch eine fortgesetzte Theilung kommt, noch immer weiter theilen läßt. Wer also in diesem Falle sagt, daß die Anzahl der Theile unendlich sey, der gedenkt sich dabey die letzten Theile, die nicht weiter theilbar sind: und da man zu dergleichen nie gelangt, und es also dergleichen gar nicht giebt, so unternimmt er diese Theile, die gar nicht sind, zu zählen. Denn kann die Materie immer fort ohne Ende weiter getheilt werden, so hat sie gar keine untheilbare oder einfache Theile, und es ist daher nichts da, was man zählen könnte. Wer daher die unendliche Theilbarkeit der Materie behauptet, der leugnet dadurch zugleich, daß die Materie aus einfachen Theilen bestehe.

§. 77.

Wenn man aber, indem man von den Theilen eines Körpers oder der Materie spricht, nicht die letzten oder einfachen Theile, dergleichen es gar nicht giebt, sondern diejenigen versteht, welche durch eine wirkliche Theilung hervorgebracht worden sind: dann kann bey der Annehmung der

Hypo-

Hypothese von der unendlichen Theilbarkeit der Materie, ein jedes noch so kleines Stück der Materie nicht nur in mehrere Theile getheilt, sondern es kann selbst keine so große Zahl angegeben werden, daß man nicht aus diesem Stücke eine noch größere Anzahl von Theilen sollte erhalten können. Die Zahl der Theile, die ein jeder Körper enthält, und zwar nicht die Zahl der letzten, sondern solcher Theile, die selbst noch weiter theilbar sind, ist daher alsdenn größer als jede Zahl, die sich angeben läßt. Auf eine ähnliche Art ist die Zahl der Körper, welche das Universum ausmachen, wenn das Universum unendlich ist, eine größere Zahl als jede, die sich angeben läßt, und da eine solche Zahl keine endliche Zahl seyn kann, so folgt, daß eine unendliche Zahl und eine Zahl die größer ist als jede die sich angeben läßt, gleichbedeutende Benennungen sind.

§. 78.

Wer daher auf diese Art die unendliche Theilbarkeit der Materie betrachtet, der verwickelt sich in keine von den Schwierigkeiten, die man gewöhnlich bey dieser Meynung findet, und ist nichts zu behaupten gezwungen, was einen Widerspruch enthielte. Dagegen verfallen die, welche die unendliche Theilbarkeit der Materien leugnen, in so große Schwierigkeiten, daß es ihnen unmöglich wird, sich aus denselben herauszuwickeln. Sie sind nemlich gezwungen zu behaupten, daß ein jeder Körper nicht weiter als bis auf eine gewisse Anzahl in Theile zerlegt werden könne, und daß, sobald man bis zu dieser Anzahl gekommen ist, alle weitere Theilung aufhöre. Die Theile, bey welchen dieses statt findet, nennen einige Atomen, andere Monaden, und noch andere einfache Dinge. Der Grund ferner, warum die letzten Theile nicht weiter theilbar seyn sollen, kann zwiefach

seyn;

seyn; es können nemlich diese Theile entweder gar keine Ausdehnung haben, oder sie können zwar ausgedehnt, aber dabey so hart und so beschaffen seyn, daß keine Kraft hinreicht, sie zu zertheilen. Was nun aber auch die Vertheidiger jener Meinung für einen Grund gebrauchen mögen, so sehen sie sich gleichwohl mit den größten Schwierigkeiten umgeben.

§. 79.

Denn sollen die letzten Theile der Körper gar keine Ausdehnung, und folglich auch gar keine Theile haben, so ist das zwar ein Begriff, bey welchem sie mit dem vollkommensten Rechte zu den einfachen Dingen gerechnet werden: allein dagegen läßt sich auf keine Art und Weise gedenken, wie die Körper aus dergleichen Theilen sollen bestehen können. Denn wir wollen einmal annehmen, daß ein Cubik-Fuß von Materie aus tausend solchen einfachen Dinge bestehe, und daß derselbe wirklich in tausend Theile getheilt sey. Wären nun die Theile einander gleich, so würde jeder ein Cubik-Zoll, wären sie aber ungleich, so würden einige größer und andere kleiner seyn. Es würde also ein Cubik-Zoll ein einfaches Ding seyn, und so entstünde der offenbarste Widerspruch; oder man müßte sagen wollen, daß in einem Cubik-Zolle nicht mehr als ein einfaches Ding sich befinde, und daß der übrige Raum leer sey; allein auf diese Art fiele die Stetigkeit der Körper weg, zu geschweigen, daß jene Philosophen den leeren Raum ganz aus der Welt verbannen. Wollte man hiergegen einwenden, daß die Zahl der einfachen Dinge, die einen Cubik-Fuß von Materie ausmachten, viel größer als tausend sey; so würde man dadurch nicht das Geringste gewinnen: denn die Schwierigkeit, welche man bey der Zahl tausend antrifft, findet sich auch bey jeder andern

dern noch so großen Zahl. Dies konnte dem Scharfsinne Leibnitzens, des Erfinders der Monaden, nicht verborgen bleiben, als er die Materie an und für sich genommen unendlich theilbar annahm. Er behauptet daher auch, daß man nicht eher zu den Monaden komme, als bis der Körper wirklich unendlich getheilt worden sey. Dadurch aber hebt er die Existenz der einfachen Dinge, woraus die Körper bestehen sollen, gänzlich auf. Denn diejenigen, die die Zusammensetzung der Körper aus einfachen Dingen leugnen, und diejenigen, welche die unendliche Theilbarkeit der Körper annehmen, sind in ihren Meinungen durchaus nicht von einander verschieden.

§. 80.

Eben so sehr ist man auch mit sich selbst im Widerspruche, wenn man zwar die Ausdehnung der letzten Theile der Körper zugiebt, aber dabey behauptet, daß sie wegen ihrer vollkommenen Härte nicht in Theile getheilt werden können. Denn sobald man den letzten Theilen der Körper Ausdehnung zugesteht, so behauptet man auch, daß sie aus Theilen zusammengesetzt sind; denn ob diese Theile wirklich von einander getrennt werden können oder nicht? daran ist wenig gelegen; ob man gleich keinen Grund anzugeben im Stande ist, woher jene vollkommene Härte komme. Es scheinen indeß diejenigen, die die unendliche Theilbarkeit der Materie leugen, diese letztere Schwierigkeit hinlänglich empfunden zu haben, weil sie sich vorzüglich an den vorhergehenden Begriff der letzten Theile halten: und sie wissen sich nicht zu helfen, als durch einige unbedeutende metaphysische Distinktionen, die denn meistentheils darauf hinauslaufen, daß man den auf mathematische Grundsätze gebauten Folgerungen nicht zu viel einräumen, und bey einfachen Dingen nicht

messen

messen wollen müsse. Aber sie sollten nur erst beweisen, daß diese ihre letzten Theile, davon jeder Körper eine bestimmte Anzahl enthalten soll, keine Ausdehnung haben.

§. 81.

Weil sie also keinen Ausgang aus diesem Labyrinthe finden, und die ihnen gemachten Einwürfe nicht auf die erforderliche Art widerlegen können, so nehmen sie ihre Zuflucht zu Distinktionen, und sagen, daß diese Einwürfe ihren Grund in der sinnlichen Vorstellung und in der Einbildungskraft haben, daß aber bey dergleichen Gegenständen bloß der reine Verstand urtheilen müsse, und daß die Sinnen und alle auf sinnliche Vorstellungen gebaute Schlüsse nicht selten trügen. Also soll der reine Verstand die Möglichkeit davon erkennen können, daß der tausendste Theil eines Cubik-Fußes von Materie gar keine Ausdehnung habe, und eben dies der Einbildungskraft unmöglich scheinen? Daß die Sinne trügen, ist zwar oft der Fall; allein den Mathematikern sollte man diesen Vorwurf am allerwenigsten machen. Denn die Mathematik ist es ja vorzüglich, die uns vor den Täuschungen der Sinne verwahrt, und uns lehrt, daß die sinnlichen Gegenstände ganz anders beschaffen sind, als sie uns erscheinen; ihr danken wir ja die sichersten Vorschriften, deren Befolgung uns wider alle Täuschung der Sinne schützt. Anstatt also durch dergleichen Antworten ihre Behauptungen zu befestigen, machen sie sie nur noch mehr verdächtig.

§. 82.

Doch um zu unserm Endzwecke zurück zu kommen, so sind, wenn auch jemand das Daseyn einer unendlichen Zahl in der Welt leugnen wollte, doch in der theoretischen Mathematik solche Fragen sehr häufig, auf welche nicht anders als mit

mit Annehmung einer unendlichen Zahl geantwortet werden kann. Würde z. B. die Summe aller Zahlen, die diese Reihe, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ꝛc. ausmachen, verlangt, so kann denn doch diese Summe, da jene Zahlen ohne Ende fortgehen, und beständig wachsen, auf keine Wese eine endliche Zahl seyn, und daraus folgt ihre unendliche Größe nothwendig. Wenn daher eine Größe so groß ist, daß sie größer ist als jede gegebene endliche Größe, so kann sie keine andere als eine unendliche Größe seyn. Um dergleichen Größen anzudeuten bedienen sich die Mathematiker des Zeichens ∞, und zeigen also dadurch eine Größe an, die größer ist als jede endliche Größe, oder größer als jede Größe, die sich angeben läßt. So kann man z. B., da man die Parabel durch eine unendlich lange Ellipse erklären kann, mit Recht behaupten, daß die Axe der Parabel eine unendliche gerade Linie sey.

§. 83.

Es wird aber die Lehre vom Unendlichen durch die Auseinandersetzung des unendlich Kleinen in der Mathematik deutlicher werden. Das leidet keinen Zweifel, daß eine jede Größe so weit vermindert werden kann, daß sie gänzlich verschwindet und zu nichts wird. Eine unendlich kleine Größe aber ist nichts anders als eine verschwindende Größe, und folglich in der That = 0. Diese Erklärung des unendlich Kleinen stimmt auch mit der überein, wenn man darunter Größen versteht, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt. Denn wenn eine Größe kleiner ist als jede Größe, die sich angeben läßt, so muß sie nothwendig = 0 seyn; weil sich, wenn sie es nicht wäre, eine andere ihr gleiche Größe angeben ließe, welches wider die Voraussetzung streitet. Wir beantworten daher die Frage, was eine unendlich

kleine

kleine Größe in der Mathematik sey, auf die Art, daß wir sagen, sie sey in der That = o; und dieser Begriff enthält keins von den großen Geheimnissen, welche man gemeiniglich in ihm findet, und wodurch man sich verleiten läßt, wider die ganze Rechnung des unendlich Kleinen einen Verdacht zu fassen. Sollten indeß einige Zweifel statt finden, so werden solche in der Folge, wenn wir diese Rechnung vortragen werden, gänzlich gehoben werden.

§. 84.

Da wir also gezeigt haben, daß eine unendlich kleine Größe wirklich Null ist, so müssen wir vor allen Dingen dem Einwurfe begegnen, warum wir die unendlich kleinen Größen nicht beständig mit dem Zeichen o bezeichnen, sondern dazu besondere Zeichen gebrauchen. Denn da alle Nullen einander gleich sind, so scheint es überflüßig, daß man sich zu ihrer Bezeichnung verschiedener Zeichen bedient. Allein obgleich jede zwey Nullen einander gleich sind, so daß sich zwischen ihnen gar keine Differenz findet: so giebt es doch zwey Arten der Vergleichung der Größen, wovon die eine die arithmetische und die andere die geometrische ist. Bey jener sehen wir auf die Differenz, bey dieser auf den Quotienten, der aus der Vergleichung der Größen entspringt; und obgleich das arithmetische Verhältniß zwischen jeden zweyen Nullen gleich ist, so ist es deswegen doch das geometrische nicht. Man sieht dies sehr deutlich an dieser geometrischen Proportion, $2 : 1 = 0 : 0$, worin das vierte Glied eben sowohl o ist als das dritte. Aber wegen der Natur der Proportion muß, da das erste Glied doppelt so groß ist als das zweyte, das dritte Glied auch doppelt so groß seyn als das vierte.

§. 85.

§. 85.

Dies ist auch selbst aus der gemeinen Arithmetik einleuchtend. Denn da, wie jeder weiß, die Null, mit irgend einer Zahl multiplicirt, wieder Null giebt, oder $n.0 = 0$, und also $n : 1 = 0 : 0$ ist: so fällt daraus in die Augen, daß zwey Nullen, ob sie gleich, arithmetisch betrachtet, in dem Verhältnisse der Gleichheit stehen, dennoch jedes geometrische Verhältniß gegen einander haben. Da also die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können, so bedient man sich, um diese Verschiedenheit anzuzeigen, mit Recht verschiedener Zeichen, zumal, wenn man das geometrische Verhältniß, welches zwischen ihnen statt findet, untersuchen soll. In der Infinitesimal-Rechnung aber thut man nichts anders, als daß man sich mit der Untersuchung des geometrischen Verhältnisses zwischen verschiedenen unendlich kleinen Größen beschäftiget, und dabey würde man in die größte Verwirrung gerathen, wofern man nicht diese unendlich kleinen Größen mit verschiedenen Zeichen bezeichnete.

§. 86.

Wenn man also, so wie solches in der Analysis des Unendlichen üblich ist, durch dx eine unendlich kleine Größe bezeichnet, so ist allerdings sowohl $dx = 0$, als $adx = 0$, wo a jede endliche Größe bedeutet. Das ungeachtet aber ist das geomeerische Verhältniß $adx : dx$ ein endliches Verhältniß, nemlich $a : 1$, und es dürfen daher die beyden unendlich kleinen Größen dx und adx, obgleich beyde $= 0$ sind, nicht mit einander verwechselt werden, wenn es auf die Untersuchung ihres Verhältnisses ankommt. Auf eine ähnliche Art verhält es sich, wenn verschiedene unendlich Kleine dx und dy vorkommen. Denn wenn gleich beyde $= 0$ sind, so ist doch ihr Verhältniß nicht bekannt; und in der Bestimmung des Verhältnisses zwischen jeden zweyen solchen unendlich kleinen Größen besteht das ganze Geschäfte der Differenzial-Rechnung. So gering übrigens der Nutzen von dergleichen Vergleichungen beym ersten Anblick zu seyn scheint, so groß ist er gleichwohl, und man lernt ihn von Tage zu Tage noch immer mehr einsehen.

§. 87.

Da also das unendlich Kleine in der That Nichts ist, so fällt in die Augen, daß eine endliche Größe durch die Hinzufügung oder Wegnehmung einer unendlich kleinen Größe zu oder von ihr weder vermehrt noch vermindert werde. Ist also a eine endliche, und dx eine unendlich kleine Größe, so ist sowohl $a + dx$ als $a - dx$, und überhaupt $a \pm ndx = a$; denn das Verhältniß zwischen $a \pm ndx$ und a ist ein Verhältniß der Gleichheit, man mag dasselbe arithmetisch oder geometrisch untersuchen. Von dem arithmetischen Verhältnisse ist solches offenbar; denn da $ndx = 0$ ist, so ist $a \pm ndx - a = 0$: was aber das geometrische Verhältniß betrift, so erhellet solches daher, weil $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$ ist. Hieraus folgt die durchgängig angenommene Regel, daß die unendlich kleinen Größen gegen die endlichen Größen verschwinden, und also in Ansehung dieser weggelassen werden können. Hierdurch fällt der Vorwurf, als ob sich die Analysis des Unendlichen von der geometrischen Schärfe entferne, von selbst über den Haufen, da man nichts wegläßt, als was in der That Nichts ist. Man kann daher mit Recht behaupten, daß in diesem Theile der höhern Mathematik die größte geometrische Schärfe, so wie man sie in den Schriften der Alten findet, beobachtet werde.

§. 88.

§. 88.

Da die unendlich kleine Größe dx in der That $= 0$ ist, so muß auch ihr Quadrat dx^2, ihr Cubus dx^3, und jede andere Potestät mit einem positiven Exponenten $= 0$ seyn, und also auch ebenfalls gegen eine endliche Größe verschwinden. Aber es verschwindet auch die unendlich kleine Größe dx^2 selbst gegen dx, denn es stehen $dx \pm dx^2$ und dx in einem Verhältnisse der Gleichheit, man mag sie arithmetisch oder geometrisch mit einander vergleichen. Wegen des Ersten findet kein Zweifel statt; was aber das letztere anbetrift, so ist $dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$. Auf eine ähnliche Art ist $dx \pm dx^3 = dx$, und überhaupt $dx \pm dx^{n+1} = dx$, wofern n eine positive Zahl ist; denn es ist das geometrische Verhältniß $dx \pm dx^{n+1} : dx = 1 \pm dx^n$, und also, weil $dx^n = 0$ ist, ein Verhältniß der Gleichheit. Wenn man daher, wie solches bey den Potestäten geschiehet, dx ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung, dx^2 ein unendlich Kleines von der zweyten Ordnung, dx^3 ein unendlich Kleines von der dritten Ordnung, u. s. w. nennt, so fällt in die Augen, daß die unendlich kleinen Größen von den höhern Ordnungen gegen die unendlich kleinen Größen von der ersten Ordnung verschwinden.

§. 89.

Auf eine ähnliche Art zeigt man, daß die unendlich kleinen Größen der dritten und der höhern Ordnungen gegen die unendlich kleinen Größen der zweyten Ordnung, und überhaupt die unendlich kleinen Größen jeder höhern Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen einer niedern Ordnung verschwinden. Ist z. B. m eine kleinere Zahl als n, so ist $a\,dx^m + b\,dx^n = a\,dx^m$, weil dx^n gegen dx^m, wie wir gezeigt haben, verschwindet. Dies findet auch bey den gebrochenen Exponenten statt; es verschwindet z. B. dx gegen $\sqrt{dx}$ oder $dx^{\frac{1}{2}}$, und es ist $a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}$. Wenn aber der Exponent von dx eine 0 ist, so wird $dx^0 = 1$, obgleich $dx = 0$ ist; und es wird folglich dx^n, da es $= 1$ wird, wenn $n = 0$ ist, aus einer endlichen Größe auf einmal eine unendlich kleine Größe, sobald sein Exponent n größer als nichts wird. Es giebt daher eine unendliche Menge von Ordnungen der unendlich kleinen Größen, und man muß dieselben, ungeachtet jede $= 0$ ist, doch wohl von einander unterscheiden, wenn man die wechselseitige Beziehung derselben unter einander, welche man durch das geometrische Verhältniß ausdruckt, untersuchen will.

§. 90.

Nachdem wir den Begriff des unendlich Kleinen festgesetzt haben, so ist es nunmehr leichter, die Natur des Unendlichen oder des unendlich Großen zu bestimmen. Es ist bekannt, daß der Werth des Bruchs $\frac{1}{z}$ desto größer wird, je mehr der Nenner z vermindert wird; und daher muß der Werth des Bruchs $\frac{1}{z}$, wenn z unendlich klein oder kleiner wird als jede Größe, die sich angeben läßt, nothwendiger Weise unendlich groß, oder größer als jede Größe werden, die man anzugeben im Stande ist. Wenn also die Einheit oder irgend eine andere endliche Größe durch eine unendlich kleine Größe oder 0 dividirt wird, so ist der Quotient unendlich groß oder eine unendliche Größe. Da also das Zeichen ∞ eine unendlich große Größe bedeutet, so hat man daher die Gleichung, $\frac{a}{dx} = \infty$, deren Richtigkeit auch daraus

aus erhellt, weil man durch die Umkehrung $\frac{a}{\infty} = dx = 0$ erhält. Denn je größer man den Nenner z des Bruchs $\frac{a}{z}$ annimmt, desto kleiner wird der Werth des Bruchs, und wenn daher z eine unendlich große Größe oder $z = \infty$ wird, so muß nothwendig der Werth des Bruchs $\frac{a}{\infty}$ unendlich klein werden.

§. 91.

Wer diese Schlüsse nicht gelten lassen wollte, der würde sich in die größten Schwierigkeiten verwickeln, und alle noch so festen Gründe der Analyse über den Haufen stoßen. Denn wollte man dem Bruche $\frac{a}{0}$ einen endlichen Werth, z. B. b beylegen, so würde man, durch die Multiplication beyder Größen durch 0, $a = 0 . b$ erhalten, und es würde also eine endliche Größe b mit 0 multiplicirt, eine endliche Größe a geben, welches unmöglich ist. Noch weniger kann b als der Werth des Bruchs $\frac{a}{0}$, $= 0$ seyn, denn wie wäre es möglich, daß 0 mit 0 multiplicirt, eine endliche Größe a gäbe? Auf ähnliche Ungereimtheiten verfällt man, wenn man behauptet, daß $\frac{a}{\infty}$ nicht $= 0$ sey; denn alsdenn muß man auch zugeben, daß $\frac{a}{\infty}$ einer endlichen Größe b gleich sey. Da aber aus der Gleichung $\frac{a}{\infty} = b$ ganz richtig diese folgt: $\infty = \frac{a}{b}$; so müßte der Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$, dessen

Zähler und Nenner endliche Größen sind, unendlich groß seyn, und dies ist eben so ungereimt. Auch kann man die Werthe der Brüche $\frac{a}{0}$ und $\frac{a}{\infty}$ nicht als imaginäre Größen annehmen, weil der Werth eines Bruchs dessen Zähler eine endliche, der Nenner aber eine imaginäre Größe ist, weder unendlich groß noch unendlich klein seyn kann.

§. 92.

Es läßt sich also die unendlich große Größe, worauf wir durch diese Betrachtung gekommen sind, und welche allein in der Analysis des Unendlichen statt findet, am allerbequemsten auf die Art erklären, daß man sagt, die unendlich große Größe sey der Quotient, der aus der Division einer endlichen Größe durch eine unendlich kleine Größe entspringt. Umgekehrt wird daher auch eine unendlich kleine Größe ein Quotient aus endlichen Größen durch eine unendlich große Größe dividirt. Da sich also geometrisch die unendlich kleine Größe zur endlichen verhält, wie die endliche Größe zur unendlich großen: so muß die endliche Größe eben so unendlichmal größer seyn als die unendlich kleine, wie die unendliche Größe unendlichmal größer ist als die endliche. An dergleichen Redensarten muß man sich nicht stoßen, wie viele thun, denn sie beruhen auf den festesten Gründen. Ja es scheint aus der Gleichung $\frac{a}{0} = \infty$ selbst möglich, daß Nichts durch eine unendlich große Größe multiplicirt, ein endliches Product gebe, welches allerdings auffallend seyn müßte, wenn man nicht durch eine ganz richtige Folgerung darauf käme.

§. 93.

Da die unendlich kleinen Größen, nach dem geometrischen Verhältnisse verschieden sind, so muß auch unter

ter den unendlich großen Größen ein ähnlicher Unterschied statt finden, und es ist derselbe hier noch größer, da die unendlich großen Größen nicht bloß geometrisch, sondern auch arithmetisch betrachtet, sich von einander unterscheiden. Denn setzt man die unendliche Größe, die aus der Division der endlichen Größe a durch die unendlich kleine Größe dx entspringt, $= A$; so daß $\frac{a}{dx} = A$ ist: so wird auch $\frac{2a}{dx} = 2A$, und $\frac{na}{dx} = nA$: und da nun auch nA eine unendliche Größe ist, so folgt, daß zwischen den unendlichen Größen ein jedes Verhältniß statt finden kann. Wenn also eine unendliche Größe durch eine endliche Größe multiplicirt oder dividirt wird, so ist auch das Produkt oder der Quotient eine unendliche Größe. Auch läßt sich von den unendlichen Größen nicht leugnen, daß sie noch weiter vermehrt werden können. Wenn aber das geometrische Verhältniß, welches zwischen zwey unendlichen Größen statt findet, kein Verhältniß der Gleichheit ist, so fällt in die Augen, daß das arithmetische Verhältniß derselben noch weniger ein Verhältniß der Gleichheit seyn wird, es ist vielmehr ihre Differenz allezeit unendlich groß.

§. 94.

Ob aber gleich der Begriff des Unendlichen, so wie man ihn in der Mathematik gebraucht, vielen verdächtig scheint, so daß sie denselben aus dieser Ursach auch aus der Analysis des Unendlichen verbannt wissen wollen: so kann man denselben doch selbst in der gemeinen Mathematik nicht einmal entbehren. In der Arithmetik, in der Lehre von den Logarithmen, nimmt man den Logarithmen von der Null negativ und unendlich groß an, und es wird sicher niemanden einfallen, diesen Logarithmen einer endlichen Größe oder gar der Null gleich zu setzen. In der Geometrie und Trigonometrie giebt es noch auffallendere Beyspiele. Wer könnte z. B. leugnen wollen, daß die Tangente und die Secante eines rechten Winkels unendlich groß sind? und da das Rechteck zwischen der Tangente und Cotangente dem Quadrate des Halbmessers gleich, die Cotangente des rechten Winkels aber $= 0$ ist: so muß man in der Geometrie sogar zugeben, daß das Produkt aus einer unendlichen Größe in Null eine endliche Größe seyn könne.

§. 95.

Da $\frac{a}{dx}$ eine unendliche Größe A ist, so ist offenbar, daß diese Größe $\frac{A}{dx}$ eine unendlichmal größere Größe seyn werde als A, denn es ist $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, d. h. wie eine endliche Größe zu einer unendlichen. Es giebt also unter den unendlich großen Größen solche Verhältnisse, daß einige unendlichmal größer seyn können als andere. So wird $\frac{a}{dx^2}$ eine unendlichmal größere Größe als $\frac{a}{dx}$; denn setzt man $\frac{a}{dx} = A$, so wird $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Auf eine ähnliche Art ist $\frac{a}{dx^3}$ eine unendlichmal größere unendliche Größe als $\frac{a}{dx^2}$, und folglich unendlichmal unendlichmal größer als $\frac{a}{dx}$. Es giebt also Grade unter den unendlichen Größen, und jede unendliche Größe von einem folgenden Grade ist unendlichmal größer

als

als eine von den vorhergehenden; ja wenn die Zahl m nur größer ist als die Zahl n, es sey übrigens um so wenig als es wolle, so ist $\frac{a}{dx^m}$ eine unendlichmal größere Größe als $\frac{a}{dx^n}$.

§. 96.

So wie es bey den unendlich kleinen Größen ungleiche geometrische Verhältnisse giebt, obgleich die arithmetischen Verhältnisse insgesammt gleich sind: so können bey den unendlich großen Größen die geometrischen Verhältnisse gleich seyn, obschon die arithmetischen eine noch so große Ungleichheit haben. Wenn nemlich a und b endliche Größen bedeuten, so stehen diese beyden unendliche Größen $\frac{a}{dx} + b$ und $\frac{a}{dx}$ in einem geometrischen Verhältnisse der Gleichheit, indem der Quotient, den man durch ihre Division erhält, $= 1 + \frac{bdx}{a} = 1$ wird, weil $dx = 0$ ist. Vergleicht man aber eben diese Größen arithmetisch mit einander, so ist, wegen der Differenz b, ihr Verhältniß ein Verhältniß der Ungleichheit. Eben so stehet $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}$ zu $\frac{a}{dx^2}$ in einem geometrischen Verhältnisse der Gleichheit, weil der Exponent des Verhältnisses $= 1 + dx = 1$ ist; allein die Differenz dieser Größen ist $\frac{a}{dx}$ und folglich eine unendliche Größe. Wenn man also auf das geometrische Verhältniß sieht, so verschwinden die unendlich großen Größen der niedrigern Grade gegen die unendlich großen Größen der höhern Grade.

§. 97.

Dies von den Graden der unendlich großen Größen vorausgesetzt, so läßt sich leicht zeigen, daß das Produkt aus einer unendlich großen und einer unendlich kleinen Größe nicht bloß eine endliche Größe, wie schon vorhin angemerkt worden ist, sondern auch eine unendlich große und eine unendlich kleine Größe seyn kann. Wenn z. B. die unendliche Größe $\frac{a}{dx}$ durch die unendlich kleine Größe dx multiplicirt wird, so ist das Produkt eine endliche Größe $= a$; wenn aber $\frac{a}{dx}$ durch dx^2 oder dx^3 oder ein anderes unendlich Kleines von einer höhern Ordnung multiplicirt wird, so ist das Produkt entweder adx, oder adx^2, oder adx^3, ꝛc. und also unendlich klein. Auf eben die Art erhellt, daß das Produkt aus der unendlichen Größe $\frac{a}{dx^2}$ und der unendlich kleinen Größe dx unendlich groß ist; und überhaupt wird, wenn man $\frac{a}{dx^n}$ und bdx^m mit einander multiplicirt, das Produkt $abdx^{m-n}$ unendlich klein seyn, wenn m größer ist als n, und wenn $m = n$ ist, eine endliche, so wie, wenn m kleiner als n ist, eine unendliche Größe werden.

§. 98.

Die unendlich kleinen Größen sowohl als die unendlich großen kommen in den Reihen der Zahlen sehr häufig vor; und da sie darin mit endlichen Zahlen vermischt sind, so läßt sich daraus mit voller Deutlichkeit erkennen, wie man nach dem Gesetze der Stetigkeit von den endlichen Größen zu den unendlich großen und unendlich kleinen Größen übergehen muß. Wir wollen zuvörderst die Reihe der natürli-

chen

chen Zahlen betrachten, die, wenn man sie zu gleicher Zeit rückwärts fortsetzt, folgende ist:

$$\text{ꝛc.} -4 -3 -2 -1, +0 +1 +2 +3 +4 + \text{ꝛc.}$$

Es geben also die Zahlen, indem sie beständig abnehmen, endlich 0 oder das unendlich Kleine, und werden, wenn man sie weiter fortsetzt, negativ. Man sieht daher hieraus, daß man von den abnehmenden positiven Zahlen durch 0 zu den negativen übergehet. Wenn man aber die Quadrate dieser Zahlen nimmt, so erhält man, weil diese insgesammt positiv werden,

$$\text{ꝛc.} +16 +9 +4 +1 +0 +1 +4 +9 +16 + \text{ꝛc.}$$

Es ist folglich hier 0 der Uebergang von den abnehmenden positiven Zahlen zu den wachsenden positiven Zahlen; und wenn man die Zeichen verändert, so wird 0 der Uebergang von den abnehmenden negativen Zahlen zu den wachsenden negativen Zahlen.

§. 99.

Betrachtet man die Reihe, deren allgemeines Glied $\sqrt{x}$ ist, und welche, auch rückwärts fortgesetzt, folgende ist:

$$\text{ꝛc.} +\sqrt{-3} +\sqrt{-2} +\sqrt{-1} +0 +\sqrt{1} +\sqrt{2} +\sqrt{3} +\sqrt{4} + \text{ꝛc.}$$

so fällt daraus in die Augen, daß 0 gleichsam als die Grenze angesehen werden könne, durch welche man von den reellen Größen zu den imaginären kommt. Stellt man sich unter jenen Gliedern die Applicaten krummer Linien vor, so erhellet, daß dieselben, wenn sie positiv gewesen sind und so weit abnehmen, daß sie endlich verschwinden, bey nunmehriger weiterer Fortsetzung entweder negativ oder wieder positiv oder auch imaginär werden. Eben das geschiehet, wenn die Applicaten zuerst negativ gewesen sind. Denn setzt man sie nach dem Verschwinden weiter fort, so werden sie ebenfalls entweder positiv oder negativ oder imaginär. Hiervon enthält die Lehre von den krummen Linien, welche wir im zweyten Buche der Einleitung in die Analysis des Unendlichen abgehandelt haben, mehrere Beyspiele.

§. 100.

Auf eben die Art trifft man in den Reihen öfters unendlich große Glieder an, z. B. in der harmonischen Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{x}$ ist, wo zu dem Anzeiger $x = 0$ das unendlich große Glied $\frac{1}{0}$ gehört, und die ganze Reihe folgende ist:

$$\text{rc.} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{rc.}$$

Geht man daher von der Rechten gegen die Linke zu, so wachsen die Glieder, so daß $\frac{1}{0}$ unendlich groß ist, aber so bald die Glieder über diese Grenze kommen, so werden sie negativ und nehmen ab. Hiernach kann man also die unendlich große Größe als eine Grenze betrachten, jenseits welcher die positiven Zahlen negativ werden, und umgekehrt. Dies hat einige verleitet, zu behaupten, daß die negativen Zahlen als Zahlen, die größer seyn als das Unendliche, betrachtet werden könnten, weil die beständig wachsenden Glieder dieser Reihe, nachdem sie das Unendliche erreicht haben, negativ werden. Aber wenn man die Reihe nimmt, deren allgemeines Glied $\frac{1}{xx}$ ist, so werden die Glieder derselben nach dem Uebergange durchs Unendliche wieder positiv

$$\text{rc.} \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{rc.}$$

und davon wird doch wohl Niemand behaupten wollen, daß sie größer sind als das Unendliche.

§. 101.

§. 101.

Oft macht auch das Unendliche in den Reihen die Grenze zwischen den reellen und imaginären Gliedern, wie in der, deren allgemeines Glied $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist:

$$\text{rc.} + \frac{1}{\sqrt{-3}} + \frac{1}{\sqrt{-2}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{0} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \text{rc.}$$

indeß folgt hieraus nicht, daß die imaginären Größen größer seyen als das Unendliche, denn aus der vorhin angeführten Reihe

$$\text{rc.} + \sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \text{rc.}$$

würde eben so gut folgen, daß sie kleiner wären. Dann läßt sich auch ein Uebergang von reellen Größen zu imaginären zeigen, wo die Grenze zwischen beyden weder 0 noch ∞ ist; z. B. in der Reihe, deren allgemeines Glied $1 + \sqrt{x}$ ist. Da aber in diesen Fällen jedes Glied wegen der Irrationalität einen doppelten Werth hat, so sind diese beyden Werthe in der Grenze zwischen den reellen und imaginären Gliedern vereiniget und beyde einander gleich. So oft hingegen die Glieder, die vorhin positiv waren, in negative übergehen, so oft geschieht der Uebergang entweder durch das unendlich Große oder durch das unendlich Kleine. Alles dieses erhellet aufs deutlichste aus dem Gesetze der Stetigkeit, welches wir bey den krummen Linien wahrnehmen.

§. 102.

Auch aus der Summirung der ins Unendliche fortlaufenden Reihen läßt sich hier mehreres beybringen, wodurch theils die Lehre von dem Unendlichen noch mehr Erläuterung erhält, theils verschiedene Zweifel, die dabey zu entstehen pflegen, gänzlich aus dem Wege geräumt werden können. Besteht zuvörderst die Reihe aus gleichen Gliedern, wie

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{rc.}$$

und

und laufen dieselben ohne Ende, das heißt ins Unendliche fort, so ists außer allem Zweifel, daß die Summe aller dieser Glieder größer als jede Zahl, die sich angeben läßt, und eben deswegen unendlich seyn muß. Dies bestätiget auch der Ursprung dieser Reihe, indem sie aus der Entwickelung dieses Bruchs

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{ꝛc.}$$

entsteht, wenn man $x = 1$ setzt. Es ist demnach

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.}$$

und die Summe $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ dem Unendlichen.

§. 103.

Ob indeß gleich hier kein Zweifel entstehen kann, da eine und dieselbe endliche Zahl unendlichmal genommen, nothwendig in eine unendliche übergehen muß: so scheint doch der Ursprung aus der allgemeinen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{ꝛc.}$$

auf sehr wichtige Schwierigkeiten zu führen. Denn setzt man für x nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. so erhält man folgende Reihen

A.. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{1-1} =$ dem Unendl.

B.. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{1-2} = -1$

C.. $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

D.. $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

ꝛc.

Da

Da nun in der Reihe B außer dem ersten Gliede alle Glieder größer sind als in der Reihe A, so sollte auch die Summe der Reihe B nothwendig größer seyn als die Summe der Reihe A; allein die Rechnung giebt die Summe der Reihe A unendlich groß, und die Summe der Reihe B negativ, d. h. kleiner als nichts an, und das läßt sich nicht zusammen denken. Noch viel weniger läßt es sich mit den gewöhnlichen Vorstellungen vereinigen, daß die Summe dieser und aller folgenden Reihen negativ seyn soll, da doch alle Glieder positiv sind.

§. 104.

Aus diesem Grunde hat vielen die schon angeführte Meinung wahrscheinlich geschienen, daß man die negativen Größen bisweilen als Größen betrachten könne, die gleichsam größer als das Unendliche oder noch mehr als unendlich wären; und da man auch durch fortgesetzte Verminderung der Zahlen über o hinaus zu negativen Zahlen kommt, so haben sie einen Unterschied zwischen negativen Zahlen von dieser Form $-1, -2, -3,$ ꝛc. und zwischen negativen Zahlen dieser Art, $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-2}, \frac{+3}{-3},$ ꝛc. gemacht: jene sollten ihrem Vorgeben nach kleiner als nichts, diese aber größer als das Unendliche seyn. Allein auf diesem Wege wird die Schwierigkeit nicht gehoben, welche sich bey der folgenden Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

findet. Es entspringen nemlich aus dieser allgemeinen Reihe die besondern Reihen

$$\text{A} \,..\, 1+2+3+4+5+\text{ꝛc.} = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{dem Unendl.}$$

$$\text{B} \,..\, 1+4+12+32+80+\text{ꝛc.} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$$

wo außer den ersten Gliedern alle Glieder der Reihe B größ-

ser

ser sind als die Glieder in der Reihe A. Wie aber die Summe der Reihe A unendlich, und die Summe der Reihe B der Einheit oder ihrem ersten Gliede soll gleich seyn können? das läßt sich aus jener Annahme auf keine Weise erklären.

§. 105.

Und wollte man leugnen, daß $-1 = \frac{+1}{-1}$, und $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$ sey, so würde der ganze Grund der Analyse bey aller seiner Festigkeit dahin sinken, und es kann daher die vorhin angeführte Erklärung auf keine Weise angenommen werden. Wir sehen uns vielmehr genöthiget zu behaupten, daß die Summen, welche jene allgemeine Formeln an die Hand geben, keine wahre Summen sind. Denn da diese Reihen aus einer fortgesetzten Division entspringen, indem der Rest immer wieder von neuem getheilt wird, und der Rest immer mehr wächst, je weiter man fortgeht: so sind wir nie berechtiget, diesen Rest wegzulassen, am allerwenigsten den letzten Rest, d. h. denjenigen, welcher, nachdem man zum unendlichen Male getheilt hat, übrig bleibt, weil derselbe unendlich groß ist. Da aber hierauf bey den obigen Reihen nicht gesehen worden ist, indem man den Rest gar nicht geachtet hat, so ist es kein Wunder, daß man beym Summiren auf Ungereimtheiten verfallen ist. Und diese Antwort ist eben so durchaus der Wahrheit gemäß, als sie aus der Entstehungsart der Reihen selbst hergenommen ist, und räumt also allen Zweifel aus dem Wege.

§. 106.

Damit dies noch deutlicher werde, so wollen wir die Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1-x}$ in den ersten bloß endlichen Gliedern betrachten. Es wird also

$\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

rc.

Wer also die Summe dieser endlichen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3$$

$= \frac{1}{1-x}$ setzet, der irrt sich um $\frac{x^4}{1-x}$; und wer behauptet, daß die Summe dieser Reihe,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{1000}$$

$= \frac{1}{1-x}$ sey, der irrt sich um die Größe $\frac{x^{1001}}{1-x}$, und diese Zahl würde, wenn x größer als die Einheit wäre, eine außerordentliche Größe haben.

§. 107.

Hieraus erhellet, daß der, welcher die Summe eben dieser Reihe, bis ins Unendliche fortgesetzt, oder die Summe von

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^\infty$$

$= \frac{1}{1-x}$ setzet, die wahre Summe um $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ zu klein angiebt, und wenn nun x größer als 1 ist, so ist dies allerdings ein unendlich großer Unterschied. Zugleich erhellet hieraus, warum die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{rc.}$$

in der That $= \frac{1}{1-x}$ ist, wenn x einen Bruch, der kleiner als die Einheit ist, bedeutet. Es wird nemlich alsdann der Fehler $\frac{x^{\infty}+1}{1-x}$ unendlich klein oder Null, und braucht daher nicht in Anschlag gebracht zu werden. So ist, wenn man $x = \frac{1}{2}$ setzt, in der That

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{etc.} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

und aus eben dem Grunde wird die wahre Summe der übrigen Reihen, wenn x einen Bruch bedeutet, auf eine ähnliche Art gefunden.

§. 108.

Diese Antwort paßt auch auf die Summen solcher divergirenden Reihen, in welchen die Zeichen + und — abwechseln, und welche man gewöhnlich aus eben der Formel ableitet, indem man für x negative Zahlen setzt. Denn da

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc.}$$

ist, so wird, wenn man den letzten Rest wegläßt,

$$\text{A} \ldots 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}$$
$$\text{B} \ldots 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{etc.} = \tfrac{1}{3}$$
$$\text{C} \ldots 1 - 3 + 9 - 27 + 87 - 243 + \text{etc.} = \tfrac{1}{4}$$

etc.

Es fällt aber in die Augen, daß die Summe der zweyten Reihe B deswegen nicht $= \frac{1}{3}$ seyn kann, weil sich die Aggregate desto mehr von $\frac{1}{3}$ entfernen, je mehrere Glieder man wirklich mit einander vereiniget. Denn es muß die Summe einer Reihe eine Grenze seyn, der man desto näher kommt, je mehrere Glieder man wirklich zusammen addirt.

§. 109.

Hieraus haben einige geschlossen, daß die Reihen, welche man divergirende nennt, gar keine beständige Summe haben,

ben, weil man sich bey der wirklichen Vereinigung ihrer Glieder keiner Grenze nähert, die man für die Summe einer solchen Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, halten könnte. Diese Meinung ist auch der Wahrheit vollkommen angemessen, da die sogenannten Summen wegen der Auslassung der letzten Reste nach dem vorhergehenden ganz falsch sind. Gleichwohl bleibt dagegen der Einwurf übrig, daß eben diese Summen, bey aller ihrer Abweichung von der Wahrheit doch nie in einen Irrthum führen; daß man sich vielmehr durch ihre Annahme in den Stand gesetzt sieht, eine Menge der wichtigsten Sätze zu finden, auf welche man ohne jene Summen gar nicht würde kommen können. Wären aber diese Summen falsch, so könnten sie uns nicht beständig zu wahren Sätzen leiten, sondern sie müßten uns vielmehr, da sie sich nicht um etwas unbeträchtliches, sondern selbst um das Unendliche von der Wahrheit entfernen, auch in die größten Irrthümer stürzen. Da also dies nicht geschieht, so bleibt uns noch der schwerste Knoten zu lösen übrig.

§. 110.

Meiner Meinung nach liegt die ganze Schwierigkeit in dem Worte Summe. Denn wenn man das Wort, Summe der Reihe, in dem gewöhnlichen Verstande nimmt, wo man darunter das Aggregat aller ihrer wirklich vereinigten Glieder versteht: so ist es ausgemacht, daß man nur die Summen derer Reihen wirklich darstellen kann, die convergiren, und den Werth der Reihe einem gewissen beständigen Werthe desto mehr nähern, je mehrere Glieder wirklich zusammen genommen werden. Dagegen haben die divergirenden Reihen, deren Glieder nicht abnehmen, es mögen nun darin die Zeichen + und — mit einander abwechseln oder nicht, gar keine beständige Summen, wenn man dies Wort in dem angeführten Verstande nimmt. Wenn aber in den vorhin erwähnten Fällen gleichwohl aus diesen irrigen Summen etwas wahres hergeleitet wird, so geschiehet solches nicht, weil der endliche Ausdruck z. B. $\frac{1}{1-x}$ die Summe der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 +$ ꝛc. ist, sondern nur in so fern, als jener Ausdruck, wenn man ihn entwickelt, diese Reihe giebt. Auf diese Art könnte man dabey des Ausdrucks, Summe ganz überhoben seyn.

§. 111.

Wir werden also diese Schwierigkeiten und anscheinenden Widersprüche gänzlich vermeiden, wenn wir dem Worte Summe eine andere Bedeutung geben, als es gewöhnlich zu haben pflegt. Wir wollen also den Ausdruck, aus dessen Entwickelung eine unendliche Reihe entsteht, die Summe dieser Reihe nennen. In diesem Verstande ist also $\frac{1}{1-x}$ in der That die Summe der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 +$ ꝛc., weil diese Reihe aus der Entwickelung jenes Bruchs entsteht, man mag für x eine Zahl setzen, was für eine man will. Wenn also die Reihe eine convergirende Reihe ist, so stimmt dieser neue Begriff der Summe mit dem gewöhnlichen überein; und was die divergirenden Reihen betrifft, die keine eigentlich sogenannten Summen haben, so vermeidet man bey ihnen, wenn man jene Erklärung zum Grunde legt, alle Schwierigkeiten. Endlich ist man vermittelst derselben im Stande, die Nutzbarkeit der divergirenden Reihen zu behaupten, und sie wider alle Einwürfe zu vertheidigen.

Vier=

Viertes Capitel.

Von der Natur der Differenzialien aller Ordnungen.

§. 112.

Wir haben in dem ersten Capitel gesehen, daß der Zuwachs, den eine Funktion von x erhält, wenn man darin x um die Größe ω wachsen läßt, durch diese Form $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 +$ ꝛc. ausgedruckt werden kann, es mag nun dieser Ausdruck ein endlicher Ausdruck seyn, oder ohne Ende fortgehen. Wenn man also in der Funktion y, für x die Größe $x + \omega$ setzt, so bekommt sie folgenden Werth:

$$y^{\text{I}} = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

und zieht man davon den vorhergehenden Werth y ab, so bleibt die Differenz der Funktion y übrig, die man also ausdrucken kann,

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

und da der folgende Werth von x oder $x^{\text{I}} = x + \omega$ ist, so ist die Differenz von x oder $\Delta x = \omega$. Die Buchstaben P, Q, R, ꝛc. aber bedeuten Funktionen von x, die von y abhangen, und deren Erfindung in dem ersten Capitel gelehrt worden ist.

§. 113.

Um was für einen Zuwachs ω also auch die veränderliche Größe x vermehrt werden mag, so ist man gleichwohl jedesmal im Stande, den Zuwachs zu bestimmen, welchen eine jede Funktion y von x dadurch erhält, sobald man die Funktionen P, Q, R, S ꝛc. für einen jeden Werth von y bestimmen kann. In dem gegenwärtigen Capitel aber, so wie auch in der ganzen Analysis des Unendlichen, wird der Zuwachs ω, um welchen wir die veränderliche Größe x haben wachsen lassen, unendlich klein, oder als eine verschwindende Größe, oder $= 0$ angenommen; woher denn offenbar ist, daß auch der Zuwachs oder die Differenz der Funktion y unendlich klein wird. Da aber bey dieser Voraussetzung die folgenden Glieder des Ausdrucks

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

gegen die vorhergehenden verschwinden (§. 88. u. f.) so bleibt allein das erste Glied $P\omega$ übrig, und es ist daher in dem Falle, daß ω unendlich klein ist, die Differenz von y oder $\Delta y = P\omega$.

§. 114.

Es ist daher die Analysis des Unendlichen, welche wir hier abzuhandeln angefangen haben, nichts anders, als ein besonderer Fall der Lehre von den Differenzen, die den Gegenstand des ersten Capitels ausmacht; es werden nemlich darin die Differenzen, die wir oben endlich annahmen, unendlich klein angenommen. Um daher die Analysis des Unendlichen von der Lehre von den Differenzen gehörig abzusondern, wird es gut seyn, daß wir die unendlich kleinen Differenzen sowohl mit besondern Namen belegen, als mit besondern Zeichen andeuten. Wir wollen also die unendlich kleinen Differenzen mit Leibnitzen Differenzialien nennen; und da wir in dem ersten Capitel die Differenzen in verschiedene Ordnungen eingetheilt haben, so wird daraus ein jeder leicht abnehmen, was das erste, das zweyte, das dritte Differenzial u. s. w. sey. Anstatt des Zeichens Δ aber,

aber, womit wir die Differenzen bezeichnet haben, wollen wir hier den Buchstaben d gebrauchen, so daß also dy das erste Differenzial von y; ddy das zweyte Differenzial von y; d^3y das dritte Differenzial von y, u. s. f. bedeuten soll.

§. 115.

Da wir die unendlich kleinen Differenzen, mit deren Betrachtung wir uns jetzt beschäftigen, Differenzialien nennen, so erhält daher der ganze Calcul, dessen Gegenstand in der Aufsuchung und dem Gebrauche der Differenzialien besteht, den Namen der Differenzial-Rechnung. Die englischen Mathematiker, unter welchen zuerst Newton, so wie Leibnitz unter den Deutschen, diesen neuen Theil der Analysis erfunden, und zu vervollkommnen gesucht hat, bedienen sich sowohl anderer Namen als anderer Zeichen. Sie nennen nemlich die unendlich kleinen Differenzen, die bey uns Differenzialien heißen, meistentheils Fluxionen, bisweilen auch Incremente, und diese Namen sind im Lateinischen allerdings dem Sprachgebrauche gemäßer, und drücken auch die Sache, die sie bezeichnen sollen, ziemlich gut aus. Denn man kann sich die veränderliche Größe, die wachsend immer von einem Werthe zu einem andern fortgeht, sehr wohl gleichsam als eine fließende Größe vorstellen; und es hat daher Newton das Wort Fluxion, welches er anfänglich von der Geschwindigkeit des Wachsthums gebrauchte, auf den unendlich kleinen Zuwachs, den die Größe gleichsam durch ihr Fließen erlangt, übergetragen.

§. 116.

Ob es aber gleich thöricht seyn würde, wegen des Gebrauchs dieser Benennungen und ihrer Erklärung mit den Engländern zu streiten, indem wir, wenn auf die Reinigkeit des lateinischen Ausdrucks und auf seine Bequemlichkeit gesehen würde, doch nachgeben müßten: so hat gleichwohl unsere Bezeichnungsart vor der englischen einen Vorzug. Die Engländer bezeichnen nemlich die Differenzialien oder ihre Fluxionen durch Punkte, welche sie über die Buchstaben schreiben, so daß $\dot{y}$ die erste, $\ddot{y}$ die zweyte, $\dddot{y}$ die dritte Fluxion von y u. s. f. bedeutet. Nun ist zwar diese Bezeichnungsart willkührlich, und wenn die Anzahl der Punkte klein ist, so daß man sie leicht überzählen kann, auch nicht zu tadeln; allein wenn viel Punkte gesetzt werden müssen, so entstehen daraus die größten Unbequemlichkeiten. Es ist z. B. sehr unbequem das zehnte Differenzial oder die zehnte Fluxion auf diese Art $\overset{\vdots\vdots}{y}$ zu bezeichnen, da man hingegen unsere Art $d^{10}y$ mit einem Blicke übersieht. Es kommen aber Fälle vor, wo noch höhere Ordnungen der Differenzialien anzuzeigen sind, und zur Bezeichnung der Differenzialien von einer unbestimmten Ordnung ist die englische Art ganz untauglich.

§. 117.

Wir wollen also sowohl unsere Zeichen als unsere Namen gebrauchen, weil diese bey uns allgemein eingeführt und den mehresten bekannt, jene aber bequemer sind. Inzwischen mußte auch der bey den Engländern üblichen Namen und Zeichen Erwähnung geschehen, damit jeder in den Stand gesetzt würde, die Schriften der Engländer zu lesen. Denn es sind dieselben gar nicht so von ihrer Art eingenommen, daß sie die Schriften, worin unsere Namen und Zeichen vorkommen, gänzlich verwerfen, und des Lesens unwerth halten sollten. Ich habe wenigstens ihre Werke mit der größten Begierde und mit dem größten Nutzen gelesen, und dabey oft wahrgenommen, daß auch sie die Schriften

der

der Unsrigen mit Nutzen gelesen haben. So wünschenswerth daher auch eine allgemeine und immer gleiche Bezeichnungs- und Benennungs-Art wäre, so hält es doch nicht schwer, sich so weit an beyde zu gewöhnen, als es zur Lesung der Schriften, in welchen eine andere Art herrscht, erfoderlich ist.

§. 118.

Da wir also bisher den Buchstaben ω zur Bezeichnung der Differenz oder des Zuwachses, um welchen man sich vorstellte, daß die veränderliche Größe x vermehrt werde, gebraucht haben, ω aber nunmehr unendlich klein angenommen wird: so ist ω das Differenzial von x, und also nach der eingeführten Bezeichnungsart $\omega = dx$, und dx also die unendlich kleine Differenz, um welche man sich vorstellt, daß x wachse. Auf eine ähnliche Art wird das Differenzial von y durch dy ausgedruckt; und wenn y eine Funktion von x ist, so bezeichnet das Differenzial dy den Zuwachs, den die Funktion y erfährt, wenn x in $x + dx$ übergeht. Setzt man daher in der Funktion y allenthalben $x + dx$ für x, und bezeichnet man den auf diese Art entspringenden Werth durch y^{I}, so wird $dy = y^{I} - y$, und man findet hiernach das Differenzial einer jeden Funktion. Doch muß man dies nur von dem ersten Differenziale oder von dem Differenziale der ersten Ordnung verstehen, denn von den übrigen wird erst nachher geredet werden.

§. 119.

Man hat sich daher wohl zu merken, daß der Buchstabe d hier keine Größe bedeutet, sondern bloß als ein Zeichen gebraucht wird, um die Benennung Differenzial auszudrucken, eben so wie in der Lehre von den Logarithmen der Buchstaben l als ein Zeichen des Logarithmen, und in der Algebra das Zeichen $\sqrt{}$ zur Bezeichnung der Wurzel gebraucht wird. Es bedeutet daher dy nicht, so wie sonst in der Analysis gewöhnlich ist, ein Produkt aus einer Größe d in die Größe y, sondern man muß es durch das Differenzial von y aussprechen. Eben so bedeutet in dem Ausdrucke d^2y weder die 2 einen Exponenten, noch d^2 eine Potestät von d, sondern man braucht diesen Ausdruck bloß, um das zweyte Differenzial kurz und passend auszudrucken. Wegen dieses Gebrauchs des Buchstabens d in der Differenzial-Rechnung muß man daher denselben in Rechnungen, wo mehrere Grössen vorkommen, um Verwirrung zu vermeiden, nie zur Bezeichnung einer von diesen Größen anwenden, eben so wie man in den Rechnungen mit Logarithmen den Buchstaben l nicht zu gebrauchen pflegt. Es wäre indeß zu wünschen, daß die Buchstaben d und l eine etwas veränderte Gestalt bekommen mögten, damit man sie nicht mit den Buchstaben des Alphabets, wodurch man die Größen bezeichnet, verwechseln könnte; auf eine ähnliche Art meine ich, wie man den Buchstaben r, wodurch man anfänglich das Wort Wurzel ausdruckte, in das Zeichen $\sqrt{}$ umgeändert hat.

§. 120.

Da wir gesehen haben, daß das erste Differenzial von y, wenn y irgend eine Funktion von x ist, diese Form $P\omega$ bekommt, so wird, weil $\omega = dx$ ist, $dy = P dx$. Was nemlich auch y für eine Funktion von x ist, so wird sein Differenzial dy doch immer durch eine gewisse Funktion von x, die wir hier durch P bezeichnen, mit dx multiplicirt, ausgedruckt. Ob also gleich die Differenziale von x und y in der That unendlich kleine Größen und der Null gleich sind; so haben sie doch ein endliches Verhältniß zu einander, indem $dy : dx = P : 1$ ist. Hat man daher die Funktion P gefun-

gefunden, so kennt man das Verhältniß zwischen den Differenzialien dx und dy. Da also das Geschäfte der Differenzial-Rechnung in der Erfindung der Differenzialien besteht, so sind es nicht sowohl die Differenzialien selbst, welche darin untersucht werden, sondern vielmehr das geometrische Verhältniß, welches sie zu einander haben. Denn die Differenzialien selbst könnte man, da sie insgesammt der Null gleich sind, leicht finden.

§. 121.

Es lassen sich also die Differenzialien weit leichter finden, als die Differenzen. Denn um die Differenz Δy zu finden, um welche die Funktion y wächst, wenn die veränderliche Größe x den Zuwachs ω bekommt, ist es nicht genug, daß man die Funktion P kennt, sondern man muß auch ausserdem die Funktionen Q, R, S, 2c., die in der Bestimmung der Differenz Δy

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{2c.}$$

vorkommen, wissen; zur Erfindung des Differenzials von y aber ist es genug P zu kennen. Es läßt sich daher auch aus der bekannten Differenz einer Funktion von x das Differenzial derselben leicht finden; allein aus dem Differenziale einer Funktion ist man nicht gleich im Stande, die Differenz derselben herzuleiten. Indeß wird doch in der Folge gezeigt werden, wie man aus den bekannten Differenzialien aller Ordnungen jede Differenz einer jeden Funktion finden kann. Uebrigens erhellet hieraus, daß das erste Differenzial $dy = P\,dx$ das erste Glied der Differenz, nemlich $P\omega$ giebt.

§. 122.

Wenn also der Zuwachs ω, um welchen man die veränderliche Größe sich vermehren läßt, sehr klein ist, so daß in

dem

dem Ausdrucke $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^2 +$ ꝛc. die Glieder $Q\omega^2$ und $R\omega^3$ und noch vielmehr die übrigen Glieder so klein werden, daß sie in solchen Rechnungen, wo es nicht auf die größte Schärfe ankommt, gegen $P\omega$ weggelassen werden können: so findet man aus dem bekannten Differenziale Pdx die Differenz beynahe. Es ist nemlich alsdann dieselbe $= P\omega$; und hieraus läßt sich in vielen praktischen Anwendungen ein beträchtlicher Nutzen ziehen. Es ist dies aber auch der Grund gewesen, warum verschiedene die Differenzialien als unendlich kleine Incremente betrachtet und behauptet haben, daß sie nicht eigentliche Nullen wären, sondern nur unbestimmt klein gedacht zu werden brauchten. Das hat denn andern Gelegenheit gegeben, die Analysis des Unendlichen zu beschuldigen, daß sie nicht die wahren, sondern nur beynahe wahren Größen finden lehre; und dieser Vorwurf würde allerdings einige Stärke haben, wenn wir nicht die unendlich kleinen Größen als eigentliche Nullen betrachteten.

§. 123.

Diesem Einwurfe zu begegnen, vergleichen diejenigen, die die unendlich kleinen Größen noch von den Nullen unterscheiden, die Differenzialien mit den kleinsten Sandkörnern im Gegensatz gegen die ganze Erde, wobey gewiß Niemand beschuldigt werden würde, daß er die Größe derselben falsch angegeben habe, wenn er um nicht mehr als ein solches Sandkorn sich geirrt hätte. Sie nehmen also zwischen dem Endlichen und dem unendlich Kleinen ein eben solches Verhältniß an, als sich zwischen der ganzen Erde und dem kleinsten Sandkorne findet; und wenn jemanden dieses Verhältniß noch nicht groß genug scheint, so vermehren sie solches tausendfältig und drüber, so daß das Kleine gar nicht mehr merkbar bleibt. Indeß sehen sie sich dabey doch genöthiget

zu

zu gestehen, daß dadurch etwas von der geometrischen Schärfe verloren gehe; wiewohl sie, um sich dagegen zu verwahren, ihre Zuflucht zu solchen Beyspielen nehmen, wo man die Auflösung sowohl vermittelst der Geometrie als durch die Analysis des Unendlichen finden kann, und da aus der Uebereinstimmung beyder Resultate auf die Güte der letzten Methode schließen. Auf der einen Seite aber reicht dies nicht hin, weil man auch öfters durch irrige Methoden auf Wahrheit kommen kann; auf der andern Seite fließt daraus, weil dies hier nicht der Fall ist, eigentlich das, daß die in der Rechnung aus der Acht gelassenen Größen nicht bloß bis zur Unbemerkbarkeit klein, sondern eigentlich nichts sind, so wie wir es angenommen haben. Wir thun daher der geometrischen Schärfe nicht die geringste Gewalt an.

§. 124.

Wir wenden uns zur Erklärung der Natur der Differenzialien der zweyten Ordnung, die aus den im ersten Capitel erklärten zweyten Differenzen entspringen, wenn man die Größe ω unendlich klein $= dx$ annimmt. Da also die zweyten Differenzen verschwinden, wenn man annimmt, daß die veränderliche Größe um gleiche Incremente wächst, so daß, wenn der zweyte Werth $x^I = x + dx$ ist, alsdenn die folgenden $x^{II} = x + 2d$; $x^{III} = x + 3dx$, 2c. sind; weil in diesem Falle die ersten Differenzen beständig $= dx$ sind: so sind auch die zweyten Differenzialien von x, oder $ddx = 0$, und eben so auch die folgenden $d^3x = 0$; $d^4x = 0$; $d^5x = 0$; 2c. Hierwider könnte zwar eingewendet werden, daß diese Differenzialien als unendlich kleine Größen schon an und für sich $= 0$ seyen, und daß man also dieses nicht als eine besondere Eigenschaft der veränderlichen Größe, deren Incremente gleich gedacht werden, zu betrachten habe.

Allein

Allein man muß dieses Verschwinden so verstehen, daß die Differenzialien ddx, d^3x, 2c. nicht bloß an sich betrachtet, Null seyn, sondern auch in Ansehung der Potestäten von dx, womit sie sonst verglichen werden könnten, verschwinden sollen.

§. 125.

Damit man dies desto deutlicher einsehen möge, so erinnere man sich daran, daß die zweyte Differenz einer jeden Funktion von x, die y seyn mag, durch diese Form $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 +$ 2c. ausgedruckt werden kann. Wenn man daher ω unendlich klein annimmt, so verschwinden die Glieder $Q\omega^3$, $R\omega^4$, 2c., und setzt man $\omega = dx$, so wird das zweyte Differenzial von $y = Pdx^2$, wo dx^2 das Quadrat des Differenzials dx bedeutet. Ob also gleich das zweyte Differenzial von y oder ddy an und für sich $= 0$ ist, so hat es doch zu dx^2, weil $ddy = Pdx^2$ ist, das endliche Verhältniß $P : 1$; wenn aber $y = x$ ist, dann wird $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, 2c., und es verschwindet also in diesem Falle das zweyte Differenzial von x auch in Ansehung von dx^2 und der höhern Potestäten von dx. Auf diese Art ist die vorhergehende Behauptung, daß $ddx = 0$, $d^3x = 0$, 2c. sey, zu verstehen.

§. 126.

Da die zweyte Differenz nichts anders ist, als die Differenz der ersten Differenz: so ist auch das zweyte Differenzial, oder das Differenzio-Differenzial, wie man es auch öfters nennt, nichts anders, als das Differenzial des ersten Differenzials. Da ferner die beständige Größe keinen Zuwachs und keine Verminderung bekommt, und folglich auch keine Differenzen hat, indem diese bloß den veränderlichen

Größen

Größen eigen sind: so sind auch in eben dem Sinne alle Differenzialien der beständigen Größen $= 0$, d. h. sie verschwinden insgesamt gegen alle Potestäten von dx. Da also das Differenzial von dx oder $ddx = 0$ ist, so kann man das Differenzial dx als eine beständige Größe betrachten, und so oft das Differenzial irgend einer Größe beständig genennt wird, so oft muß man sich auch die Incremente dieser Größe gleich gedenken. Wir stellen uns aber hier unter x eine Größe vor, deren Differenzial beständig ist, und wollen nun die Veränderlichkeit der Funktionen desselben, der seine Differenzialien ausgesetzt sind, untersuchen.

§. 127.

Angenommen also, daß das erste Differenzial von $y = pdx$ sey, so muß man, um das zweyte Differenzial von y zu finden, von neuem das Differenzial von pdx suchen. Da nun dx beständig ist, und nicht verändert wird, wenn man gleich $x + dx$ für x setzt, so hat man nur nöthig, das Differenzial der endlichen Größe p zu erforschen. Es sey also $dp = qdx$; weil wir gesehen haben, daß die Differenzialien aller Funktionen von x auf diese Form gebracht werden können; und da nun nach dem, was wir von den Differenzen bewiesen haben, das Differenzial von $np = nqdx$ ist, wenn n eine beständige Größe bedeutet: so findet man dadurch, daß man dx für n setzt, das Differenzial von $pdx = qdx^2$. Wenn also $dy = pdx$, und $dp = qdx$ ist, so ist das zweyte Differenzial $ddy = qdx^2$, und es erhellet auf diese Art, was wir schon vorhin berührt haben, daß das zweyte Differenzial von y zu dx^2 ein endliches Verhältniß hat.

§. 128.

In dem ersten Capitel haben wir bereits bemerkt, daß die zweyten und folgenden Differenzen nicht bestimmt werden können, wofern man nicht die Werthe, die man nach und nach für x setzt, so annimmt, daß sie nach einem gewissen Gesetze fortgehen; und da dieses Gesetz willkührlich ist, so haben wir für dieselben eine arithmetische Progression angenommen, weil sie unter allen die leichteste und zugleich die brauchbarste ist. Aus eben dem Grunde kann über die zweyten Differenzialien nichts gewisses festgesetzt werden, wofern nicht die ersten Differenzen, welche man als den Zuwachs der veränderlichen Grße x betrachtet, nach einem bekannten Gesetze fortgehen, und wir nehmen daher an, daß die ersten Differenzialien von x, nemlich dx, dx^{I}, dx^{II}, ꝛc. insgesammt einander gleich sind, woher denn die zweyten Differenzialien $ddx = dx^{I} - dx = 0$; $ddx^{I} = dx^{II} - dx^{I} = 0$; ꝛc. werden. Da also die zweyten und die folgenden Differenzialien von der Ordnung abhängen, welche die Differenzialien der veränderlichen Größe x unter einander haben, und diese Ordnung willkührlich ist: so muß sich, da die ersten Differenzialien dieser Bedingung nicht unterworfen sind, die Erfindung der zweyten und der folgenden Differenzialien von der Erfindung der ersten Differenzialien auf eine sehr merkliche Art unterschieden.

§. 129.

Wenn aber die Werthe, die der veränderlichen Größe x nach und nach beygelegt werden, nemlich x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, ꝛc. nicht in einer arithmetischen Progression stehen, sondern nach irgend einem andern Gesetze fortschreiten: so sind auch die ersten Differenzialien derselben dx, dx^{I}, dx^{II}, ꝛc. nicht einander gleich, und also auch nicht $ddx = 0$. Daher erhal-

erhalten die zweyten Differenzialien der Funktionen von x, ohne Einschränkung genommen, eine andere Form. Denn wenn das erste Differenzial einer solchen Funktion $y = p\,dx$ ist: so ist es zur Findung des zweyten Differenzials dieser Funktion nicht genug, das Differenzial von p mit dx zu multipliciren, sondern man hat außerdem auch auf das Differenzial von dx, welches ddx ist, zu sehen. Denn da man das zweyte Differenzial erhält, wenn man pdx von seinem folgenden Werthe, der durch die Substitution von $x + dx$ für x, und $px + ddx$ für dx entspringt, abzieht: so wird, wenn man den folgenden Werth von p gleich $p + q\,dx$ setzt, der folgende Werth von pdx

$$= (p + q dx)(dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^2 + qdxddx;$$

und zieht man hiervon pdx ab, so ist das zweyte Differenzial

$$ddy = pddx + qdx^2 + qdxddx = pddx + qdx^2,$$

weil qdxddx gegen pddx verschwindet.

§. 130.

Ob nun aber gleich das Verhältniß der Gleichheit das einfachste und für die Incremente von x das schicklichste ist; so geschiehet es doch sehr häufig, daß man nicht die Incremente der veränderlichen Größe x, wovon y eine Funktion ist, sondern die Incremente irgend einer andern Größe, wovon x selbst eine gewisse Funktion ist, gleich seyn läßt. Ja es werden oft sogar die ersten Differenzialien solchen Größen einander gleich gesetzt, deren Verhältniß zu x gänzlich unbekannt ist. In dem ersten Falle hängen die zweyten und folgenden Differenzialien von x von dem Verhältnisse ab, welches x zu der Größe hat, deren Incremente man gleich angenommen hat, und müssen daher auf eben die Art bestimmt werden, als wir hier die zweyten Differenzialien von y aus den

Differenzialien von x finden gelehret haben. Im letzten Falle aber muß man die zweyten und folgenden Differenzialien von x als unbekannte Größen betrachten, und an ihrer Stelle die Zeichen ddx, d^3x, d^4x, ꝛc. gebrauchen.

§. 131.

Da wir indeß die Art und Weise, in den gedachten Fällen die Differenzialien zu finden, unten ausführlich zeigen werden: so wollen wir hier fortfahren, die veränderliche Größe x als eine gleichförmig wachsende Größe zu betrachten, so daß also ihre ersten Differenzialien dx, dx^I, dx^{II}, ꝛc. insgesammt einander gleich, und die zweyten und folgenden Differenzialien $= 0$ gesetzt werden müssen. Diese Bedingungen druckt man auch auf die Art aus, daß man sagt: das Differenzial von x nemlich dx sey eine beständige Größe. Nun sey y irgend eine Funktion von x, und da dieselbe aus x und beständigen Größen besteht, so werden auch alle ihre ersten, zweyten, dritten, vierten Differenzialien u. s. f. welche durch dy, ddy, d^3y, d^4y, ꝛc. angezeigt werden, durch x und dx ausgedruckt werden können. Setzt man nemlich $x + dx$ für x in y, und zieht darauf von dem gefundenen Werthe den vorhergehenden ab, so bleibt das erste Differenzial dy übrig; und setzt man nun ferner hierin $x + dx$ für x, so bekommt man dy^I und dann wird $ddy = dy^I - dy$. Auf eine ähnliche Art findet man das dritte Differenzial d^3y aus ddy, wenn man daraus, durch die Substitution $x + dx$ für x, ddy^I macht, und $ddy^I - ddy$ sucht, u. s. f. Bey diesen Operationen wird das Differenzial dx beständig als eine unveränderliche Größe betrachtet, die keines Differenzials fähig ist.

§. 132.

§. 132.

Aus dem Verhältnisse, woraus die Funktion y durch x bestimmt wird, läßt sich sowohl vermittelst der Methode der Differenzen, als auch, und zwar noch viel leichter, durch das, was wir in der Folge sagen werden, der Werth der Funktion p bestimmen, welche, mit dx multiplicirt, das erste Differenzial dy giebt. Setzt man also $dy = pdx$, so giebt das Differenzial von pdx das zweyte Differenzial ddy: woher denn, wenn $dp = qdx$, da dx beständig ist, $ddy = qdx^2$ wird, wie wir bereits gezeigt haben. Geht man daher weiter, und setzt $dq = rdx$, so wird, da das Differenzial des zweyten Differenzials das dritte Differenzial giebt, $d^3y = rdx^3$, und auf eine ähnliche Art ergiebt sich, wenn man das Differenzial von dieser Funktion sucht, und $dr = sdx$ ist, $d^4y = sdx^4$ u. s. f. Kann man also nur das erste Differenzial einer Funktion finden, so läßt sich auch das Differenzial einer jeden Ordnung angeben.

§. 133.

Um die Form dieser verschiedenen Differenzialien und die Art und Weise sie zu finden deutlicher vor Augen zu legen, wollen wir dieselben in folgende Tabelle bringen.

Wenn y irgend eine Funktion von x ist,

so ist	und setzt man
$dy = pdx$	$dp = qdx$
$ddy = qdx^2$	$dq = rdx$
$d^3y = rdx^3$	$dr = sdx$
$d^4x = sdx^3$	$ds = tdx$
$d^5y = tdx^5$	ꝛc.

Da nun die Funktion p aus der Funktion y durch die Differenziation gefunden, und auf eine ähnliche Art q aus p,

r aus q, s aus r u. s. w. hergeleitet wird: so findet man die Differenzialien aller Ordnungen leicht, wenn das Differenzial dx als beständig betrachtet wird.

§. 134.

Da p, q, r, s, t, ꝛc. endliche Größen, nemlich Funktionen von x sind, so hat das erste Differenzial von y ein endliches Verhältniß zu dem ersten Differenziale von x, nemlich das Verhältniß $p : 1$; und aus dieser Ursache werden die Differenzialien dx und dy homogen genennt. Da ferner ddy zu dx^2 das endliche Verhältniß $q : 1$ hat, so sind auch ddy und dx^2 homogen, und eben so d^3y und dx^3, desgleichen d^4y und dx^4 u. s. f. So wie daher die ersten Differenzialien unter einander homogen sind, so sind es auch die zweyten Differenzialien mit den Quadraten der ersten Differenzialien, die dritten Differenzialien mit den Cubis der ersten Differenzialien u. s. f. Ueberhaupt ist das Differenzial von y von der Ordnung n, welches man durch d^ny bezeichnet, mit dx^n, d. h. mit der Potestät von dx, deren Exponent n ist, homogen.

§. 135.

Da also gegen dx alle die Potestäten davon, deren Exponenten größer als die Einheit sind, verschwinden, so werden auch dx^2, dx^3, dx^4, ꝛc. gegen dy verschwinden, und eben das werden die Differenzialien der höhern Ordnungen ddy, d^3y, d^4y, ꝛc. thun, die zu jenen Potestäten ein endliches Verhältniß haben. Auf eine ähnliche Art verschwinden auch gegen ddy, weil es mit dx^2 homogen ist, alle Potestäten von dx, die höher sind als das Quadrat, nemlich dx^3, dx^4, ꝛc. und folglich nicht minder d^3y, d^4y, ꝛc. Ferner verschwinden gegen d^3y: dx^4, d^4y, dx^5, d^5y, ꝛc. Hieraus läßt sich, wenn Ausdrücke vorkommen, die dergleichen

Diffe-

Differenzialien enthalten, leicht beurtheilen, ob dieselben homogen sind, oder nicht? Man darf nemlich nur auf die Differenzialien sehen, denn die endlichen Größen kann man aus der Acht lassen, weil sie auf die Homogeneität keinen Einfluß haben, und für die Differenzialien der zweyten und der höhern Ordnungen die denselben homogene Potestäten von dx setzen. Geben dieselben allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen, so sind die gegebenen Ausdrücke homogen.

§. 136.

Auf diese Art erkennt man, daß die Ausdrücke $Pddy^2$ und $Qdyd^3y$ homogen sind. Denn ddy^2 bedeutet das Quadrat von ddy, und da ddy homogen ist mit dx^2, so ist ddy^2 homogen mit dx^4. Da ferner dy und dx so wie auch d^3y und dx^3 homogen sind, so ist auch das Produkt dyd^3y mit dx^4 homogen. Es sind also die Ausdrücke $Pddy^2$ und $Qdyd^3y$ homogen, und haben folglich ein endliches Verhältniß zu einander. Auf eine ähnliche Art findet man, daß diese Ausdrücke $\frac{Pd^3y^2}{dxddy}$ und $\frac{Qd^5y}{dy^2}$ homogen sind. Denn setzt man für dy, ddy, d^3y und d^5y diese ihnen homogene Potestäten von dx: dx, dx^2, dx^3 und dx^5, so erhält man die Ausdrücke Pdx^3 und Qdx^3, welche allerdings einander homogen sind.

§. 137.

Wenn die gegebenen Ausdrücke nach dieser Reduktion nicht gleiche Potestäten von dx enthalten, so sind sie nicht homogen, und haben folglich kein endliches Verhältniß zu einander. Es wird also alsdenn der eine unendlichmal grösser als der andere seyn, und dieser in Rücksicht auf jenen verschwinden. So haben $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ und $\frac{Qddy^2}{dy}$ ein unendlich großes Verhältniß zu einander, denn jener Ausdruck läßt sich auf Pdx, und dieser auf Qdx^3 reduciren, und es verschwindet daher dieser gegen jenen. Kommt daher in der Rechnung ein Aggregat von zwey solchen Ausdrücken $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$ vor, so kann man den letzten ganz sicher gegen den ersten aus der Rechnung weglassen, und nur den ersten behalten. Es ist nemlich das Verhältniß dieser Ausdrücke

$$\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy} \text{ und } \frac{Pd^3y}{dx^2}$$

ein vollkommenes Verhältniß der Gleichheit, weil der Exponent

$$= 1 + \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 1 \text{ ist, indem } \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 0.$$

Auf diese Art können die Differenzial-Ausdrücke öfters ganz außerordentlich zusammengezogen werden.

§. 138.

In der Differenzial-Rechnung wird gelehrt, wie man das erste Differenzial einer jeden gegebenen Größe finden kann; und da die zweyten Differenzialien durch die Differenziation der ersten, die dritten durch die Differenziation der zweyten, und so ferner die folgenden aus den vorhergehenden gefunden werden: so enthält die Differenzial-Rechnung die Methode, die Differenzialien jeder Ordnung zu finden. Man hat aber von dem Worte Differenzial, womit man die unendlich kleinen Größen bezeichnet, verschiedene andere Wörter hergeleitet und zum Gebrauche aufgenommen. So sagt man Differenziiren, das heißt, das Differenzial finden, und eine Größe wird differenziirt, wenn ihr Differenzial gesucht wird. Unter der Differenziation aber versteht man die Operation, durch welche man die Differenzialien

zialien findet. Man nennt daher die Differenzial-Rechnung auch die Methode zu differenziiren, weil sie die Art und Weise, die Differenzialien zu finden, lehrt.

§. 139.

So wie man in der Differenzial-Rechnung das Differenzial einer jeden Größe erforscht: so giebt es auch einen Calcul, der die Größe, deren Differenzial gegeben ist, finden lehrt, und dieses ist die Integral-Rechnung. Denn wenn ein Differenzial gegeben ist, so heißt die Größe, wovon es das Differenzial ist, in Rücksicht auf dieses, das Integral. Der Grund dieser Benennung ist darin zu suchen, weil man das Differenzial als einen unendlich kleinen Theil betrachtet, um welchen eine gewisse Größe wächst, und also in Rücksicht auf diesen Theil die gedachte Größe selbst als ein Ganzes (Integrum) ansehen kann. So wie daher dy das Differenzial von y ist, so ist y hinwiederum das Integral von dy, und so wie ddy das Differenzial von dy ist, so ist wieder dy das Integral von ddy. Auf ähnliche Art ist ddy das Integral von d^3y, d^3y das Integral von d^4y u. s. f., so daß also eine jede Differenziation umgekehrt betrachtet, ein Beyspiel einer Integration giebt.

§. 140.

Der Ursprung und die Natur der Integralien läßt sich eben so als der Ursprung und die Natur der Differenzialien aus dem, was im ersten Capitel über die Differenzen gesagt worden ist, aufs deutlichste erklären. Nachdem nemlich gezeigt worden war, wie man die Differenz einer jeden Größe finden kann, so wurde umgekehrt auch gelehrt, wie man aus einer gegebenen Differenz die Größe, die sie zur Differenz hatte, zu finden im Stande ist, und diese Größe erhielt in Rücksicht auf ihre Differenz den Namen der Summe. So wie also die Differenzen, indem man sie ins unendliche verkleinert, in die Differenzialien übergehen: so verwandeln sich in diesem Falle auch die obigen Summen in Integrale, und man pflegt daher auch öfters die Integrale Summen zu nennen. Die Engländer, welche die Differenzialien Fluxionen nennen, geben den Integralien den Namen der fließenden Größen, und nach ihrer Art zu reden ist, die fließende Größe einer Fluxion finden, eben das, was wir durch, das Integral eines gegebenen Differenzials finden, ausdrucken.

§. 141.

So wie wir die Differenzialien durch den Buchstaben d anzeigen, so gebrauchen wir zur Bezeichnung der Integralien den Buchstaben $\int$, der also, vor die Differenzial-Größen gesetzt, die Größen anzeigt, wovon sie die Differenzialien sind. Ist z. B. das Differenzial von y gleich $p\,dx$, oder $dy = p\,dx$, so ist y das Integral von $p\,dx$, und dieses zeigt man auf die Art an, $y = \int p\,dx$, weil $y = \int dy$ ist. Das Integral von $p\,dx$, welches durch $\int p\,dx$ angezeigt wird, bedeutet also die Größe, deren Differenzial $p\,dx$ ist. Auf eine ähnliche Art ist, da $ddy = q\,dx^2$, wenn $dp = q\,dx$ das Integral von ddy kein andres als $dy = p\,dx$, und da $p = \int q\,dx$, so wird $dy = dx \int q\,dx$, und also $y = \int dx \int q\,dx$. Wenn ferner $dq = r\,dx$ ist, so wird $q = \int r\,dx$ und $dp = dx \int r\,dx$. Wenn man daher den Buchstaben $\int$ noch weiter fortfährt vorzusetzen, so wird $p = \int dx \int r\,dx$, ferner $dy = dx \int dx \int r\,dx$, und $y = \int dx \int dx \int r\,dx$.

§. 142.

Da das Differenzial dy eine unendlich kleine Größe, sein Integral aber eine endliche Größe, und auf ähnliche Art das zweyte Differenzial ddy unendlichmal kleiner, als sein Integral dy ist: so ist offenbar, daß die Differenzialien in

Anse-

Ansehung ihrer Integralien verschwinden. Um diese Eigenschaft faßlicher zu machen, theilt man die unendlich kleinen Größen in Ordnungen ein, und rechnet zur ersten Ordnung die ersten Differenzialien dy und dx. Zur zweyten Ordnung rechnet man ferner die Differenzialien, welche mit dx^2 homogen sind, oder die Differenzialien der zweyten Ordnung; zur dritten die unendlich kleinen Größen, die mit dx^3 homogen sind, also die Differenzialien der dritten Ordnung, u. s. f. So wie daher die unendlich kleinen Größen der ersten Ordnung gegen die endlichen Größen verschwinden, so verschwinden auch die unendlich kleinen Größen der zweyten Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen der ersten Ordnung, und überhaupt verschwinden die unendlich kleinen Größen jeder höhern Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen jeder niedern Ordnung.

§. 143.

So wie also nunmehr das Differenzial einer endlichen Größe ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung, und das Differenzial einer unendlich kleinen Größe von der ersten Ordnung ein unendlich Kleines von der zweyten Ordnung, u. s. f. ist: so ist auch umgekehrt das Integral einer unendlich kleinen Größe der ersten Ordnung eine endliche Größe, das Integral einer unendlich kleinen Größe von der zweyten Ordnung ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung u. s. w. Ist daher ein Differenzial von der Ordnung n gegeben, so ist sein Integral ein unendlich Kleines von der Ordnung $n-1$; und so wie also durch die Differenzialien die Ordnung der unendlich kleinen Größen erhöhet wird, so gehet man bey der Integration zu den niedern Ordnungen zurück, bis man zu endlichen Größen kommt. Wenn man die endlichen Größen von neuem integriren wollte, so würde man nach diesem

Gesetze zu unendlich großen Größen, und von diesen durch abermalige Integration zu unendlichmal unendlich großen Größen gelangen, und also auf diesem Wege ähnliche Ordnungen der unendlichen Größen finden, davon jede unendlichmal größer als die vorhergehende wäre.

§. 144.

Nun müssen wir, um aller Zweydeutigkeit vorzubauen, noch etwas von dem eingeführten Gebrauche der Zeichen sagen. Zuvörderst also bezieht sich das Zeichen der Differenziation d einzig und allein auf den unmittelbar folgenden Buchstaben, und es bedeutet daher dxy nicht das Differenzial des Produkts xy, sondern das Differenzial von x durch die Größe y multiplicirt. Man pflegt indeß in solchen Fällen, um die Verwirrung zu vermeiden, die Größe y vor das Zeichen zu setzen, und ydx zu schreiben, um das Produkt aus y in dx auszudrucken. Wenn indeß y das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ oder das Zeichen der Logarithmen vor sich hat, so pflegt es gleichwohl nach dem Differenziale gesetzt zu werden. So bedeutet $dx\sqrt{(aa - xx)}$ das Produkt aus der endlichen Größe $\sqrt{(aa - xx)}$ in das Differenzial dx, und $dxl(1 + x)$ das Produkt aus dem Logarithmen von $1 + x$ in das Differenzial dx. Aus eben dem Grunde zeigt $ddy\sqrt{x}$ das Produkt des zweyten Differenzials ddy in die endliche Größe $\sqrt{x}$ an.

§. 145.

Nicht genug, daß der Buchstabe d bloß zu dem unmittelbar auf ihn folgenden gehört, er darf auch nicht einmal zu dem Exponenten dieses Buchstabens, wenn dergleichen vorkommen, gezogen werden. So bedeutet dx^2 nicht das Differenzial von x^2, sondern das Quadrat des Differenzials dx, so daß also der Exponent 2 nicht auf x, sondern auf dx gezo-

gezogen werden muß. Man könnte auch $dxdx$ schreiben, so wie man das Produkt aus den beyden Differenzialien dx und dy durch $dxdy$ ausdruckt, allein jene Art dx^2 ist bequemer und gebräuchlicher. Noch mühsamer würde es seyn, zur Bezeichnung der höhern Potestäten von dx dieses dx so oftmals zu wiederholen, und man bezeichnet daher den Cubus von dx durch dx^3, und die höhern Potestäten auf eine ähnliche Art. So bedeutet ddy^4 die vierte Dignität des Differentials der zweyten Ordnung ddy; und $d^3y^2\sqrt{x}$ das Quadrat des Differenzials der dritten Ordnung von y, durch $\sqrt{x}$ multiplicirt. Wenn durch eine rationale Größe x multiplicirt wird, so wird dieselbe vorgesetzt, wie hier, xd^3y^2.

§. 146.

Will man indeß, daß sich der Buchstabe d auf mehr als auf den unmittelbar folgenden Buchstaben beziehen soll, so muß man solches besonders anzeigen. Man bedienet sich in diesem Falle der Parenthese, und schließt darin die Größe ein, deren Differenzial man anzeigen will. So bedeutet $d(xx + yy)$ das Differenzial der Größe $xx + yy$, indeß ist diese Bezeichnungsart noch nicht hinlänglich, wenn man das Differenzial einer Potestät von einer solchen Größe ausdrukken will. Denn wollte man $d(xx + yy)^2$ schreiben, so würde dieser Ausdruck das Quadrat von $d(xx + yy)$ bedeuten können. Man kann sich aber in diesem Falle durch den Punkt helfen, so daß $d.(xx + yy)^2$ das Differenzial von $(xx + yy)^2$, hingegen $d(xx + yy)^2$ ohne Punkt das Quadrat von $d(xx + yy)$ ausdrucke. Es kann nemlich durch den Punkt sehr bequem angezeigt werden, daß sich der Buchstabe d auf die ganze Größe nach ihm beziehen soll; und auf diese Art zeigt denn $d.xdy$ das Differenzial von xdy; $d.^3xdy\sqrt{(aa + xx)}$ das Differenzial der dritten Ordnung

von

von dem Ausdrucke $x\,dy\sqrt{(aa+xx)}$ an, welcher ein Produkt aus den endlichen Größen x und $\sqrt{(aa+xx)}$ und dem Differenziale dy ist.

§. 147.

So wie sich aber das Zeichen der Differenziation d bloß auf die unmittelbar folgende Größe bezieht, wofern nicht seine Bedeutung durch den zwischen gesetzten Punkt auf den ganzen folgenden Ausdruck ausgedehnt wird: so bezieht sich dagegen das Zeichen der Integration $\int$ jedesmal auf den ganzen Ausdruck, vor welchem es steht. So bedeutet $\int y\,dx(aa+xx)^n$ das Integral oder die Größe, deren Differenzial $ydx(aa+xx)^n$, und der Ausdruck $\int x\,dx \int dx\,lx$ die Größe, deren Differenzial $x\,dx \int dx\,lx$ ist. Wenn man daher das Produkt aus zwey Integralien $\int y\,dx$ und $\int z\,dx$ ausdrucken will, so ist es nicht gut, solches durch $\int y\,dx \int z\,dx$ zu thun, denn dieser Ausdruck zeigt das Integral von $y\,dx \int z\,dx$ an. Man pflegt daher auch hier durch einen Punkt der Zweydeutigkeit vorzubeugen, so daß also $\int y\,dx . \int z\,dx$ das Produkt aus den Integralien $\int y\,dx$ und $\int z\,dx$ bedeutet.

§. 148.

Da sich also die Analysis des Unendlichen theils mit der Erfindung der Differenzialien, theils mit der Erforschung der Integralien beschäftiget, so wird sie deswegen in zwey Haupttheile getheilt, davon jener die Differenzial-, dieser die Integral-Rechnung genennt wird. In der Differenzial-Rechnung wird gelehret, wie man aus jeder Größe ihre Differenzialien, in der Integral-Rechnung hingegen, wie man aus gegebenen Differenzialien ihre Integrale finden kann, und zugleich wird in beyden der große Nutzen dieser Rechnungen sowohl in der Analyse als in der höhern Geometrie gezeigt. Es hat daher auch dieser Theil der Analyse so starke

Erwei-

Erweiterungen bekommen, daß er nur in weitläuftigen Werken ausführlich abgehandelt werden kann. Vorzüglich vermehren sich in der Integral-Rechnung sowohl die neuen Kunstgriffe zu integriren als die Anwendungen derselben zur Auflösung der Aufgaben täglich, so daß daher die neuen Vermehrungen, die immerfort hinzukommen, nie erschöpft, und noch weniger vollkommen beschrieben und erklärt werden können. Ich werde indeß suchen, entweder alle bisher gemachten Entdeckungen mitzutheilen und zu erklären, oder doch die Methoden beybringen, wie man sie finden kann.

§. 149.

Gemeiniglich nimmt man in der Analysis des Unendlichen mehr Theile an, denn man findet sehr häufig außer der Differenzial- und Integral-Rechnung noch den Differenzio-Differenzial-Calcul und die Exponenzial-Rechnung. In der Differenzio-Differenzial-Rechnung wird die Art und Weise gelehrt, die zweyten und die folgenden höhern Differenzialien zu finden; da ich aber in der Differenzial-Rechnung selbst die Art und Weise, die Differenzialien jeder Ordnung zu finden, lehren werde, so habe ich diese Unterabtheilung nicht nöthig. Was ferner den Exponential-Calcul anbetrift, wodurch der um die Analysis des Unendlichen unsterblich verdiente Joh. Bernoulli die Methode des Differenziirens und Integrirens auf die Exponential-Größen angewandt hat: so habe ich nicht für nöthig gehalten, daraus einen besondern Theil zu machen, weil ich die Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung für alle Arten der Größen, der algebraischen sowohl als der transcendenten einzurichten beschlossen habe.

§. 150.

Zuvörderst werde ich also im gegenwärtigen Buche die Differenzial-Rechnung abhandeln, und die Art und Weise lehren,

lehren, von allen Gattungen der veränderlichen Größen nicht bloß die ersten, sondern auch die zweyten und die folgenden Differenzialien zu finden. Dabey werde ich zuerst die algebraischen Größen betrachten, sie mögen nun Funktionen einer oder mehrerer veränderlichen Größen seyn, entwickelt oder in Gleichungen gegeben werden. Dann will ich die Regeln von der Erfindung der Differenzialien auch auf die nicht algebraischen Größen anwenden, so weit man dieselben ohne die Integral-Rechnung kennen lernen kann. Dahin gehören die Logarithmen, die Exponential-Größen, ferner die Kreisbogen mit ihren Sinus und Tangenten. Endlich werde ich auch die aus diesen Größen zusammengesetzten vermischten Größen betrachten, und damit den ersten Theil der Differenzial-Rechnung, der die Methode des Differenzirens enthalten soll, beschließen.

§. 151.

Der andere Theil ist zur Erklärung des Gebrauchs bestimmt, der von der Differenzial-Rechnung sowohl in der Analyse als in der höhern Geometrie gemacht werden kann. Die gemeine Algebra zieht daher sehr viele Vortheile, theils zur Erfindung der Wurzeln der Gleichungen, theils zur Behandlung und Summirung der Reihen, theils zur Bestimmung des Größten und Kleinsten, theils zur Bestimmung solcher Ausdrücke, die in gewissen Fällen unbestimmt scheinen u. s. w. Die höhere Geometrie aber hat der Differenzial-Rechnung ihre wichtigste Erweiterung zu verdanken, indem man dadurch die Tangenten der krummen Linien und ihre Krümmung auf eine bewundernswerthe leichte Art bestimmen, und viel andere Aufgaben, die wichtigsten Gegenstände betreffend, auflösen kann. Ob man gleich mit diesen Untersuchungen die weitläuftigsten Schriften anfüllen könnte, so will ich doch suchen, alles kurz und deutlich zu erklären.

Fünf-

Fünftes Capitel.

Von der Differenziation der algebraischen Funktionen einer veränderlichen Größe.

§. 152.

Da das Differenzial der veränderlichen Größe x, $= dx$ ist, so wird x durch die nächste Veränderung $x^{\mathrm{I}} = x + dx$. Ist daher y irgend eine Funktion von x, so geht dieselbe, wenn man darin $x + dx$ für x setzt, in y^{I} über, und die Differenz $y^{\mathrm{I}} - y$ giebt das Differenzial von y. Wenn man also $y = x^n$ setzt, so wird

$$y^{\mathrm{I}} = (x + dx)^n = x^n + n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} dx^2 + \text{rc.}$$

und folglich

$$dy = y^{\mathrm{I}} - y = n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} dx^2 + \text{rc.}$$

Allein das zweyte und die folgenden Glieder dieses Ausdrucks verschwinden gegen das erste Glied, und es ist daher $nx^{n-1}dx$ das Differenzial von x^n oder $d.x^n = nx^{n-1}dx$. Wenn also a eine beständige Zahl oder Größe ist, so ist auch $d.ax^n = nax^{n-1}dx$, und man findet daher das Differenzial einer jeden Potestät von x, wenn man dieselbe mit dem Exponenten multiplicirt, durch x dividirt, und den Quotienten durch dx multiplicirt; eine Regel, die sich leicht dem Gedächtnisse einprägen läßt.

§. 152.

Kennt man das erste Differenzial von x^n, so findet man daraus ohne Mühe das zweyte Differenzial, wenn man nur, so wie wir es hier immer thun, das Differenzial dx als eine beständige Größe betrachtet. Da nemlich in dem Differenziale $nx^{n-1}dx$ der Faktor ndx beständig ist, so muß man das Differenzial von x^{n-1} suchen, und dies ist $(n-1)x^{n-2}dx$. Multiplicirt man dasselbe mit ndx, so bekommt man das zweyte Differenzial, $dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man das Differenzial von x^{n-2}, welches $(n-2)x^{n-3}dx$ ist, mit $n(n-1)dx^2$ multiplicirt, das dritte Differenzial

$$d.^3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Ferner ist das vierte Differenzial

$$d.^4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4,$$

und das fünfte

$$d.^5x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5.$$

Hieraus fällt zugleich in die Augen, wie die Form der folgenden Differenzialien beschaffen ist.

§. 154.

So oft n eine ganze positive Zahl ist, so oft kommt man auch endlich zu verschwindenden Differenzialien, d. h. die in so fern $=0$ sind, daß sie gegen alle Potestäten von dx verschwinden. Von diesen muß man sich die einfachern Fälle merken.

$d.x = dx$; $dd.x = 0$; $d.^3x = 0$; rc.

$d.x^2 = 2xdx$; $dd.x^2 = 2dx^2$; $d.^3x^2 = 0$;

$d.^4x^2 = 0$; rc.

$d.x^3 = 3x^2dx$; $dd.x^3 = 6xdx^2$; $d.^3x^3 = 6dx^3$;

$d.^4x^3 = 0$; $d.^5x^3 = 0$; rc.

$$d.x^4=4x^3dx;\quad dd.x^4=12x^2dx^2;\quad d.^3x^4=24xdx^3;$$
$$d.^4x^4=24dx^4;\quad d.^5x^4=0;\quad d.^6x^4=0;\ \text{ꝛc.}$$
$$d.x^5=5x^4dx;\quad dd.x^5=20x^3dx^2;\quad d.^3x^5=60x^2dx^3;$$
$$d.^4x^5=120xdx^4;\quad d.^5x^5=120dx^5;\quad d.^6x^5=0;$$
$$d.^7x^5=0;\ \text{ꝛc.}$$

Man sieht hier, daß das Differenzial von x^n von der Ordnung n, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, eine beständige Größe, nemlich $= 1.2.3 \ldots\ldots n dx^n$ ist, und daß die Differenzialien aller folgenden Ordnungen $=0$ sind.

§. 155.

Wenn n eine ganze negative Zahl ist, so kann man die Differenzialien von solchen negativen Potestäten von x, als $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, ꝛc. finden, indem $\frac{1}{x} = x^{-1}$; $\frac{1}{xx} = x^{-2}$, und überhaupt $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$ ist. Wenn man daher in der vorhergehenden Formel $n = -m$ setzt, so ist das erste Differenzial von $\frac{1}{x^m}$, $= \frac{-m dx}{x^{m+1}}$; das zweyte $= \frac{m(m+1)dx^2}{x^{m+2}}$; das dritte $= \frac{-m(m+1)(m+2)dx^3}{x^{m+3}}$; ꝛc. Hieraus fließen folgende einfachere Fälle, die wohl gemerkt zu werden verdienen.

$$d.\frac{1}{x}=\frac{-dx}{x^2};\quad dd.\frac{1}{x}=\frac{2dx^2}{x^3};\quad d^3.\frac{1}{x}=\frac{-6dx^3}{x^4};$$
$$d.\frac{1}{x^2}=\frac{-2dx}{x^3};\quad dd.\frac{1}{x^2}=\frac{6dx^2}{x^4};\quad d^3.\frac{1}{x^2}=\frac{-24dx^3}{x^5};$$
$$d.\frac{1}{x^3}=\frac{-3dx}{x^4};\quad dd.\frac{1}{x^3}=\frac{12dx^2}{x^5};\quad d^3.\frac{1}{x^3}=\frac{-60dx^3}{x^6};$$
$$d.\frac{1}{x^4}=\frac{-4dx}{x^5};\quad dd.\frac{1}{x^4}=\frac{20dx^2}{x^6};\quad d^3.\frac{1}{x^4}=\frac{-120dx^3}{x^7};$$
$$d.\frac{1}{x^5}=\frac{-5dx}{x^6};\quad dd.\frac{1}{x^5}=\frac{30dx^2}{x^7};\quad d^3.\frac{1}{x^5}=\frac{-210dx^3}{x^8};$$

ꝛc.

§. 156.

Setzt man ferner für n gebrochene Zahlen, so erhält man die Differenzialien der Wurzel-Größen. Macht man nemlich $n = \frac{\mu}{\nu}$, so ist das erste Differenzial von der Formel $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ oder $\sqrt[\nu]{x^{\mu}}$

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu - \nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu - \nu}}$$

das zweyte

$$= \frac{\mu(\mu - \nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu - 2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu - \nu)}{\nu^2} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu - 2\nu}}$$

rc.

Hieraus fließt

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \; dd.\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}; \; d.^3\sqrt{x} = \frac{1.3dx^3}{8x^2\sqrt{x}};$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}; \; dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}; \; d.^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.5dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}};$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}; \; dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}; \; d.^3\sqrt[4]{x} = \frac{3.7dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}};$$

rc.

Betrachtet man diese Ausdrücke nur mit einiger Aufmerksamkeit, so erwirbt man sich bald eine Fertigkeit, dergleichen Differenzialien auch ohne eine vorläufige Reduktion auf die Potestäten-Form zu finden.

§. 157.

Wenn μ nicht 1, sondern eine andere positive, oder negative Zahl ist, so lassen sich die Differenzialien eben so leicht

leicht angeben. Da aber die zweyten und die folgenden Differenzialien aus den ersten auf eben die Art gefunden werden, als diese aus den Potestäten selbst: so wollen wir hier bloß die einfachern ersten Differenzialien hersetzen:

$$d.x\sqrt{x} = \tfrac{3}{2}dx\sqrt{x};\ d.x^2\sqrt{x} = \tfrac{5}{2}xdx\sqrt{x};\ d.x^3\sqrt{x} = \tfrac{7}{2}x^2dx\sqrt{x};$$

$$d.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}};\ d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}};\ d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}};$$

$$d.\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{2}{3}\,\frac{dx}{\sqrt[3]{x}};\quad d.x\sqrt[3]{x} = \tfrac{4}{3}dx\sqrt[3]{x};\ d.x\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{5}{3}dx\sqrt[3]{x^2};$$

$$d.xx\sqrt[3]{x} = \tfrac{7}{3}xdx\sqrt[3]{x};\ d.xx\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{8}{3}xdx\sqrt[3]{x^2};\ \text{2c.}$$

$$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}};\ d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}};\ d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}};$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}};\ d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}};\ \text{2c.}$$

§. 158.

Hieraus ist man bereits im Stande, die Differenzialien aller ganzen rationalen algebraischen Funktionen zu finden, indem die Glieder dieser Funktionen lauter Potestäten von x sind, und deren Differenziation bekannt ist. Denn da eine Größe von dieser Form,

$$p + q + r + s + \text{2c.}$$

wenn man darin $x + dx$ für x setzt, in folgende,

$$p + dp + q + dq + r + dr + s + ds + \text{2c.}$$

verwandelt wird: so ist das Differenzial derselben =

$$dp + dq + dr + ds + \text{2c.}$$

Kann man also das Differenzial einer jeden von den Größen p, q, r, s, angeben, so ist auch das Differenzial ihres Aggregats bekannt. Und da das Differenzial des Vielfachen von p ein Gleich-Vielfaches von dp, oder $d.ap = adp$ ist:

so ist das Differenzial der Größe $ap + bq + cr = adp + bdq + cdr$. Da endlich die beständigen Größen kein Differenzial haben, so ist auch das Differenzial von $ap + bq + cr + f = adp + bdq + cdr$.

§. 159.

Da also die Glieder der ganzen rationalen Funktionen entweder beständige Größen oder Potestäten von x sind, so lassen sich die Differenzialien dieser Funktionen nach den ertheilten Vorschriften leicht finden. So ist

$$d(a + x) = dx;\quad d(a + bx) = bdx;$$
$$d(a + xx) = 2xdx;\quad d(aa - xx) = -2xdx;$$
$$d(a + bx + cxx) = bdx + 2cxdx;$$
$$d(a + bx + cx^2 + ex^3) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx;$$
$$d(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + 4fx^3dx.$$

Und wenn die Exponenten unbestimmt sind, so ist

$$d(1 - x^n) = -nx^{n-1}dx;\quad d(1 + x^m) = mx^{m-1}dx;$$
$$d(a + bx^m + cx^n) = mbx^{m-1}dx + ncx^{n-1}dx.$$

§. 160.

Da man also die ganzen rationalen Funktionen nach der höchsten Potestät von x in Grade eintheilt, so ist klar, daß die Differenzialien dieser Funktionen, wenn man die gefundenen Differenzialien immer wieder von neuem differenziirt, und dabey dx als eine beständige Größe betrachtet, endlich selbst beständige Größen werden, und darauf verschwinden. So ist das erste Differenzial bdx der Funktion vom ersten Grade $a + bx$ eine beständige Größe, und das zweyte und die folgenden Differenzialien Null. Eben so ist, wenn man die Funktion vom zweyten Grade $a + bx + cxx = y$ setzt, $dy = bdx + 2cxdx$; $ddy = 2cdx^2$; $d^3y = 0$. Auf eine ähnliche Art ist, wenn man die Funktion des dritten

Grades

Grades $a + bx + cxx + ex^3 = y$ setzt, $dy = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx$; $ddy = 2cdx^2 + 6exdx^2$; $d^3y = 6edx^3$; und $d^4y = 0$. Gehört daher überhaupt eine ganze rationale Funktion zu dem nten Grade, so ist ihr Differenzial von der Ordnung n eine beständige Größe, und die folgenden Differenzialien insgesammt Null.

§. 161.

Auch sind die ertheilten Vorschriften hinlänglich, das Differenzial einer Funktion zu finden, wenn unter den Potestäten von x, woraus die Funktion zusammengesetzt ist, Potestäten mit negativen oder gebrochenen Exponenten vorkommen. Ist daher

I. $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$; so wird

$$dy = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{x^2}.$$ Ist ferner

II. $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - ex$; so wird

$$dy = \frac{-adx}{2x\sqrt{x}} + \frac{cdx}{2\sqrt{x}} - edx, \text{ und}$$

$$ddy = \frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}} - \frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}.$$ Ist

III. $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{xx}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{xx}$; so wird

$$dy = \frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}} + \frac{4cdx}{3xx\sqrt[3]{x}} - \frac{2fdx}{x^3}, \text{ und}$$

$$ddy = \frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}} - \frac{28cdx^2}{9x^3\sqrt[3]{x}} + \frac{6fdx^2}{x^4}.$$

§. 162.

Ist die Größe, deren Differenzial gefunden werden soll, eine Potestät einer solchen Funktion, deren Differenzial nach dem Bisherigen gefunden werden kann: so reichen die ertheilten Vorschriften ebenfalls zu, um das erste Differenzial derselben zu finden. Denn ist p irgend eine Funktion von x, deren Differenzial dp man kennt, so ist das erste Differenzial der Potestät $p^n = np^{n-1}dp$. Hiernach lassen sich folgende Fälle behandeln.

I. Ist $y = (a + x)^n$; so ist $dy = n(a + x)^{n-1}dx$.

II. Ist $y = (aa - xx)^2$; so ist $dy = -4xdx(aa - xx)$.

III. Ist $y = \frac{1}{aa + xx}$, oder $y = (aa + xx)^{-1}$, so ist

$$dy = \frac{-2xdx}{(aa + xx)^2}.$$

IV. Ist $y = \sqrt{(a + bx + cxx)}$, so ist $dy = \frac{bdx + 2cxdx}{2\sqrt{(a + bx + cxx)}}$.

V. Ist $y = \sqrt[3]{(a^4 - x^4)^2}$, oder $y = (a^4 - x^4)^{\frac{2}{3}}$; so ist

$$dy = -\tfrac{8}{3}x^3dx(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4 - x^4)}}.$$

VI. Ist $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$ oder $y = (1 - xx)^{-\frac{1}{2}}$; so ist

$$dy = xdx(1 - xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1 - xx)\sqrt{(1 - xx)}}.$$

VII. Ist $y = \sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)}$ so ist

$$dy = \frac{dx\sqrt{b} : 2\sqrt{x} + dx}{3\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}} = \frac{dx\sqrt{b} + 2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x}.\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}}$$

VIII. Ist $y = \frac{1}{x + \sqrt{(aa - xx)}}$, so ist, weil $d.\sqrt{(aa - xx)} = \frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ ist,

dy

$$dy = \frac{-dx + xdx : \sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2} =$$

$$\frac{xdx - dx\sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2 \sqrt{(aa - xx)}} \text{ oder}$$

$$dy = \frac{dx(x - \sqrt{(aa - xx)})^3}{(2xx - aa)^2 \sqrt{(aa - xx)}}.$$

IX. Ist $y = \sqrt[4]{(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2})^3}$, so setze man $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ und $\sqrt[3]{(1 - xx)^2} = q$. Da auf diese Art $y = \sqrt[4]{(1 - p + q)^3}$ wird, so ist

$$dy = \frac{-3dp + 3dq}{4\sqrt[4]{(1 - p + q)}}.$$

Nun ist aber aus dem Vorhergehenden

$$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}} \text{ und } dq = \left(\frac{3\sqrt[3]{(1 - xx)}}{-4xdx}\right)\frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{(1 - xx)}};$$

folglich, wenn man diese Werthe substituirt,

$$dy = \frac{3dx : 2x\sqrt{x} - 4xdx : \sqrt[3]{(1 - xx)}}{4\sqrt[4]{(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2})}}$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man jedesmal anstatt der Glieder, die einigermaßen zusammengesetzt sind, einzelne Buchstaben setzt, die Differenzialien aller dergleichen Funktionen leicht.

§. 163.

Wenn die Größe, deren Differenzial gefunden werden soll, ein Produkt aus zweyen oder mehrern Funktionen von x ist, deren Differenzialien bekannt sind: so findet man das

Differenzial derselben am bequemsten auf folgende Art. Es seyen p und q Funktionen von x, deren Differenzialien dp und dq bekannt sind. Da nun, wenn man $x + dx$ für x setzt, p in $p + dp$ und q in $q + dq$ übergeht, so wird dadurch das Produkt pq in

$$(p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dpdq$$

verwandelt, und es ist also das Differenzial des Produkts $pq = pdq + qdp + dpdq$, oder $d.pq = pdq + qdp$, weil das unendlich Kleine von der zweyten Ordnung $dpdq$ gegen die unendlich Kleinen von der ersten Ordnung pdq und qdp, verschwindet. Es besteht also das Differenzial des Produkts pq aus zwey Gliedern, welche man findet, wenn man einen jeden Faktor mit dem Differenziale des andern Faktors multiplicirt. Hieraus läßt sich ferner die Art, das Differenzial des Produkts pqr, welches aus drey Faktoren besteht, zu finden, leicht ableiten. Denn setzt man $qr = z$, so wird $pqr = pz$, und $d.pqr = pdz + zdp$. Da aber $z = qr$ ist, so wird $dz = qdr + rdq$, und substituirt man diese Werthe, so findet man

$$d.pqr = pqdr + prdq + qrdp.$$

Auf eine ähnliche Art ist, wenn die zu differenzirende Größe ein Produkt aus vier Faktoren ist,

$$d.pqrs = pqrds + pqsdr + prsdq + qrsdp;$$

und hieraus läßt sich die Differenziation der Produkte, die aus mehrern Faktoren bestehen, sehr leicht erkennen.

I. Ist also $y = (a + x)(b - x)$ so wird

$$dy = - dx(a + x) + dx(b - x) = - adx + bdx - 2xdx;$$

und dieses Differenzial findet man ebenfalls, wenn man die gegebene Größe zuvor entwickelt. Denn es wird alsdann $y = ab - ax + bx - xx$, und daraus nach den obigen Regeln $dy = - adx + bdx - 2xdx$.

II. Ist

II. Ist $y = \frac{1}{x}\sqrt{(aa - xx)}$

so setze man $\frac{1}{x} = p$ und $\sqrt{(aa - xx)} = q$.

Weil nun $dp = \frac{-dx}{xx}$, und $dq = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ ist, so wird

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{(aa - xx)};$$

Da man aber durch die Reduktion auf einerley Nenner hieraus $\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$ erhält, so ist das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}.$$

III. Ist $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$;

so setze man $xx = p$, und $\frac{1}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = q$.

Da nun $dp = 2xdx$, und $dq = \frac{-2x^3dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$ ist, so wird

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = \frac{2a^4xdx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}},$$

und also das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{2a^4xdx}{(a^4 + x^4)\sqrt{(a^4 + x^4)}}.$$

IV. Ist $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1 + xx)}}$;

so setze man $x = p$ und $\frac{1}{x + \sqrt{(1 + xx)}} = q$, wodurch denn $dp = dx$,

und $dq = \frac{-dx - xdx : \sqrt{(1+xx)}}{(x + \sqrt{(1+xx)})^2} = \frac{-dx(x + \sqrt{(1+xx)})}{(x + \sqrt{(1+xx)})^2\sqrt{(1+xx)}} =$

 $-dx$

$\frac{-dx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$ wird. Hieraus aber findet man

$$pdq + qdp = \frac{-xdx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{x+\sqrt{(1+xx)}} =$$

$\frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x)}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$ und es ist also das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x)}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}, \text{ oder,}$$

wenn man den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch $\sqrt{(1+xx)} - x$ multiplicirt,

$$dy = \frac{dx(1+2xx-2x\sqrt{(1+xx)})}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

Eben dieses Differenzial hätte man auch noch bequemer auf folgende Art finden können. Da $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$ ist, so multiplicire man Zähler und Nenner durch $\sqrt{(1+xx)}-x$, wodurch man $y = x\sqrt{(1+xx)} - xx = \sqrt{(x^2+x^4)} - xx$ erhält, und davon ist das Differenzial nach der vorhergehenden Regel,

$$dy = \frac{xdx+2x^3dx}{\sqrt{(xx+x^4)}} - 2xdx = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

V. Ist $y = (a+x)(b-x)(x-c)$ so ist

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Ist $y = x(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}$ so findet man, weil dies Produkt aus drey Faktoren besteht,

$$dy = dx(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)} + 2xxdx\sqrt{(aa-xx)} - \frac{xxdx(aa+xx)}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dx(a^4+aaxx-4x^4)}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

§. 164

§. 164.

Ob nun gleich hierbey auch Brüche in den Faktoren enthalten seyn können, so ist es doch bequemer die Brüche nach einer besondern Regel zu differenziiren. Es sey also das Differenzial des Bruchs $\frac{p}{q}$ zu finden. Da dieser Bruch durch die Substitution von $x + dx$ für x in folgenden Bruch $\frac{p + dp}{q + dq} = (p + dp)\left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq}\right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq}$ übergeht, so ist das Differenzial des Bruchs $\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, weil das letzte Glied $\frac{dpdq}{qq}$ verschwindet. Es ist also

$$d \cdot \frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{qq}$$

und man findet das Differenzial eines jeden Bruchs, wenn man von dem Produkte aus dem Nenner in das Differenzial des Zählers das Produkt aus dem Zähler in das Differenzial des Nenners abzieht, und die gefundene Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt. Der Gebrauch dieser Regel wird durch folgende Beyspiele deutlich werden.

I. Ist $y = \frac{x}{aa + xx}$, so ist nach dieser Regel

$$dy = \frac{(aa + xx)dx - 2xxdx}{(aa + xx)^2} = \frac{(aa - xx)dx}{(aa + xx)^2}.$$

II. Ist $y = \frac{\sqrt{(aa + xx)}}{aa - xx}$, so findet man

$$dy = \frac{(aa - xx)xdx : \sqrt{(aa + xx)} + 2xdx\sqrt{(aa + xx)}}{(aa - xx)^2}$$

und

und wenn man diesen Bruch reducirt,

$$dy = \frac{(3aa + xx)x\,dx}{(aa - xx)^2 \sqrt{(aa + xx)}}.$$

Oft ist es vortheilhafter nach der Regel zu handeln, welche dieser Ausdruck, $d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, enthält, und nach welcher das Differenzial eines Bruchs dem Differenziale des Zählers durch den Nenner dividirt, weniger dem Differenziale des Nenners durch den Zähler multiplicirt, und durch das Quadrat des Nenners dividirt, gleich ist. Ist z. B.

III. $y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}$, so ist

$$dy = \frac{-2x\,dx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aax\,dx + 4x^3dx)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

$$= \frac{-2x\,dx(2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}.$$

§. 165.

Diese Vorschriften reichen hin, um das Differenzial einer jeden rationalen Funktion von x zu finden. Denn ist dieselbe eine ganze Funktion, so ist die Art, ihr Differenzial zu finden, schon vorhin beschrieben worden. Ist sie aber eine gebrochene Funktion so kann man sie allemal auf folgende Form reduciren:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.}}$$

Setzt man nun den Zähler $= p$, und den Nenner $= q$, so daß also $y = \frac{p}{q}$ wird, so ist $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$. Da nun

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

und $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$ ist, so wird

$dp =$

$$dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \text{ꝛc.}$$

und $$dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\varepsilon x^3dx + \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man also, so findet man

$$\begin{aligned}
qdp = {} & \alpha Bdx + 2\alpha Cxdx + 3\alpha Dx^2dx + 4\alpha Ex^3dx + \text{ꝛc.}\\
& + \beta Bxdx + 2\beta Cx^2dx + 3\beta Dx^3dx + \text{ꝛc.}\\
& + \gamma Bx^2dx + 2\gamma Cx^3dx + \text{ꝛc.}\\
& + \delta Bx^3dx + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qdp = {} & \beta Adx + \beta Bxdx + \beta Cx^2dx + \beta Dx^3dx + \text{ꝛc.}\\
& + 2\gamma Axdx + 2\gamma Bx^2dx + 2\gamma Cx^3dx + \text{ꝛc.}\\
& + 3\delta Ax^2dx + 3\delta Bx^3dx + \text{ꝛc.}\\
& + 4\varepsilon Ax^3dx + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Hieraus aber wird das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{\left\{\begin{array}{l} + \alpha B \\ - \beta A \end{array}\right\} dx \left\{\begin{array}{l} + 2\alpha C \\ - 2\gamma A \end{array}\right\} xdx \left\{\begin{array}{l} + 3\alpha D \\ + \beta C \\ - \gamma B \\ - 3\delta A \end{array}\right\} x^2dx \left\{\begin{array}{l} + 4\alpha E \\ + 2\beta D \\ - 2\delta B \\ - 4\varepsilon A \end{array}\right\} x^3dx \left\{\begin{array}{l} + 5\alpha F \\ + 3\beta E \\ + \gamma D \\ - \delta C \\ - 3\varepsilon B \\ - 5\zeta A \end{array}\right\} x^4dx \text{ ꝛc.}}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})^2}$$

Dieser Ausdruck kann sehr gut gebraucht werden, um darnach das Differenzial einer jeden rationalen Funktion schnell zu finden; denn die Art, wie der Zähler des Differenzials aus den Coefficienten des Zählers und des Nenners der gegebenen Funktion zusammengesetzt wird, ist leicht zu erkennen, und der Nenner des Differenzials ist das Quadrat des Nenners der gegebenen Funktion.

§. 166.

Wenn der Zähler oder der Nenner des gegebenen Bruchs oder beyde aus Faktoren bestehen, so erhält man zwar durch eine wirklich vorgenommene Multiplication eine solche

solche Form, als wir eben differenziirt haben; allein es ist doch besser, dergleichen Fälle nach einer besondern Regel zu behandeln. Es sey also der Bruch $y = \frac{pr}{q}$ gegeben. Man setze $pr = P$, wodurch $dP = pdr + rdp$, und weil $y = \frac{P}{q}$ ist, $dy = \frac{qdP - Pdq}{qq}$ wird. Setzt man nun für P und dP die Werthe davon, so wird

I. wenn $y = \frac{pr}{q}$ ist,

$$dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}.$$

Ist hingegen $y = \frac{p}{qs}$, so setze man $qs = Q$, wodurch denn $dQ = qds + sdq$ und $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$ wird. Ist also

II. $y = \frac{p}{qs}$, so wird

$$dy = \frac{qsdp - pqds - qsdq}{qqss}.$$

Ist endlich $y = \frac{pr}{qs}$, so setze man $pr = P$ und $qs = Q$, wodurch man $y = \frac{P}{Q}$ und $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$ erhält. Da aber $dP = pdr + rdp$, und $dQ = qds + sdq$ ist, so wird, wenn

III. $y = \frac{pr}{qs}$ ist,

$$dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$$

$$= \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qqs}.$$

Auf

Auf eine ähnliche Art findet man die Differenzialien, wenn der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs aus mehrern Faktoren bestehen, und es braucht also hiezu keine besondere Anleitung gegeben zu werden. Ich füge daher auch keine zu diesen Fällen gehörende Beyspiele hinzu, zumal da bald eine allgemeine Regel das Differenzial zu finden gegeben werden wird, welche alle bisherigen besondern Regeln unter sich begreift.

§. 167.

Es giebt aber sowohl bey den Produkten als bey den Brüchen Fälle, wo sich das Differenzial bequemer ausdrukken läßt, als solches nach den allgemeinen bis jetzt erklärten Regeln geschieht. Dies findet statt, wenn die Faktoren, die entweder die Funktion selbst oder den Zähler oder Nenner derselben ausmachen, Potestäten sind.

Es sey also die Funktion $y = p^m q^n$ zu differenziiren gegeben. Setzt man hier $p^m = P$, und $q^n = Q$, so wird $y = PQ$ und $dy = PdQ + QdP$. Da nun $dP = mp^{m-1}dp$, und $dQ = nq^{n-1}dq$ ist, so findet man, wenn man diese Werthe braucht,

$$dy = np^m q^{n-1}dq + mp^{m-1}q^n dp = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp).$$

Ist daher

I. $y = p^m q^n$, so wird

$$dy = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp).$$

Auf eine ähnliche Art läßt sich auch das Differenzial eines Produkts aus drey Faktoren fiden. Ist nemlich

II. $y = p^m q^n r^k$, so wird

$$dy = p^{m-1}q^{n-1}r^{k-1}(mqrdp + nprdq + kpqdr).$$

§. 168.

Ist ein Bruch gegeben, dessen Zähler oder Nenner einen Faktor hat, der eine Potestät ist, so lassen sich auch für diesen

sen Fall besondere Regeln geben. Es sey zuvörderst der Bruch $y = \frac{p^m}{q}$ gegeben. Hier findet man nach der Regel für die Differenziation der Brüche, $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq}$; allein dieses Differenzial läßt sich bequemer ausdrucken. Ist nemlich

I. $y = \frac{p^m}{q}$, so wird

$$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}.$$

Nun sey $y = \frac{p}{q^n}$. Hier findet man nach der angeführten Regel $dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1}dq}{q^{2n}}$. Dividirt man aber den Zähler und Nenner dieses Ausdrucks durch q^{n-1}, so wird $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$. Ist daher

II. $y = \frac{p}{q^n}$, so wird

$$dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}.$$

Wäre $y = \frac{p^m}{q^n}$ gegeben, so fände man

$$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1}dq}{q^{2n}},$$

und hieraus durch die Reduktion

$$dy = \frac{mp^{m-1}qdp - np^m dq}{q^{n+1}}.$$ Wenn also

III. $y = \frac{p^m}{q^n}$ ist, so wird

$$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}.$$

Ist

Ist endlich das Differenzial von $y = \frac{r}{p^m q^n}$ zu finden, so giebt die angeführte Regel

$$dy = \frac{p^m q^n dr - m p^{m-1} q^n r dp - n p^m q^{n-1} r dq}{p^{2m} q^{2n}}$$

und da der Zähler und Nenner dieses Ausdrucks durch $p^{m-1} q^{n-1}$ theibar sind, so wird, wenn

IV. $y = \frac{r}{p^m q^n}$ ist,

$$dy = \frac{pqdr - mqrdp - nprdq}{p^{m+1} q^{n+1}}.$$

Kommen mehr Faktoren vor, so kann man hiernach für jeden einzelnen Fall sehr leicht eine besondere Regel finden. Es wäre indeß überflüßig, die gefundenen Regeln durch Worte auszudrucken.

§. 169.

Die bisher ertheilten Regeln der Differenziation erstrecken sich so weit, daß sich keine algebraische Funktion von x gedenken läßt, deren Differenzial man nicht darnach finden könnte. Denn ist die gegebene Funktion eine rationale entweder ganze oder gebrochene Funktion, so ist für den ersten Fall im 159sten §. und für den andern im 165sten §. gezeigt worden, wie man sich dabey zu nehmen hat; auch sind zugleich die kurzen Arten bey vorkommenden Faktoren mitgetheilt worden. Außerdem kann man darnach auch die Differenzialien der Irrational-Größen finden; indem man dieselben, sie mögen in der gegebenen Funktion addirt oder subtrahirt seyn, als Multiplicatoren oder als Divisoren darin vorkommen, jedesmal auf die untersuchten Fälle zurückführen kann. Es ist dieses indeß von den entwickelten Funktionen zu verstehen; denn was die unentwickelten Funktionen betrifft, deren Natur durch eine Gleichung bestimmt wird, so werden wir davon erst weiter unten, nachdem wir das Differenzial der Funktionen zweyer und mehrerer veränderlichen Größen werden finden gelehrt haben, reden können.

§. 170.

Wenn man die bisher erklärten Regeln aufmerksam überdenkt und unter einander vergleicht, so sieht man bald, daß sie insgesammt auf eine einzige allgemeine Regel zurückgeführt werden können, deren Wahrheit auch hier nicht schwer zu erkennen ist, wenn gleich der strenge Beweis derselben erst weiter hin gegeben werden kann. Es besteht nemlich eine jede algebraische Funktion aus Theilen, die durch die Addition, oder Subtraktion, oder Multiplication, oder Division unter einander verbunden, und theils rational, theils irrational sind. Man nenne also die Größen, welche die Funktion ausmachen, Theile der Funktion. Dann suche man das Differenzial eines jeden Theils so, als wenn nur dieser Theil veränderlich und die übrigen alle beständige Größen wären, und vereinige darauf alle gefundene Differenzialien zu einer Summe. Vermittelst dieser Regel lassen sich alle Funktionen ohne Ausnahme, selbst die Transcendenten differenziiren, wie nachher gezeigt werden wird.

§. 171.

Um diese Regel zu erläutern bestehe zuvörderst y aus zwey Theilen, die entweder durch die Addition oder durch die Subtraktion mit einander verbunden sind, oder es sey $y = p \pm q$. Man denke sich also erstlich bloß p als eine veränderliche, und q als eine beständige Größe, wo man denn das Differenzial dp findet. Dann nehme man bloß $\pm q$ veränderlich an, und lasse p beständig seyn, wodurch

man

man das Differenzial $\pm dq$ erhält. Aus diesen beyden Differenzialien findet man nun das gesuchte Differenzial so, daß $dy = dp \pm dq$ wird, gerade so, wie wir es bereits gefunden haben. Hieraus fällt zugleich in die Augen, daß auch das Differenzial solcher Funktionen, die aus mehrern entweder zu einander addirten oder von einander subtrahirten Theilen bestehen, nach dieser Regel gefunden werden kann. Ist z. B. $y = p \pm q \pm r \pm s$, so findet man darnach $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$, welches mit dem Obigen auf das genaueste übereinstimmt.

§. 172.

Sind die Theile mit einander multiplicirt, und also $y = pq$, so ist bekannt, daß das Differenzial, wenn man bloß p als eine veränderliche Größe betrachtet, qdp, und wenn man bloß q veränderlich seyn läßt, pdq ist. Addirt man aber diese beyden Differenzialien, so erhält man das gesuchte Differenzial $dy = qdp + pdq$, so wie es oben gefunden worden ist. Sind mehrere Größen mit einander multiplicirt, und also $y = pqrs$: so erhält man, wenn man nach und nach jede von diesen Größen allein veränderlich seyn läßt, die Differenzialien

$$qrsdp, \quad prsdq, \quad pqsdr, \quad pqrds,$$

und die Summe derselben giebt das gesuchte Differenzial

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqsdr$$

ganz so wie es oben gefunden wurde. Das Differenzial besteht daher jedesmal aus so viel Theilen, als Theile in der Funktion addirt oder subtrahirt oder mit einander multiplicirt sind.

§. 173.

Wenn die Theile der Funktion durch die Division verbunden sind, und also $y = \frac{p}{q}$ ist: so lasse man nach der gegebenen Regel erst bloß p veränderlich seyn. Weil also q eine beständige Größe ist, so ist das Differenzial $= \frac{dp}{q}$. Dann nehme man bloß q als eine veränderliche Größe an, wodurch, weil $y = pq^{-1}$ ist, das Differenzial $= -\frac{pdq}{qq}$ wird. Vereiniget man nun die gefundenen Differenzialien, so wird das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq}$$

so wie wir es bereits oben gehabt haben. Ist $y = \frac{pq}{rs}$, so findet man, wenn man wieder die einzelnen Größen p, q, r, und s nach und nach als veränderliche Größen betrachtet, die Differenzialien

$$\frac{qdp}{rs};\ \frac{pdq}{rs};\ \frac{-pqdr}{rrs};\ \frac{-pqds}{rss};$$

und es wird daher

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqsdr - pqrds}{rrss}.$$

§. 174.

Wenn also nur die einzelnen Theile, woraus die Funktion besteht, so beschaffen sind, daß man das Differenzial derselben finden kann: so ist man auch zugleich im Stande das Differenzial der ganzen Funktion zu finden. Wenn nun die Theile rationale Funktionen sind, so lassen sich ihre Differenzialien nicht nur nach den oben ertheilten Regeln finden, sondern man kann dieselben auch nach der mitgetheilten allgemeinen Regel erforschen; sind aber die Theile irrational, so kann man, da sich die Irrational-Größen auf Potestäten mit gebrochenen Exponenten reduciren lassen, das

Differenzial derselben nach der Regel für die Differenziation der Potestäten, wornach $d . x^n = n x^{n-1} dx$ ist, finden. Und da aus eben dieser Quelle auch die Regeln für die Differenziation solcher irrationalen Ausdrücke, die außerdem noch andere irrationale Größen enthalten, fließen, so erhellet, daß die hier gegebene und weiter hin zu beweisende allgemeine Regel, verbunden mit der Regel für die Differenziation der Potestäten zur Erfindung der Differenzialien aller algebraischen Funktionen hinreichend ist.

§. 175.

Aus diesem allen folgt sehr deutlich, daß, wenn y irgend eine algebraische Funktion von x ist, das Differenzial von y die Form hat, $dy = p dx$, und daß der Werth von p nach den ertheilten Regeln allemal gefunden werden kann. Es ist aber auch p eine algebraische Funktion von x, weil es durch keine andere Operationen gefunden wird, als die in den algebraischen Funktionen gewöhnlichen. Wenn daher y eine algebraische Funktion von x ist, so ist auch $\frac{dy}{dx}$ eine algebraische Funktion von x; und ist auch z eine algebraische Funktion von x, so daß $dz = q dx$ ist, so ist auch, weil q eine algebraische Funktion von x ist, $\frac{dz}{dy}$ eine algebraische Funktion von x, indem $\frac{dz}{dy} = \frac{p}{q}$ ist. Wenn also Ausdrücke wie $\frac{dz}{dy}$ in einem Ausdrucke, der übrigens algebraisch ist, vorkommen, so hindern dieselben nicht, daß der ganze Ausdruck algebraisch sey, wofern nur y und z algebraische Funktionen sind.

§. 176.

Man kann diesen Schluß auch auf die zweyten und übrigen höhern Differenzialien ausdehnen. Bleibt nemlich y eine algebraische Funktion von x, und setzt man $dy = p\,dx$, und $dp = q\,dx$; so ist, wenn man das Differenzial dx als eine beständige Größe betrachtet, $ddy = q\,dx^2$, wie oben gezeigt worden ist. Da nun der angeführten Gründe wegen q eine algebraische Funktion von x ist, so ist auch $\frac{ddy}{dx^2}$ nicht nur eine endliche Größe, sondern auch eine algebraische Funktion von x, wenn y eine algebraische Funktion von x ist. Auf eben die Art erhellet, daß auch $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$; rc. algebraische Funktionen von x seyn werden, wenn y eine solche ist; und wenn z ebenfalls eine algebraische Funktion von x ist, so sind auch alle endliche Ausdrücke, die aus den Differenzialien aller Ordnungen von y und z und aus dx zusammengesetzt sind, z. B. $\frac{ddy}{ddz}$; $\frac{d^3y}{dz\,ddy}$; $\frac{dx\,d^4y}{dy^3\,ddz}$; rc. algebraische Funktionen von x.

§. 177.

Da also die Art und Weise erklärt worden ist, wie man das erste Differenzial einer jeden algebraischen Funktion von x findet; so können wir nunmehr auf eben die Art die zweyten und höhern Differenzialien finden. Ist nemlich y irgend eine algebraische Funktion von x, so findet man durch Aufsuchung des Differenzials $dy = p\,dx$ den Werth von p. Differenziirt man nun von neuem, und findet man $dp = q\,dx$, so wird, wenn man dx beständig seyn läßt, $ddy = q\,dx^2$, und auf diese Weise wird das zweyte Differenzial gefunden. Differenziirt man nun weiter, und sucht man $dq = r\,dx$, so erhält man das dritte Differenzial $d^3y = r\,dx^3$,

$= rdx^3$, und so lassen sich, wenn man auf diesem Wege fortfährt, alle übrige höhere Differenzialien finden, weil die Größen p, q, r, rc. insgesammt algebraische Funktionen von x sind, deren Differenziation nach den gegebenen Regeln in unserer Gewalt steht. Man muß also zu diesem Ende die Differenziation fortsetzen. Läßt man nemlich bey der Differenziation von y die dx weg, so findet man $\frac{dy}{dx} = p$, und differenziirt man diese Größe von neuem, und dividirt dabey das Kommende durch dx, welches geschieht, wenn man allenthalben dx wegläßt, so bekommt man $q = \frac{ddy}{dx^2}$. Auf eine ähnliche Art erhält man $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w.

I. Ist also $y = \frac{aa}{aa + xx}$, so findet man das erste sowohl als die folgenden Differenzialien auf diese Art.

Zuvörderst findet man durchs Differenziiren und durchs Dividiren mit dx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa + xx)^2}; \text{ und hieraus ferner}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa + xx)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4 - 24aax^3}{(aa + xx)^4};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa + xx)^5};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa + xx)^6};$$

rc.

II. Ist $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$ so ist das erste und die folgenden Differenzialien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9 + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}};$$

$$\frac{d^6y}{dx^5} = \frac{225x + 4050x^2 + 5400x^4 + 720x^6}{(1 - xx)^{\frac{13}{2}}};$$

ꝛc.

Diese Differenzialien lassen sich leicht weiter fortsetzen, allein das Gesetz, nach welchem die Glieder derselben auf einander folgen, entdeckt sich nicht so leicht, obgleich der Coefficient der höchsten Potestät von x immer ein Produkt aus den Zahlen von 1 bis zu der Ordnung des Differenzials, welches man sucht, ist. Setzt man indeß die Differenziation weiter fort, und überlegt dabey das Gefundene genau, so findet man, daß überhaupt, wenn $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$ ist,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots.n}{(1 - xx)^{n+\frac{1}{2}}}\Big(x^n + \tfrac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}x \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2\ldots6}x^{n-6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-7)}{1.2\ldots\ldots8}x^{n-8} + ꝛc.\Big)$$

ist. Dergleichen Exempel dienen also nicht bloß dazu, um sich eine Fertigkeit im Differenziiren zu erwerben, sondern es sind auch die Gesetze, die man bey den Differenzialien aller Ordnungen wahrnimmt, an und für sich sehr merkwürdig, und leiten zu verschiedenen andern Erfindungen.

Sechs-

Sechstes Capitel.

Von der Differenziation der transcendenten Funktionen.

§. 178.

Von den unzähligen Arten der transcendenten oder nicht algebraischen Größen, welche die Integral-Rechnung an die Hand giebt, haben wir in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen einige häufiger vorkommende Gattungen dieser Größen untersuchen können, nemlich diejenigen, welche die Lehre von den Logarithmen und den Zirkelgrößen darbietet. Da wir nun die Natur dieser Größen so deutlich aus einander gesetzt haben, daß man sich ihrer in der Rechnung eben so leicht als der algebraischen Größen bedienen kann: so wollen wir in dem gegenwärtigen Capitel die Differenzialien derselben aufsuchen, damit ihre Beschaffenheit und Eigenschaften noch deutlicher erkannt werden mögen. Auf diese Art wird zugleich der Weg zur Integral-Rechnung, welches die eigentliche Quelle der transcendenten Größen ist, gebahnt werden.

§. 179.

Zuvörderst kommen also die logarithmischen Größen, oder solche Funktionen von x zur Betrachtung, welche außer algebraischen Ausdrücken auch einen Logarithmen von x, oder eine Funktion desselben enthalten. Da nun die algebraischen Größen hierbey keine Schwierigkeit machen können, so kommt es lediglich auf die Erfindung des Differenzials des Logarithmen einer jeden Funktion von x an. Ob es aber gleich sehr viel Arten von Logarithmen giebt, so wollen wir doch hier vorzüglich nur die hyperbolischen Logarithmen betrachten, und wir können uns darauf einschränken, weil die Logarithmen verschiedener Systeme ein beständiges Verhältniß zu einander haben, und man also aus dem hyperbolischen Logarithmen sehr leicht einen jeden andern Logarithmen finden kann. Ist nemlich der hyperbolische Logarithme einer Funktion $p = lp$, so ist der Logarithme eben dieser Funktion aus einem andern Systeme $= m\,lp$, wenn m die Zahl bedeutet, welche das Verhältniß der Logarithmen dieses Systems zu den hyperbolischen Logarithmen ausdruckt. Es soll daher der Ausdruck lp in der gegenwärtigen Untersuchung immer den hyperbolischen Logarithmen von p bedeuten.

§. 180.

Wir wollen also das Differenzial des hyperbolischen Logarithmen von x aufsuchen, und dabey $y = lx$ setzen, so daß der Werth des Differenzials dy zu bestimmen sey. Setzt man nun $x + dx$ anstatt x, so geht y in $y^{I} = y + dy$ über, und es wird daher

$$y + dy = l(x + dx) \text{ und } dy = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x}).$$

Aus der Einleitung in die Analysis des Unendlichen ist aber bekannt, daß $l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{etc.}$ ist, und setzt man daher $\frac{dx}{x}$ anstatt z, so wird

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{etc.}$$

und

und da alle folgende Glieder dieser Reihe gegen das erste verschwinden, so wird

$$d\,.\,lx = dy = \frac{dx}{x},$$

und folglich das Differenzial jedes andern Logarithmen, der sich zu dem hyperbolischen wie $n:1$ verhält, $= \frac{n\,dx}{x}$.

§. 181.

Wenn also der Logarithme irgend einer Funktion von x, die wir p nennen wollen, also lp gegeben wird, so findet man auf eben dem Wege, daß das Differenzial desselben $= \frac{dp}{p}$ ist, und so ergiebt sich für die Erfindung der Differenzialien der Logarithmen folgende Regel. Man suche das Differenzial der Größe p, deren Logarithme gegeben ist, und dividire dasselbe durch diese Größe p. Diese Regel fließt auch aus dem Ausdrucke $\frac{p^0 - 1^0}{0}$, auf welchen wir oben den Logarithmen von p reducirt haben. Es sey $\omega = 0$, so wird, weil $lp = \frac{p^\omega - 1}{\omega}$ ist, $d\,.\,lp = d\,.\,\frac{1}{\omega}p^\omega = p^{\omega-1}dp = \frac{dp}{p}$, indem $\omega = 0$ ist. Es ist aber hierbey zu bemerken, daß $\frac{dp}{p}$ das Differenzial des hyperbolischen Logarithmen von p ist, so daß man also, wenn der gemeine Logarithme von p gegeben würde, das Differenzial $\frac{dp}{p}$ noch durch die Zahl 0,43429448 ꝛc. multipliciren müßte.

§. 182.

§. 182.

Vermittelst dieser Regel kann man das Differenzial des Logarithmen einer jeden Funktion von x sehr leicht finden, welches folgende Beyspiele bestätigen werden.

I. Ist $y = lx$; so ist $dy = \frac{dx}{x}$.

II. Ist $y = lx^n$; so setze man $x^n = p$, so daß also $y = lp$ wird. Alsdenn hat man $dy = \frac{dp}{p}$, und weil $dp = nx^{n-1}dx$ ist, so wird

$$dy = \frac{ndx}{x}.$$

Eben dieses erhellet aus der Natur der Logarithmen. Denn da $lx^n = nlx$ ist, so ist auch $d.lx^n = nd.lx = \frac{ndx}{x}$.

III. Ist $y = l(1 + xx)$; so ist $dy = \frac{2xdx}{1 + xx}$.

IV. Ist $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$; so ist, weil $y = -l\sqrt{(1-xx)} = -\frac{1}{2}l(1 - xx)$ ist,

$$dy = \frac{xdx}{1 - xx}.$$

V. Ist $y = l\frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}$, so ist, weil $y = lx - \frac{1}{2}l(1 + xx)$ ist,

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1 + xx} = \frac{dx}{x(1 + xx)}.$$

VI. Ist $y = l(x + \sqrt{(1 + xx)})$ so wird

$$dy = \frac{dx + xdx : \sqrt{(1 + xx)}}{x + \sqrt{(1 + xx)}} = \frac{xdx + dx\sqrt{(1 + xx)}}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}},$$

und da der Zähler und Nenner dieses Bruchs durch $x + \sqrt{(1 + xx)}$ theilbar sind, so wird

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 + xx)}}.$$

VII.

VII. Ist $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)})$ so setze man $x\sqrt{-1} = z$. Da also nun $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(z + \sqrt{(1+zz)})$ ist, so ist wegen des Vorhergehenden $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}} dz : \sqrt{(1+zz)}$; und weil $dz = dx\sqrt{-1}$ ist, so wird

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Ob also gleich der gegebene Logarithme imaginäre Größen in sich schließt, so wird demohngeachtet das Differenzial desselben reell.

§. 183.

Wenn die Größe, deren Logarithme gegeben wird, aus Faktoren besteht, so läßt sich der Logarithme derselben in mehrere andere zerfällen. Ist z. B. $y = lpqrs$, so wird, weil $y = lp + lq + lr + ls$ ist, $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$. Die Zerfällung findet ebenfalls statt, wenn die Größe, deren Logarithme differenziirt werden soll, ein Bruch ist. Ist nemlich $y = l\frac{pq}{rs}$, so wird, weil $y = lp + lq - lr - ls$ ist, $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$. Auch die Potestäten machen keine Schwierigkeit. Denn ist $y = l\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$, so wird, weil $y = mlp + nlq - \mu lr - \nu ls$ ist, $dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}$.

1. Ist

I. Ist $y = l(a+x)(b+x)(c+x)$ so wird, weil alsdenn $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$ ist

$$dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}.$$

II. Ist $y = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$, so wird $y = \frac{1}{2} l(1+x) - \frac{1}{2} l(1-x)$ und also

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2} dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}.$$

III. Ist $y = \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, so ist $y = \frac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)}+x)$ $- \frac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)} - x)$, und also

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}.$$

Eben dieses Differenzial findet man noch leichter, wenn man den irrationalen Nenner des Bruchs $\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$ durch die Multiplication des Zählers und Nenners mit $\sqrt{(1+xx)}+x$ wegschafft. Man erhält nemlich alsdann

$$y = \tfrac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)}+x)^2 = l(\sqrt{(1+xx)}+x)$$

und davon ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} \text{ ist.}$$

IV. Ist $y = l \frac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}$, so setze man den Zähler dieses Bruchs, $\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)} = p$, und den Nenner, $\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)} = q$, wodurch $y = l\frac{p}{q}$ $= lp - lq$, und $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$ wird. Da nun

$$dp = \frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} - \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}(\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)})$$

$$= \frac{-q\,dx}{2\sqrt{(1-xx)}};\ \text{und}$$

dq=

$dq = \frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} + \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{p\,dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$ ist, so wird

$$\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-q\,dx}{2p\sqrt{(1-xx)}} - \frac{p\,dx}{2q\sqrt{(1-xx)}} = \frac{-(pp+qq)dx}{2pq\sqrt{(1-xx)}}$$

und da $pp + qq = 4$, und $pq = 2x$ ist, so wird

$$dy = -\frac{dx}{x\sqrt{(1-xx)}}.$$

Dieses Differenzial findet man aber auf eine leichtere Art, wenn man den gegebenen Logarithmen auf diese Art verwandelt,

$$y = l\frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{x} = l\left(\frac{1}{x} + \sqrt{(\frac{1}{xx}-1)}\right)$$

indem man nemlich den Zähler und den Nenner durch $\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}$ multiplicirt. Denn setzt man dabey $\frac{1}{x} + \sqrt{(\frac{1}{xx} - 1)} = p$, so wird

$$dp = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3\sqrt{(\frac{1}{xx}-1)}} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx\sqrt{(1-xx)}}$$

$$= \frac{-dx(1+\sqrt{(1-xx)})}{xx\sqrt{(1-xx)}}, \text{ und also, da } p = \frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{x}$$

ist

$$dy = \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x\sqrt{(1-xx)}}, \text{ wie vorhin.}$$

§. 184.

Da nun die ersten Differenzialien, wenn man sie durch dx dividirt, algebraische Größen werden, so lassen sich die zweyten und die folgenden Differenzialien nach den Vorschriften des vorhergehenden Capitels leicht finden, vorausgesetzt, daß das Differenzial dx als eine beständige Größe betrachtet wird. So ist, wenn man $y = lx$ setzt

dy =

$$dy = \frac{dx}{x}, \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x};$$

$$ddy = \frac{-dx^2}{x^2}, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2};$$

$$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}, \text{ und } \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{2}{x^3};$$

$$d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4}, \text{ und } \frac{d^3y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4};$$

rc.

Und wenn p eine algebraische Größe, und $y = lp$ ist, so sind auch, wenn gleich y keine algebraische Größe ist, doch $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$; rc. algebraische Funktionen von x.

§. 185.

Nachdem auf diese Art die Differenziation der Logarithmen erklärt worden ist, so lassen sich die Funktionen, die aus algebraischen und logarithmischen Größen bestehen, leicht differenziiren; und eben so wenig Schwierigkeit machen die Größen, die allein aus den Logarithmen zusammengesetzt werden. Folgende Beyspiele werden dieses deutlich machen.

I. Ist $y = (lx)^2$, so setze man $lx = p$. Da nun $y = p^2$ ist, so wird $dy = 2pdp$, und da $dp = \frac{dx}{x}$ ist, so ist

$$dy = \frac{2dx}{x} lx.$$

II. Eben so wird, wenn $y = (lx)^n$ ist, $dy = \frac{ndx}{x}(lx)^{n-1}$, und wenn also $y = \sqrt{lx}$ ist, so ist, weil alsdenn $n = \frac{1}{2}$ wird,

$$dy = \frac{dx}{2x\sqrt{lx}}.$$

III. Ist ferner p irgend eine Funktion von x, und $y = (lp)^n$ so wird $dy = \frac{ndp}{p}(lp)^{n-1}$. Da nun das Differenzial von p nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann, so ist dadurch auch das Differenzial von y bekannt.

IV. Ist $y = lp \cdot lq$, und sind p und q Funktionen von x, so ist nach der obigen von den Faktoren gegebenen Regel $dy = \frac{dp}{p}lq + \frac{dq}{q}lp$.

V. Wenn $y = xlx$ ist, so findet man nach eben der Regel $dy = dxlx + \frac{xdx}{x} = dxlx + dx$.

VI. Ist $y = x^m lx - \frac{1}{m}x^m$, so findet man, wenn man die Differenzialien der Theile aufsucht, $d.x^m lx = mx^{m-1}dxlx + x^{m-1}dx$, und $d.\frac{1}{m}x^m = x^{m-1}dx$. Es wird also $dy = mx^{m-1}dxlx$.

VII. Ist $y = x^m(lx)^n$ so wird $dy = mx^{m-1}dx(lx)^n + nx^{m-1}dx(lx)^{n-1}$.

VIII. Kommen Logarithmen von Logarithmen vor, z. B. wenn $y = llx$ ist, so setze man $lx = p$, wodurch $y = lp$, und $dy = \frac{dp}{p}$ wird. Es ist aber $dp = \frac{dx}{x}$, und also wird $dy = \frac{dx}{xlx}$.

IX. Ist $y = lllx$ so wird, wenn man $lx = p$ setzt, $y = llp$, und also nach dem vorhergehenden Exempel $dy = \frac{dp}{plp}$. Da nun $dp = \frac{dx}{x}$ ist, so wird $dy = \frac{dx}{xlx \cdot llx}$.

§. 186.

Nach dieser Erklärung der Differenziation der Logarithmen wollen wir zu den Exponential-Größen oder zu den Potestäten, deren Exponent eine veränderliche Größe ist, fortgehen. Von dergleichen Funktionen von x lassen sich die Differenzialien durch die Differenziation der Logarithmen auf folgende Art finden. Soll das Differenzial von a^x gefunden werden, so setze man $y = a^x$, wodurch denn, wenn man die Logarithmen nimmt, $ly = xla$ wird. Differenziirt man nun, so wird $\frac{dy}{y} = dxla$, und also $dy = ydxla$; und da $y = a^x$ ist, so wird ferner $dy = a^x dxla$, und dieses ist das gesuchte Differenzial von a^x. Auf eine ähnliche Art findet man, wenn p eine Funktion von x ist, daß das Differenzial der Exponential-Größe $a^p = a^p dpla$ ist.

§. 187.

Eben dieses Differenzial kann aber auch aus dem, was in der Einleitung über die Natur der Exponential Größen gesagt worden ist, unmittelbar abgeleitet werden. Es sey der Ausdruck a^p gegeben, worin p eine Funktion von x bedeute, so daß, wenn man $x + dx$ statt x setzt, p in $p + dp$ übergehe. Setzt man daher $y = a^p$, so wird, wenn x in $x + dx$ übergeht, $y + dy = a^{p+dp}$, und also $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^{dp} - 1)$. Nun ist aber gezeigt worden, daß man jede Exponential-Größe a^z durch folgende Reihe, $1 + zla + \frac{z^2(la)^2}{2} + \frac{z^3(la)^3}{6} +$ 2c. ausdrucken kann. Es wird demnach $a^{dp} = 1 + dpla + \frac{dp^2(la)^2}{2} +$ 2c., und $a^{dp} - 1 = dpla$, weil die folgenden Glieder insgesamt gegen dpla verschwinden; und es ist folglich $dy = d.a^p = a^p dpla$.

Es

Es ist also das Differenzial einer Exponential-Größe ein Produkt aus der Exponential-Größe, aus dem Differenziale des Exponenten, dp, und aus dem Logarithmen der beständigen Größe a, in der veränderlichen Potestät des gedachten Exponenten.

§. 188.

Ist also e die Zahl, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist, so ist das Differenzial von $e^x = e^x dx$ Betrachtet man daher dx als eine beständige Größe, so wird das Differenzial von $e^x dx = e^x dx^2$, und dieses ist das zweyte Differenzial von e^x. Eben so wird das dritte Differenzial $= e^x dx^3$. Ist daher $y = e^{nx}$, so wird $\frac{dy}{dx} = ne^{nx}$; $\frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}$; $\frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx}$; u. s. f. Man sieht hieraus, daß das erste, das zweyte und die folgenden Differenzialien von e^{nx} in einer geometrischen Progression stehen, und daß $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$, und folglich $\frac{d^m y}{y\,dx^m}$ eine beständige Größe $= n^m$ ist.

§. 189.

Wenn die zu einer veränderlichen Potestät erhobene Größe selbst eine veränderliche Größe ist, so findet man das Differenzial derselben auf eine ähnliche Art. Es seyen p und q Funktionen von x, und $y = p^q$. Nimmt man nun die Logarithmen, so wird $ly = qlp$, und differenziirt man, so wird $\frac{dy}{y} = dqlp + \frac{qdp}{p}$, woraus sich denn $dy = ydqlp + \frac{yqdp}{p} = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$ ergiebt, weil $y = p^q$ ist.

Es besteht also dieses Differenzial aus zwey Theilen, wovon der erste $p^q dq lp$ gefunden wird, wenn man die gegebene Größe p^q auf die Art differenziirt, als wenn p eine beständige und bloß der Exponent q eine veränderliche Größe wäre; der andere hingegen, nemlich $qp^{q-1}dp$, wenn man in der gegebenen Größe p^q den Exponenten q als eine beständige, und bloß p als eine veränderliche Größe behandelt. Es hätte daher dieses Differenzial auch nach der oben mitgetheilten allgemeinen Regel gefunden werden können.

§. 190.

Es läßt sich aber auch das Differenzial von p^q aus dem, was über die Natur der Exponential-Größen gesagt worden ist, herleiten. Ist nemlich $y = p^q$, so wird, wenn man $x + dx$ anstatt x setzt, $y + dy = (p + dp)^{q+dq}$, und löset man diesen Ausdruck auf die gewöhnliche Art in eine Reihe auf, so wird

$$y+dy = p^{q+dq} + (q+dq)p^{q+dq-1}dp + \frac{(q+dq)(q+dq-1)}{1 \cdot 2}p^{q+dq-2}dp^2$$

$$+ \text{etc.; und also}$$

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)p^{q+dq-1}dp,$$

weil alle folgende Glieder, die eine höhere Potestät von dp enthalten, gegen $(q + dq)p^{q+dq-1}dp$ verschwinden. Nun ist aber $p^{q+dq} - p^q = p^q(p^{dq} - 1) = p^q(1 + dqlp + \frac{dq^2(lp)^2}{2} + \text{etc.} - 1) = p^q dqlp$, und setzt man in dem andern Gliede q für $q + dq$, so wird daraus $qp^{q-1}dp$. Folglich ist das gesuchte Differenzial wieder das vorige, oder es ist $dy = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$.

§. 191.

Noch leichter leitet man dieses Differenzial aus dem Angeführten auf folgende Art her. Da, wenn e die Zahl bedeu-

bedeutet, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist, $p^q = e^{qlp}$ wird, indem beyder Größen Logarithmen $= qlp$ sind: so wird $y = e^{qlp}$. Da nun hier die zur veränderlichen Potestät erhobene Größe eine beständige Größe ist: so wird $dy = e^{qlp}(dqlp + \frac{qdp}{p})$ wie vorhin §. 187. gelehret worden ist. Setzt man aber nun wieder p^q anstatt e^{qlp}, so wird

$$dy = p^q dqlp + p^q q dp : p = p^q dqlp + qp^{q-1}dp.$$

Wenn also $y = x^x$ ist, so wird $dy = x^x dxlx + x^x dx$; und daraus lassen sich denn auch die fernern Differenzialien leicht finden. Es wird nemlich

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x(\frac{1}{x} + (1 + lx)^2)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x((1 + lx)^3 + \frac{3(1 + lx)}{x} - \frac{1}{xx})$$

2c.

§. 192.

Unter den Differenzialien derer Funktionen, die Exponential-Größen in sich schließen, sind vorzüglich folgende Beyspiele zu merken, die aus der Differenziation der Formel $e^x p$ entspringen. Es ist aber

$$d.e^x p = e^x dp + e^x p dx = e^x(dp + pdx).$$

I. Ist $y = e^x x^n$, so ist $dy = e^x n x^{n-1} dx + e^x x^n dx$, oder
$$dy = e^x dx(nx^{n-1} + x^n).$$

II. Ist $y = e^x(x - 1)$; so ist
$$dy = e^x x dx.$$

III. Ist $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$; so ist
$$dy = e^x xx dx.$$

IV. Ist $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$; so ist
$$dy = e^x x^3 dx.$$

§. 193.

Wenn die Exponenten ebenfalls Exponential-Größen sind, so wird die Differenziation nach eben den Regeln verrichtet. Soll z. B. das Differenzial von e^{e^x} gesucht werden, so setze man $e^x = p$, wodurch denn $e^{e^x} = e^p$, und $dy = e^p dp$ wird. Es ist aber $dp = e^x dx$, und wenn also

$$y = e^{e^x} \text{ ist, so wird } dy = e^{e^x} e^x dx;$$

und wenn

$$y = e^{e^{e^x}} \text{ ist, so wird } dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx.$$

Ist hingegen $y = p^{q^r}$, so setze man $q^r = z$, wodurch $dy = p^z dz lp + zp^{z-1} dp$ wird. Da nun aber $dz = q^r dr lp + rq^{r-1} dp$ ist, so wird $dy = p^z q^r dr lp . lp + p^z r q^{r-1} dq lp + p^z q^r dp : p$. Wenn also $y = p^{q^r}$ ist, so wird

$$dy = p^{q^r} q^r \left(dr lp . lq + \frac{rdqlp}{q} + \frac{dp}{p}\right).$$

Auf diese Weise lassen sich also die Differenzialien von allen Arten der Exponential-Größen finden.

§. 194.

Wir wollen daher zu denjenigen transcendenten Größen fortgehen, zu welchen uns die Betrachtung der Kreisbogen geführt hat. Es sey von einem Kreise, dessen Halbmesser beständig $= 1$ gesetzt werden soll, ein Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, gegeben, (diesen Bogen wollen wir durch $A . \sin . x$ ausdrucken), und dabey sey das Differenzial dieses Bogens, oder der Zuwachs, welchen er bekommt, wenn man $x + dx$ anstatt x setzt, zu bestimmen. Dies läßt sich vermittelst der Logarithmen thun, weil wir in der Einleitung gezeigt

zeigt haben, daß der Ausdruck A. sin. x auf diesen logarithmischen Ausdruck gebracht werden kann: $\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1})$. Setzt man also $y = A.\sin. x$, so ist auch $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}(\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1})$ und daraus findet man durch die Differenziation

$$dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{-xdx}{\sqrt{(1-xx)}} + dx\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{dx(x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)})}{(\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1})\sqrt{(1-xx)}}$$

und es wird also $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

§. 195.

Es läßt sich aber dieses Differenzial eines Kreisbogens noch leichter ohne Hülfe der Logarithmen finden. Ist nemlich $y = A.\sin. x$, so ist x der Sinus des Bogens y, oder $x = \sin. y$. Da nun y, wenn man $x + dx$ anstatt x setzt, in $y + dy$ übergeht, so wird $x + dx = \sin.(y + dy)$. Da aber

$\sin.(a + b) = \sin. a.\cos. b + \cos. a.\sin. b$ ist, so wird

$\sin.(y + dy) = \sin. y.\cos. dy + \cos. y.\sin. dy$.

Nun ist der Sinus eines verschwindenden Bogens dy dem Bogen dy selbst, und der Cosinus dem Radius gleich. Daher wird

$\sin.(y + dy) = \sin. y + \cos. y.dy$, und also

$x + dx = \sin. y + \cos. y.dy$.

Da aber $\sin. y = x$ ist, so wird $\cos. y = \sqrt{(1-xx)}$, und durch die Substitution dieser Werthe wird $dx = dy\sqrt{(1-xx)}$ und also endlich

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}.$$

Das Differenzial eines Bogens, dessen Sinus gegeben ist, ist daher dem Differenziale des Sinus, durch den Cosinus dividirt, gleich.

§. 196.

Da also, wenn p irgend eine Funktion von x ist, und y einen Bogen bedeutet, dessen Sinus $= p$ ist, das Differenzial dieses Bogens $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1 - pp)}}$ ist, und $\sqrt{(1-pp)}$ den Cosinus eben desselben Bogens ausdruckt: so läßt sich hieraus das Differenzial des Bogens finden, dessen Cosinus gegeben ist. Ist nemlich $y = A . \text{cos}. x$, so ist der Sinus eben desselben Bogens $= \sqrt{(1-xx)}$, und also $y = A . \text{sin}. \sqrt{(1-xx)}$. Setzt man also $p = \sqrt{(1-xx)}$, so wird $dp = \frac{-xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, und $\sqrt{(1-pp)} = x$; woraus sich denn $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$ ergiebt. Es ist also das Differenzial eines Bogens, dessen Cosinus gegeben ist, gleich dem Differenziale des Cosinus, negativ genommen, und durch den Sinus eben desselben Bogens dividirt. Eben dieses läßt sich auch auf folgende Art zeigen. Es sey $y = A . \text{cos}. x$. Setzt man $z = A . \text{sin}. x$, so wird $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$. Da aber $y + z = 90^0$ ist, so ist $y + z$ eine beständige Größe, und also $dy + dz = 0$, oder $dy = - dz$. Hieraus folgt $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$ wie vorhin.

§. 197.

Soll das Differenzial eines Bogens gesucht werden, dessen Tangente gegeben worden, so daß $y = A.\text{tang}.x$ ist: so ist der Sinus eines Bogens, dessen Tangente x ist, $= \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, und der Cosinus $= \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$. Setzt man also $\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} = p$, so daß $\sqrt{(1-pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$ wird: so wird $y = A.\sin.p$, und es ist daher $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. Da aber $p = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ ist, so wird $dp = \frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$; und substituirt man diese Werthe, so findet man $dy = \frac{dx}{1+xx}$. Es ist also das Differenzial eines Bogens, dessen Tangente gegeben ist, gleich dem Differenziale der Tangente, durch das Quadrat der Secante dividirt. Denn wenn x die Tangente ist, so ist $\sqrt{(1+xx)}$ die Secante.

§. 198.

Ist ein Bogen gegeben, dessen Cotangente bekannt ist, so daß $y = A.\cot.x$ ist, so setze man die Tangente eben dieses Bogens, oder $\frac{1}{x} = p$, wodurch denn $y = A.\text{tang}.p$ und also $dy = \frac{dp}{1+pp}$ wird. Da nun $dp = \frac{-dx}{xx}$ ist, so wird durch die Substitution dieses Werthes $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, welches das Differenzial der Cotangente negativ genommen, und durch das Quadrat der Cosecante dividirt ist.

Ist ferner $y = A.\,\mathrm{sec}.\,x$, so wird, weil alsdenn $y = A.\,\mathrm{cos}.\,\frac{1}{x}$ ist, $dy = \frac{dx}{xx\sqrt{(1-\frac{1}{xx})}} = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Ist aber $y = A.\,\mathrm{cosec}.\,x$; so wird $y = A.\,\mathrm{sin}.\,\frac{1}{x}$, und folglich $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$.

Oft kommt auch der Quersinus vor. Ist daher $y = A.\,\mathrm{sv}.\,x$, so wird $y = A.\,\mathrm{cos}.\,(1-x)$; und da der Sinus dieses Bogens $= \sqrt{(2x-xx)}$ ist, so wird $dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$.

§. 199.

Ob also gleich jeder Bogen, dessen Sinus, oder Cosinus, oder Tangente, oder Cotangente, oder Secante, oder Cosecante, oder Quersinus gegeben ist, zu den transcendenten Größen gehört: so ist doch sein Differenzial, wenn es durch dx dividirt wird, eine algebraische Größe, und eben das sind daher auch seine zweyten, dritten und folgenden Differenzialien, wenn sie durch die zu ihnen gehörigen Potestäten von dx dividirt werden. Damit aber diese Differenziation desto geläufiger werde, mögen noch folgende Beyspiele hier stehen.

I. Ist $y = A.\,\mathrm{sin}.\,2x\sqrt{(1-xx)}$ so setze man $p = 2x\sqrt{(1-xx)}$ so daß $y = A.\,\mathrm{sin}.\,p$ wird; alsdann ist $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. Nun ist aber $dp = 2dx\sqrt{(1-xx)} - \frac{2xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2dx(1-2xx)}{\sqrt{(1-xx)}}$, und $\sqrt{(1-pp)} = 1-2xx$. Substituirt man daher diese Werthe, so wird $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Dies

Dies erhellet auch daraus, weil $2x\sqrt{(1-xx)}$ der Sinus des doppelten Bogens ist, wenn x den Sinus des einfachen Bogens bedeutet. Hiernach ist nemlich $y = 2A.\sin.x$, und also $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

II. Ist $y = A.\sin.\frac{1-xx}{1+xx}$; so setze man $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, wodurch $dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2}$, und $\sqrt{(1-pp)} = \frac{2x}{1+xx}$ wird. Da also $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$ ist, so wird $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

III. Ist $y = A.\sin.\sqrt{\frac{1-x}{2}}$, so setze man $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$. Hierdurch wird $\sqrt{(1-pp)} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, und $dp = \frac{-dx}{4\sqrt{(\frac{1-x}{2})}}$; folglich $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$.

IV. Ist $y = A.\tang.\frac{2x}{1-xx}$, so setze man $p = \frac{2x}{1-xx}$, wodurch $1 + pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$, und $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$ wird. Da also $dy = \frac{dp}{1+pp}$, nach der §.197. für die Tangenten gefundenen Regel, so ist $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

V. Ist $y = A.\tang.\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, so wird, wenn man $\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x} = p$ setzt, $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx}$, und $1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx} = \frac{2(\sqrt{(1+xx)}-1)\sqrt{(1+xx)}}{xx}$.

Nun

Nun ist aber $dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-1)}{xx\sqrt{(1+xx)}}$.

Da also $dy = \frac{dp}{1+pp}$ ist, so wird $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$ welches man auch daraus erkennt, weil A. tang. $\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$ $= \frac{1}{2}$ A. tang. x ist.

VI. Ist $y = e^{A.\sin.x}$, so läßt sich auch diese Formel nach dem Vorhergehenden differenziiren; es wird nemlich $dy = e^{A.\sin.x} \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Auf diese Art lassen sich also alle Funktionen von x, in welchen außer den Logarithmen und Exponential-Größen auch Kreisbogen vorkommen, differenziiren.

§. 200.

Da die Differenzialien der Bogen, wenn man sie durch dx dividirt, algebraische Größen werden, so lassen sich auch ihre zweyten und folgenden Differenzialien nach dem, was wir von der Differenziation der algebraischen Funktionen gesagt haben, finden. Es sey $y = A.\sin.x$. Da nun $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ist, so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$; und da das Differenzial hiervon den Werth von $\frac{ddy}{dx^2}$ giebt, wenn man dx als eine beständige Größe betrachtet: so sind die Differenzialien von y folgende:

Wenn $y = A.\sin.$ ist, so ist

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$; u. wenn man dx beständig nimmt,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

d^3y

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}}$$

rc.

und hieraus schließen wir wie oben §. 177, daß allgemein seyn werde

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots \cdot n}{(1 - xx)^{n+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\left(x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^{n-6} + \text{rc.}\right)$$

§. 201.

Nun sind noch die Größen, die aus der Umkehrung der bisherigen sich ergeben, oder die Sinus und Tangenten gegebener Bogen, übrig, und wir wollen daher jetzt untersuchen, wie man die Differenzialien dieser Größen findet. Es sey also x ein Kreisbogen, und $\sin. x$ sein Sinus, dessen Differenzial gesucht werden soll. Man setze $y = \sin. x$. Weil nun y, wenn man $x + dx$ für x setzt, in $y + dy$ übergeht, so wird

$$y + dy = \sin. (x + dx), \text{ und } dy = \sin. (x + dx) - \sin. x.$$

Da aber $\sin. (x + dx) = \sin. x \cos. dx + \cos. x \sin. dx$, und nach dem was in der Einleitung 1. Th. §. 134. f. gesagt worden,

sin. z

$$\sin. z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \text{ꝛc.}$$

$$\cos. z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

ist: so wird, wenn man die verschwindenden Glieder wegläßt, $\cos. dx = 1$, und $\sin. dx = dx$; folglich $\sin. (x + dx) = \sin. x + dx . \cos. x$. Ist also $y = \sin. x$, so ist $dy = dx . \cos. x$. Das Differenzial des Sinus eines Bogens ist also ein Produkt aus dem Differenziale dieses Bogens in den Cosinus desselben. Ist daher p irgend eine Funktion von x, so ist auf gleiche Art $d . \sin. p = dp . \cos. p$.

§. 202.

Ferner sey $\cos. x$, oder der Cosinus eines Bogens x gegeben, und sein Differenzial zu bestimmen. Es sey also $y = \cos. x$, so wird, wenn man $x + dx$ für x setzt, $y + dy = \cos. (x + dx)$. Da nun $\cos. (x + dx) = \cos. x . \cos. dx - \sin. x . \sin. dx$, und, wie wir so eben gesehen haben, $\cos. dx = 1$, und $\sin. dx = dx$ ist: so wird $y + dy = \cos. x - dx . \sin. x$, und folglich $dy = - dx . \sin. x$. Es ist daher das Differenzial des Cosinus eines jeden Bogens ein Produkt aus dem Differenziale des Bogens, negativ genommen, in den Sinus eben desselben Bogens. Ist also p irgend eine Funktion von x, so ist auch $d . \cos. p = - dp . \sin. p$.

Diese Differenzialien hätte man auch aus dem Vorhergehenden auf folgende Art finden können. Ist $y = \sin. p$, so ist $p = A . \sin. y$, und $dp = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$. Da aber $y = \sin. p$ ist, so ist $\cos. p = \sqrt{(1 - yy)}$, und gebraucht man diese Werthe, so wird $dp = \frac{dy}{\cos. p}$, also $dy = dp . \cos. p$

wie

wie vorhin. Eben so wird, wenn $y = \text{cos.}\, p$ ist, $\sqrt{(1-yy)} = \text{sin.}\, p$, und $p = \text{A.}\,\text{cos.}\, y$; folglich $dp = \frac{-dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{-dy}{\text{sin.}\, p}$; woraus sich denn $dy = -dp \,.\, \text{sin.}\, p$ wie vorhin ergiebt.

§. 203.

Ist $y = \text{tang.}\, x$, so wird $dy = \text{tang.}\,(x + dx) - \text{tang.}\, x$. Nun ist aber $\text{tang.}\,(x + dx) = \frac{\text{tang.}\, x + \text{tang.}\, dx}{1 - \text{tang.}\, x \,.\, \text{tang.}\, dx}$, und davon tang. x abgezogen, so bleibt

$$dy = \frac{\text{tang.}\, dx\,(1 + \text{tang.}\, x \,.\, \text{tang.}\, x)}{1 - \text{tang.}\, x \,.\, \text{tang.}\, dx}$$

übrig. Da ferner die Tangente eines verschwindenden Bogens dx dem Bogen selbst gleich ist, so wird $\text{tang.}\, dx = dx$, folglich der Nenner des gefundenen Bruchs $1 - dx \,.\, \text{tang.}\, x = 1$, und also $dy = dx\,(1 + (\text{tang.}\, x)^2)$. Endlich ist $1 + (\text{tang.}\, x)^2 = (\text{sec.}\, x^2) = \frac{1}{(\text{cos.}\, x)^2}$; und daher wird, wenn $y = \text{tang.}\, x$ ist, $dy = dx\,(\text{sec.}\, x)^2 = \frac{dx}{(\text{cos.}\, x)^2}$.

Eben dieses Differenzial kann man auch durch die Differenziation der Sinus und Cosinus finden. Denn da $\text{tang.}\, x = \frac{\text{sin.}\, x}{\text{cos.}\, x}$ ist: so wird

$$dy = \frac{dx \,.\, \text{cos.}\, x \,.\, \text{cos.}\, x + dx \,.\, \text{sin.}\, x \,.\, \text{sin.}\, x}{(\text{cos.}\, x)^2} = \frac{dx}{(\text{cos.}\, x)^2}$$

weil $(\text{sin.}\, x)^2 + (\text{cos.}\, x)^2 = 1$ ist.

§. 204.

Auch auf folgende Art läßt sich dieses Differenzial finden. Da $y = \text{tang.}\, x$ ist, so ist $x = \text{A.}\,\text{tang.}\, y$, und also nach dem Obigen $dx = \frac{dy}{1 + yy}$. Da aber $y = \text{tang.}\, x$ ist, so wird $\sqrt{(1 + yy)} = \text{sec.}\, x = \frac{1}{\text{cos.}\, x}$, und also $dx = dy.(\text{cos.}\, x)^2$, und $dy = \frac{dx}{(\text{cos.}\, x)^2}$, wie vorhin. Es ist also das Differenzial der Tangente eines Bogens gleich dem Differenziale dieses Bogens durch das Quadrat des Cosinus desselben dividirt. Auf ähnliche Art findet man das Differenzial der Cotangente. Ist nemlich $y = \text{cot.}\, x$, so wird $x = \text{A.}\,\text{cot.}\, y$, und $dx = \frac{-dy}{1 + yy}$. Nun ist aber $\sqrt{(1 + yy)} = \text{cosec.}\, x = \frac{1}{\text{sin.}\, x}$, folglich $dx = -dy.(\text{sin.}\, x)^2$, und $dy = \frac{-dx}{(\text{sin.}\, x)^2}$. Das Differenzial der Cotangente eines Bogens ist daher gleich dem Differenziale dieses Bogens, negativ genommen, und durch das Quadrat des Sinus eben dieses Bogens dividirt. Oder da $\text{cot.}\, x = \frac{\text{cos.}\, x}{\text{sin.}\, x}$ ist, so wird, wenn man diesen Bruch differenziirt,

$$dy = \frac{-dx(\text{sin.}\, x)^2 - dx(\text{cos.}\, x)^2}{(\text{sin.}\, x)^2} = \frac{-dx}{(\text{sin.}\, x)^2}.$$

§. 205.

Ist die Secante eines Bogens gegeben, und also $y = \text{sec.}\, x$; so ist, weil $y = \frac{1}{\text{cos.}\, x}$ ist, $dy = \frac{dx\,.\,\text{sin.}\, x}{(\text{cos.}\, x)^2} = dx\,.\,\text{tang.}\, x\,.\,\text{sec.}\, x$. Eben so ist, wenn $y = \text{cosec.}\, x$ ist, wegen

wegen $y = \frac{1}{\sin.x}$, $dy = \frac{-dx.\cos.x}{(\sin.x)^2} = - dx.\cot.x.\mathrm{cosec}.x$, und es würde überflüßig seyn, diese Differenziationen durch besondere Regeln zu bestimmen. Ist der Quersinus eines Bogens gegeben, und also $y = \mathrm{sv}.x$, so ist, weil $y = 1 - \cos.x$ ist, $dy = dx.\sin.x$. Es lassen sich also die Differenzialien aller trigonometrischen Linien, da man eine jede derselben durch den Sinus und Cosinus ausdrucken kann, ohne Schwierigkeit finden. Auch reichen die gegebenen Regeln nicht bloß zur Erfindung der ersten Differenzialien, sondern auch zur Erforschung der zweyten und aller folgenden hin. Denn ist $y = \sin.x$, $z = \cos.x$, und dx eine beständige Größe: so ist

$$
\begin{array}{llll}
y = & \sin.x; & z = & \cos.x; \\
dy = & dx.\cos.x; & dz = & - dx.\sin.x; \\
ddy = & - dx^2.\sin.x; & ddz = & - dx^2.\cos.x; \\
d^3y = & - dx^3.\cos.x; & d^3z = & dx^3.\sin.x; \\
d^4y = & dx^4.\sin.x; & d^4z = & dx^4.\cos.x; \\
 & \text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}
$$

§. 206.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die Differenzialien aller Ordnungen von der Tangente eines Bogens x finden. Denn setzt man $y = \mathrm{tang}.x = \frac{\sin.x}{\cos.x}$, und dx beständig, so ist

$$y = \frac{\sin.x}{\cos.x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\cos.x)^2};$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2\sin.x}{(\cos.x)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{(\text{cos. } x)^4} - \frac{4}{(\text{cos. } x)^2};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \,\text{sin. } x}{(\text{cos. } x)^5} - \frac{8 \,\text{sin. } x}{(\text{cos. } x)^3};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{(\text{cos. } x)^6} - \frac{120}{(\text{cos. } x)^4} + \frac{16}{(\text{cos. } x)^2};$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720 \,\text{sin. } x}{(\text{cos. } x)^7} - \frac{480 \,\text{sin. } x}{(\text{cos. } x)^6} + \frac{32 \,\text{sin. } x}{(\text{cos. } x)^3};$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{(\text{cos. } x)^8} - \frac{6720}{(\text{cos. } x)^6} + \frac{2016}{(\text{cos. } x)^4} - \frac{64}{(\text{cos. } x)^2}$$

2c.

§. 207.

Nach diesen Regeln lassen sich also alle Funktionen, in welchen Sinus und Cosinus vorkommen, differenziiren, welches durch folgende Beyspiele klar werden wird.

I. Ist $y = 2 \,\text{sin. } x \,.\, \text{cos. } x = \text{sin. } 2x$, so ist
$dy = 2dx \,.\, (\text{cos. } x)^2 - 2dx(\text{sin. } x)^2 = 2dx \,.\, \text{cos. } 2x$.

II. Ist $y = \sqrt{\frac{1 - \text{cos. } x}{2}}$, oder $y = \text{sin. } \frac{1}{2}x$, so wird

$dy = \frac{dx \,.\, \text{sin. } x}{2\sqrt{2(1 - \text{cos. } x)}}$. Da aber $\sqrt{2(1 - \text{cos. } x)} = 2 \,\text{sin. } \frac{1}{2}x$, und $\text{sin. } x = 2 \,\text{sin. } \frac{1}{2}x \,.\, \text{cos. } \frac{1}{2}x$ ist, so wird ferner $dy = \frac{1}{2}dx \,.\, \text{cos. } \frac{1}{2}x$, wie sich auch aus der Form $y = \text{sin. } \frac{1}{2}x$ unmittelbar ergiebt.

III. Ist $y = \text{cos. } l\frac{1}{x}$, so wird, wenn man $l\frac{1}{x} = p$ setzt, $y = \text{cos. } p$, und $dy = -dp \,.\, \text{sin. } p$. Da aber $p = l1 - lx$ ist, so wird $dp = \frac{-dx}{x}$, und folglich

$dy = \frac{dx}{x} \text{sin. } l\frac{1}{x}$.

IV. Ist $y = e^{\sin. x}$; so wird $dy = e^{\sin. x} dx . \cos. x$.

V. Ist $y = e^{\frac{-n}{\cos. x}}$, so wird $dy = - \frac{e^{\frac{-n}{\cos. x}} n dx . \sin. x}{(\cos. x)^2}$.

VI. Ist $y = l(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})})$ so setze man $e^{\frac{-n}{\sin. x}} = p$. Da nun alsdann $y = l(1 - \sqrt{(1 - p)})$ wird, so findet man $dy = \frac{dp}{2(1 - \sqrt{(1-p)})\sqrt{(1-p)}}$. Da aber $dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin. x}} n dx . \cos. x}{(\sin. x)^2}$ ist, so bekommt man, wenn man diesen Werth substituirt,

$$dy = \frac{-n e^{\frac{-n}{\sin. x}} dx . \cos. x}{2(\sin. x)^2 (1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})})\sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})}}.$$

Siebentes Capitel.

Von der Differenziation der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

§. 208.

Wenn zwey oder mehrere veränderliche Größen x, y, z, von einander unabhängig sind, so kann, obgleich eine jede von ihnen veränderlich ist, dennoch die eine davon wachsen oder abnehmen, ohne daß deswegen die übrigen eine Veränderung erfahren; denn da sie keinen Zusammenhang unter einander haben, so zieht auch die Veränderung der einen die Veränderung der übrigen nicht nach sich. Es hängen daher auch die Differenzialien von y und z nicht von dem Differenziale von x ab, und es können folglich, wenn x um sein Differenzial dx vermehrt wird, y und z entweder dieselben bleiben, oder nach Gefallen verändert werden. Wenn man daher dx das Differenzial von x seyn läßt, so bleiben die Differenzialien der übrigen Größen, nemlich dy und dz unbestimmt, und können nach Gefallen als Null oder als unendlich kleine Größen, die zu dx ein gewisses Verhältniß haben, betrachtet werden.

§. 209.

Es pflegen aber meistens die Buchstaben y und z unbekannte oder solche Funktionen von x zu bedeuten, deren Verhältniß

hältniß zu x nicht bekannt ist, und in diesem Falle haben die Differenzialien dy und dz zu dx ein gewisses Verhältniß. Es mögen indeß y und z von x abhangen oder nicht, so bleibt die Art die Differenzialien dieser Größen zu finden, welche wir jetzt betrachten wollen, dieselbe. Wir wollen nemlich das Differenzial einer Funktion mehrerer veränderlichen Größen x, y, z suchen, welches sie bekömmt, wenn alle ihre veränderlichen Größen x, y, z um ihre Differenzialien dx, dy, dz wachsen, und dabey kann die Funktion übrigens beschaffen seyn, wie sie will. Um dieses Differenzial zu finden, setzt man in der Funktion anstatt der veränderlichen Größen x, y, z, allenthalben $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, und zieht von dem daraus sich ergebenden Ausdrucke die gegebene Funktion ab. Der Rest giebt, wie aus dem, was wir über die Natur der Differenzialien gesagt haben, hinlänglich erhellet, das gesuchte Differenzial.

§. 210.

Es sey X eine Funktion von x, und ihr Differenzial, oder ihr Zuwachs, wenn x um dx wächst, sey $= Pdx$. Ferner sey Y eine Funktion von y, und ihr Differenzial $= Qdy$, welches sie bekömmt, wenn y in $y + dy$ übergeht. Endlich sey Z eine Funktion von z, und ihr Differenzial $= Rdz$. Wie man die Differenzialien Pdx, Qdy, Rdz aus den Funktionen X, Y, Z findet, solches ist bereits gezeigt worden. Ist nun die Größe $X + Y + Z$ gegeben, welches offenbar eine Funktion dreyer veränderlichen Größen ist: so ist ihr Differenzial $= Pdx + Qdy + Rdz$. Ob diese drey Differenzialien unter einander homogen sind oder nicht? darauf kommt hier nichts an. Denn die Glieder, welche Potestäten von dx enthalten, verschwinden gegen Pdx eben so, als wenn Qdy und Rdz gar nicht da wären, und auf gleiche Art verhält es sich mit den Gliedern, die bey der Differenziation von Y und Z aus der Acht gelassen worden sind.

§. 211.

Nun sey das Differenzial der Funktion XYZ von x, y, z, indem X, Y und Z die ihnen vorhin beygelegte Bedeutung behalten, zu suchen. Setzt man hier $x + dx$ für x, $y + dy$ für y, und $z + dz$ für z; so geht X in $X + Pdx$, Y in $Y + Qdy$, und Z in $Z + Rdz$ über, und es verwandelt sich daher die Funktion XYZ in

$$(X + Pdx)(Y + Qdy)(Z + Rdz)$$
$$= XYZ + YZPdx + XZQdy + XYRdz$$
$$+ ZPQdxdy + YPRdxdz + XQRdydz + PQRdxdydz.$$

Da aber dx, dy und dz unendlich kleine Größen sind, so verschwindet das letzte Glied gegen ein jedes von den vorhergehenden, und dieses geschieht, dx, dy, dz mögen homogen oder heterogen seyn. Ferner verschwindet das Glied ZPQdxdy sowohl gegen YZPdx als gegen XZQdy, und auf ähnliche Art verschwinden auch die Glieder YPRdxdz und XQZdydz. Zieht man also die gegebene Funktion XYZ ab, so wird das Differenzial derselben $= YZPdx + XZQdy + XYRdz$.

§. 212.

Diese Beyspiele von Funktionen dreyer veränderlichen Größen x, y und z, deren Anzahl jeder nach Belieben vermehren kann, geben hinlänglich zu erkennen, daß das Differenzial jeder Funktion dreyer veränderlicher Größen x, y und z, wie darin auch immer diese Größen unter einander vermischt seyn mögen, allemal die Form haben werde: $pdx + qdy + rdz$; und dabey werden p, q, r entweder Funktionen von allen drey veränderlichen Größen x, y und z,

oder

oder nur von zweyen, oder auch nur von einer derselben seyn, je nachdem die gegebene Funktion von x, y und z selbst beschaffen ist. Eben so muß, wenn eine Funktion von vier veränderlichen Größen x, y, z und v gegeben wird, ihr Differenzial die Form $p\,dx + q\,dy + r\,dz + s\,dv$ bekommen.

§. 213.

Wir wollen zuvörderst die Funktionen betrachten, die nicht mehr als zwey veränderliche Größen enthalten. Es sey also V eine Funktion von x und y, deren Differenzial folglich die Form $p\,dx + q\,dy$ haben wird. Betrachtete man hier y als eine beständige Größe, wodurch $dy = 0$ würde: so würde das Differenzial der Funktion $V = p\,dx$; und betrachtete man x als beständig, wodurch $dx = 0$ würde: so würde das Differenzial von $V = q\,dy$ seyn. Da also, wenn man beyde Größen x und y als veränderliche Größen betrachtet, $dV = p\,dx + q\,dy$ wird: so ergiebt sich hieraus folgende Regel für die Differenziation der Funktionen zweyer veränderlicher Größen: Man behandele zuvörderst bloß x als eine veränderliche und y als eine beständige Größe, und suche das Differenzial von V, welches $= p\,dx$ seyn wird. Dann behandele man bloß y als eine veränderliche und x als eine beständige Größe, und suche abermals das Differenzial von V, welches $= q\,dy$ seyn wird. Ist dies geschehen, so wird für x und y, beyde als veränderliche Größen betrachtet, $dV = p\,dx + q\,dy$.

§. 214.

Da ferner das Differenzial einer Funktion dreyer veränderlicher Größen x, y und z, welche wir wieder $= V$ setzen wollen, die Form $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ hat: so erhellet auf eine ähnliche Art, daß, wenn man bloß x als eine veränderliche Größe, und y und z als beständige Größen betrachtet, wodurch dy und $dz = 0$ wird, das Differenzial von $V = p\,dx$ ist. Auf eben dem Wege ergiebt sich ferner das Differenzial von $V = q\,dy$, wenn man x und z als beständige, und y allein als eine veränderliche Größe behandelt; und läßt man endlich bloß z veränderlich seyn, so wird das Differenzial von $V = r\,dz$. Um also das Differenzial einer Funktion dreyer veränderlicher Größen zu finden, betrachte man jede dieser Größen für sich als eine veränderliche Größe, und suche ihr Differenzial, als wenn die übrigen Größen keine veränderlichen Größen wären. Dann addire man die auf diese Art gefundenen Differenzialien, worauf das Aggregat derselben das gesuchte Differenzial der gegebenen Funktion seyn wird.

§. 215.

In dieser Regel, welche wir für die Differenziation der Funktionen von jeder Anzahl veränderlicher Größen gefunden haben, ist der Beweis der oben §. 170 für die Differenziation der Funktionen einer veränderlichen Größe gegebenen allgemeinen Regel enthalten. Denn wenn man für jeden der daselbst gedachten Theile einen besondern Buchstaben setzt, so bekommt die Funktion die Gestalt einer Funktion von so viel veränderlichen Größen, und läßt sich also nach der hier gegebenen Regel differenziiren, indem man erst jeden Theil auf die Art behandelt, als ob er allein veränderlich wäre, und darauf die gefundenen Differenzialien zu einer Summe vereiniget. Diese Summe ist jedesmal, nachdem man für jeden Buchstaben wieder seinen Werth gesetzt hat, das gesuchte Differenzial. Diese Regel hat also einen sehr weiten Umfang, und erstreckt sich auch auf die

Funk-

Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, wie sie auch immer beschaffen seyn mögen. Es ist daher dieselbe auch in der ganzen Differenzial-Rechnung von dem größten Nutzen.

§. 216.

Nachdem wir also eine allgemeine Regel gefunden haben, nach welcher alle Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, die Anzahl derselben mag seyn welche sie will, differenziirt werden können: so wollen wir den Gebrauch derselben an einigen Beyspielen zeigen.

I. Wenn $V = xy$ ist; so ist $dV = xdy + ydx$.

II. Wenn $V = \frac{x}{y}$ ist; so ist $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$.

III. Wenn $V = \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$; so ist

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{yxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. Wenn $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$ ist; so ist

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n(\alpha dx + \beta dy)$$
$$+ n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}(\delta dx + \varepsilon dy)$$

oder

$$dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} \times$$
$$\left(\begin{matrix} m\alpha\delta \\ n\alpha\delta \end{matrix} xdx \begin{matrix} + m\beta\delta \\ + n\alpha\varepsilon \end{matrix} xdy \begin{matrix} + m\alpha\varepsilon \\ + n\beta\delta \end{matrix} ydx \right.$$
$$\left. \begin{matrix} + m\beta\varepsilon \\ + n\beta\varepsilon \end{matrix} ydy \begin{matrix} + m\alpha\zeta \\ + n\gamma\delta \end{matrix} dx \begin{matrix} + m\beta\zeta \\ + n\gamma\varepsilon \end{matrix} dy \right)$$

V. Wenn $V = ylx$ ist; so ist $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$.

VI. Wenn $V = x^y$ ist; so ist $dV = yx^{y-1}dx + x^y dylx$.

VII. Wenn $V = A.\,\mathrm{tang.}\,\frac{y}{x}$ ist; so ist $dV = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$.

VIII. Wenn $V = \sin. x . \cos. y$ ist; so ist

$$dV = dx . \cos. x . \cos. y - dy . \sin. x . \sin. y.$$

IX. Wenn $V = \frac{e^z y}{\sqrt{(xx + yy)}}$ ist; so ist

$$dV = \frac{e^z y dz}{\sqrt{(xx + yy)}} + \frac{e^z (xxdy - yxdx)}{(xx + yy)\sqrt{(xx + yy)}}.$$

X. Wenn $V = e^z A . \sin \frac{x - \sqrt{(xx - yy)}}{x + \sqrt{(xx - yy)}}$ ist; so ist

$$dV = e^z dz A . \sin \frac{x - \sqrt{(xx - yy)}}{x + \sqrt{(xx - yy)}}$$

$$+ e^z . \frac{xydy - yydx}{(x + \sqrt{(xx - yy)})(xx - yy)^{\frac{3}{4}} \sqrt{x}}.$$

§. 217.

Da wir gesehen haben, daß das Differenzial von V, wenn V eine Funktion zweyer veränderlicher Größen x und y ist, diese Form, $dV = Pdx + Qdy$, hat, worin P und Q Funktionen sind, die von V abhängen, und durch dasselbe bestimmt werden: so folgt, daß diese beyden Größen P und Q auch auf eine gewisse Art von einander abhängen, indem jede derselben von einer und derselben Funktion V abhängig ist. Wie nun aber auch der Zusammenhang zwischen den endlichen Größen P und Q, den wir nachher untersuchen wollen, beschaffen seyn mag: so ist klar, daß nicht alle Differenzial-Formeln von dieser Form $Pdx + Qdy$, worin P und Q aus x und y nach Willkühr formirt sind, Differenzialien jeder endlichen Funktion V von x und y seyn können. Denn wofern nicht P und Q das Verhältniß zu einander haben, welches die Natur der Differenziation erfordert: so kann das Differenzial $Pdx + Qdy$ auf keine Weise durch die Differenziation entstehen, und hat daher auch kein Integral.

§. 218.

Es kommt daher bey der Integration sehr viel darauf an, daß man das Verhältniß zwischen den Größen P und Q kenne, damit man die Differenzialien, die wirklich durch die Differenziation irgend einer endlichen Funktion entstanden sind, von denen zu unterscheiden im Stande sey, die man nach Belieben angenommen hat, und die kein Integral haben. Ob wir uns nun gleich hier noch nicht mit der Integration beschäftigen, so ist es doch zur genauen Kenntniß der reellen Differenzialien sehr nützlich, daß wir dieses Verhältniß untersuchen: denn es ist dieselbe nicht nur in der Integral-Rechnung, wozu wir uns hier den Weg bahnen, höchst nothwendig, sondern es wird dadurch auch in der Differenzial Rechnung vieles weit deutlicher. Zuvörderst also ist klar, daß in dem Differenziale von V, wenn V eine Funktion zweyer veränderlicher Größen x und y ist, das Differenzial jeder dieser Größen vorkommen muß. Es kann daher weder $P = 0$ noch $Q = 0$ seyn. Wenn daher P eine Funktion von x und y ist, so kann die Formel $P dx$ kein Differenzial einer endlichen Größe seyn, oder es giebt alsdenn keine endliche Größe, deren Differenzial $P dx$ wäre.

§. 219.

So giebt es keine weder algebraische noch transcendente endliche Größe V, deren Differenzial $y x dx$ wäre, wenn y eine veränderliche Größe ist, die nicht von x abhängt. Denn sollte es eine solche endliche Größe V geben, so müßte, da sich y in ihrem Differenziale findet, y auch in der Größe V selbst anzutreffen seyn; allein wenn y in V enthalten wäre, so müßte, da y eine veränderliche Größe ist, auch das Differenzial dy in dem Differenziale von V befindlich seyn. Da also dasselbe darin nicht anzutreffen ist, so ist es unmöglich,

daß

daß das Differenzial $yxdx$ durch die Differenziation irgend einer endlichen Größe entstehen könnte. Da also ausgemacht ist, daß die Formel $Pdx + Qdy$, wenn $Q = 0$ ist, und P die veränderliche Größe y enthält, kein reelles Differenzial seyn kann: so erhellet zugleich, daß man der Größe Q keinen willkührlichen Werth geben darf, sondern daß derselbe von dem Werthe von P abhängt.

§. 220.

Um also das Verhältniß zwischen den Größen P und Q in dem Differenziale $Pdx + Qdy = dV$ zu untersuchen, wollen wir zuvörderst V eine Funktion von keiner Dimension von x und y seyn lassen, und so von besondern Fällen zum Allgemeinen aufsteigen. Setzt man also $y = tx$, so verschwindet x aus der Funktion V gänzlich, und man findet bloß eine Funktion von t, die wir $= T$ setzen wollen, und deren Differenzial also $= \Theta dt$ ist, wenn Θ eine Funktion von t bedeutet. Setzt man daher auch in dem Differenziale $Pdx + Qdy$ allenthalben $y = tx$, und $dy = tdx + xdt$, so bekommt man $Pdx + Qtdx + Qxdt$; und da dx darin nicht enthalten seyn soll, so muß $P + Qt = 0$ seyn. Es ist also $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, oder $Px + Qy = 0$, und hieraus erhellet das Verhältniß zwischen P und Q für diesen Fall. Ferner muß auch $\Theta = Qx$, und also $Qx =$ einer Funktion von t, d. h. einer Funktion von keiner Dimension von x und y seyn. Weil aber $Q = \frac{\Theta}{x}$ ist, so wird $P = -\frac{\Theta y}{xx}$, und es sind also sowohl Px als Qy Funktionen von keiner Dimension von x und y.

§. 221.

Wenn also eine Funktion von keiner Dimension von x und y, die wir = V setzen, differenziirt wird, so ist ihr Differenzial $dV = Pdx + Qdy$ allezeit so beschaffen, daß $Px + Qy = 0$ ist. Das heißt, wenn man in dem Differenziale anstatt der Differenzialien dx und dy die Größen x und y setzt, so erhält man 0, wie solches in folgenden Exempeln statt findet.

I. Wenn $V = \frac{x}{y}$ ist, so wird $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$, und setzt man x für dx, und y für dy, so wird $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Wenn $V = \frac{x}{\sqrt{(xx - yy)}}$ ist; so wird

$dV = \frac{-yydx + yxdy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}$, und hieraus $\frac{-yyx + yyx}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$.

III. Wenn $V = \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{-y + \sqrt{(xx + yy)}}$, also eine Funktion von keiner Dimension von x und y ist; so wird $dV = \frac{2xxdy + 2xydx}{(\sqrt{(xx + yy)} - y)^2 \sqrt{(xx + yy)}}$ und diese Formel verwandelt sich, wenn man x für dx und y für dy setzt, in 0.

IV. Wenn $V = l\frac{x + y}{x - y}$ ist; so wird $dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$, und $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$.

V. Wenn $V = A.\sin.\frac{\sqrt{(x - y)}}{\sqrt{(x + y)}}$ ist; so wird

$$dV = \frac{ydx - xdy}{(x + y)\sqrt{2y(x - y)}}$$

welche Formel eben diese Eigenschaft hat.

§. 222.

Nun wollen wir uns zur Betrachtung anderer homogenen Funktionen wenden. Es sey also V eine Funktion von n Dimensionen von x und y. Setzt man daher $y = tx$, so erhält V die Form Tx^n, wo T eine Funktion von t bedeutet; und ist $dT = \Theta dt$, so wird $dV = x^n \Theta dt + nTx^{n-1}dx$. Wenn man also $dV = Pdx + Qdy$ setzt, so wird, weil $dy = tdx + xdt$ ist, $dV = Pdx + Qtdx + Qxdt$; und da diese Formel mit der vorhergehenden übereinstimmen muß, so wird, da auch $V = Tx^n$ ist,

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}.$$

Da nun $t = \frac{y}{x}$ ist, so wird hieraus $Px + Qy = nV$, und diese Gleichung bestimmt das Verhältniß zwischen P und Q auf eine solche Art, daß man jede dieser Größen leicht findet, sobald die andere bekannt ist. Da ferner $Qx = x^n\Theta$ ist, so ist Qx und folglich auch Qy und Px Funktionen von n Dimensionen von x und y.

§. 223.

Wenn also in dem Differenziale einer homogenen Funktion von x und y, anstatt dx und dy die Größen x und y gesetzt werden: so ist die daher entspringende Größe der Funktion, deren Differenzial gegeben wurde, mit der Anzahl der Dimensionen multiplieirt, gleich.

I. Wenn $V = \sqrt{(xx + yy)}$ ist; so ist $n = 1$: und da $dV = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx+yy)}}$ ist, so wird $\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{xx + yy} = V = \sqrt{(xx + yy)}$.

II. Wenn $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$ ist; so ist $n = 2$; und $dV =$

$$\frac{2y^3dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3dx + y^3dx - x^3dy}{(y-x)^2}.$$

Setzt man nun x für dx, und y für dy, so wird

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y-x} = 2V.$$

III. Wenn $V = \frac{1}{(yy+xx)^2}$ ist, so ist $n = -4$, und $dV = -\frac{4ydy - 4xdx}{(yy+xx)^3}$. Setzt man aber x für dx, und y für dy, so verwandelt sich diese Formel in $-\frac{4yy - 4xx}{(yy+xx)^3} = -4V$.

IV. Wenn $V = xx\,l\frac{y+x}{y-x}$ ist; so wird $n = 2$, und

$$dV = 2xdx\,l\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy - xx}.$$

Nimmt man aber hier die beschriebene Substitution vor, so findet man $2xx\,l\frac{y+x}{y-x} = 2V$.

§. 224.

Eine ähnliche Eigenschaft bemerkt man, wenn V eine homogene Funktion mehrerer veränderlicher Größen ist. Es sey V eine Funktion von den Größen z, y und z, so daß dieselben allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen ausmachen, wo denn bekannt ist, daß das Differenzial die Form $Pdx + Qdy + Rds$ haben muß. Setzt man nun $y = tx$ und $z = sx$, so daß $dy = tdx + xdt$, und $dz = sdx + xds$ wird, so bekommt die Funktion V die Form Ux^n, wenn U eine Funktion der beyden veränderlichen Größen t und s ist. Setzt man daher $dU = pdt + qds$, so wird

$$dV = x^n pdt + x^n qds + nUx^{n-1}dx.$$

Die

Die erste Form aber giebt

$$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt + Rsdx + Rxds$$

und aus der Vergleichung dieser beyden Differenzialien ergiebt sich

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x}$$

und daraus fließt

$$Px + Qy + Rz = nV,$$

und eben diese Eigenschaft erstreckt sich auch auf mehrere veränderliche Größen.

§. 225.

Wenn also eine homogene Funktion von irgend einer Anzahl veränderlicher Größen $x, y, z, v,$ ꝛc. gegeben ist, so ist das Differenzial derselben jederzeit so beschaffen, daß man, wenn man anstatt der Differenzialien $dx, dy, dz, dv,$ ꝛc. die endlichen Größen x, y, z, v setzt, die gegebene Funktion, durch die Anzahl der Dimensionen multiplicirt, bekommt. Diese Behauptung gilt auch, wenn V eine homogene Funktion von nicht mehr als von einer einzigen veränderlichen Größe ist. Es ist nemlich in diesem Falle V eine Potestät von x, oder $V = ax^n$, welches eine homogene Funktion von n Dimensionen ist; denn es giebt keine andere Funktion von x, worin x allenthalben n Dimensionen hätte, als die Potestät x^n. Da nun $dV = nax^{n-1}dx$ ist, so bekommt man, wenn man x für dx setzt, $nax^n = V$. Es verdient daher diese wichtige Eigenschaft der homogenen Funktionen aufs sorgfältigste gemerkt zu werden, indem sie in der Integral-Rechnung den größten Nutzen gewährt.

§. 226.

Um nun das Verhältniß der Größen P und Q, welche das Differenzial $Pdx + Qdy$ einer jeden Funktion V von zwey veränderlichen Größen x und y bestimmen, allgemein zu untersuchen, müssen wir folgendes überlegen. Es sey V eine Funktion von x und y, und dabey nehme man an, daß V, wenn man $x + dx$ für x setzt, in R, hingegen, wenn man $y + dy$ für y setzt, in S, und wenn man sowohl $x + dx$ für x, als $y + dy$ für y setzt, in V^{I} übergehe. Da also R aus V entsteht, wenn man darin $x + dx$ statt x setzt, so ist offenbar, daß sich, wenn man in R, $y + dy$ für y setzt, V^{I} ergeben wird; denn es ist dieses eben so viel, als ob man in V sowohl $x + dx$ für x, als $y + dy$ für y setzte. Eben so entsteht auch V^{I} aus S, wenn man in S die Größe $x + dx$ für x setzt, weil S aus V entstanden ist, indem darin $y + dy$ für y gesetzt wurde. Alles dies wird durch folgende Tafel deutlicher.

Die Größe	geht über in	wenn man für	setzt.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^{I}	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	V^{I}	y	$y + dy$
S	V^{I}	x	$x + dx$

§. 227.

Wenn also V so differenzirt wird, als wenn bloß x eine veränderliche, y aber eine beständige Größe wäre, so wird, weil V durch die Substitution von $x + dx$ für x in R übergeht, das Differenzial derselben $R - V$; und da aus der Form $dV = Pdx + Qdy$, eben dieses Differenzial $= Pdx$ ist, so wird $R - V = Pdx$. Wenn man hingegen $y + dy$ für y setzt, x aber als eine beständige Größe behandelt: so wird, weil alsdenn R in V^1, und V in S übergeht, die Größe $R - V$ in $V^1 - S$ verwandelt, und folglich das Differenzial von $R - V = Pdx$, welches entsteht, wenn bloß y als eine veränderliche Größe behandelt wird, $= V^1 - R - S + V$. Eben so wird, da, wenn man $y + dy$ für y setzt, V in S übergeht, $S - V$ das Differenzial von V, wenn man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet, und es ist daher $S - V = Qdy$. Weil nun, wenn man $x + dx$ für x setzt, S in V^1 und V in R übergeht, so wird dadurch die Größe $S - V$ in $V^1 - R$ verwandelt, und es ist folglich das Differenzial von $S - V = Qdy$, welches entsteht, wenn man bloß x als eine veränderliche Größe betrachtet, $= V^1 - R - S + V$, und es stimmt also dieses Differenzial mit dem vorhergehenden auf das genaueste überein.

§. 228.

Aus dieser Uebereinstimmung fließt: Wenn das Differenzial einer Funktion V zweyer veränderlichen Größen x und $y = dV = Pdx + Qdy$ ist: so ist das Differenzial von Pdx, welches entsteht, wenn man bloß y als eine veränderliche, x aber als eine beständige Größe behandelt, dem Differenziale von Qdy gleich, welches entsteht, wenn man bloß x als eine veränderliche, y aber als eine beständige Größe betrachtet. Ist nemlich, wenn man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet, $dP = Zdy$, so ist das

das Differenzial von Pdx, auf die beschriebene Art gesucht, $= Zdxdy$; und nimmt man bloß x als eine veränderliche Größe an, so wird auch $dQ = Zdx$, denn alsdenn wird auch das Differenzial von Qdy, auf die beschriebene Art genommen, $= Zdxdy$. Auf diese Art erhellet das Verhältniß, welches die Größen Q und P zu einander haben, und welches, kurz es auszudrucken, darin besteht, daß das Differenzial von Pdx, wenn man x beständig seyn läßt, dem Differenziale von Qdy, wenn man y als eine beständige Größe betrachtet, gleich ist.

§. 229.

Um diese merkwürdige Eigenschaft in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir sie durch einige Beyspiele erläutern.

I. Ist also $V = yx$; so ist $dV = ydx + xdy$, und folglich $P = y$, und $Q = x$. Läßt man daher x beständig seyn, so wird $d.Pdx = dxdy$, und nimmt man y als beständig an, so wird $d.Qdy = dxdy$, und also beyde Differenzialien einander gleich.

II. Ist $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$; so wird $dV = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, und folglich $P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, und $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$. Setzt man also x beständig, so wird $d.Pdx = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, und läßt man y beständig seyn, so wird $d.Qdy = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

III. Ist $V = x\sin.A.y + y.\sin.A.x$; so wird

$$dV = dx.\sin.Ay + xdy.\cos.y + dy.\sin.Ax + ydx.\cos.x$$

und es ist daher

$$Pdx = dx . \sin. Ay + ydx . \cos. x, \text{ und}$$

$$Qdy = dy . \sin. Ax + xdy . \cos. y.$$

Läßt man also x beständig seyn, so wird

$$d . Pdx = dxdy . \cos. y + dxdy . \cos. x,$$

und nimmt man y beständig an, so wird

$$d . Qdy = dxdy . \cos. y + dxdy . \cos. x.$$

IV. Ist $V = x^y$; so wird $dV = x^y dy lx + yx^{y-1}dx$, und

$$Pdx = yx^{y-1}dx, \text{ und } Qdy = x^y dy lx.$$

Wenn man also x als eine beständige Größe betrachtet, so wird

$$d . Pdx = x^{y-1}dxdy + yx^{y-1}dxdylx,$$

und behandelt man y als eine beständige Größe, so wird

$$d . Qdy = yx^{y-1}dxdylx + x^{y-1}dxdy.$$

§. 230.

Diese Eigenschaft läßt sich auch auf folgende Art beschreiben, wodurch denn die so merkwürdige Beschaffenheit aller Funktionen zweyer veränderlichen Größen in die Augen fällt. Wenn man eine Funktion V zweyer veränderlicher Größen x und y so differenziirt, daß man bloß x als eine veränderliche Größe behandelt, und darauf von neuem das Differenzial dieses Differenzials so sucht, daß man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet: so findet man nach dieser doppelten Differenziation eben das, was man gefunden haben würde, wenn man in umgekehrter Ordnung die Funktion V zuerst so, als ob bloß y veränderlich wäre, differenziirt, und darauf bloß x als eine veränderliche Größe behandelt, und von dem gefundenen Differenziale von neuem das Differenzial gesucht hätte; in beyden Fällen erhält man nemlich Zdxdy. Der Grund dieser Gleichheit liegt sehr deutlich in der vorhin betrachteten Eigenschaft. Denn differenziirt

ziirt man V, als ob bloß x veränderlich wäre, so findet man Pdx; und differenziirt man V, als ob bloß y veränderlich wäre, so erhält man Qdy; daß aber die Differenzialien von diesen Differenzialien gleich sind, ist vorhin bewiesen worden. Uebrigens fließt diese Eigenschaft auch unmittelbar aus den Schlüssen des 227sten §.

§. 231.

Es läßt sich aber das Verhältniß von P und Q, wenn $Pdx + Qdy$ das Differenzial einer Funktion V ist, auch auf folgende Art anzeigen. Da P und Q Funktionen von x und y sind, so differenziire man beyde Größen, so daß man sowohl x als y als veränderliche Größen behandele. Ist nemlich

$$dV = Pdx + Qdy$$

so setze man $dP = pdx + rdy$

und $dQ = qdx + sdy$

Behandelt man also x als eine beständige Größe, so wird

$$dP = rdy, \text{ und } d.Pdx = rdxdy,$$

und behandelt man darauf y als beständig, so wird

$$dQ = qdx, \text{ und } d.Qdx = qdxdy.$$

Da nun diese beyden Differenzialien einander gleich sind, so folgt, daß $q = r$ ist. Es sind daher die Funktionen P und Q auf die Art mit einander verbunden, daß die Größen q und r, wenn man jene Funktionen auf die Art differenziirt, wie wir gethan haben, einander gleich werden. Der Kürze wegen können aber, wenigstens in dem gegenwärtigen Capitel, die Größen r und q bequem auf die Art angezeigt werden, daß man r durch $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ ausdruckt; es soll nemlich dadurch gesagt werden: Wenn man P auf die Art differenziirt, daß man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet, und darauf das gefundene Differenzial durch dy dividirt; denn dadurch bekommt man die endliche Grrße r. Auf eine ähnliche Art druckt $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ die endliche Größe q aus, weil dadurch angezeigt wird, daß man Q so, als wenn bloß x veränderlich wäre, differenziiren, und dann das Differenzial durch dx dividiren soll.

§. 232.

Wir wollen uns daher dieser Bezeichnungsart bedienen, ob sie gleich sonst zweydeutig seyn kann, welches indeß hier durch die Einschließung in Klammern verhindert wird. Wir vermeiden dadurch die Weitläuftigkeit in der Beschreibung der Art, wie differenziirt werden soll, und können das Verhältniß zwischen P und Q nun kurz also ausdrucken, daß wir sagen: es ist $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Es zeigt nemlich in dergleichen Brüchen der Nenner, außer seiner eigentlichen Bedeutung, nach welcher dadurch dividirt werden muß, auch an, daß das Differenzial des Nenners so genommen werden soll, als wenn bloß die Größe, deren Differenzial den Nenner ausmacht, veränderlich wäre. Auf diese Art fallen die Differenzialien durch die Division ganz aus der Rechnung weg, und es stellen daher die Brüche $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ endliche Größen vor, die in dem gegenwärtigen Falle einander gleich sind. Nach dieser Bezeichnungsart kann man also auch die Größen p und s auf die Art ausdrucken, daß man $p = \left(\frac{dP}{dx}\right)$ und $s = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$ setzt, indem die Differenziarenziation des Zählers, nach der gemachten Anmerkung durch den Nenner eingeschränkt wird.

§. 233.

Zwischen dieser und der vorhin von den homogenen Funktionen bewiesenen Eigenschaft findet sich eine sehr schöne Uebereinstimmung. Ist nemlich V eine Funktion von n Dimensionen von x und y, so ist, wenn man $dV = Pdx + Qdy$ setzt, $nV = Px + Qy$, und also

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}.$$

Setzt man nun $dP = pdx + rdy$; so wird $\left(\frac{dP}{dy}\right) = r$, und daß dieser Größe $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ gleich sey, läßt sich auf diese Art beweisen. Man differenziire Q, als wenn bloß x veränderlich wäre, und weil unter dieser Voraussetzung

$$dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y}$$

ist, so wird

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y},$$ und es muß daher

$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r,$$ oder $(n-1)P = px + ry$ seyn.

Diese Gleichheit erhellet daher, weil P eine homogene Funktion von $n-1$ Dimensionen von x und y ist, woher denn ihr Differenzial, $dP = pdx + rdy$, wegen der Eigenschaft der homogenen Funktionen so beschaffen seyn muß, daß $(n-1)P = px + ry$ ist.

§. 234.

Diese Eigenschaft, daß nemlich $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist, welche wir als allgemeine Eigenschaft aller Funktionen zweyer veränderlicher Größen x und y kennen gelernt haben, bahnt uns den Weg zur Untersuchung der Natur der Funktionen dreyer oder mehrerer veränderlicher Größen. Es sey V eine Funktion dreyer veränderlicher Größen x, y, z, und dabey sey $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Wenn man also bey dieser Differenziation z als eine beständige Größe behandelte, so würde $dV = Pdx + Qdy$ werden, und in diesem Falle müßte nach dem Vorhergehenden $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ seyn. Betrachtete man ferner y als eine beständige Größe, so würde $dV = Pdx + Rdz$, und also $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$ werden. Endlich gäbe x, als eine beständige Größe betrachtet, $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. Es hängen also in dem Differenziale $Pdx + Qdy + Rdz$ der Funktion V die Größen P, Q und R auf die Art von einander ab, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right);\ \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$$ ist.

§. 235.

Hieraus folgt eine Eigenschaft der Funktionen dreyer veränderlicher Größen, die derjenigen ähnlich ist, die wir oben § 230. bey den Funktionen zweyer veränderlicher Größen kennen gelernt haben. Wenn V eine Funktion dreyer veränderlicher Größen x, y und z ist, und dieselbe nach einander dreymal auf die Art differenziirt wird, daß man bey der ersten Differenziation bloß die eine von jenen Größen,

z. B.

z. B. x ferner bey der zweyten bloß y, und bey der dritten bloß z als eine veränderliche Größe behandelt; so findet man einen Ausdruck von der Form $Zdxdydz$, und diesen Ausdruck findet man jedesmal, man mag die Größen x, y und z in einer Ordnung auf einander folgen lassen, in welcher man will. Man gelangt also auf sechs verschiedene Arten, nach einer dreymaligen Differenziation, zu dem Ausdrucke $Zdxdydz$, weil die Ordnung der Buchstaben x, y und z sechsmal verändert werden kann. In was für einer Ordnung man auch diese Größen nimmt, so wird sich doch allemal, wenn man die Funktion V so differenziirt, als ob bloß die erste Größe veränderlich wäre, dann das Differenzial von diesem Differenziale sucht, so daß man bloß die zweyte als eine veränderliche Größe betrachtet, und endlich von diesem Differenziale von neuem das Differenzial auf die Art nimmt, daß man bloß die dritte als veränderlich behandelt, immer ein und derselbe Ausdruck ergeben.

§. 236.

Um den Grund von dieser Eigenschaft deutlich zu machen, wollen wir $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ setzen, und nun die Differenzialien der Größen P, Q und R suchen. Nach dem bereits Erwiesenen werden diese Differenzialien seyn

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdx + udy + rdz.$$

Differenziirt man nun V, als wenn bloß x veränderlich wäre, so findet man Pdx; differenziirt man ferner dieses Differenzial, als wenn bloß y veränderlich wäre, so findet man $sdxdy$; und sucht man endlich auch hiervon das Differenzial, so daß man z allein als eine veränderliche Größe behandelt, so findet man, nachdem man durch $dxdydz$ dividirt hat, $\left(\frac{ds}{dz}\right)$

Setzt man nun die veränderlichen Größen so, y, x, z, so giebt die erste Differenziation Qdy, die zweyte $sdxdy$, und die dritte (nach der Division durch $dxdydz$) $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ wie vorhin. Nun lasse man die veränderlichen Größen in dieser Ordnung auf einander folgen, z, y, x, wo denn die erste Differenziation Rdz, die zweyte $udydz$, und die dritte (nach der Division durch $dxdydz$) $\left(\frac{du}{dx}\right)$ giebt. Da nun aber, wenn man y als eine beständige Größe betrachtet, $dQ = sdx + udz$ ist; so ist $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, wie gleichfalls bewiesen worden ist.

§. 237.

Es sey $V = \frac{xxy}{aa - zz}$. Wir wollen diese Funktion so oft dreymal differenziiren, als die Ordnung von x, y und z verändert werden kann.

wenn man	I. Differenz.	II. Differenz.	III. Differenz.
veränderlich setzt,	bloß x	bloß y	bloß z
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.
„ „ „ „	bloß x	bloß z	bloß y
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.
„ „ „ „	bloß y	bloß x	bloß z
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.
„ „ „ „	bloß y	bloß z	bloß x
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.

bloß

" " " " bloß z bloß x bloß y

$$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2};\ \frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2};\ \frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}.$$

" " " " bloß z bloß y bloß x

$$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2};\ \frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2};\ \frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}.$$

Dieses Exempel zeigt, daß man nach einer dreymaligen Differenziation immer auf einerley Ausdruck, $\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$ kommt, man mag die drey veränderlichen Größen in einer Ordnung nehmen, in was für einer man will.

§. 238.

So wie man aber nach einer dreymaligen Differenziation immer auf einerley Ausdruck kommt, so findet sich auch unter den Differenzialien, welche man durch die zweyte Differenziation findet, eine Uebereinstimmung. Unter diesen Differenzialien kommt nemlich jeder Ausdruck zweymal vor, und es erhellet daher, daß alle die Formeln, in denen einerley Differenzialien vorkommen, auch einander gleich sind, und daß deswegen alle dritten Differenzialien gleich sind, weil in ihnen dieselben Differenzialien $dxdydz$ enthalten sind. Wir schließen hieraus: Wenn V eine Funktion von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen x, y, z, v, u, ꝛc. ist, und dieselbe nach und nach öfters auf die Art differenziirt wird, daß nur immer eine von diesen Größen als eine veränderliche Größe betrachtet wird: so sind, so oft man auf Ausdrücke von gleichen Differenzialien kommt, diese Ausdrücke auch einander gleich. So entsteht nach einer zweymaligen Differenziation unter andern der Ausdruck $Zdxdy$, einmal, wenn man x, und zweytens wenn man y allein als eine veränderliche Größe behandelt hat; und es

ist

ist daher gleich, welche man von diesen Größen zuerst, und welche man zuletzt nehmen will. Auf eine ähnliche Weise entsteht nach einer dreymaligen Differenziation der Ausdruck $Z dx dy dz$ auf sechs verschiedene Arten, und nach einer viermaligen Differenziation der Ausdruck $Z dx dy dz dv$ auf vier und zwanzig Arten u. s. f.

§. 239.

Die Wahrheit dieser Lehrsätze wird bey einiger Aufmerksamkeit ein jeder aus den vorhergehenden Sätzen einsehen, und durch eigenes Nachdenken darüber besser fassen, als wenn dieselben mit der hier unvermeidlichen Weitläuftigkeit vollständig geführt worden wären. Da aber die Kenntniß dieser Eigenschaften in der Integral Rechnung von der größten Wichtigkeit ist, so müssen sich Anfänger nicht bloß daran begnügen, daß sie die Wahrheit derselben erkennen, sondern sie auch an vielen Beyspielen prüfen, um sich diesen Gegenstand ganz geläufig, und des in der Folge daraus entspringenden Nutzens fähig zu machen. Ja, nicht bloß Anfänger, sondern auch die, die schon die Anfangsgründe der Differenzial Rechnung kennen, sollten dieses thun, weil dieser Gegenstand fast in allen Anleitungen zu diesem Theile der Analysis übergangen wird. Denn man begnügt sich gewöhnlich damit, die Regeln der Differenziation vorgetragen und ihren Gebrauch in der höhern Geometrie gezeigt zu haben, und bekümmert sich dabey nicht um die Natur und die Eigenschaften der Differenzialien, so groß auch der Nutzen ist, der daher für die Integral-Rechnung entspringt. Ich habe es daher für nützlich gehalten, diese fast ganz neue Materie in dem gegenwärtigen Capitel ausführlich zu betrachten, damit der Weg zu den schwerern Integrationen

gebahnt,

gebahnt, und diese Beschäftigung in der Folge leicht werden mögte.

§. 240.

Bey dieser Kenntniß der Eigenschaften der Differenzialien der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen ist man leicht im Stande zu beurtheilen, ob eine gegebene Differenzial-Formel, worin zwey oder mehr veränderliche Größen vorkommen, aus der Differenziation irgend einer endlichen Funktion entstanden sey oder nicht? Denn wenn in der Formel $Pdx + Qdy$ nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dz}\right)$ ist: so kann man mit Gewißheit behaupten, daß es keine Funktion von x und y gebe, deren Differenzial $= Pdx + Qdy$ wäre, und daß man also in der Integral-Rechnung dergleichen Formeln nicht integriren könne. Da z. B. $yxdx + xxdy$ die gedachte erforderliche Eigenschaft nicht hat, so giebt es keine Funktion, deren Differenzial $= yxdx + xxdy$ wäre. Ob aber, wenn $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist, die Formel allemal durch die Differenziation irgend einer Funktion entstanden sey? ist eine Frage, die erst in der Integral-Rechnung gründlich beantwortet werden kann.

§. 241.

Wenn in der gegebenen Differenzial-Formel drey oder mehrere veränderliche Größen vorkommen, wie z. B. in $Pdx + Qdy + Rdz$; so kann dieselbe nur dann durch die Differenziation entstanden seyn, wenn dabey die Bedingungen statt finden, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right);\ \left(\frac{dQ}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dy}\right) \text{ ist.}$$

Sobald

Sobald eine von diesen Bedingungen fehlt, so kann man sicher behaupten, daß es keine Funktion gebe, deren Differenzial $Pdx + Qdy + Rdz$ wäre. Dergleichen Differenzial-Formeln sind daher gar keines Integrals fähig, und man muß daher auch nicht einmal nach ihren Integralien fragen. Das aber ist leicht einzusehen, daß man in der Integral-Rechnung allemal erst wissen muß, ob eine gegebene Differenzial-Formel eines Integrals fähig sey oder nicht, ehe man diese Integration wirklich unternimmt.

Achtes Capitel.

Von der fernern Differenziation der Differenzial-Formeln.

§. 242.

Es ist bereits in dem Vorhergehenden gelehret worden, wie man, wenn nur eine einzige veränderliche Größe da ist, und das erste Differenzial als eine beständige Größe betrachtet wird, die Differenzialien aller übrigen Ordnungen finden kann. Wenn man nemlich das Differenzial einer Funktion von neuem differenziirt, so findet man das zweyte Differenzial, und wenn man auch dieses Differenzial wieder differenziirt, so findet man das dritte Differenzial u. s. w. Eben diese Regel gilt aber auch, wenn eine Funktion mehrere veränderliche Größen enthält, oder wenn zwar nur eine veränderliche Größe da ist, aber das Differenzial derselben nicht als eine beständige Größe betrachtet wird. Es sey V irgend eine Funktion von x, und dx nicht beständig, sondern auf irgend eine Art veränderlich, so daß das Differenzial von $dx = ddx$, und das Differenzial hiervon $= d^3x$ u. s. f. sey. Unter dieser Voraussetzung wollen wir nun das Differenzial der Funktion V untersuchen.

§. 243.

Wir wollen annehmen, daß das erste Differenzial der Funktion $V = Pdx$ sey, wo denn P irgend eine Funktion

von

von x ist, die von V abhängt. Wollen wir nun das zweyte Differenzial der Funktion V finden, so müssen wir ihr erstes Differenzial Pdx von neuem differenziiren; und da dasselbe ein Produkt aus zwey veränderlichen Größen P und dx ist, von welchen jene das Differenzial $dP = pdx$ und diese dx das Differenzial ddx hat: so ist nach der Regel von den Faktoren das zweyte Differenzial $ddV = Pddx + pdx^2$. Setzt man nun $dp = qdx$, so findet man, da das Differenzial von $dx^2 = 2dxddx$ ist, durch abermaliges Differenziiren.

$$d^3V = Pd^3x + dPddx + 2pdxddx + dpdx^2$$

und da $dP = pdx$, und $dp = qdx$ ist, so wird

$$d^3V = Pd^3x + 3pdxddx + qdx^3$$

und auf eine ähnliche Art werden nun auch die folgenden Differenzialien gefunden.

§. 244.

Wir wollen dieses auf die Potestäten von x anwenden und die verschiedenen Differenzialien davon suchen, wenn dx nicht als eine beständige Größe angenommen wird.

I. Ist also $V = x$; so ist $dV = dx$; $d^2V = d^2x$; $d^3V = d^3x$; $d^4V = d^4x$; ꝛc.

II. Ist $V = x^2$; so ist

$dV = 2xdx$;
$ddV = 2xddx + 2dx^2$;
$d^3V = 2xd^3x + 6dxddx$;
$d^4V = 2xd^4x + 8dxd^3x + 6ddx^2$;
$d^5V = 2xd^5x + 10dxd^4x + 20ddxd^3x$;
ꝛc.

III. Ist überhaupt $V = x^n$; so ist

$$dV = nx^{n-1}dx;$$

$$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2;$$

$$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx + n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3;$$

$$d^4V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dxd^3x + 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2 + 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4 + \text{2c.}$$

Nimmt man dx beständig, und setzt daher $ddx = 0$, $d^3x = 0$, $d^4x = 0$, 2c., so findet man eben die Differenzialien, die wir bereits oben für diese Voraussetzung gefunden haben.

§. 245.

Da also die Differenzialien aller Ordnungen von x auf eben die Art differenziirt werden, als die endlichen Größen, so lassen sich auch alle Ausdrücke, in welchen außer einer endlichen Größe auch ihre Differenzialien vorkommen, nach den oben ertheilten Vorschriften differenziiren. Da diese Operation bisweilen vorkommt, so wollen wir sie hier durch einige Beyspiele erläutern.

I. Ist also $V = \frac{xddx}{dx^2}$; so findet man durchs Differenziiren

$$dV = \frac{xd^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2xddx^2}{dx^3}.$$

II. Ist $V = \frac{x}{dx}$; so ist $dV = 1 - \frac{xddx}{dx^2}$, und es hindert also das nichts, daß wir V unendlich groß angenommen haben.

III. Ist $V = xxl\frac{ddx}{dx^2}$; so läßt sich dieser Ausdruck in

$$V = xxlddx - 2xxldx$$

verwandeln, und daraus findet man nach den gewöhnlichen Regeln der Differenziation

$$dV = 2xdxlddx + \frac{xxd^3x}{ddx} - 4xdxldx - \frac{2xxddx}{dx}.$$

Auf eine ähnliche Art werden aber auch die höhern Differenzialien von V gefunden.

§. 246.

Wenn der gegebene Ausdruck zwey veränderliche Größen, nemlich x und y enthält, so ist entweder das eine Differenzial derselben beständig, oder es sind beyde veränderlich; denn es ist willkührlich, von welcher Größe man das Differenzial als beständig betrachten will, weil es von unserm freyen Willen abhängt, wie wir die auf einander folgenden Werthe der einen Größe wachsen lassen wollen. Aber die Differenzialien beyder Größen können nicht beständig seyn, weil man sonst ein Verhältniß zwischen den veränderlichen Größen x und y annähme, dergleichen entweder nicht da ist, oder doch als unbekannt betrachtet wird. Denn wenn man, indem man x gleichförmig wachsen läßt, auch y gleichförmig wachsend annehmen wollte, so würde man dadurch zu erkennen geben, daß $y = ax + b$ sey, und es würde also y von x abhangen, welches man doch nicht annehmen darf. Es kann daher nur entweder das Differenzial einer von den veränderlichen Größen oder gar keins beständig angenommen werden. Kann man indeß die Differenziation verrichten, wenn gar keines von den Differenzialien als beständig betrachtet wird, so kann man auch die Differenzialien finden, wenn eins beständig ist: denn wenn dx beständig seyn soll, so darf man nur ddx, d^3x, d^4x, ꝛc. ausstreichen.

§. 247.

Es bedeute also V irgend eine endliche Funktion von x und y, und es sey $dV = Pdx + Qdy$. Um nun das zweyte Differenzial zu finden, wollen wir beyde Differenzialien dx und dy als veränderlich betrachten; und da P und Q Funktionen von x und y sind, so wollen wir

$$dP = pdx + rdy$$
$$dQ = rdx + qdy$$

setzen, indem wir oben gesehen haben, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r \text{ ist.}$$

Dies vorausgesetzt, so differenziire man $dV = Pdx + Qdy$, wodurch man

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2$$

findet. Soll also dx beständig seyn, so wird

$$ddV = pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2;$$

und soll dy beständig seyn, so wird

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + qdy^2.$$

§. 248.

Wenn also eine Funktion zweyer veränderlicher Größen x und y zweymal differenziirt, und dabey keines von den Differenzialien als beständig betrachtet wird: so hat das zweyte Differenzial jedesmal diese Form:

$$ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy;$$

und dabey hängen die Größen P, Q, R, S und T auf die Art von einander ab, daß, wenn man die im vorhergehenden Capitel erklärte Bezeichnungsart gebraucht,

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \; R = \left(\frac{dP}{dx}\right); \; S = \left(\frac{dQ}{dy}\right); \text{ und}$$

$$T = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\left(\frac{dP}{dy}\right)$$

ist. Fehlt von diesen Bedingungen auch nur eine einzige, so kann man sicher behaupten, daß die gegebene Formel kein zweytes Differenzial einer Funktion sey, und es läßt sich also bald erkennen, ob eine solche Formel das zweyte Differenzial irgend einer Größe sey oder nicht.

§. 249.

Auf eine ähnliche Art lassen sich auch die driten und die folgenden Differenzialien finden; es wird indeß besser seyn, solches an einem besondern Beyspiele zu zeigen, als dabey die allgemeinen Formeln zu gebrauchen.

Ist also $V = xy$, so ist

$$dV = ydx + xdy;$$

$$ddV = yddx + 2dxdy;$$

$$d^3V = yd^3x + 3dyddx + xd^3y;$$

$$d^4V = yd^4x + 4dyd^3x + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y$$

ꝛc.

In diesem Exempel richten sich die Zahl-Coefficienten nach dem Gesetze der Potestäten des Binomiums, und man kann daher die Differenzialien soweit man will fortsetzen.

Ist hingegen $V = \frac{x}{y}$; so ist

$$dV = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx};$$

$$ddV = \frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{xx} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2}$$

$$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxddy}{xx} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{3dyddx}{x^2}$$

$$+ \frac{6ydxddx}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4} - \frac{yd^3x}{x^2}.$$

In diesem Exempel fällt die Folge der Differenzialien nicht so leicht in die Augen als in dem vorhergehenden.

§. 250.

Es läßt sich aber diese Methode zu differenziiren nicht bloß bey den endlichen Funktionen anwenden, sondern sie ist auch bey allen solchen Ausdrücken brauchbar, die selbst schon Differenzialien enthalten, es mag nun eines davon als beständig betrachtet werden oder nicht. Denn da die Differenzialien eben so und nach eben den Regeln differenziirt werden, wie die endlichen Größen: so gelten die in den vorhergehenden Capiteln gegebene Regeln auch hier, und müssen daher auch gegenwärtig befolgt werden. Bedeutet also V einen Ausdruck, dessen Differenzial gesucht werden soll, es mag nun derselbe eine endliche oder eine unendlich große oder eine unendlich kleine Größe vorstellen: so können folgende Beyspiele die Art, sein Differenzial zu finden, lehren.

I. Ist $V = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; so ist

$$dV = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

II. Ist $V = \frac{ydx}{dy}$; so ist

$$dV = dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}.$$

III. Ist $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$; so ist

$$dV = \frac{(3dxddx + 3dyddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dxddy - dyddx}$$

$$- \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}(dxd^3y - dyd^3x)}{(dxddy - dyddx)^2}.$$

Da diese Diefferenzialien in ihrem weitesten Umfange gesucht worden sind, indem dabey kein Differenzial als beständig betrachtet worden ist: so lassen sich daraus leicht die

Differenzialien ableiten, die entstehen, wenn entweder dx oder dy als beständig betrachtet wird.

§. 251.

Da, wenn kein Differenzial beständig angenommen wird, auch kein Gesetz vorgeschrieben ist, nach welchem die successiven Werthe der veränderlichen Größen auf einander folgen; so sind die zweyten und folgenden Differenzialien nicht bestimmt, und haben keine gewisse Bedeutung. Es hat daher auch eine Formel, worin die zweyten und die höhern Differenzialien vorkommen, keinen bestimmten Werth, als nur, wenn eines von ihren Differenzialien beständig angenommen worden ist; im entgegenstehenden Falle ist ihre Bedeutung schwankend, und ändert sich, je nachdem dieses oder ein anderes Differenzial als beständig betrachtet wird. Indeß giebt es Ausdrücke, die zweyte Differenzialien enthalten, und die, obgleich kein Differenzial als beständig betrachtet wird, dennoch eine bestimmte Bedeutung haben, die daher auch immer dieselbe bleibt, man mag ein Differenzial als beständig annehmen, welches man will. Wir werden weiter unten die Beschaffenheit dieser Formeln genauer untersuchen, und die Art und Weise beybringen, wie man dieselben von solchen, die keinen bestimmten Werth haben, unterscheiden kann.

§. 252.

Um die Beschaffenheit der Differenzial-Formeln, die zweyte oder höhere Differenzialien enthalten, deutlicher kennen zu lernen, wollen wir zuvörderst solche Formeln betrachten, die nur eine einzige veränderliche Größe enthalten. Hier ist leicht einzusehen, daß, wenn in einer Formel das zweyte Differenzial ihrer veränderlichen Größe vorkommt, und

und kein Differenzial beständig angenommen wird, die Formel alsdann keinen bestimmten Werth haben kann. Denn setzte man dx beständig, so würde $ddx = 0$; nähme man aber das Differenzial von xx, nemlich $2xdx$ oder xdx beständig an, so würde, da alsdenn das Differenzial von xdx $= xddx + dx^2 = 0$ wäre, $ddx = -\frac{dx^2}{x}$. Sollte das Differenzial von irgend einer Potestät x^n, nemlich $nx^{n-1}dx$ oder $x^{n-1}dx$ beständig seyn, so würde das zweyte Differenzial derselben $x^{n-1}ddx + (n-1)x^{n-2}dx^2 = 0$, und also $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$ werden. Es erhält also ddx verschiedene Werthe, je nachdem das Differenzial dieser oder einer andern Funktion von x als beständig betrachtet wird; und es fällt in die Augen, daß eine Formel, in welcher ddx vorkommt, ganz von einander verschiedene Werthe bekommen muß, wenn man darin einmal 0, dann $-\frac{dx^2}{x}$, dann $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ u. s. f. anstatt ddx setzt. Würde z. B. die Formel $\frac{xxddx}{dx^2}$ gegeben, die wegen der homogenen unendlich kleinen Größen ddx und dx^2 einen endlichen Werth haben muß: so wird dieselbe, wenn man dx beständig nimmt, in 0, wenn man $d.x^2$ beständig seyn läßt, in $-x$, wenn man $d.x^3$ beständig annimmt, in $-2x$, und wenn man $d.x^4$ als beständig betrachtet, in $-3x$ u. s. w. verwandelt. Es kann also die angenommene Formel keinen bestimmten Werth haben, wofern nicht ausgemacht ist, welches Differenzial als beständig betrachtet werden soll.

§. 253.

Auf eine ähnliche Art läßt sich die Unbeständigkeit der Bedeutung zeigen, wenn das dritte Differenzial in einer Formel enthalten ist. Wir wollen zu dem Ende die Formel $\frac{x^3 d^3 x}{dx\,ddx}$ betrachten, der ebenfalls ein endlicher Werth zukommt. Wird dabey das Differenzial dx beständig angenommen, so verwandelt sie sich in $\frac{0}{0}$, wovon der Werth gleich nachher gezeigt werden wird. Ist ferner $d.x^2$ beständig, so wird $ddx = -\frac{dx^2}{x}$, und wenn man von neuem differenziirt, so findet man $d^3x = -\frac{2dx\,ddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}$, weil $ddx = -\frac{dx^2}{x}$ ist. In diesem Falle wird daher die gegebene Formel $\frac{x^3 d^3 x}{dx\,ddx}$ in $-3x^2$ verwandelt. Ist aber $d.x^n$ beständig, so wird $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$, und daher denn ferner

$$d^3x = -\frac{2(n-1)dx\,ddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2dx^3}{xx}$$
$$+ \frac{(n-1)dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)dx^3}{xx}.$$

In diesem Falle wird also

$$\frac{d^3x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x}; \text{ und } \frac{x^3d^3x}{dx\,ddx} = -(2n-1)x^2.$$

Hieraus erhellet, daß, wenn $n = 1$ oder dx beständig ist, der Werth dieser Formel $= -x^2$ ist. Auch fällt daraus in die Augen, daß die Formeln, die dritte oder höhere Differenzialien enthalten, ohne daß dabey angezeigt ist, welches

Diffe-

Differenzial als beständig betrachtet werden soll, keinen bestimmten Werth haben können, und also eigentlich gar nichts bedeuten; woher denn auch dergleichen Formeln nicht in der Rechnung vorkommen können.

§. 254.

Auf eine ähnliche Art läßt sich erkennen, daß die Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen, die zweyte oder höhere Differenzialien enthalten, keinen bestimmten Werth haben können, wofern nicht irgend ein Differenzial beständig angenommen wird, bloß die Fälle ausgenommen, die wir sogleich betrachten werden. Denn sobald ddx in einer Formel vorkommt, so kann dieselbe keinen bestimmten Werth haben, weil sich der Werth von ddx nach dem Differenziale richtet, welches als beständig betrachtet wird, und eben dieses gilt von jedem höhern Differenziale von x, so wie auch von den zweyten und höhern Differenzialien der übrigen veränderlichen Größen. Wenn aber die zweyten Differenzialien von zweyen oder mehrern veränderlichen Größen in einer Formel vorkommen, so kann es sich ereignen, daß die Unbeständigkeit die von der einen herrührt, durch die Unbeständigkeit von der andern aufgehoben wird; und dann tritt also der gedachte Fall ein, da eine Formel, die die zweyten Differenzialien zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen enthält, gleichwohl einen bestimmten Werth haben kann, obgleich kein Differenzial beständig angenommen worden ist.

§. 255.

Es kann also die Formel $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ keine feste Bedeutung haben, wofern nicht irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen worden ist. Denn läßt man dx beständig

ständig seyn, so erhält man daher $\frac{xddy}{dxdy}$; nimmt man hingegen dy beständig an, so bekommt man $\frac{yddx}{dxdy}$, und es fällt in die Augen, daß diese beyden Formeln nicht nothwendig einander gleich sind. Denn sollten sie dieses seyn, so müßten sie auch immer dieselben bleiben, man mögte für x und für y eine Funktion setzen, was für eine man wollte. Wir wollen bloß $y = xx$ setzen. Da nun, wenn man dx als beständig ansieht, $ddy = 2dx^2$ ist, so verwandelt sich die Formel $\frac{xddy}{dxdy}$ in 1; wenn man aber dy oder $2xdx$ beständig annimmt, so wird $ddy = 2xddx + 2dx^2 = 0$, und also $ddx = -\frac{dx^2}{x}$, und dabey geht die Formel $\frac{yddx}{dxdy}$ in $-\frac{1}{2}$ über. Da man nun schon bey diesem einzigen Falle eine Verschiedenheit antrifft, so kann noch weniger überhaupt $\frac{xddy}{dxdy}$, wenn man dx als beständig betrachtet, gleich $\frac{yddx}{dxdy}$ seyn, wenn man dy als eine beständige Größe ansieht. Und da die Formel $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ nicht einmal einerley Werth behält, wenn man nur bloß entweder dx oder dy als beständig betrachtet, so wird sie noch viel weniger einerley Werth behalten, wenn man das Differenzial einer jeden Funktion entweder von x oder von y oder von beyden beständig annimmt.

§. 256.

Hieraus erhellet, daß dergleichen Formeln nicht anders einen festen Werth haben können, als wenn sie so beschaffen sind, daß die zweyten und höhern Differenzialien von x, nemlich

nemlich ddx, d^3x, ꝛc. gänzlich aus der Rechnung verschwinden, wenn anstatt der veränderlichen Größen y und z, welche außer x noch in jenen Formeln enthalten sind, nach Belieben jede Funktion von x gesetzt worden. Denn wenn nach einer solchen Substitution noch ddx, oder d^3x, oder d^4x, ꝛc. in der Formel zurückbleibt, so ist der Werth dieser Formel veränderlich, weil die angeführten Differenzialien ihre Bedeutung verändern, wenn ein anderes Differenzial als beständig betrachtet wird. So ist die vorhergehende Formel $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ beschaffen, die dann, wenn sie einen festgesetzten Werth hätte, es mögte y bedeuten, was es wollte, auch einerley Werth behalten müßte, was auch für y für eine Funktion von x gesetzt würde. Allein wenn man bloß $y = x$ setzt, so verwandelt sich diese Formel in $\frac{2xddx}{dx^2}$, und die Bedeutung hievon ist schwankend, weil darin ddx vorkommt, und also $\frac{2xddx}{dx^2}$, so wie man ein anderes Differenzial beständig annimmt, auch einen andern Werth bekommt, wie aus §. 252. zur Gnüge erhellet.

§. 257.

Es kann hier der Zweifel entstehen, ob es auch Formeln gebe, die zwey oder mehr Differenzialien vom zweyten, oder einem noch höhern Grade enthalten, und dabey so beschaffen sind, daß sich die Differenzialien des zweyten Grades insgesammt einander aufheben, wenn man anstatt der übrigen veränderlichen Größen Funktionen der einen setzt? Diesem Zweifel wollen wir auf die Art begegnen, daß wir zuvörderst eine solche Formel mittheilen, wodurch denn zugleich die weitere Untersuchung erleichtert werden wird. Ich behaupte

haupte also, daß die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ die angeführte Eigenschaft besitze: denn man mag für y eine Funktion von x, was für eine man will, setzen, so heben sich darin immer die Differenzialien des zweyten Grades einander auf. Folgende Beyspiele mögen dies bestätigen:

I. Ist $y = x^2$; so wird $dy = 2xdx$, und $ddy = 2xddx + 2dx^2$. Setzt man aber diese Werthe in die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$, so wird

$$\frac{2xdxddx - 2xdxddx - 2dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Ist $y = x^n$; so wird $dy = nx^{n-1}dx$, und $ddy = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Bringt man nun diese Werthe in die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{nx^{n-1}dxddx - nx^{n-1}dxddx - n(n-1)x^{n-2}dx^3}{dx^3} = -n(n-1)x^{n-2}.$$

III. Ist $y = -\sqrt{(1-xx)}$; so wird $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, und $ddy = \frac{xddx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$: und die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ verwandelt sich in

$$\frac{xddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{xddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

In allen diesen Beyspielen heben sich also die zweyten Differenzialien ddx einander auf, und eben das wird geschehen, was man auch sonst für Funktionen von x für y setzen will.

§. 258.

§. 258.

Da diese Beyspiele die Wahrheit unserer Behauptung schon dargethan haben, daß nemlich die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ einen bestimmten Werth habe, wenn auch gleich kein Differenzial beständig angenommen wird; so wird es nun um so leichter seyn, den Beweis davon zu führen. Ist also y irgend eine Funktion von x, so wird sein Differenzial $dy = pdx$, und p eine Funktion von x, und ihr Differenzial $dp = qdx$, und auch q eine Funktion von x seyn. Da nun $dy = pdx$ ist, so ist $ddy = pddx + qdx^2$, und $dyddx - dxddy = pdxddx - pdxddx - qdx^3 = - qdx^3$; und da in diesem Ausdrucke kein zweytes Differenzial vorkommt, so ist ihr Werth nicht weiter ungewiß, und $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3} = - q$. Wie also auch immer y von x abhängen mag, so heben sich doch immer die zweyten Differenzialien in dieser Formel einander auf, und es ist daher ihr Werth, so sehr er es sonst seyn würde, nichts weniger als schwankend und ungewiß.

§. 259.

Ob wir hier gleich angenommen haben, daß y eine Funktion von x sey, so bleibt dennoch das Gesagte wahr, wenn auch y gar nicht von x abhängt. Denn indem wir für y eine jede Funktion setzen, ohne zu bestimmen, wie sie beschaffen seyn soll: so nehmen wir im Grunde gar keine Abhängigkeit zwischen x und y an. Man kann indeß den Beweis, auch ohne einer Funktion Erwähnung zu thun, führen. Denn was auch y für eine Größe ist, sie mag von x abhängen oder nicht, so ist doch ihr Differenzial dy homogen

gen mit dx, und es bedeutet daher $\frac{dy}{dx}$ eine endliche Größe, von der das Differenzial, welches sie bekömmt, wenn x in $x + dx$, und y in $y + dy$ übergeht, nicht ungewiß ist, und nicht von dem Gesetze der zweyten Differenzialien abhängt. Es sey also $\frac{dy}{dx} = p$; so ist $dy = pdx$; und $ddy = pddx + dpdx$; und folglich $dxddy - dyddx = dpdx^2$. In diesem Ausdrucke findet keine Ungewißheit weiter statt, weil er bloß erste Differenzialien enthält, und er bleibt daher derselbe, man mag ein Differenzial, und was für eins man will, als beständig betrachten, oder alle veränderlich seyn lassen.

§. 260.

Da also $dyddx - dxddy$, ungeachtet der darin vorkommenden zweyten Differenzialien, indem diese am Ende doch einander aufheben, eine gewisse Bedeutung hat: so wird auch jeder Ausdruck, in welchem außer der Formel $dyddx - dxddy$ keine andere zweyte Differenzialien vorkommen, ebenfalls eine gewisse Bedeutung haben. Oder, wenn $dyddx - dxddy = \omega$ gesetzt wird, und V eine aus x und y, und den ersten Differenzialien hiervon, dx und dy, und aus ω auf irgend eine Art zusammengesetzt ist, so wird der Werth von V ein gewisser Werth seyn. Denn da man bey den ersten Differenzialien dx und dy keine Rücksicht auf das willkührliche Gesetz zu nehmen braucht, nach welchem die successiven Werthe von x wachsend gedacht werden, und in ω die zweyten Differenzialien sich aufheben, so ist auch V keine ungewisse Größe mehr, sondern ihrer Bedeutung nach gewiß. So hat der Ausdruck $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$ einen

gewis-

gewissen Werth, ob er gleich durch die zweyten Differenzialien dazu unfähig zu seyn scheint; ja es ist dieser Werth, da der Zähler überdem mit dem Nenner homogen ist, ein endlicher Werth, wofern er nicht zufälliger Weise unendlich groß oder unendlich klein wird.

§. 261.

So wie gezeigt worden ist, daß die Formel $dxddy - dyddx$ einen gewissen Werth hat, so haben auch, wenn noch eine dritte veränderliche Größe z dazu kommt, die Formeln $dxddz - dzddx$ und $dyddz - dzddy$ gewisse Werthe. Wenn daher Ausdrücke, die drey veränderliche Größen x, y und z enthalten, weiter keine zweyten Differenzialien in sich schließen, als die angeführten, so ist ihre Bedeutung eben so gewiß, als wenn sie gar keine zweyte Differenzialien in sich fassen. So hat der Ausdruck

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)ddy - (dy + dz)ddx + (dx - dy)ddz}$$

der darin vorkommenden zweyten Differenzialien ungeachtet, eine gewisse Bedeutung. Auf eine ähnliche Art lassen sich Formeln machen, die noch mehr veränderliche Größen enthalten, und worin die zweyten Differenzialien die Gewißheit der Bedeutung nicht im mindesten verhindern.

§. 262.

Diese Formeln also unter denen, die zweyte Differenzialien enthalten ausgenommen, so haben die übrigen insgesammt eine ungewisse Bedeutung, und können daher auch nicht anders in den Rechnungen statt finden, als wenn irgend ein erstes Differenzial bestimmt und als beständig angenommen wird. Sobald aber irgend ein erstes Differenzial

zial als beständig angenommen wird, so erhalten alle Ausdrücke, sie mögen so viel veränderliche Größen enthalten als sie wollen, und es mögen außerdem außer dem ersten, Differenziale, von was für einer Ordnung es sey, vorkommen, gewisse Bedeutungen, und sind also nunmehr auch nicht aus der Rechnung ausgeschlossen. Ist z. B. dx als beständig angenommen worden, so verschwinden die zweyten und folgenden Differenzialien von x, und es werden von allen Funktionen von x, die man für die übrigen veränderlichen Größen y, z, ꝛc. setzt, die zweyten Differenzialien durch dx^2, die dritten durch dx^3, ꝛc. bestimmt, und so alle von den zweyten Differenzialien herrührende Unbeständigkeit aus dem Wege geräumt. Eben das geschiehet, wenn das erste Differenzial einer andern veränderlichen Größe oder irgend einer Funktion von ihr als beständig angenommen wird.

§. 263.

Hieraus folgt also, daß die zweyten und die höhern Differenziale eigentlich nie in die Rechnung kommen, und wegen ihrer ungewissen Bedeutung zur Analysis völlig unbrauchbar sind. Denn wenn zweyte Differenzialien da zu seyn scheinen, so wird entweder irgend ein erstes Differenzial als beständig angenommen, oder nicht. Im ersten Falle verschwinden die zweyten Differenzialien ganz aus der Rechnung, indem sie durch die ersten Differenzialien bestimmt werden. Im andern Falle ist ihre Bedeutung, wofern sie sich nicht einander aufheben, ungewiß, und sie selbst finden daher in der Analysis keinen Platz; heben sie sich aber einander auf, so sind sie nur scheinbar da, und man hat eigentgentlich nur die endlichen Größen mit ihren ersten Differenzialien als daseyend zu betrachten. Da sie aber sehr häufig, obgleich nur scheinbar, in den Rechnungen vorkommen, so

war

war es nöthig ihre Behandlungsart zu berühren. Es wird sich indeß auch bald die Methode erklären lassen, wie man die zweyten und alle übrige höhere Differenzialien jedesmal wegschaffen kann.

§. 264.

Wenn ein Ausdruck nicht mehr als eine veränderliche Größe x enthält, und darin die höhern Differenzialien dieser Größe, oder ddx, d^3x, d^4x, ꝛc. vorkommen, so kann er keine gewisse Bedeutung haben, wofern nicht irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen wird. Es sey also t die Größe, deren Differenzial dt beständig seyn soll, so daß $ddt = 0$, $d^3t = 0$, $d^4t = 0$, ꝛc. ist. Setzt man $dx = pdt$, so ist p eine endliche Größe, auf deren Differenzial die ungewisse Bedeutung der zweyten Differenzialien keinen Einfluß hat, und es ist daher auch $\frac{dp}{dt}$ eine endliche Größe. Nun sey $dp = qdt$, und auf ähnliche Art $dq = rdt$, $dr = sdt$, ꝛc. so werden q, r, s, ꝛc. endliche Größen, deren Bedeutungen gewiß sind. Da also $dx = pdt$ ist, so wird

$$ddx = dpdt = qdt^2; \quad d^3x = dqdt^2 = rdt^3;$$
$$d^4x = drdt^3 = sdt^4; \text{ ꝛc.}$$

und wenn man diese Werthe anstatt ddx, d^3x, d^4x setzt, so enthält der ganze Ausdruck bloße endliche Größen und das erste Differenzial dt, und es ist daher seine Bedeutung nicht mehr ungewiß.

§. 265.

Wenn x eine Funktion von t ist, so kann auf diese Art die Größe x gänzlich weggeschaft werden, so daß bloß die Größe t mit ihrem Differenziale dt in dem Ausdrucke zurück bleibt; ist aber x eine Funktion von t, so ist auch t eine Funktion von x. Inzwischen kann auch die Größe x selbst mit ihrem ersten Differenziale dx in der Rechnung beybehalten werden, wofern nur nach den vorhin gemachten Substitutionen allenthalben anstatt t und dt ihre durch x und dx ausgedruckte Werthe wieder hergestellt werden. Damit dieses deutlicher werde, so wollen wir $t = x^n$ setzen, und das erste Differenzial von x^n beständig annehmen. Da also

$$dt = nx^{n-1}dx \text{ ist, so ist } p = \frac{1}{nx^{n-1}}, \text{ und}$$

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx; \text{ daher wird}$$

$$q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}}, \text{ und}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = rdt = nrx^{n-1}dx.$$

Hieraus wird ferner

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}}; \text{ und } s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}.$$

Wenn also das Differenzial von x^n als beständig betrachtet wird, so ist

$$ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x};$$

$$d^3x = -\frac{(n-1)(2n-1)dx^3}{xx};$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx^4}{x^3};$$

etc.

§. 266.

Wenn ein Ausdruck zwey veränderliche Größen x und y enthält, und das Differenzial der einen x beständig angenommen

nommen wird, so kommen, weil $ddx = 0$ ist, keine andere zweyte und höhere Differenzialien vor als ddy, d^3y ꝛc. Diese lassen sich aber auf eben die Art wegschaffen, wenn man $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; ꝛc. setzt. Denn es wird alsdenn

$$ddy = qdx^2;\ d^3y = rdx^3;\ d^4y = sdx^4 \text{ ꝛc.}$$

und braucht man diese Werthe, so erhält man einen Ausdruck, der außer den Größen x, y, p, q, r, s, ꝛc. bloß das erste Differenzial dx enthält. Ist z. B. der Ausdruck

$$\frac{ydx^4 + xdyd^3y + xd^4y}{(xx + yy)ddy}$$

gegeben, und wird darin dx beständig angenommen: so setze man

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ \text{und } dr = sdx.$$

Durch den Gebrauch dieser Werthe verwandelt sich der gegebene Ausdruck in folgenden,

$$\frac{(y + xpr + xs)dx^2}{(xx + yy)q}$$

welcher weiter keine zweyte oder höhere Differenzialien enthält.

§. 267.

Auf eine ähnliche Art werden die zweyten und höhern Differenzialien weggeschaft, wenn dy beständig angenommen wird. Soll aber irgend ein anderes erstes Differenzial dt beständig seyn, so muß man zuvörderst auf die vorhin beschriebene Art die höhern Differenzialien von x wegschaffen, indem man

$$dx = pdt;\ dp = qdt;\ dq = rdt;\ dr = sdt, \text{ ꝛc.}$$

setzt, wodurch denn

$$ddx = qdt^2;\ d^3x = rdt^3;\ d^4x = sdt^4; \text{ ꝛc.}$$

wird. Ist dieses geschehen, so schafft man auf eine ähnliche Art die höhern Differenzialien von y weg, dadurch, daß man

$dy = Pdt$; $dP = Qdt$; $dQ = Rdt$; $dR = Sdt$; 2c.

setzt, wodurch denn

$ddy = Qdt^2$; $d^3y = Rdt^3$; $d^4y = Sdt^4$; 2c.

wird. Gebraucht man nun diese Werthe, so erhält man einen Ausdruck, der außer den endlichen Größen x, p, q, r, s, 2c. y, P, Q, R, S, 2c. bloß das Differenzial dt enthält, und dessen Bedeutung also auch weiter nicht ungewiß ist.

§. 268.

Wenn das erste Differenzial, welches man beständig annimmt, entweder von x, oder von y, oder von beyden abhängt, so ist die Einführung einer doppelten Reihe endlicher Größen, p, q, r, 2c nicht nothwendig. Denn wenn dt allein von x abhängt, so werden die Buchstaben p, q, r, 2c. Funktionen von x, und es kommen daher nur die Buchstaben P, Q, R, 2c. vor. Eben das geschieht, wenn das beständige Differenzial dt allein von y abhängt. Hängt aber dt von beyden Größen ab, so ist eine in etwas veränderte Operation nöthig. Nehmen wir z. B. das Differenzial ydx beständig an, so wird $yddx + dxdy = 0$, und also $ddx = -\frac{dxdy}{y}$. Nun sey $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; 2c., so wird $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, und wenn man fortfährt zu differenzüren,

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y},$$

oder wenn man hierin für ddx seinen Werth $-\frac{pdx^2}{y}$ setzt,

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy}.$$

Ferner

Ferner wird

$$d^4x = -\frac{rdx^4}{y} + \frac{pqdx^4}{yy} + \frac{6pqdx^4}{yy} - \frac{6p^3dx^4}{y^3}$$
$$+ \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right) 3dx^2ddx;$$

und setzt man für ddx seinen Werth $-\frac{pdx^2}{y}$, so erhält man

$$d^4x = \left(\frac{-r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right) dx^4.$$

Da nun $dy = pdx$ ist, so wird $ddy = qdx^2 + pddx =$ $\left(q - \frac{pp}{q}\right) dx^2$; und wenn man fortfährt für ddx seinen Werth $-\frac{pdx^2}{y}$ zu setzen, so wird

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right) dx^3, \text{ und}$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right) dx^4;$$

ꝛc.

Setzt man diese Werthe anstatt der höhern Differenzialien von x und y, so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in einen solchen, der keine höhere Differenzialien mehr enthält, und es ist also dabey nicht einmal nöthig, daß man ein Differenzial als beständig betrachte. Denn da nach dieser Verwandlung keine zweyte Differenzialien vorkommen, so ist es unnöthig zu bestimmen, welches Differenzial als beständig angenommen worden sey.

§. 269.

Bey der Anwendung des Calculs auf die krummen Linien pflegt man häufig dieses erste Differenzial $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

als beständig zu betrachten, und wir wollen daher nunmehr untersuchen, wie in diesem Falle die zweyten und höhern Differenzialien weggeschafft werden. Hierdurch wird man zugleich in den Stand gesetzt werden, dieses Geschäfte bey der Annahme eines jeden andern Differenzials als beständig zu verrichten. Es sey also nochmals

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ dr = sdx;\ \text{rc.}$$

Alsdann erhält das Differenzial $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ diese Form $dx\sqrt{(1+pp)}$, und da dieses Differenzial beständig seyn soll, so wird

$$ddx\sqrt{(1+pp)} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1+pp)}} = 0, \text{ und also}$$

$$ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}.$$

Da man auf diese Art den Werth von ddx hat, so wird nun ferner

$$d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}; \text{ und}$$

$$d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2} - \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Da wir aber $dy = pdx$ gesetzt haben, so findet man, wenn man differenziirt

$$ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp};$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{2pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp} = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2};$$

$$d^4y = \frac{sdx^4}{1+pp} - \frac{13pqrdx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Es

Es werden also alle höhere Differenzialien sowohl von x als von y durch endliche Größen, und die Potestäten von dx ausgedruckt, und substituirt man diese Werthe, so erhält man einen von allen zweyten Differenzialien befreyten Ausdruck.

§. 270.

Nachdem wir die Art, die zweyten und höhern Differenzialien wegzuschaffen, erklärt haben, so wollen wir nun diese Operation durch einige Beyspiele erläutern.

I. Ist also der Ausdruck $\frac{xddy}{dx^2}$ gegeben, und dx beständig; so setze man $dy = pdx$ und $dp = qdx$. Da nun dadurch $ddy = qdx^2$ wird, so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in die endliche Größe xq.

II. Ist der Ausdruck $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$ gegeben, und dy beständig; so setze man $dx = pdy$; $dp = qdy$, wodurch denn, weil ddx dabey $= qdy^2$ wird, $\frac{1 + pp}{q}$ entsteht. Wenn man aber, wie vorhin, $dy = pdx$; $dp = qdx$ setzen will, so wird, weil dy beständig ist, $0 = pddx + dpdx$, und $ddx = -\frac{qdx^2}{p}$. Hierdurch verwandelt sich der gegebene Ausdruck in $\frac{-p(1 + pp)}{q}$.

III. Ist der Ausdruck $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ gegeben, und soll dabey ydx beständig seyn; so setze man $dy = pdx$, und $dp = qdx$, wodurch aus §. 268. $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, und $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$, so wie durch den Gebrauch dieser Werthe der gegebene Ausdruck in $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$ verwandelt wird.

IV. Ist der Ausdruck $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$ gegeben, und dabey $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig; so setze man wieder $dy = pdx$, und $dp = qdx$, woher denn nach dem vorhergehenden §. $ddy = \frac{qdx^2}{1 + pp}$ wird. Hierdurch aber verwandelt sich der gegebene Ausdruck in $\frac{(1+pp)^2}{q}$.

Aus diesen Beyspielen erhellet zur Gnüge, wie man in jedem Falle, es mag ein erstes Differenzial als beständig angenommen seyn, was für eins man will, die zweyten und höhern Differenzialien wegschaffen kann.

§. 271.

So wie man auf diese Weise durch Einführung der endlichen Größen p, q, r, s, rc. die zweyten und höhern Differenzialien wegschaffen kann, so daß der ganze Ausdruck außer den endlichen Größen x, y, p, q, r, s, rc. bloß das Differenzial dx enthält: so kann man auch umgekehrt, wenn ein solcher reducirter Ausdruck gegeben ist, ihn wieder auf seine erste Form bringen, indem man anstatt der Buchstaben p, q, r, s, rc. die zweyten und höhern Differenzialien wieder einführt. Hier ist es aber gleich, was man für ein erstes Differenzial als beständig betrachten will, und man kann dazu entweder das, was vorher als beständig angesehen worden ist, oder ein jedes andere nehmen. Ja man kann auch gar kein Differenzial als beständig betrachten, und in

diesem

diesem Falle entstehen dergleichen Ausdrücke mit zweyten und höhern Differenzialien, die, ohne daß ein erstes Differenzial angenommen wird, dennoch eine gewisse Bedeutung haben. Dergleichen Ausdrücke sind schon oben da gewesen.

§. 272.

Es sey also irgend ein Ausdruck gegeben, der aus den endlichen Größen x, y, p, q, r, ꝛc. und dem Differenziale dx zusammengesetzt, und worin $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$; ꝛc. ist. Sollen hieraus die Buchstaben p, q, r, ꝛc. auf die Art weggeschafft werden, daß man an ihre Stelle die zweyten und höhern Differenzialien von x und y seze, ohne daß ein Differenzial als beständig betrachtet werde: so wird

$$dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2} \text{ und } q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}.$$

Differenziirt man nun diese Formel, so wird

$$dq = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^4},$$

und also

$$r = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5}.$$

Kommt außerdem der Buchstabe s vor, welcher den Werth $\frac{dr}{dx}$ anzeigt, so muß man dafür diesen Werth setzen,

$$s = \left\{ \begin{array}{l} dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y - 4dx^2ddyd^3x + 15dxddx^2ddy \\ \qquad + 10dxdyddxd^3x - 15dyddx^3 - dx^2dyd^4x \end{array} \right\} : dx^7.$$

Braucht man nun diese Werthe anstatt der Größen p, q, r, s, ꝛc. so wird der gegebene Ausdruck in einen andern verwandelt, welcher höhere Differenzialien von x und y enthält, und welcher, obgleich kein erstes Differenzial als beständig betrachtet wird, dennoch eine nichts weniger als schwankende, sondern eine gewisse Bedeutung hat.

§. 273.

Auf diese Art läßt sich also jede Differenzial-Formel von einem höhern Grade, worin irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen worden ist, in eine andere Formel verwandeln, worin kein Differenzial als beständig betrachtet wird, und die gleichwohl einen gewissen Werth hat. Zuvörderst muß man nemlich vermittelst der vorhin beschriebenen Methode durch die Substitutionen $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; ꝛc. die höhern Differenzialien wegschaffen, und darauf für p, q, r, s, ꝛc. die vorhin dafür gefundenen Werthe setzen. Hierdurch entsteht ein Ausdruck, der dem vorigen gleich ist, und kein beständiges Differenzial in sich schließt. Folgende Beyspiele werden diese Operation in ein helleres Licht setzen.

I. Es sey der Ausdruck $\frac{xddy}{dx^2}$ gegeben, und darin dx beständig. Um denselben in einen solchen Ausdruck zu verwandeln, der kein beständiges Differenzial enthält, so setze man $dy = pdx$, und $dp = qdx$, wodurch denn, wie wir vorhin §. 270. gesehen haben, der gegebene Ausdruck in qx verwandelt wird. Nun setze man für q den Werth, welchen es bekommt, wenn man kein beständiges Differenzial annimmt, oder nehme $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$. Hierdurch findet man den Ausdruck $\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$, welcher dem gegebenen gleich ist, und kein beständiges Differenzial mehr in sich schließt.

II. Es

II. Es sey der Ausdruck $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$ gegeben, und dabey dy beständig angenommen. Setzt man $dy = pdx$, und $dp = qdx$; so verwandelt sich derselbe in $- \frac{p(1 + pp)}{q}$. Setzt man aber nun $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, so findet man den Ausdruck $\frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dyddx - dxddy}$, welcher, ohne daß ein beständiges Differenzial angenommen wird, eben denselben gewissen Werth hat, als der vorhergehende.

III. Es sey der Ausdruck $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ gegeben, in welchem das Differenzial ydx beständig angenommen worden ist. Setzt man $dy = pdx$, so wird derselbe, wie wir § 270 gesehen haben, in $-1 - \frac{xy}{p} + \frac{xp}{y}$ verwandelt. Hieraus aber erhält man, wenn kein Differenzial beständig seyn soll,

$$-1 - \frac{xdxddy + xdyddx}{dx^2dy} + \frac{xdy}{ydx} =$$

$$\frac{xdxdy^2 - ydx^2dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2dy}.$$

IV. Es sey der Ausdruck $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$ gegeben, in welchem das Differenzial $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig angenommen worden ist. Setzt man $dy = pdx$, und $dp = qdx$, so verwandelt sich dieser Ausdruck nach §. 270 in $\frac{(1 + pp)^2}{q}$. Nimmt man nun $p = \frac{dy}{dx}$, und $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, so

erhält

erhält man den Ausdruck $\frac{(dx^2 + dy^2)}{dx^2 ddy - dx dy ddx}$, welcher, ohne daß dabey ein beständiges Differenzial angenommen zu werden braucht, dem gegebenen Ausdruck gleich ist.

V. Es sey der Ausdruck $\frac{dx d^3y}{x ddy}$ gegeben, und dabey das Differenzial dx beständig angenommen. Setzt man $dy = p dx$, $dp + q dx$, und $dq = r dx$; so verwandelt sich derselbe, weil $ddy = q dx^2$, und $d^3y = r dx^3$ ist, in $\frac{r dx^2}{xq}$. Nun setze man für q und r die Werthe, welche sie bekommen, wenn man gar kein beständiges Differenzial annimmt, nemlich $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$, und

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3x}{dx^2},$$

so erhält man folgenden, dem gegebenen gleichbedeutenden Ausdruck:

$$\frac{dx^2 d^3y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3x}{dx ddy - dy ddx}$$

$$= \frac{dx (dx d^3y - dy d^3x)}{dx ddy - dy ddx} - 3 ddx.$$

§. 274.

Wenn wir diese Verwandlungen genau betrachten, so können wir daraus eine leichtere Methode ableiten, wobey man dieselben zu Stande bringen kann, ohne daß dabey die Einführung der Buchstaben p, q, r, ꝛc. nöthig ist. Dieses zu thun findet man aber verschiedene Wege, je nachdem man in der gegebenen Formel dieses oder jenes Differenzial als beständig betrachtet. Wir wollen zuvörderst annehmen, daß in der gegebenen Formel das Differenzial dx beständig gesetzt

setzt sey. Da wir nun für dy die Größe pdx, und dann für $\frac{dy}{dx}$ wieder p gesetzt haben, so kann man die ersten Differenzialien dx und dy allenthalben aus dem gegebenen Ausdrucke weglassen, ohne daß dadurch eine Veränderung hervorgebracht wird. Wenn aber ddy vorkommt, so verrichtet man die Verwandlung, weil wir dafür qdx^2, und dann für q den Werth $\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ gesetzt haben, wenn man sogleich für ddy allenthalben $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$ oder $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ setzt. Da ferner rdx^3 für d^3y gesetzt, und dann für r der vorhin dafür gefundene Werth genommen werden kann, so muß man für d^3y allenthalben $d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ setzen, und so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in einen andern, der kein beständiges Differenzial in sich schließt. Wäre z. B. der Ausdruck $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$ gegeben, worin dx beständig angenommen worden: so wird demselben, wenn man $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ für ddy setzt, folgender kein beständiges Differenzial in sich enthaltender Ausdruck gleich:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}.$$

§. 275.

Hieraus läßt sich leicht einsehen, daß man, wenn in einem gegebenen Ausdrucke das Differenzial dy als beständig

dig betrachtet wird, allenthalben $ddx - \frac{dxddy}{dy}$ anstatt ddx, und $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$ für d^3x setzen muß, wenn man einen gleichbedeutenden Ausdruck haben will, der kein beständiges Differenzial in sich schließt. Ist aber in einem gegebenen Ausdrucke ydx beständig angenommen worden, so muß man, weil alsdenn $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, und $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$ ist, für ddx allenthalben $-\frac{dxdy}{y}$, und für ddy allenthalben $ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$ setzen; und hiebey bleibe ich stehen, weil die höhern Differenzialien bey diesem Geschäfte sehr selten vorzukommen pflegen. Ist aber in dem gegebenen Ausdrucke $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig gesetzt worden: so muß man, weil wir dabey $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$, und $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$ gefunden haben, für ddx allenthalben $\frac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$ und für ddy allenthalben $\frac{dx^2ddy - dxdyddx}{dx^2 + dy^2}$ setzen. So wird der Ausdruck $\frac{dy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddx}$, worin $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ beständig ist, in folgenden verwandelt $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dyddx - dxddy}$, so daß hierin kein beständiges Differenzial enthalten ist.

§ 276

Damit dieser Reduktionen desto leichter übersehen werden können, so wollen wir sie in folgende Tabelle bringen.

Es

Es wird also eine Differenzial-Formel eines höhern Grades vermittelst folgender Substitutionen in eine andere kein beständiges Differenzial enthaltende Formel verwandelt.

I. Wenn das Differenzial dx beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$.

II. Wenn das Differenzial dy beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
ddx	$ddx - \frac{dxddy}{dy}$
d^3x	$d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$.

III. Wenn das Differenzial ydx beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
ddx	$-\frac{dxdy}{y}$
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
d^3x	$\frac{dyddx}{y} - \frac{dxddy}{y} + \frac{3dxdy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ $- \frac{4dyddy}{y} + \frac{4dy^2ddx}{ydx} - \frac{3dy^3}{yy}$.

IV. Wenn

IV. Wenn das Differenzial $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
ddx	$\dfrac{dy^2 ddx - dx dy ddy}{dx^2 + dy^2}$
ddy	$\dfrac{dx^2 ddy - dx dy ddx}{dx^2 + dy^2}$
d^3x	$\dfrac{dy^2 d^3x - dx dy d^3y}{dx^2 + dy^2} + \dfrac{(dx ddy - dy ddx)(3dy^2 ddy - dx^2 ddy + 4dx dy ddx)}{(dx^2 + dy^2)^2}$
d^3y	$\dfrac{dx^2 d^3y - dx dy d^3x}{dx^2 + dy^2} + \dfrac{(dy ddx - dx ddy)(3dx^2 ddx - dy^2 ddx + 4dx dy ddy)}{(dx^2 + dy^2)^2}$

§. 277.

Es sind also die Ausdrücke, die kein beständiges Differenzial enthalten, von der Art, daß man darin jedes Differenzial als beständig betrachten kann. Hiernach können daher die Differenzial-Formeln der höhern Grade, in welchen kein beständiges Differenzial angenommen seyn soll, geprüft und untersucht werden, ob ihre Bedeutung schwankend oder gewiß ist. Nimmt man nemlich nach Gefallen irgend ein Differenzial, z. B. dx als beständig an, und verwandelt darauf nach der Regel des vorhergehenden §. die erste Formel wieder in eine andere, die kein beständiges Differenzial enthält: so ist, wenn diese mit jener übereinstimmt, die Bedeutung der gegebenen Formel gewiß, und hängt nicht von der Unbeständigkeit der zweyten Differenzialien ab: ist aber die gefundene Formel von der gegebenen verschieden, so ist die Bedeutung von dieser ungewiß. Es sey z. B. der Ausdruck

druck $yddx - xddy$ gegeben, so daß derselbe kein beständiges Differenzial enthalte. Um zu erforschen, ob derselbe eine gewisse Bedeutung habe, setze man dx beständig, wodurch man dafür $- xddy$ erhält. Hierauf setze man nach der Regel des vorhergehenden §. für ddy wieder $ddy - \frac{dyddx}{dx}$, so findet man $- xddy + \frac{xdyddx}{dx}$, und da dieser Ausdruck von dem gegebenen verschieden ist, so ist solches ein Zeichen, daß dieser keine gewisse Bedeurung hat.

§. 278.

Auf eine ähnliche Art lassen sich, wenn ein allgemeiner Ausdruck von dieser Form $Pddx + Qdxdy + Rddy$ gegeben ist, die Bedingungen untersuchen, unter welchen derselbe, ohne Annahme eines beständigen Differenzials, einen gewissen Werth hat. Setzt man nemlich dx beständig, so erhält man dafür: $Qdxdy + Rddy$; und verwandelt man diesen Ausdruck in einen andern immer dasselbe bedeutenden, obgleich dabey kein Differenzial beständig angenommen wird: so findet man $Qdxdy + Rddy - \frac{Rdyddx}{dx}$, und dieser Ausdruck wird dem gegebenen gleich seyn, wenn $Pdx + Rdy = 0$ ist, und nur in diesem Falle ist also die Bedeutung jenes Ausdrucks gewiß. Wenn aber nicht $P = - \frac{Rdy}{dx}$, oder nicht $R = - \frac{Pdx}{dy}$ ist, so hat der gegebene Ausdruck $Pddx + Qdxdy + Rddy$ keinen gewissen Werth, sondern es ist die Bedeutung desselben schwankend und verschieden, je nachdem dieses oder ein anderes Differenzial als beständig angenommen wird.

§. 279.

Nach diesen Grundlehren ist es leicht, einen Differenzial-Ausdruck, worin irgend ein Differenzial beständig angenommen worden ist, in einen andern zu verwandeln, bey welchem ein anderes beständiges Differenzial zum Grunde liegt. Man hat zu dem Ende nur nöthig, den gegebenen Ausdruck in einen solchen zu verwandeln, in welchem kein Differenzial beständig ist, und darauf das andere Differenzial als beständig zu betrachten. Ist z. B. in dem gegebenen Ausdrucke das Differenzial dx beständig, und soll derselbe in einen andern Ausdruck verwandelt werden, in welchem das beständige Differenzial dy enthalten sey: so setze man in den nach dem Obigen für ddy und d^3y zu substituirenden Formeln, weil dy beständig ist, $ddy = 0$, $d^3y = 0$, und dann wird dem Verlangten ein Genüge geschehen, wenn man $-\frac{dyddx}{dx}$ für ddy, und $\frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ für d^3y setzt. Auf diese Art wird die Formel $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$ worin dx beständig ist, in diese, $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$ verwandelt, worin dy als eine beständige Größe enthalten ist.

§. 280.

Wenn hingegen eine Formel, worin dy beständig ist, in eine andere verwandelt werden soll, worin dx beständig ist, so muß man $-\frac{dxddy}{dy}$ anstatt ddx, und $\frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$ anstatt d^3x setzen. Soll eine Formel, worin $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig ist, in eine andere verwandelt werden,

den, worin dx beständig ist, so muß man $-\frac{dx\,dy\,ddy}{dx^2 + dy^2}$ für ddx, und $\frac{dx^2\,ddy}{dx^2 + dy^2}$ für ddy setzen. Soll hingegen eine Formel, worin dx beständig ist, in eine andere verwandelt werden, worin $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig ist, so muß man, weil, wenn $dx^2 + dy^2$ beständig ist, $dx\,ddx + dy\,ddy = 0$, und $ddx = -\frac{dy\,ddy}{dx}$ wird, $-\frac{dy\,ddy}{dx}$ für ddx, und $ddy + \frac{dy^2\,ddy}{dx^2} = \frac{(dx^2 + dy^2)\,ddy}{dx^2}$ für ddy setzen.

Auf diese Art wird die Formel $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}$, worin dx beständig ist, in eine andere verwandelt, worin $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig ist, nemlich in $-\frac{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddy}$.

Neuntes Capitel.

Von den Differenzial-Gleichungen.

§. 281.

Die Absicht dieses Capitels ist vorzüglich die Erklärung der Differenziation solcher Funktionen von x, die nicht entwickelt, sondern in einer Gleichung, welche das Verhältniß der Funktion y zu x ausdruckt, gegeben sind; worauf denn ferner die Natur der Differenzial-Gleichungen allgemein untersucht, und ihre Entstehungsart aus endlichen Gleichungen beschrieben soll. Denn da das Hauptgeschäfte der Integral-Rechnung in der Integration der Differenzial-Gleichungen besteht, d. h. in der Erfindung solcher endlichen Gleichungen, die zu den Differenzial-Gleichungen passen: so ist nothwendig, daß wir hier die Natur und Eigenschaften der Differenzial-Gleichungen, die aus der Entstehungsart derselben fließen, sorgfältig untersuchen, und so den Weg zur Integral-Rechnung bahnen.

§. 282.

Es sey also y eine solche Funktion von x, als durch diese quadratische Gleichung bestimmt wird, $yy + Py + Q = 0$. Da der Ausdruck $yy + Py + Q = 0$ ist, x mag bedeuten, was es will, so wird derselbe auch $= 0$ seyn, wenn man $x + dx$ für x setzt, in welchem Falle denn y in $y + dy$ übergeht. Hat man aber diese Substitution vorgenommen, so bleibt, wenn man von der gefundenen Größe $yy + Py + Q$ abzieht,

abzieht, das Differenzial dieser letzten Größe übrig, welches daher ebenfalls $= 0$ ist. Hieraus erhellet, daß das Differenzial eines Ausdrucks, der $= 0$ ist, ebenfalls $= 0$ ist, und daß, wenn zwey Ausdrücke einander gleich sind, auch ihre Differenzialien einander gleich seyn müssen. Da also

$$yy + Py + Q = 0 \text{ ist, so ist auch}$$

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0;$$

und da P und Q Funktionen von x sind, so werden ihre Differenzialien die Form haben, daß

$$dP = pdx, \text{ und } dQ = qdx$$

ist, und daher wird

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0,$$

und hieraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{yp - q}{2y + P}.$$

§. 283.

So wie daher eine endliche Gleichung, $yy + Py + Q = 0$ das Verhältniß zwischen y und x ausdruckt, so druckt eine Differenzial-Gleichung das Verhältniß aus, in welchem dy zu dx steht. Da aber $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp - q}{2y + P}$ ist; so kann man über das Verhältniß $dy : dx$ nicht eher urtheilen, als bis y bekannt ist. Dieß muß nothwendig so seyn. Denn wenn y aus der endlichen Gleichung einen doppelten Werth erhält, so hat auch ein jeder derselben sein besonderes Differenzial, und man findet das eine oder das andere, je nachdem man den einen oder den andern Werth von y in den Ausdruck $-\frac{yp - q}{2y + P}$ setzt. Auf eine ähnliche Art erhält $\frac{dy}{dx}$, wenn y durch eine cubische Gleichung bestimmt wird, einen dreyfachen Werth, nach dem dreyfachen Werthe nemlich von y.

Hat y in der gegebenen Gleichung vier oder mehr Dimensionen, so muß auch $\frac{dy}{dx}$ nothwendig eben so viel Bedeutungen bekommen.

§. 284.

Es kann indeß auch die Funktion y selbst aus der Gleichung weggeschafft werden, weil man zwey Gleichungen hat, die y enthalten, eine endliche nemlich und eine Differenzial-Gleichung; alsdenn aber steigt das Differenzial dy zu eben so viel Dimensionen auf, als vorher y hatte, und es begreift also die Gleichung, welche man durch die Elimination findet, alle verschiedene Verhältnisse von dy und dx zugleich. Wir wollen zum Beyspiele die vorhergehende Gleichung $yy + Py + Q = 0$ nehmen, deren Differenzial $2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$ ist, woher denn $y = -\frac{Pdy - dQ}{2dy + dP}$ wird. Setzt man nun diesen Werth anstatt y in die vorhergehende Gleichung, so wird

$$(4Q-PP)dy^2 + (4Q-PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0,$$

wovon die Wurzeln sind

$$dy = -\tfrac{1}{2}dP \pm \frac{(\tfrac{1}{2}PdP - dQ)}{\sqrt{(PP-4Q)}}$$

und diese Wurzeln sind die beyden Differenzialien der beyden Werthe von y aus der endlichen Gleichung, oder von

$$y = -\tfrac{1}{2}P \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(PP-4Q)}.$$

§. 285.

Hat man den Werth von dy gefunden, so findet man durch wiederholte Differenziation den Werth von ddy, und so auch ferner von d^3y, d^4y ꝛc. Da aber diese Werthe ungewiß sind, wofern nicht ein erstes Differenzial als beständig ange-

angenommen wird, so wollen wir der größern Bequemlichkeit wegen dx beständig seyn lassen, und zur Erklärung der dabey zu beobachtenden Verhaltungsart dies Beyspiel $y^3 + x^3 = 3axy$ betrachten. Hieraus erhält man nun, wenn man differenziirt

$3yydy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$, und also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}.$$

Nun nehme man abermals die Differenzialien, und behandle dabey dx als beständig, so findet man

$$\frac{ddy}{dx} = -\frac{ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

und wenn man für dy seinen so eben gefundenen Werth $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$ setzt, und durch dx dividirt, so wird

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3} + \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - xx)^2}$$

oder

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3} = -\frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3},$$

weil aus der endlichen Gleichung $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$ folgt. Und auf diese Weise können diese Werthe vermittelst der endlichen Gleichung unzählige Formen erhalten.

§. 286.

Auch die erste Differenzial-Gleichung kann auf unzählige Arten verändert werden, indem man sie mit der endlichen Gleichung vermischt. So erhält man, da bey dem vorhergehenden Exempel gefunden wurde,

$$yydy + xxdx = axdy + aydx,$$

wenn man diese Gleichung durch y multiplicirt,

$$y^3dy + xxydx = axydy + ayydx;$$

und wenn man hierin für y^3 seinen Werth $3axy - x^3$ setzt, so bekömmt man diese neue Gleichung

$$2axydy - x^3dy + xxydx = ayydx;$$

und multiplicirt man diese abermals durch y, und setzt darauf wieder den Werth desselben, so wird

$$2axy^2dy - x^3ydy + xxyydx = 3aaxydx - ax^3dx.$$

Ueberhaupt aber wird, wenn P, Q und R Funktionen von x und y bedeuten, und man die Differenzial-Gleichung durch P multiplicirt,

$$Pyydy + Pxxdx = aPxdy + aPydx.$$

Da nun $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ist, so ist auch

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0.$$

Addirt man aber diese beyden Gleichungen zu einander, so geben sie eine allgemeine aus der gegebenen endlichen Gleichung entstandenen Differenzial-Gleichung,

$$\begin{aligned} &Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy + \\ &Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0. \end{aligned}$$

§. 287.

Es lassen sich aber auch durch die Differenziation selbst unzählige Differenzial-Gleichungen aus einer und derselben endlichen Gleichung finden, wenn man dieselbe, bevor man sie differenzirt, durch irgend eine Größe multiplicirt oder dividirt. Ist z. B. P irgend eine Funktion von x und y, so daß $dP = pdx + qdy$ ist: so erhält man, wenn man die endliche Gleichung durch P multiplicirt, und dann erst differenzirt, eine allgemeine Differenzial-Gleichung, die unendlich viele Formen annehmen kann, je nachdem für P diese oder jene Funktion angenommen wird. Diese Menge und Mannigfaltigkeit wird indeß noch unendlich vermehrt, wenn man zu der gefundenen Differenzial-Gleichung die endliche Gleichung, durch eine Formel wie diese, $Qdx + Rdy$, multiplicirt,

tiplicirt, addirt, wobey man denn für Q und R nach Gefallen jede Funktion von x und y annehmen kann. Ohnerachtet aber in allen diesen Gleichungen das Verhältniß zwischen dx und dy, welches das Differenzial der Funktion y, die durch eine endliche Gleichung durch x bestimmt ist, zu dx hat, begriffen ist, so erstrecken sie sich doch gewöhnlicher Weise viel weiter, und drucken zugleich das Verhältniß des Differenzials von y aus, wenn es durch andere endliche Gleichungen bestimmt ist. Der Grund hiervon kann erst in der Integral-Rechnung erklärt werden.

§. 288.

Es lassen sich aber nicht nur aus einer und derselben Gleichung unzählige Differenzial Gleichungen ableiten, sondern es lassen sich auch sehr viele ja unzählige endliche Gleichungen angeben, die insgesammt auf eben dieselbe Differenzial-Gleichung führen. So sind z. B. diese beyden Gleichungen $yy = ax + ab$, und $yy = ax$ allerdings verschieden, indem man in der ersten jede beständige Größe für b setzen kann. Wenn man indeß beyde Gleichungen differenziirt, so erhält man nicht mehr als eine Differenzial-Gleichung, nemlich $2ydy = adx$; ja es können alle, unter der Form $yy = ax$ begriffene Gleichungen, was auch a für einen Werth haben mag, in eine Differenzial-Gleichung, die a nicht enthält, zusammengefaßt werden. Denn dividirt man jene Gleichung durch x, so bekommt man $\frac{yy}{x} = a$, und diese giebt, wenn man sie differenziirt, $2xdy - ydx = 0$. Auch können transcendente und algebraische Gleichungen auf einerley Differenzial-Gleichungen gebracht werden, so wie solches bey den Gleichungen

$$yy - ax = 0, \text{ und } yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$$

statt findet. Denn dividirt man beyde Gleichungen durch $e^{\frac{x}{a}}$, wodurch dieselben in

$$e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0, \text{ und } e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb$$

verwandelt werden: so findet man aus beyden die einzige Differenzial-Gleichung

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

§. 289.

Der Grund dieser Verschiedenheit liegt darin, weil das Differenzial einer beständigen Größe $= 0$ ist. Wenn daher eine endliche Gleichung auf eine solche Form gebracht wird, daß darin irgend eine beständige Größe allein, und nicht durch eine veränderliche Größe multiplicirt oder dividirt, vorkommt: so findet man durch die Differenziation eine Gleichung, in welcher jene beständige Größe gar nicht enthalten ist. Auf diese Art kann eine jede beständige Größe, die in einer endlichen Gleichung befindlich ist, durch die Differenziation weggebracht werden. Ist z. B. die Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$ gegeben, so verwandelt sich dieselbe, wenn man sie durch xy dividirt, in $\frac{x^3 + y^3}{xy} = a$, und differenziirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

worin die beständige Größe a nicht mehr enthalten ist.

§. 290.

Wenn mehrere beständige Größen, die sich in einer Gleichung finden, aus derselben weggeschaft werden sollen, so geschiehet solches durch eine zwey oder mehreremal wie-

derholte

derholte Differenziation, und so erhält man endlich Differenzial-Gleichungen von einem höhern Grade, in welchen jene beständige Größen nicht mehr enthalten sind. Es sey die Gleichung $yy = maa - nxx$ gegeben, um daraus durch die Differenziation maa und n wegzuschaffen. Die erste fällt durch die erste Differenziation weg, wodurch $2ydy + 2nxdx = 0$ wird. Hieraus formire man nun die Gleichung $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, die, wenn man dx beständig nimmt, von neuem differenziirt, folgende giebt:

$$xyddy + xdy^2 - ydxdy = 0.$$

Obgleich diese Gleichung keine beständige Größe enthält, so begreift sie doch alle unter der Form $yy = maa - nxx$ enthaltene Gleichungen unter sich, es mag den Buchstaben m, a und n ein Werth beygelegt werden, was für einer man will.

§. 291.

Es lassen sich aber nicht bloß die beständigen Größen, die in einer endlichen Gleichung vorkommen, durch die Differenziation wegschaffen, sondern man kann dieses auch mit der einen veränderlichen Größe thun, mit derjenigen nemlich, deren Differenzial beständig angenommen wird. Sucht man nemlich aus der zwischen x und y gegebenen Gleichung den Werth von x, so daß $x = Y$ wird, wenn Y eine Funktion von y bedeutet: so wird $dx = dY$, und nimmt man dx beständig, so wird bey wiederholter Differenziation $0 = ddY$. Ist hingegen $xx + ax + b = Y$, so wird bey dreymaliger Differenziation $0 = d^3Y$, und die Gleichung $x^3 + axx + bx + c = Y$ giebt auf ähnliche Art, viermal differenziirt, $d^4Y = 0$. Ob aber gleich in diesen Gleichungen nur eine veränderliche Größe zu seyn scheinet, die eben

dadurch

dadurch aufhören würde, eine veränderliche Größe zu seyn, weil in keiner Gleichung nur eine veränderliche Größe seyn kann: so muß man gleichwohl, weil man das Differenzial dx beständig angenommen hat, und darauf in der Gleichung Rücksicht genommen werden muß, im Grunde annehmen, daß es in der Gleichung befindlich sey. Man hat sich daher auch nicht zu verwundern, wenn bisweilen Differenzial-Gleichungen vom zweyten oder noch höhern Graden vorkommen, die nur eine veränderliche Größe zu enthalten scheinen.

§. 292.

Vorzüglich aber ist zu merken, daß man durch die Differenziation die irrationalen und transcendenten Größen aus einer Gleichung wegschaffen kann. Was die irrationalen Größen betrifft so wird, wenn man durch die bekannten Reductionen die Irrationalität weggebracht hat, und nun differenziirt, die Gleichung von aller Irrationalität frey. Es kann aber dies öfters viel bequemer ohne die gedachte Reduction geschehen, indem man, wenn nur eine Irrational Größe da ist, dieselbe durch die Vergleichung der Differenzial-Gleichung mit der endlichen Irrational-Formel wegschaffen kann. Wenn aber in der endlichen Gleichung zwey oder mehrere irrationale Theile enthalten sind, so darf man nur die Differenzial-Gleichung davon von neuem differenziiren, und auf diese Art so viel Differenzial-Gleichungen höherer Grade suchen, als erforderlich sind, um alle irrationalen Theile wegzuschaffen. Auf diese Art können auch die unbestimmten und gebrochenen Exponenten weggebracht werden. Ist z. B. $y^m = (aa - xx)^n$, so erhält man durch die Differenziation,

$$my^{m-1}dy = -2n(aa - xx)^{n-1}xdx,$$

und

und hieraus durch die Division durch die endliche Gleichung

$$\frac{m\,dy}{y} = -\frac{2nx\,dx}{aa - xx},$$

worin kein unbestimmter Exponent mehr enthalten ist. Hieraus erhellet, daß eine von aller Irrationalität befreyte Differenzial-Gleichung aus einer endlichen irrationalen und selbst transcendente Größen enthaltenden Gleichung entstanden seyn kann.

§. 293.

Um aber zu zeigen, wie die transcendenten Größen durch die Differenziation weggeschafft werden, so wollen wir von den Logarithmen anfangen, bey welchen dieses Geschäfte keine Schwierigkeit hat, da die Differenzialien der Logarithmen algebraische Größen sind. Ist nemlich $y = x\,lx$, so ist $\frac{y}{x} = lx$, und daraus findet man durch die Differenziation $\frac{x\,dy - y\,dx}{xx} = \frac{dx}{x}$, und es ist folglich $x\,dy - y\,dx = x\,dx$. Sind zwey Logarithmen da, so ist eine zweyte Differenziation nöthig. Ist z. B. $y\,lx = x\,ly$, so ist $\frac{y\,lx}{x} = ly$, und daraus erhält man durch die Differenziation

$$\frac{x\,dy\,lx + y\,dx - y\,dx\,lx}{xx} = \frac{dy}{y},$$

so wie sich hieraus $lx = \frac{xx\,dy - yy\,dx}{yx\,dy - yy\,dx}$ ergiebt. Nun differenziire man von neuem so, daß man dx beständig seyn läßt, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{xx\,ddy + 2x\,dx\,dy - 2y\,dx\,dy}{yx\,dy - yy\,dx} +$$
$$\frac{(yy\,dx - xx\,dy)(yx\,ddy + x\,dy^2 - y\,dx\,dy)}{(yx\,dy - yy\,dx)^2}$$

oder

oder

$$\frac{dx}{x} = \left\{\begin{matrix} y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - y^2xdxdy^2 \\ + y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3 \end{matrix}\right\} : yxdy - yydx^2.$$

Hieraus aber wird, wenn man diese Gleichung reducirt,

$$y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - 2xyydxdy^2$$
$$+ 3y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3 - \frac{y^4dx^3}{x} = 0,$$

oder

$$yyxx(y - x)dxddy + 3yxdxdy(xxdy + yydx)$$
$$- 2yyxxdxdy(dx + dy) = x^4dy^3 + y^4dx^3.$$

§. 294.

Die Exponential-Größen werden aus den Gleichungen auf eben die Art wie die Logarithmen durch die Differenziation weggeschafft. Ist z. B. die Gleichung $P = e^Q$ gegeben, wo P und Q jede Funktion von x und y bedeuten können: so läßt sich diese Gleichung in folgende logarithmische Gleichung $lP = Q$ verwandeln, deren Differenzial-Gleichung $\frac{dP}{P} = dQ$, oder $dP = PdQ$ ist. Auch hindert das nichts, wenn die Exponential-Größen mehr zusammen gesetzt sind; denn wenn eine Differenziation nicht hinreicht, so erreicht man doch durch zwey oder mehrere seinen Endzweck.

I. Ist $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, so multiplicire man den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch e^x. Hierdurch wird $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$, und also $e^{2x} = \frac{y + 1}{y - 1}$, und $2x = l\frac{y + 1}{y - 1}$. Hiervon ist aber das Differenzial $dx = - \frac{dy}{yy - 1} = \frac{dy}{1 - yy}$.

II. Ist

II. Ist $y = l\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, so findet man durch die erste Differenziation $dy = \frac{(e^x - e^{-x})dx}{e^x + e^{-x}}$, oder $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, und $e^{2x} = \frac{dy + dx}{dx - dy}$, und folglich $2x = l\frac{dy + dx}{dx - dy}$. Nimmt man also dx beständig an, so wird $dx = \frac{dx\,ddy}{dx^2 - dy^2}$, oder $dx^2 = ddy + dy^2$.

§. 295.

Auf eine ähnliche Art werden auch die transcendenten Größen, die vom Kreise abhangen, aus den Gleichungen, vermittelst der Differenziation, weggeschafft; wie folgende Beyspiele zeigen werden.

I. Wenn $y = a A.\sin.\frac{x}{a}$ ist; so ist $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

II. Wenn $y = a \cos.\frac{y}{x}$ ist; so ist $\frac{y}{a} = \cos.\frac{y}{x}$ und $\frac{dy}{a} = -\frac{x\,dy + y\,dx}{xx} \times \sin.\frac{y}{x}$. Da aber $\cos.\frac{y}{x} = \frac{y}{a}$ ist, so ist $\sin.\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{a}$, und gebraucht man diesen Werth, so wird $\frac{dy}{a} = \frac{(y\,dx - x\,dy)\sqrt{(aa - yy)}}{axx}$ oder $xx\,dy = (y\,dx - x\,dy)\sqrt{(aa - yy)}$.

III. Wenn $y = m \sin. x + n \cos. x$ ist, so ist nach der ersten Differenziation $dy = m\,dx.\cos. x - n\,dx.\sin. x$. Hieraus findet man, wenn man von neuem differenziirt und dx beständig annimmt,

$$ddy = -m\,dx^2.\sin. x - n\,dx^2.\cos. x,$$

und

und diese Gleichung, durch die erste dividirt, giebt

$$\frac{ddy}{y} = -dx^2, \text{ oder } ddy + ydx^2 = 0.$$

so daß also hier nicht bloß der Sinus und Cosinus, sondern auch die beständigen Größen m und n verschwunden sind.

IV. Wenn $y = \sin. lx$ ist, so ist $A.\sin. y = lx$, und hieraus erhält man durch die Differenziation $\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{dx}{x}$. Nimmt man hiervon die Quadrate $xxdy^2 = dx^2 - yydx^2$, und differenziirt nun wieder, so daß man dx beständig seyn läßt, so wird

$$2xxdyddy + 2xdxdy^2 = -2ydx^2dy$$

oder

$$xxddy + xdxdy + ydx^2 = 0.$$

V. Wenn $y = ae^{mx}\sin. nx$ ist, so wird durch die Differenziation

$$dy = mae^{mx}dx\sin. nx + nae^{mx}dx\cos. nx$$

und hieraus durch die Division mit der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{dy}{y} = mdx + \frac{ndx.\cos. nx}{\sin. nx} = mdx + ndx.\cot. nx.$$

Es ist also $A.\cot.\left(\frac{dy}{nydx} - \frac{m}{n}\right) = nx$. Differenziirt man nun diese Gleichung, so daß man dx beständig seyn läßt, so wird

$$ndx = \frac{ndxdy^2 - nydxddy}{m^2y^2dx^2 + n^2y^2dx^2 - 2mydxdy}, \text{ oder}$$

$$(m^2 + n^2)y^2dx^2 - 2mydxdy = dy^2 - yddy.$$

Es erhellet hieraus, daß eine Differenzial-Gleichung, wenn sie auch gleich keine transcendenten Größen enthält, doch

aus

aus einer endlichen Gleichung entstehen kann, die transcendente Größen jeder Art enthält.

§. 296.

Da also die Differenzial-Gleichungen sowohl des ersten als jedes höhern Grades, welche zwey veränderliche Größen x und y enthalten, aus endlichen Gleichungen entspringen: so wird durch sie ebenfalls ein Verhältniß zwischen jenen zwey veränderlichen Größen ausgedruckt. Ist nemlich irgend eine Differenzial-Gleichung, worin zwey veränderliche Größen x und y vorkommen, gegeben, so wird dadurch ein gewisses Verhältniß zwischen x und y ausgedruckt, nach welchem y eine gewisse Funktion von x ist. Daher erkennet man die Natur der Differenzial-Gleichung, wenn man für y die Funktion von x angeben kann, welche durch jene Gleichung angezeigt wird, oder welche so beschaffen ist, daß sich, wenn man dieselbe allenthalben anstatt y, ihr Differenzial anstatt dy, und ihre höhern Differenzialien anstatt ddy, d^3y, d^4y setzt, eine identische Gleichung ergiebt. Mit der Erfindung dieser Funktion beschäftiget sich die Integral-Rechnung, deren Endzweck ist, aus jeder gegebenen Differenzial-Gleichung die Funktion von x, welcher die andere veränderliche Größe gleich ist, zu finden, oder welches einerley ist, die endliche Gleichung zu finden, welche das Verhältniß zwischen x und y ausdruckt.

§. 297.

Es sey z. B. die Differenzial-Gleichung

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0$$

gegeben, welche wir §. 288 gefunden haben, und wodurch ein solches Verhältniß zwischen x und y ausgedruckt wird, als in folgender endlichen Gleichung $yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$ zum Grunde liegt. Da also aus dieser Gleichung $yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ ist, so erhellet, daß $\sqrt{(ax + bbe^{\frac{x}{a}})} = y$ die Funktion von x ist, der die veränderliche Größe y vermöge der Differenzial-Gleichung gleich ist. Denn wenn man in dieser Gleichung anstatt yy seinen Werth $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ und anstatt $2ydy$ sein Differenzial $adx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx$ setzt, so erhält man diese identische Gleichung:

$$adx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx - adx - xdx - \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx + xdx = 0.$$

Auf diese Art erhellet, daß jede Differenzial-Gleichung eben so als eine endliche Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen den Größen x und y anzeigt, welches aber nicht anders als vermittelst der Integral-Rechnung erforscht werden kann.

§. 298.

Um dies deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, daß die Funktion von x, der y vermöge der Differenzial-Gleichung gleich ist, bekannt sey, wobey denn die Differenzial-Gleichung zum ersten oder zu einem höhern Grade gehören kann. Ferner sey $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, ꝛc., so daß also, wenn man dx beständig annimmt, $ddy = qdx^2$, $d^3y = rdx^3$ ꝛc. werde. Setzt man diese Werthe in die Gleichung, so verschwinden daraus, weil alle ihre Glieder homogen sind, die Differenzialien dx durch die Division, und es entsteht eine Gleichung, welche bloß die endlichen

Größen

Größen x, y, p, q, r, ꝛc. enthält. Da nun p, q, r Größen sind, die von der Natur der Funktion y abhangen, so enthält die Gleichung eigentlich nur die veränderlichen Größen x und y, und so erhellet wiederum, daß eine jede Differenzial-Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen den veränderlichen Größen x und y ausdrucke. Wenn man daher bey der Auflösung einer Aufgabe auf eine Differenzial-Gleichung zwischen x und y kommt, so ist dadurch das Verhältniß zwischen x und y eben so bestimmt, als wenn man eine endliche Gleichung gefunden hätte.

§. 299.

Auf diese Art kann daher jede Differenzial-Gleichung auf eine endliche Form gebracht werden, worin bloß endliche Größen enthalten, und woraus alle Differenzialien oder unendlich kleine Größen weggebracht sind. Denn da y eine Funktion von x ist, so werden, wenn man

$$dy = pdx; \quad dp = qdx; \quad dq = rdx; \text{ ꝛc.}$$

setzt, man mag ein Differenzial, was für eins man will, beständig annehmen, die zweyten und höhern Differenzialien durch die Potestäten von dx ausgedruckt, und darauf durch die Division gänzlich weggebracht. Wäre z. B. die Gleichung

$$xyd^3y + xxdyddy + yydxddy - xydx^3 = 0,$$

worin dx beständig ist, gegeben: so würde sich dieselbe, wenn man $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, setzte, und die ganze Gleichung durch dx^3 dividirte, in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0.$$

verwandeln, und diese endliche Gleichung bestimmt das Verhältniß zwischen x und y.

§. 300.

Es werden also alle Differenzial-Gleichungen, zu was für einer Ordnung sie auch gehören mögen, durch diese Substitutionen

$$dy = pdx; \quad dp = qdx; \quad dq = rdx; \text{ etc.}$$

auf bloße endliche Größen reducirt. Und wenn die gegebene Differenzial-Gleichung zur ersten Ordnung gehört, so daß also nur die ersten Differenzialien in ihr befindlich sind, so wird durch die gedachte Reduktion außer den veränderlichen Größen x und y noch die Größe p eingeführt. Gehört hingegen die Differenzial-Gleichung zum zweyten Grade, oder enthält sie zweyte Differenzialien, so kommt außerdem noch die Größe q, und gehört sie zum dritten Grade, so kommt noch die Größe r dazu u. s. f. Da also auf diese Art die Differenzialien gänzlich aus dem Calcul wegfallen, so hat man auch nicht weiter nöthig, ein Differenzial als beständig zu betrachten, und es bedarf daher, obgleich die aus den zweyten Differenzialien entspringenden Größen, q, r, s, etc. da sind, keiner Anzeige, welches Differenzial beständig angenommen worden sey. Denn es ist gleich, ob man bey der Entwickelung ein beständiges Differenzial annimmt oder nicht.

§. 301.

Wenn also eine Differenzial-Gleichung vom zweyten oder einem noch höhern Grade gegeben wird, von der angezeigt ist, daß dabey kein erstes beständiges Differenzial zum Grunde liege: so kann man auf diese Art sogleich erforschen, ob sie ein bestimmtes Verhältniß zwischen x und y enthalte oder nicht? Denn da kein beständiges Differenzial angenommen worden ist, so steht es bey uns, welches wir als beständig betrachten wollen, und es kommt daher bloß darauf an, daß wir untersuchen, ob die Gleichung auch, wenn man ver-

schiedene

schiedene Differenzialien beständig seyn läßt, eben dasselbe Verhältniß zwischen x und y enthalte. Ist dies nicht, so ist solches ein untrügliches Kennzeichen, daß die Gleichung kein bestimmtes Verhältniß ausdruckt, und daher auch bey der Auflösung der Aufgaben nicht statt haben kann. Der sicherste und leichteste Weg dieses zu erforschen ist aber der, auf welchem nach dem Obigen bey den Differenzial Formeln der höhern Ordnungen untersucht wird, ob dieselben eine gewisse Bedeutung haben oder nicht.

§. 302.

Ist also eine Differenzial-Gleichung der zweyten oder einer höhern Ordnung gegeben, wobey kein beständiges Differenzial angenommen worden, so nehme man dx beständig an. Dann verwandele man die Gleichung auf die Art, wie bey den Differenzial Formeln gezeigt worden ist, in eine solche, die kein beständiges Differenzial voraussetzt, und schreibe zu dem Ende $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ für ddy, und $d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ für d^3y. Ist dies geschehen, so untersuche man, ob die gefundene Gleichung mit der gegebenen übereinstimme oder nicht. Im ersten Falle druckt die gegebene Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen x und y aus, im andern aber nicht, wie solches bereits ausführlich bewiesen worden ist.

§. 303.

Es sey, um dies deutlich zu machen, folgende Gleichung gegeben,

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

und zwar unter der Bedingung, daß darin kein Differenzial beständig sey. Setzt man dx beständig, so verwandelt sich dieselbe in

$$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

und verwandelt man nunmehr diese gefundene Gleichung auf die vorhin beschriebene Art wieder in eine solche, wobey kein beständiges Differenzial statt findet, so wird

$$-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Da nun diese Gleichung von der gegebenen bloß in Ansehung des ersten Gliedes unterschieden ist, so muß man zusehen, ob $P = -\frac{Qdy}{dx}$ ist. Ist dies, so druckt die gegebene Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen x und y aus, welches die Integral-Rechnung finden lehrt, was auch für ein erstes Differenzial als beständig angenommen wird; ist aber nicht $P = -\frac{Qdy}{dx}$, so ist die gegebene Gleichung unmöglich.

§. 304.

Wofern also die Gleichung

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

nicht unmöglich ist, so ist nothwendiger Weise $Pdx + Qdy = 0$. Dies kann auf eine zwiefache Art geschehen. Denn es ist entweder wirklich $P = -\frac{Qdy}{dx}$, oder die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$; oder es ist die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ selbst die Differenzial-Gleichung des ersten Grades, durch deren Differenziation die gegebene entstanden ist. Im letzten Falle stimmt die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ mit der gegebenen überein, und druckt eben dasselbe Verhältniß zwischen x und y aus, wobey man denn dieses Verhältniß ohne

Hülfe der Integral-Rechnung finden kann. Da nemlich $Pdx + Qdy = 0$ ist, so findet man, wenn man differenziirt,

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

und zieht man diese Gleichung von der gegebenen ab, so bleibt

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy$$

übrig. Weil aber $dy = -\frac{Pdx}{Q}$ ist, so lassen sich die Differenzialien gänzlich wegschaffen, und dadurch erhält man eine endliche Gleichung, welche das Verhältniß zwischen x und y ausdruckt.

§. 305.

Nun wollen wir annehmen, daß man bey der Auflösung eines Problems, wobey kein Differenzial beständig angenommen worden, auf diese Gleichung gekommen sey:

$$x^3ddx + xxyddy - yydx^2 + xxdy^2 + aadx^2 = 0.$$

Da man also weiß, daß diese Gleichung keinen Widerspruch enthalte, so ist

$$x^3dx + xxydy = 0, \text{ oder } xdx + ydy = 0.$$

Hiervon ist nun das Differenzial

$$x^3ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydxdy + xxdy^2 = 0,$$

und die Differenz zwischen dieser und der gegebenen Gleichung ist

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydxdy = 0,$$

oder

$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Da aber $xdx + ydy = 0$ ist, so wird $2xydy = -2xxdx$, und folglich

$$aadx - yydx - xxdx = 0, \text{ oder } yy + xx = aa.$$

Diese Gleichung druckt das wahre Verhältniß zwischen x und y aus, indem sie mit der vorhin gefundenen Differenzial-

Gleichung $xdx + ydy = 0$ übereinstimmt. Hätte sich diese Uebereinstimmung nicht gezeigt, so hätte man die Gleichung für unmöglich halten müssen; da sie aber hier statt fand, so haben wir die endliche Gleichung $xx + yy = aa$ ohne die Integral-Rechnung finden können.

§. 306.

Um auch ein Beyspiel einer unmöglichen Gleichung anzuführen, so sey folgende

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0$$

gegeben, und dabey kein Differenzial beständig. Hier sollte nun $yydx - xxdy = 0$, und also, wenn man differenziirt,

$$yyddx - xxddy + 2ydxdy + 2xdxdy = 0$$

seyn; woraus, wenn man diese Gleichung der gegebenen gleich setzt,

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy$$

fließt. Da aber $dy = \frac{yydx}{xx}$ ist, so erhält man durch Wegschaffung der Differenzialien

$$y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{xx}, \text{ oder}$$

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy.$$

Ob nun diese Gleichung mit der Differenzial-Gleichung $yydx - xxdy = 0$ übereinstimme, läßt sich leicht finden. Es wird nemlich, wenn man differenziirt,

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{9yy - ax + 4xy - 2xx},$$

und da aus jener Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$ ist, so müßte

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

oder

$$axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y} = 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3$$

seyn. Aus der zuerst gefundenen endlichen Gleichung aber ist

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

und zieht man diese Gleichung von jener ab, so wird

$$o = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3$$

Diese Gleichung läßt sich in folgende zwey auflösen:

$$o = y - x; \text{ und } 2yy + yx + 2xx = o;$$

wovon die erste, $y = x$, zwar mit dem Differenziale $dy = \frac{yydx}{xx}$ bestehen kann, aber dagegen der endlichen Gleichung widerspricht, wofern nicht entweder $a = o$, oder beyde veränderliche Größen x und y beständig angenommen werden. In diesem Falle geschieht, wegen $dx = o$, und $dy = o$ allen Differenzial-Gleichungen ein Genüge, und die gegebene Gleichung kann daher nicht bestehen.

§. 307.

Nun wollen wir auch die Differenzial-Gleichungen, die drey veränderliche Größen, x, y und z enthalten, betrachten, welche entweder zum ersten oder zum zweyten, oder zu einem höhern Grade gehören werden. Um die Natur derselben zu untersuchen, muß man merken, daß durch die endlichen Gleichungen, die drey veränderliche Größen enthalten, das Verhältniß ausgedruckt wird, welches eine jede von diesen Größen zu den beyden übrigen hat, und es wird also dadurch bestimmt, was z für eine Funktion von x und y ist. So wie daher eine solche endliche Gleichung aufgelöset wird, wenn man findet, was für eine Funktion von x und y für z

gesetzt werden muß, wenn der Gleichung ein Genüge geschehen soll: so bestimmt auch eine Differenzial-Gleichung von drey veränderlichen Größen, was für eine Funktion die eine davon von den übrigen ist, und eine solche Gleichung ist alsdenn aufgelöset, wenn die Funktion der beyden veränderlichen Größen x und y angegeben worden ist, die anstatt der dritten z gesetzt, der Gleichung ein Genüge thut, oder sie zu einer identischen Gleichung macht. Es wird also die Differenzial-Gleichung aufgelöset, wenn entweder die Funktion von x und y, welche den Werth von z ausdruckt, bestimmt, oder eine endliche Gleichung angegeben wird, die ebenfalls den Werth von z ausdruckt.

§. 308.

So wie aber jede Differenzial-Gleichung zweyer veränderlichen Größen immer ein bestimmtes Verhältniß zwischen diesen veränderlichen Größen ausdruckt, so kann sichs bey den Differenzial-Gleichungen dreyer veränderlichen Größen ganz anders verhalten. Denn es giebt darunter Gleichungen, denen auf keine Weise ein Genüge geleistet werden kann, was man auch für eine Funktion von x und y für z setzt. So sieht man leicht, daß man für die Gleichung $z\,dy = y\,dx$ keine einzige Funktion von x und y angeben kann, die für z gesetzt, $z\,dy = y\,dx$ gebe, denn es fallen bey keiner die Differenzialien dx und dy weg. Auf eine ähnliche Art erhellet, daß es keine Funktion von x und z giebt, die, für y gesetzt, der Gleichung ein Genüge leiste. Denn was man auch für eine Funktion von x und z nehmen mag, so ist doch in ihrem Differenziale dz enthalten, und da dieses in der Gleichung nicht vorkommt, so kann sie auch nicht 0 werden. Es läßt sich daher keine endliche Glei-

Gleichung zwischen x, y und z angeben, welche mit der Differenzial-Gleichung $z\,dy = y\,dx$ übereinstimme.

§. 309.

Man muß daher die Differenzial-Gleichungen dreyer veränderlicher Größen in imaginäre und reelle eintheilen. Imaginär ist eine Gleichung alsdenn, wenn ihr keine endliche Gleichung ein Genüge thut, so wie solches bey der eben betrachteten Gleichung $z\,dy = y\,dx$ statt fand. Hingegen ist eine Gleichung reell, wenn sich eine ihr gleichbedeutende endliche Gleichung angeben läßt, und dieses findet statt, wenn die eine veränderliche Größe irgend einer Funktion der beyden andern gleich ist. Von dieser Art ist die Gleichung

$$z\,dy + y\,dz = x\,dz + z\,dx + x\,dy + y\,dx$$

denn sie stimmt mit dieser endlichen Gleichung

$$yz = xz + xy$$

überein, und es ist daher

$$z = \frac{xy}{y-x}.$$

Diese Eintheilung der gegenwärtigen Gleichungen in imaginäre und reelle ist wohl zu merken, vorzüglich in der Integral-Rechnung; denn es würde thöricht seyn, eine Differenzial-Gleichung integriren, das heißt, eine ihr Genüge leistende endliche Gleichung suchen zu wollen, wenn es dergleichen gar nicht giebt.

§. 310.

Zuvörderst also fällt in die Augen, daß alle Differenzial-Gleichungen dreyer veränderlicher Größen, worin nur die Differenzialien zweyer von diesen Größen vorkommen, imaginär und widersprechend sind. Denn angenommen, daß in einer Gleichung, welche die veränderliche Größe z

enthält,

enthält, bloß die Differenzialien dx und dy befindlich seyen, so ist offenbar, daß es keine Funktion von x und y geben könne, welche für z gesetzt, eine identische Gleichung hervorbringe, denn die Differenzialien dx und dy werden auf keine Art weggeschafft. In diesen Fällen giebt es also gar keine endliche, jener Differenzial-Gleichung Genüge leistende, Gleichung, es müßte sich denn ein solches Verhältniß zwischen x und y angeben lassen, welches mit jeder Bedeutung von z bestehen könnte, wie in der Gleichung

$$zdy - zdx = ydy - xdx,$$

welcher die Gleichung $y = x$ ein Genüge thut. Es ist aber leicht zu erforschen, in welchen Fällen dieses statt finde. Man darf nur das Verhältniß zwischen x und y, wenn $z = 0$ ist, aufsuchen, und dann prüfen, ob dieses Verhältniß für einen jeden Werth von z ein Genüge leiste.

§. 311.

Es ist indeß eine Gleichung von drey veränderlichen Größen nicht bloß dann imaginär, wenn sie nur zwey Differenzialien enthält, sondern sie kann solches auch seyn, wenn gleich alle drey Differenzialien in ihr vorkommen. Um diese Fälle zu entwickeln, wollen wir annehmen, daß P und Q bloß Funktionen von x und y seyen, und daß man die Gleichung habe,

$$dz = Pdx + Qdy.$$

Wenn diese Gleichung nicht imaginär ist, so ist z irgend eine Funktion von x und y, und ist das Differenzial derselben $dz = pdx + qdy$, so wird $P = p$, und $Q = q$. Nun haben wir aber oben gezeigt, daß $pdx + qdy$ kein Differenzial einer Funktion von x und y seyn kann, wofern nicht $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$ ist, wo, wie wir oben angenommen haben, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$

das

das Differenzial von p, wenn bloß y als veränderlich betrachtet wird, durch dy dividirt, bedeutet, und $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ auf eine ähnliche Art verstanden werden muß. Es kann daher die Gleichung $dz = Pdx + Qdy$ nicht anders reell seyn, als wenn

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

ist.

§. 312.

Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit der Gleichung

$$dZ = Pdx + Qdy,$$

wenn Z irgend eine Funktion von z, P und Q aber Funktionen von x und y bedeuten, die z nicht enthalten. Soll nemlich Z einer Funktion von x und y gleich seyn, so muß $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ seyn. Nach diesem Kennzeichen läßt sich also bey jeder gegebenen in dieser allgemeinen Form enthaltenen Differenzial-Gleichung beurtheilen, ob sie reell oder imaginär ist. Auf diese Art läßt sich z. B. zeigen, daß diese Gleichung $zdz = ydx + xdy$ reell ist. Denn da $P = y$ und $Q = x$ ist, so wird $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1$. Dagegen ist diese Gleichung $azdz = yydx + xxdy$ imaginär; denn hier wird $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y$, und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$, welche Werthe einander ungleich sind.

§. 313.

Um aber dieses Kennzeichen in seinem ganzen Umfange zu untersuchen, so seyen P, Q und R beliebige Funktionen

von

von x, y und z; wo denn alle Differenzial Gleichungen dreyer veränderlicher Größen, wenn sie zum ersten Grade gehören, unter dieser Form begriffen werden:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

So oft nun diese Gleichung reell ist, so ist z immer gleich einer Funktion von x und y, und sein Differenzial hat folglich diese Form: $dz = pdx + qdy$. Wenn daher in der gegebenen Gleichung jene Funktion von x und y für z, und $pdx + qdy$ für dz gesetzt wird, so muß nothwendig die identische Gleichung $0 = 0$ entstehen. Und da nun aus der gegebenen Gleichung $dz = -\frac{Pdx}{R} - \frac{Qdy}{R}$ ist, so muß nothwendig, wenn in P, Q und R jener Werth für z gesetzt wird $p = -\frac{P}{R}$, und $q = -\frac{Q}{R}$ werden.

§. 314.

Weil aber $dz = pdx + qdy$ ist, so ist nach dem vorhin Bewiesenen $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Da nun durch die Substitution des Werthes von z in x und y, $p = -\frac{P}{R}$, und $q = -\frac{Q}{R}$ wird, so findet man hierdurch

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{RdP + PdR}{RRdy}\right) \text{ und } \left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{RdQ + QdR}{RRdx}\right)$$

und multiplicirt man durch RR, so erhält man diese Gleichung

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Die Nenner dy und dx zeigen auch hier an, daß man bey der Differenziation der Zähler bloß die Größe als veränderlich betrachten soll, deren Differenzial in dem Nenner steht,

steht. Diese Differenzialien aber dP, dQ, dR, lassen sich nicht eher erkennen, als bis man in den Größen P, Q und R den gehörigen Werth für z substituirt hat. Da nun derselbe unbekannt ist, so muß man folgenden Weg einschlagen.

§. 315.

Da P, Q und R Funktionen von x, y und z sind, so setze man

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$
$$dQ = \delta dx + \varepsilon dy + \zeta dz$$
$$dR = \eta dx + \vartheta dy + \iota dz$$

und lasse α, β, γ, δ, ε, rc. die Funktionen bedeuten, die bey der Differenziation entstehen. Nun nehme man an, daß anstatt z allenthalben sein Werth, durch x und y ausgedruckt, gesetzt werde, und substituire $pdx + qdy$ für dz. Alsdenn wird

$$dP = (\alpha + \gamma p)dx + (\beta + \gamma q)dy$$
$$dQ = (\delta + \zeta p)dx + (\varepsilon + \zeta q)dy$$
$$dR = (\eta + \iota p)dx + (\vartheta + \iota q)dy.$$

Aus diesen Werthen fließt nun

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \vartheta + \iota q; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p$$
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta + \gamma q; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p.$$

§. 316.

Da also zur Realität der Gleichung erfordert wird, daß

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

sey, so wird, wenn man die gefundenen Werthe substituirt,

$$P(\vartheta + \iota q) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p)$$

Nun

Nun haben wir vorhin $p = -\frac{P}{R}$, und $q = -\frac{Q}{R}$ gefunden, und da die Differenzialien nicht mehr in Rechnung kommen, so können diese Werthe gebraucht werden, wenn auch gleich für z sein durch x und y ausgedruckter Werth nicht gesetzt wird. Es ist daher

$$P\vartheta - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

oder

$$0 = P(\zeta - \vartheta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta).$$

Weil aber die Größen $\beta, \delta, \gamma, \eta, \zeta, \vartheta$, durch die Differenziation gefunden werden, so wird, wenn man die obige Bezeichnungsart gebraucht:

$$0 = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Wenn diese Eigenschaft nicht in einer Gleichung anzutreffen ist, so ist dieselbe nicht reell, sondern imaginär.

§. 317.

Ob wir gleich diese Regel aus der Betrachtung der veränderlichen Größe z hergeleitet haben, so ist gleichwohl, da alle Größen auf gleiche Art vorkommen, offenbar, daß man bey der Betrachtung einer von den übrigen Größen eben denselben Ausdruck gefunden haben würde. Ist also irgend eine Differenzial-Gleichung des ersten Grades von drey veränderlichen Größen gegeben, so läßt sich hiernach leicht beurtheilen, ob sie reell oder imaginär ist. Man darf nemlich dieselbe nur mit der allgemeinen Form,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

vergleichen, und den Werth dieser Formel suchen:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) - R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Ist

Ist dieser Werth $= 0$, so ist die Gleichung reell; ist er aber nicht $= 0$, so ist solches ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung imaginär und widersprechend ist.

§. 318.

Die gegebene Gleichung kann auch jedesmal durch die Division auf diese Form gebracht werden:

$$Pdx + Qdy + dz = 0,$$

und da die vorhergehende Gleichung in diese übergeht, wenn $R = 1$ ist, so läßt sich das gefundene Kennzeichen einfacher auf folgende Art ausdrucken:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

So oft nemlich dieser Ausdruck in der That $= 0$ ist, so oft ist die Gleichung reell; wenn aber das Gegentheil sich ereignet, imaginär. Das letzte ist aus den bisher geführten Beweisen gewiß. Was das erste betrifft, so ließe sich noch fragen, ob eine Gleichung allezeit reell sey, wenn das gegebene Kennzeichen statt findet. Da dieses an dem gegenwärtigen Orte nicht vollständig bewiesen werden kann, sondern der Beweis davon in die Integral-Rechnung gehört: so begnügen wir uns hier, es bloß zu behaupten; es ist aber auch daher kein Nachtheil zu besorgen, wenn etwa jemand so lange an der Wahrheit dieser Behauptung zweifeln will.

§. 319.

Es erhellet aber aus diesem Kennzeichen zuvörderst, daß, wenn in einer Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, P eine Funktion von x, Q eine Funktion von y, und R eine Funktion von z allein ist, die Gleichung allezeit reell seyn wird. Denn es wird alsdann

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0;$$

§. 320.

Wenn aber, wie vorhin, P bloß von x, und Q bloß von y, R hingegen von x, y und z irgend eine Funktion ist: so wird die Gleichung reell seyn, wenn

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ oder } \left(\frac{dR}{dx}\right) : \left(\frac{dR}{dy}\right) = P : Q$$

ist. Ist z. B. die Gleichung

$$\frac{2dx}{x} + \frac{3dy}{y} + \frac{x^2y^3dz}{z^6} = 0$$

gegeben, so wird, weil hier $P = \frac{2}{x}$, $Q = \frac{3}{y}$ und $R = \frac{x^2y^3}{z^6}$, und hieraus $\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{2xy^3}{z^6}$, und $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{3xxyy}{z^6}$ ist, $P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{6xyy}{z^6}$, und es ist also die gegebene reell.

§. 321.

Wenn P und Q Funktionen von x und y, R hingegen bloß von z eine Funktion ist, so ist, wegen $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0;$

$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0$; $\left(\frac{dR}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{dR}{dy}\right) = 0$, die Gleichung reell, wenn $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist. Eben diese Bedingung aber wird erfordert, wenn $Pdx + Qdy$ ein bestimmtes Differenzial, oder aus der Differenziation irgend einer endlichen Funktion von x und y entstanden seyn soll. Hierauf läuft das hinaus, was wir oben §. 312. bereits angemerkt haben, nemlich, daß die Gleichung $dZ = Pdx + Qdy$, wenn Z bloß von z, P und Q aber von x und y Funktionen sind, nicht reell seyn kann, wofern nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist. Beyde Fälle stimmen aber völlig mit einander überein, denn anstatt Rdz kann man, wenn R eine Funktion von z allein ist, dZ setzen, wenn Z eine Funktion von z ist.

§. 322.

Um dieses Kennzeichen durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die Gleichung gegeben:

$$(6xy^2z - 5yz^3)dx + (5x^2yz - 4xz^3)dy + (4x^2y^2 - 6xyz^2)dz = 0.$$

Vergleicht man dieselbe mit der allgemeinen Form, so wird

$$P = 6xy^2z - 5yz^3;\ \left(\frac{dP}{dy}\right) = 12xyz - 5z^3;$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 6xy^2 - 15yz^2.$$

$$Q = 5x^2yz - 4xz^3;\ \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 10xyz - 4z^3;$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xz^2.$$

$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2;\ \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2;$$

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = 8x^2y - 6xz^2.$$

Hat man diese Werthe gefunden, so wird die Gleichung, welche das Kennzeichen enthält, folgende:

$$+(6xy^4z - 5yz^3)(-3xxy - 6xzz) + (5x^2yz - 4xz^3)(2xyy + 9yzz)$$
$$+ (4x^2y^2 - 6xyz^2)(2xyz - z^3) = 0.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so heben sich alle Glieder einander auf, und es wird $0 = 0$, welches anzeigt, daß die Gleichung reell ist.

§. 323.

Wenn aber der Ausdruck, der auf diese Art aus dem Kennzeichen hergeleitet worden ist, nicht verschwindet, so dient dies zur Anzeige, daß die gegebene Gleichung imaginär ist. Da man aber auf diese Art aus dem Kennzeichen eine endliche Gleichung findet, so zeigt dieselbe, wenn sie mit der Differenzial-Gleichung übereinstimmt, zugleich das Verhältniß an, welches die veränderlichen Größen zu einander haben. Und auf diese Art werden die Fälle, deren wir oben §. 310. Erwähnung gethan haben, entwickelt. Es sey die Gleichung

$$(z - x)dx + (y - z)dy = 0$$

gegeben. Hier wird $P = z - x$; $Q = y - z$; und $R = 0$, ferner $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$ und $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1$. Ferner wird die Gleichung, welche das Kennzeichen enthält, $P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$, oder $z - x = z - y$, woher denn $y = x$ wird.

Da

Da sichs also hier trifft, daß die Gleichung $y = x$ zugleich der Differenzial-Gleichung ein Genüge leistet, so kann man sagen, daß die gegebene Gleichung eigentlich nichts anders bedeute, als daß $y = x$ sey.

§. 324.

Ist also eine Differenzial-Gleichung, die drey veränderliche Größen enthält,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gegeben, so sind drey Fälle zu betrachten, zu denen diese Gleichung führt:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Der erste findet statt, wenn dieser Ausdruck in der That $= 0$ wird, wo denn die gegebene Gleichung reell ist. Wenn aber diese Gleichung nicht identisch ist, so muß man untersuchen, ob sie der gegebenen Gleichung ein Genüge thut. Ist dies, so hat man eine endliche Gleichung, und dieses ist der zweyte Fall. Der dritte endlich findet statt, wenn die endliche Gleichung nicht mit der gegebenen Differenzial-Gleichung bestehen kann, und dann ist die gegebene Gleichung imaginär, denn es läßt sich keine endliche Gleichung finden, die ihr ein Genüge leistete.

§. 325.

Der erste und dritte Fall sind von selbst deutlich. Was den zweyten betrifft, so verdient er, ob er gleich sehr selten vorkommt, dennoch sorgfältig gemerkt zu werden. Und da wir schon oben ein Beyspiel davon in einer Gleichung, die zwey veränderliche Größen enthält, gegeben haben, so wollen wir noch eine Gleichung anführen, in welcher drey Differenzialien vorkommen, nemlich

$$(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0.$$

Hier ist also

$$P = z - y; \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0; \quad \left(\frac{dR}{dy}\right) = 1;$$

$$Q = x; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = 1;$$

$$R = y - z; \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1;$$

Es ist also die Gleichung, welche das Kennzeichen enthält,

$$z - x - y = 0, \text{ oder } z = x + y.$$

Setzt man aber diesen Werth von z in die Differenzial-Gleichung, so wird

$$xdx + xdy - x(dx + dy) = 0$$

und da dieses eine identische Gleichung ist, so folget, daß die Differenzial-Gleichung nichts anders bedeutet, als daß $z = x + y$ ist.

§. 326.

Da wir behauptet haben, daß alle Differenzial-Gleichungen des ersten Grades, die drey veränderliche Größen enthalten, auf die Form:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gebracht werden können: so kann hier ein Zweifel in Ansehung derer Gleichungen entstehen, in welchen die ersten Differenferenzialien zwey oder mehrere Dimensionen ausmachen, dergleichen z. B. folgende ist:

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdxdy + 2Tdxdz + Vdydz.$$

Allein von diesen Gleichungen ist zu merken, daß sie auf keine Weise reell seyn können, wofern sie nicht Divisoren von der ersten Form haben, die daher einfache Gleichungen geben werden. Denn da aus dieser Gleichung $dz =$

$$\frac{-Tdx - Vdy \pm \sqrt{(dx^2(T^2-PR) + 2dxdy(TV+RS) + dy^2(V^2-QR))}}{R}$$

wird: so ist leicht einzusehen, daß z keiner Funktion von x und y, oder dz einem solchen Ausdrucke, $pdx + qdy$ gleich werden kann, wofern nicht die irrationale Größe rational wird. Dies wird geschehen, wenn

$$(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$$

oder

$$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}$$

ist. Wenn also nicht diese endliche Gleichung selbst der gegebenen Gleichung ein Genüge thut, so ist diese imaginär.

§. 327.

Nun sollten noch in diesem Capitel die Differenzial-Gleichungen der höhern Ordnungen, die drey veränderliche Größen enthalten, betrachtet, und die Fälle festgesetzt werden, wo dieselben reell oder imaginär sind. Allein da die Kennzeichen gar zu verwickelt werden würden, so lassen wir sie hier auf der Seite, zumal, da sie aus den bisher benutzten Quellen gleichfalls fließen. Wenn übrigens in der Integral-Rechnung diese Kennzeichen nöthig werden, so wird es da auch leicht seyn, sie zu finden.

Aus eben dem Grunde betrachten wir auch die Gleichungen nicht, die mehr veränderliche Größen enthalten, indem dergleichen fast nie vorkommen, und wenn sie vorkämen, nach dem Bisherigen leicht untersucht werden könnten. Wir endigen also hier die Anleitung zur Differenzial-Rechnung, und wollen nunmehr den außerordentlichen Nutzen zeigen, den diese Rechnung, theils in der Analysis selbst, theils in der höhern Geometrie gewährt.

Anmerkungen und Zusätze

zum

ersten Theile

der

vollständigen Anleitung

zur

Differenzial-Rechnung

von

Leonhard Euler

vom

Uebersetzer.

Anmerkungen und Zusätze

zum

ersten Theile

der

vollständigen Anleitung

zur

Differenzial-Rechnung

von

Leonhard Euler.

Es ist in mehr als einer Rücksicht wichtig, das Verhältniß der Differenzial-Rechnung zu den übrigen Theilen der Mathematik genau zu kennen, und die Bestimmung desselben soll daher auch den ersten Gegenstand der gegenwärtigen Anmerkungen und Zusätze ausmachen.

Die Mathematik betrachtet die Größe entweder einzeln in Constructionen, und führt dann den Namen der Elementar-Mathematik; oder im Allgemeinen, wobey sie die Eigenschaften der Größen, vermittelst Constructionen, aus deut-

lichen

lichen Begriffen, das heißt aus solchen, welche die Größe nach Zahl und Einheit darstellen, entwickelt. Da ihr Hauptgeschäft in der Untersuchung des Verhältnisses der Größen zu einander besteht, und das Verhältniß zweyer Größen bey gleichen Einheiten nach den Zahlen, und bey gleichen Zahlen nach den Einheiten sich richtet: so zerfällt daher die allgemeine Mathematik in zwey Theile, in die gemeine und höhere Mathematik. Jene betrachtet das Verhältniß derjenigen Größen, wobey die Einheiten, und diese das Verhältniß derer, wobey die Zahlen gleich gedacht werden. Was für Theile die Elementar- und die gemeine Mathematik unter sich begreifen, brauche ich hier nicht aus einander zu setzen, indem die Differenzial-Rechnung zur höhern Mathematik gehört; was diese betrifft, so verhält es sich damit auf folgende Art. Zuvörderst enthalten die Größen, welche man auf die Weise untersucht, daß man dabey bloß auf ihre Einheiten Rücksicht nimmt, alle bestimmte Größen ihrer Gattung unter sich; und da man dergleichen Größen veränderliche Größen zu nennen pflegt, so hat die höhere Mathematik die veränderlichen Größen zum Gegenstande. Zum andern kann man bey der Untersuchung der veränderlichen Größen entweder aus den Größen das Verhältniß ihrer Einheiten, oder aus dem Verhältnisse dieser Einheiten die Größen entwickeln; und dabey ferner jene Einheiten entweder von endlicher Größe sich gedenken, oder kleiner annehmen, als jede endliche Größe, die gegeben werden kann. Auf diese Art entstehen zwey Haupttheile der höhern Mathematik, die Differenzial-Rechnung und die Integral-Rechnung, und jeder derselben zerfällt von neuem in zwey andere, der erste nemlich in die Lehre von den Differenzen und die Differenzial-Rechnung im engern und gewöhnlichen Verstande; der andere aber in die Lehre von den

Sum-

Summen und in die Integral-Rechnung, in der Bedeutung, in welcher dieses Wort gewöhnlich genommen wird. Um hier nur ein Paar Worte zur Bestätigung dieser Bestimmung der Hauptheile der Mathematik zu sagen, so ist dabey sehr leicht zu erklären, wie ein und derselbe Gegenstand theils in der Elementar-, theils in der gemeinen, theils in der höhern Mathematik vorkommen könne; wie dieses z. B. selbst beym Cirkel der Fall ist. Auch ist sie im Grunde weder neu noch unbekannt, sondern wenn man in den meisten Abhandlungen über den Begriff der Mathematik und ihre Theile andere und oft weniger genaue Eintheilungen der Mathematik findet, so rührt solches daher, weil dieselben in einer andern Absicht, und für andere Personen geschrieben wurden, als ich gegenwärtig vor Augen habe.

Dieses vorausgesetzt, so beschäftiget sich das Werk des unsterblichen Euler, welches ich den Liebhabern der höhern Mathematik in einer deutschen Uebersetzung zu liefern angefangen, mit der Differenzial Rechnung im weitläuftigen Verstande, und dem ersten Theile der Integral-Rechnung, oder der Lehre von den Summen; und der erste Theil desselben enthält besonders die Lehre von den Differenzen und den Summen, so wie auch die Differenzial-Rechnung im engern Verstande selbst, indem die Anwendungen dieser Theorien den Gegenstand des zweyten Theils ausmachen. Betrachtet man daher die Integral-Rechnung eben dieses großen Mathematikers, als zu dem gedachten Werke gehörig: so findet man in beyden Schriften die Haupttheile der höhern Mathematik ganz in der Ordnung, in welcher sie sich vorhin darboten, und es spricht daher auch dieser Umstand für die vorstehende Entwickelung. Aber die Art, wie sich Euler über die Differenzen und die Differenzialien erklärt

klärt hat, beweiset, daß ich bey meiner Classification von einer andern Vorstellung ausgegangen bin; und so eröfnet sich mir eine Quelle zu mehrern Anmerkungen, von welchen ich hoffe, daß sie wenigstens denen nicht unwillkommen seyn werden, welche das Eulerische Werk bey der Erlernung der Differenzial-Rechnung zum Grunde legen wollen, wenn sie gleich für Kenner keine Wichtigkeit haben können. In der Mittheilung derselben will ich die Ordnung befolgen, daß ich jedesmal eine tabellarische Darstellung des Inhalts derjenigen Capitel, worauf sie sich beziehen, voranschicke.

Inhalt
des ersten und zweyten Capitels
des
ersten Theils der Eulerischen vollständigen Anleitung zur Differenzial-Rechnung.

Inhalt des ersten Capitels.
Von den Differenzen.

γ. Er-

Inhalt

Inhalt des zweyten Capitels.

Von dem Gebrauche der Differenzen in der Lehre von den Reihen.

1. Von den verschiedenen Arten der Reihen, §. 37. 38, von dem allgemeinen und dem summirenden Gliede der Reihen, §. 39, und von den Anzeigern, §. 40.
2. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen, §. 41 - 52.
   a. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen der ersten Ordnung, §. 41.
   b. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen der zweyten Ordnung, §. 42.
   c. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen der dritten Ordnung, §. 43.
   d. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen einer jeden Ordnung, §. 44. 45.
   e. Weitere Betrachtungen über die untersuchten Reihen, und deren allgemeine Glieder, §. 46 - 52.
      α. Jede dieser Reihen ist eine wiederkehrende Reihe, §. 46. 47.
      β. Aus dem allgemeinen Gliede derselben läßt sich die Ordnung bestimmen, zu welcher sie gehört, §. 48.
      γ. Auch lassen sich daraus die Reihen der Differenzen finden, §. 49 - 51.
      δ. Wenn das allgemeine Glied einer Reihe bekannt ist, so kann man die Reihe nicht nur rückwärts fortsetzen, sondern auch dieselbe interpoliren, §. 52.
3. Von der Erfindung des summirenden Gliedes der Reihen, §. 53 - 71.

a. Was das summirende Glied einer Reihe sey, so wie auch die Erklärung der summirenden Reihe, §. 53.

b. Von der Erfindung des summirenden Gliedes der Reihen, vermittelst der summirenden Reihen, §. 54 57.

c. Methode das summirende Glied der Reihe unmittelbar aus dem allgemeinen Gliede derselben zu finden, §. 58 = 68.

α. Beschreibung dieser Methode, §. 58 = 60.

β. Gebrauch derselben, §. 61 = 71.

aa. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied unter der Form x^n begriffen, oder eine ganze rationale Funktion von x ist, §. 61 = 64.

bb. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied ein Produkt aus einfachen Faktoren ist, §. 65 67.

cc. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied eine gebrochene Funktion ist, §. 68. 69.

γ. Summirende Glieder einiger vor andern merkwürdigen Reihen, §. 70. 71.

Anmer-

Anmerkungen und Zusätze
zum
ersten und zweyten Capitel.

Wenn man den Theil der Differenzial-Rechnung, welcher sich mit den Differenzen beschäftiget, aus dem S. 284. festgesetzten Gesichtspunkte betrachtet, oder annimmt, daß in der Lehre von den Differenzen das Verhältniß der Einheiten solcher Größen erforscht werde, auf deren Zahlen man bey dieser Vergleichung nicht zu sehen braucht, weil dieselben bey den verglichenen Größen gleich groß vorausgesetzt werden: so gebührt der erste Platz darin der Anweisung, die gedachten Einheiten deutlich auszudrucken, weil ohne dies die Untersuchung ihres Verhältnisses unmöglich ist. Angenommen also, daß y und z zwey gleichartige Größen bedeuten, deren Verhältniß bloß von ihren Einheiten abhängt: so ändert sich zuvörderst das Verhältniß von y und z nicht, wenn man my für y, und mz für z setzt, m mag übrigens vorstellen, was es will, eine ganze oder gebrochene, eine absolute oder positive oder negative, eine rationale oder irrationale, eine mögliche oder imaginäre Zahl, und es sind daher y und z veränderliche Größen in dem Verstande, in welchem Euler in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen *) diese Benennung nimmt. Dieses vorausgesetzt,

*) Im ersten Theile im ersten Capitel, so wie auch im zweyten Theile im ersten Capitel, gleich im Anfange.

ist leicht einzusehen, daß man die Einheiten von y und z selbst, nicht anders als unbestimmt gedenken und ausdrucken kann, ob sich gleich dabey der doppelte Fall annehmen läßt, daß diese Einheiten zu ihren Größen entweder irgend ein endliches Verhältniß haben oder nicht. Jenes findet in der Lehre von den Differenzen und Summen, dieses in der Differenzial- und Integral-Rechnung statt. Nun sey $\triangle y$ die Einheit von y, welche zu y irgend ein endliches aber unbekanntes Verhältniß hat, und eben so $\triangle z$ die Einheit von z: so ist offenbar, daß sich das Verhältniß $\triangle y : \triangle z$, wenn die Art, wie y und z von einander abhangen, nicht gegeben ist, bloß andeuten, aber nicht entwickeln läßt, und dabey muß es also auch bey ihnen sein Bewenden haben. Anders ist der Fall, wenn y irgend eine Funktion von z wird. Denn setzt man z. B $y = az$, und behält dabey $\triangle y$ und $\triangle z$ in der angenommenen Bedeutung: so muß, wenn beyde Größen y und z aus einer gleich großen Anzahl von Einheiten bestehen sollen, nothwendig $\triangle y = a\triangle z$, und also

$$\triangle y : \triangle z (= a\triangle z : \triangle z) = a : 1$$

werden. Unterscheidet man daher veränderliche Größen und Funktionen veränderlicher Größen auf die Art, daß man unter jenen bloß diejenigen veränderlichen Größen versteht, welche einzig und allein als Summen ihrer Einheiten gedacht werden; und unter Funktionen veränderlicher Größen alle diejenigen veränderlichen Größen begreift, welche aus jenen und aus beständigen Größen auf irgend eine Art zusammengesetzt sind: so ist klar,

1. daß man das Verhältniß der Einheiten zweyer veränderlicher Größen bloß bezeichnen, aber nicht entwickeln und deutlich ausdrucken kann; sondern daß dieses

2. nur dann möglich wird, wenn die gegebenen Größen Funktionen von andern veränderlichen Größen sind.

Was aber die Art und Weise betrifft, das gedachte Verhältniß in diesem zweyten Falle zu finden: so beruhet dieselbe auf folgendem leichten Satze: Da die veränderlichen Größen, man mag diese Benennung im engern oder im weitläuftigern Verstande nehmen, in Ansehung der Menge ihrer Einheiten nicht von einander verschieden gedacht werden dürfen, und folglich die Menge der Einheiten einer Funktion dieselbe seyn muß, als die Menge der Einheiten derjenigen Größe, wovon sie eine Funktion ist: so muß, da $z + \triangle z$ von z um die Einheit $\triangle z$ unterschieden ist, auch jede Funktion von $z + \triangle z$, welche man aus einer Funktion von z erhält, wenn man darin allenthalben $z + \triangle z$ für z setzt, von der Funktion von z um eine ihrer Einheiten unterschieden seyn. Verwandelt man daher eine gegebene Funktion von z auf die gedachte Art in eine Funktion von $z + \triangle z$, und zieht von dieser, nachdem man die dazu nöthigen, in der Funktion selbst angezeigten, Operationen vorgenommen hat, die gegebene Funktion ab: so findet man in dem Reste die Einheit der gegebenen Funktion, und zwar durch $\triangle z$, z und beständige Größen, und also deutlich ausgedruckt. Es sey, z. B. die gegebene Funktion von z:

$$z^2;$$

so ist die nach der gegebenen Vorschrift daraus abgeleitete:

$$(z + \triangle z)^2 = z^2 + 2z\triangle z + \triangle z^2$$

und folglich

$$z^2 + 2z\triangle z + \triangle z^2 - z^2 = 2z\triangle z + \triangle z^2$$

die gesuchte Einheit der Funktion von z^2 in einem deutlichen Ausdrucke. Auf ähnliche Art findet man für die Einheit der Funktion z^3 den Ausdruck:

$$3z^2\triangle z + 3z\triangle z^2 + \triangle z^3$$

und für die Einheit der allgemeinen Funktion z^n den Ausdruck:

$$nz^{n-1}\triangle z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}\triangle z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-3}\triangle z^3$$
$$+ \text{rc.}$$

wo, da der Binomische Lehrsatz (S. Zusätze zum ersten Theile meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen) für jeden Werth von n erwiesen worden ist, n jede Zahl, von was für einer Art sie seyn mag, bedeuten kann.

Was ich bisher Einheiten veränderlicher Größen genennt habe, belegt Euler mit dem Namen, Differenz, und statt der Redensart: die Einheit einer veränderlichen Größe, oder einer Funktion von einer veränderlichen Größe deutlich ausdrucken, gebraucht er diese: die Differenz einer veränderlichen Größe, oder einer Funktion von einer veränderlichen Größe finden. Beyde Ausdrücke sind gut, wie, bey einiger Ueberlegung, jeder von selbst sieht, und ich werde mich ihrer daher in der Folge ebenfalls bedienen. Bis jetzt habe ich es nicht gethan, so wie ich mir dieselbe Freyheit, wo es mir nützlich scheinen wird, auch noch ferner vorbehalte, um die Hauptsätze der Lehre von den Differenzen und Summen unmittelbar aus dem Begriffe dieser Theile der Differenzial- und Integral-Rechnung, und, wie ich hoffe, zugleich auf eine leichtere Art abzuleiten.

Da ferner die veränderlichen Größen dadurch veränderliche Größen sind, weil sie aus gleich großen Mengen von Einheiten bestehen, und die Gleichheit der Mengen ihrer Einheiten keine Veränderung leiden kann, wenn

man

man jede dieser Größen um eine ihrer Einheiten vermehrt: so ist es auch bey der Untersuchung der veränderlichen Größen als solcher (d. h. unter der Bedingung, daß alles von ihnen zu Behauptende auf die gleiche Menge ihrer Einheiten in ihnen, und zugleich darauf allein, gegründet werde) gleichviel, ob man diese veränderlichen Größen selbst nimmt, oder jede derselben um eine Einheit vermehrt. Sind daher zwey veränderliche Größen, sie mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen, einander gleich: so muß man auch wieder eine Gleichung bekommen, wenn man statt jeder der veränderlichen Größen im engern Verstande, woraus sie etwa zusammengesetzt sind, eben diese Größen, um eine ihrer Einheiten vermehrt, setzt. Ist daher

$$y = \pm z \pm x \pm w \pm v \pm \text{ꝛc.}$$

so ist auch

$$y + \Delta y = \pm z \pm \Delta z \pm x \pm \Delta x \pm w \pm \Delta w \pm v \pm \Delta v \pm \text{ꝛc.}$$

und daher, wenn man hiervon die vorhergehende Gleichung abzieht,

$$\Delta y = \pm \Delta z \pm \Delta x \pm \Delta w \pm \Delta v \pm \text{ꝛc.}$$

und ist

$$y = zx$$

so ist auch

$$y + \Delta y = (z + \Delta z)(x + \Delta x) = zx + x\Delta z + z\Delta x + \Delta z\Delta x$$

und

$$\Delta y = x\Delta z + z\Delta x + \Delta z\Delta x$$

und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Da dieses die Hauptsätze zur Erfindung der ersten Differenzen gegebener Funktionen sind, aus welchen die übrigen im Werke befindlichen abgeleitet werden: so kann ich mich zu der Art und Weise wenden, die zweyten und folgenden Differenzen gegebener Funktionen zu finden, oder deutlich auszudrucken, habe aber dabey nicht nöthig, weitläuftig zu seyn. Denn ist die Einheit oder erste Differenz einer gegebenen Funktion wieder eine Funktion; so gilt das Vorhergehende, in sofern sie eine Funktion ist, natürlich auch von ihr; und behandelt man sie darnach: so findet man auf eben die Art die zweyte Differenz aus der ersten, als man die erste aus der gegebenen Funktion bekam. Ist ferner die zweyte Differenz ebenfalls eine Funktion: so läßt sich auch von ihr behaupten, was so eben von der ersten im ähnlichen Falle gesagt worden ist; und also auch aus der zweyten Differenz auf eben die Art die dritte finden, als die zweyte aus der ersten, oder die erste aus der gegebenen Funktion selbst, abgeleitet werden kann. Auf ähnliche Art kann man immer fort schließen, und zur wirklichen Anwendung des Gesagten darf man nur vor Augen behalten, was man bey einiger Ueberlegung bald findet, daß die Einheiten der veränderlichen Größen im engern Verstande keine veränderliche Größen seyn können, sondern nothwendig beständig seyn müssen.

Auf diese Art ist vieles von dem, was Euler in den ersten 10 §§. des ersten Capitels sagt, zur Erfindung der Differenzen, entbehrlich; aber dieses benimmt ihm nichts von seiner Wichtigkeit, sondern es würde vielmehr die vorstehende Entwickelung der Eulerischen sehr weit nachstehen, wenn man dabey die Methode, die Differenzen auszudrukken, welche §. 10. enthalten ist, auf der Seite lassen müßte, indem dieselbe bey dem Gebrauche der Differenzen äußerst nothwendig und wichtig ist. Allein der Weg dazu ist nicht versperrt, sondern er bietet sich nur etwas später dar; und ob dies nachtheilig sey oder nicht, wird sich bald beurtheilen lassen.

Zuvor

Zuvor muß ich folgendem Einwurfe begegnen. „Wenn der Grund feststeht, auf welchem der Satz S. 293. sich stützt, so muß man auch folgendes behaupten können. Wenn y irgend eine Funktion von z, $\triangle y$ die Differenz von y, und $\triangle z$ die Differenz von z bedeutet: so muß, nachdem man y um $n\triangle y$, und z in dem y gleichen Ausdrucke allenthalben um $n\triangle z$ vermehrt, die nöthigen Operationen vorgenommen, und die gegebene Gleichung von der gefundenen abgezogen hat, $n\triangle y$ dem in der andern Hälfte der resultirenden Gleichung sich ergebenden Ausdrucke gleich seyn, n mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will. Ist dies, so muß man auch für n die um eins verminderte Zahl $n-1$ setzen können, und thut man solches, so muß, wenn zuletzt der für $(n-1)\triangle y$ gefundene Werth von dem für $n\triangle y$ gefundenen abgezogen wird, der Werth von $\triangle y$ eben so herauskommen, als ihn der S. 293. stehende Satz giebt. Es sey aber z. B. $y = z^2$, so bekommt man

$$n\triangle y = 2nz\triangle z + n^2\triangle z^2, \text{ und}$$

$$(n-1)\triangle y = 2nz\triangle z - 2z\triangle z + n^2\triangle z^2 - 2n\triangle z^2 + \triangle z^2$$

und folglich

$$n\triangle y - (n-1)\triangle y = \triangle y = 2z\triangle z + 2n\triangle z^2 - \triangle z^2,$$

und nach der S. 293. gegebenen Regel findet man

$$\triangle y = 2z\triangle z + \triangle z^2;$$

wie läßt sich dieser Widerspruch heben?“ Ich habe die veränderlichen Größen eingetheilt in veränderliche Größen in engerer Bedeutung, und in Funktionen; und zu jenen die gerechnet, welche man sich nicht anders als Summen ihrer Einheiten gedenken kann. Wenn daher von veränderlichen Größen in engerer Bedeutung die Rede ist: so hat man allerdings ein Recht anzunehmen, daß die Einheiten von jeder derselben einander gleich sind, und daß sich die Einheiten zweyer solcher veränderlichen Größen zu einander eben so als diese Größen selbst verhalten. Es seyen z. B. y und z zwey veränderliche Größen in engerer Bedeutung; so hat sowohl Δy als Δz die Größe, die demselben einmal, obgleich unbestimmter Weise, beygelegt ist, beständig; und wenn $y = az$ ist: so verhält sich $\Delta y : \Delta z = y : z = az : z = a : 1$. Allein, wenn die gegebenen veränderlichen Größen Funktionen sind, so verhält es sich meistens (denn einige sind allerdings ausgenommen, wie z. B., wenn $y = az$ ist) auf eine andere Art. Wollte man nemlich auch die Einheiten oder Bestandtheile der Funktionen einander gleich annehmen, so würde man dadurch die ganze Untersuchung der veränderlichen Größen, als solcher, unmöglich machen, weil man dadurch in der That die gegebenen veränderlichen Größen in beständige verwandelte. Denn es sey $y = x^2$: so ist nothwendiger Weise $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$. Nun sey $y + \Delta y = Y$, und $x + \Delta x = X$: so ist auch $Y = X^2$, und $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^2$; folglich $\Delta y = 2Xdx + \Delta x^2$. Sollte daher $2Xdx + \Delta x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$ seyn, so würde auch $X = x$ seyn müssen, und es könnte demnach x nicht den Werth von X in sich schließen, welches doch seyn muß, wenn x eine veränderliche Größe bleiben soll. Muß man also annehmen, daß die Funktionen veränderlicher Größen nicht immer, oder vielmehr in den wenigsten Fällen, Summen gleicher, sondern ungleicher Bestandtheile sind: so muß man auch, wenn verschiedene, unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende, Bestandtheile derselben allgemein ausgedruckt werden sollen, die Zeichen dazu so einrichten, daß dadurch zugleich die Stelle dieser Bestandtheile angedeutet werde. Dazu ist nun die Eulerische Bezeichnungsart sehr bequem, und sie wird daher, so wenig als wir sie bisher gebraucht haben, so bald man auf den gegenwärtigen Punkt gekommen ist, nothwendig. Es sey also y irgend einer Funktion

von

von z gleich, und y werde $y + n\Delta y$, wenn z in $z + n\Delta z$ verwandelt wird. Ferner sey

$$y + \Delta y = y^{\mathrm{I}};\quad y + 3\Delta y = y^{\mathrm{III}};$$
$$y + 2\Delta y = y^{\mathrm{II}};\quad y + 4\Delta y = y^{\mathrm{IV}};$$

ꝛc.

und $\Delta y = y^{\mathrm{I}} - y$; $\Delta y^{\mathrm{I}} = y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}}$; $\Delta y^{\mathrm{II}} = y^{\mathrm{III}} - y^{\mathrm{II}}$; ꝛc.: so wird man nie versucht werden, so zu schließen, als es in dem angeführten Einwurfe am Ende geschehen ist, sondern vielmehr auf folgende Art: Ist

$$y = z^2;$$

so ist, wenn man den bey y in der Stelle der Exponenten stehenden deutschen Buchstaben eben die Bedeutung giebt, welche vorhin die dabey stehenden römischen Ziefern hatten,

$$y + n\Delta y = y^{\mathfrak{n}} = 2nz\Delta z + n^2\Delta z^2$$
$$y + (n-1)\Delta y = y^{\mathfrak{n}-1} = 2nz\Delta z - 2z\Delta z + n^2\Delta z^2 - 2n\Delta z^2 + \Delta z^2$$

und also

$$y^{\mathfrak{n}} - y^{\mathfrak{n}-1} = \Delta y^{\mathfrak{n}-1} = 2z\Delta z + (2n-1)\Delta z^2;$$

und wem könnte es dabey einfallen, $\Delta y = 2z\Delta z + \Delta z^2$ mit $\Delta y^{\mathfrak{n}-1}$ zu verwechseln?

Angenommen also, daß die Lehre von den Differenzen ganz methodisch vorgetragen werden soll: so scheint es am füglichsten in folgender Ordnung geschehen zu können.

1. Den Anfang muß der Begriff von dieser Lehre machen, so daß dabey der Gegenstand derselben, und die Absicht, in welcher er darin untersucht wird, deutlich und entwickelt angegeben werde.

2. Hierauf muß die Art und Weise folgen, die Einheiten, oder Bestandtheile, oder Differenzen der veränderlichen

chen Größen überhaupt, in so fern man unter jenen endliche Größen versteht, deutlich auszudrucken. Dann muß

3. die Natur der gedachten Bestandtheile oder Differenzen genauer entwickelt, und damit die Beschreibung der übrigen auf diese Entwickelung sich gründenden Methoden, die Differenzen darzustellen, verbunden werden.

4. Ist dieses geschehen, so ist der Weg zur Untersuchung des Verhältnisses der Differenzen gegebener veränderlicher Größen gebahnt, und dadurch auch der Ort dieser Untersuchung bestimmt.

5. Den Beschluß kann endlich die Lehre von dem Gebrauche der Differenzen machen, wofern man nicht lieber die Anleitung dazu bis nach der Lehre von den Summen versparen will.

Da es hier nicht meine Absicht ist, die Lehre von den Differenzen vollständig abzuhandeln, sondern bloß eins und das andere zu berühren, was mir nicht undienlich scheint, Anfänger in der höhern Mathematik, zur eigenen Ueberlegung anzuleiten, (welches bekanntlich durch Vorzeichnung und Vergleichung mehrerer zu Einem Ziele führenden Wege am besten geschehen kann) und zugleich, sie so viel als möglich vor den Schwierigkeiten zu verwahren, die so manche bey der Erlernung der höhern Mathematik finden: so habe ich nicht nöthig, das bis jetzt aus Eulern nicht berührte ebenfalls aus den oben mitgetheilten Hauptsätzen abzuleiten, und dadurch erwähnten Anfängern das Vergnügen zu entziehen, was sie durch die eigene Herleitung desselben sich verschaffen können. Noch weniger kann ich mich entschließen, hier schon die Betrachtungen anzustellen, welche eigentlich

erst

erst in der Lehre von den Differenzialien gebraucht werden. Ich setze also bloß noch einige leichte Anmerkungen über die Lehre von den Summen her.

Zuvörderst fließt der Satz, S. 27, daß

$$y = \Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_{V} + \text{ꝛc.}$$

ist, sehr leicht aus der in diesen Anmerkungen von den veränderlichen Größen gegebenen Vorstellung, wobey Δy^{n} ein allgemeiner Ausdruck für die Einheiten von y ist, und alle vorhergehende Einheiten von y diejenigen werden, welche der V. durch $\Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} +$ ꝛc. ausgedruckt hat.

Zum andern ergeben sich nicht weniger leicht die Regeln, welche bey der Abänderung der S. 28. §. 28. zum Grunde gelegten Formeln befolgt worden sind, aus dem Satze, daß bey den veränderlichen Größen im engern Verstande das Verhältniß ihrer Einheiten dem Verhältniß der Größen selbst gleich sey; und wenn daher Anfängern, wie bisweilen zu geschehen pflegt, die Art zu schließen, welche in dem angeführten §. herrscht, nicht einleuchtend ist, so liegt die Schwierigkeit in nichts als in gewissen dunkeln Vorstellungen.

Inhalt

Inhalt
des
dritten und vierten Capitels.

Inhalt des dritten Capitels.

Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen.

Unter allen Untersuchungen, welche Euler in dem gegenwärtigen Werke angestellt hat, ist keine, die Anfängern mehr Schwierigkeiten machen könnte, als die in diesem dritten Capitel, und vielleicht sind dieselben nicht immer bloß scheinbar. Es wird daher auch nöthig seyn, dabey länger als bey den übrigen zu verweilen. Euler handelt darin von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen auf folgende Art.

1. Zuvörderst sucht er die Behauptung festzustellen, und wider die dagegen gemachten Einwürfe zu sichern: daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden könne, §. 72 - 82. In diesem Abschnitte findet man
   a. die erwähnte Behauptung selbst, §. 72. 73.
      α. aus dem Begriffe der Größen abgeleitet, §. 72.
      β. an einzelnen Arten der Größe erläutert, und dadurch bestätiget, §. 73.
   b. eine Anzeige der Schwierigkeiten, worin man sich bey dieser Behauptung verwickelt hat, nebst der Wegräumung derselben, §. 74 - 81.

c. Daß

c. daß man wenigstens in der theoretischen Mathematik unendliche Zahlen in dem Verstande, in welchem das Wort unendlich vom Verfasser genommen wird, nicht leugnen könne, §. 82. Hierauf folgt

2. eine genauere Entwickelung der Begriffe des Unendlichen und des unendlich Kleinen, §. 83 - 96.

a. Entwickelung des Begriffs des unendlich Kleinen, §. 83 - 89.

α. Was man unter einer unendlich kleinen Größe zu verstehen habe, §. 83. und warum man diese Größen nicht so bezeichnet, als es darnach geschehen zu müssen scheint, §. 84. 85.

β. Daß man die unendlich kleinen Größen zwar wohl in Ansehung ihres arithmetischen, aber nicht in Ansehung ihres geometrischen Verhältnisses zu einander verwechseln dürfe, §. 86 87.

γ. Wie es sich mit den Potestäten der unendlich kleinen Größen verhalte, oder von den Ordnungen unter den unendlich kleinen Größen, §. 88. 89.

b. Entwickelung des Begriffs des Unendlichen, oder unendlich Großen, § 90 - 96.

α. Daß man das Unendliche durch die Division endlicher Größen durchs unendlich Kleine erhalte, §. 90. 91.

β. Hierauf gegründete Erklärung des Unendlichen, § 92.

γ. Verschiedenheit der unendlich großen Größen, und daß jede derselben noch weiter vermehrt werden kann, §. 93.

δ. Beyspiele unendlicher Größen aus der gemeinen Mathematik, §. 94.

ε. Von den Ordnungen oder Graden des Unendlichen, §. 95. 96.

3. Den

3. Den Beschluß machen noch einige anderweitige Betrachtungen über das Unendliche und das unendliche Kleine, §. 97 = 111.

a. Was das Produkt aus einem unendlich großen, und einem unendlich kleinen Faktor für eine Größe sey? §. 97.

b. Wie man nach dem Gesetze der Stetigkeit von den endlichen Größen zu den unendlich großen und unendlich kleinen Größen übergehen muß, §. 98 = 101.

c. Erläuterung der Lehre vom Unendlichen aus den ohne Ende fortlaufenden Reihen, und dabey gelegentlich einiges über die negativen Zahlen, und über die Summen der gedachten Reihen, §. 102 = 111.

Inhalt des vierten Capitels.

Von der Natur der Differenzialien einer jeden Ordnung.

1. Erklärung und Bezeichnungsart sowohl des Differenzials überhaupt, als des ersten, zweyten, dritten Differenzials ꝛc. insbesondere, §. 112 = 119.

a. Wiederholung eines hieher gehörigen Satzes aus der Lehre von den Differenzen, §. 112.

b. Erklärung und Bezeichnung der Differenzialien, §. 113. 119.

α. Nach Leibnitzens Art, §. 113.

β. Nach Newtons Art, §. 114.

γ. Vergleichung beyder Arten, §. 115. 116.

δ. Von der im gegenwärtigen Werke gebrauchten Bezeichnung der Differenzialien, §. 117. 119.

2. Von

Anmerkungen und Zusätze

zum

dritten und vierten Capitel.

Ich nehme diese beyden Capitel zusammen, und werde dasjenige, was ich dabey und darüber zu sagen habe, in der Ordnung vortragen, daß ich

1. einige von den Schwierigkeiten berühre, in welche man sich durch Annahme der Eulerischen Vorstellung von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen, und von der Natur der Differenzialien verwickelt. Dann will ich
2. den Begriff der Differenzialien auf eine andere, mit weniger Schwierigkeiten verknüpfte Art, festzusetzen suchen, und daraus die Natur derselben entwickeln; und zuletzt
3. einige anderweitige hieher gehörige Betrachtungen beyfügen.

1. Von den Schwierigkeiten,

worin man sich durch Annahme der Eulerischen Vorstellung von dem Unendlichen, dem unendlich Kleinen, und von der Natur der Differenzialien verwickelt.

Es leidet freylich keinen Zweifel, daß jede gegebene Größe, ihre Zahl mag so groß oder so klein seyn als sie will, ohne

ohne Ende, oder ins Unendliche, wenn dieser Ausdruck eben dasselbe sagen soll, vermehrt oder vermindert werden kann, und daß also unendlich, d. h. ohne Ende wachsende oder abnehmende Größen keinen Widerspruch enthalten. Aber so wie keine ohne Ende wachsende Größe je eine unendliche Größe werden kann: so verschwinden auf der andern Seite die ohne Ende abnehmenden Größen auch nie, oder werden nie $= 0$. Eben so ausgemacht ist es, daß jede gegebene Größe durch fortgesetzte Verminderung in nichts verwandelt werden kann; nur wird es dabey unmöglich, die Verminderung, wodurch solches geschieht, ohne Ende fortzusetzen. Denn soll eine Größe ohne Ende vermindert werden, so kann solches nicht anders als auf dem Wege der Division oder der Extraction der Wurzeln geschehen; und soll sie in Null übergehen, so wird dazu der Weg der Subtraction erfordert. Wenn man mit Rücksicht hierauf den 83sten §. lieset, welcher die Quelle und den Grund dessen enthalten soll, was in dem Folgenden über das Unendliche, das unendlich Kleine, und über die Natur der Differenzialien gesagt wird: so muß man sich wundern, daß Euler eine so wichtige Untersuchung auf so schwankende Behauptungen hat gründen können. Eine unendlich kleine Größe soll nichts anders als eine verschwindende Größe, und in der That $= 0$ seyn. Eine unendlich kleine Größe kann doch, wenn man den Worten keine Gewalt anthun will, nichts anders bedeuten, als die Größe, welche man durch keine, noch so weit fortgesetzte, Verminderung erhalten würde; wie kann also dieselbe $= 0$ seyn? Kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, kann und muß sie seyn, aber es ist relativ gesprochen, wenn man sagt, daß dergleichen Größen $= 0$ seyn, und es sind daher Größen, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, und verschwindende Größen noch sehr von einander verschieden. Wir

 haben

haben dergleichen unendlich kleine Größen in dem Unterschiede des Winkels eines Halbkreises und eines rechten Winkels, aber es ist Mangel an geometrischer Schärfe, wenn man diesen Unterschied $= 0$ setzt. Auch zeigen sich die Nachtheile von der geringen Sorgfalt, welche Euler bey der Festsetzung des Begriffs des unendlich Kleinen bewiesen, bald und in großer Menge. Wie unbefriedigend ist z. B. gleich das, was er im 84sten §. sagt? Wie scheinbar sind die Widersprüche, welche man wider die unendlich vielen Ordnungen der Nichtse macht? Wie kann in der Folge §. 306. daraus, daß man $dx = 0$, und $dy = 0$ findet, geschlossen werden, daß die Gleichung, woraus man diese Bestimmungen gefunden, nicht bestehen könne? Wie können in der Integral-Rechnung die Integralien als Summen aller vorhergehenden Differenzialien angesehen werden. Doch hiervon nachher mehr, wenn ich zuvor den Begriff der unendlich kleinen Größen, so wie ich glaube, daß es geschehen muß, festgesetzt habe.

2. Von der Natur der Differenzialien.

Wir mögen eine gegebene Größe theilen, durch was für eine Zahl wir wollen, so haben die Theile, auf welche wir dadurch kommen, zu der getheilten Größe ein bestimmtes Verhältniß, welches sich angeben läßt, und jeder Theil, so klein er auch seyn mag, kann wieder von neuem getheilt werden. Es sey x die gegebene Größe, und m stelle jede noch so große Zahl vor; so ist

$$\frac{x}{m} : x = \frac{1}{m} : 1 = 1 : m$$

und setzt man $\frac{x}{m} = y$, so läßt sich, was von x gesagt worden,

den, ebenfalls von y behaupten. Wenn man sich daher eine Größe bloß als ein Aggregat bestimmter Theile, oder solcher, deren Verhältniß zu der Größe angegeben werden kann, vorstellt: so erschöpft man dadurch die Arten, wie diese Größe gedacht werden kann, nicht, sondern es bleibt noch übrig, dieselbe als ein Aggregat solcher Theile anzusehen und zu betrachten, deren Verhältniß zu der Größe durch keine Zahl, wie man dieselbe auch annehmen mag, ausgedruckt werden kann; und es fällt in die Augen, daß diese Theile kleiner seyn müssen, als jede Größe, die sich angeben läßt. Wir wollen daher dergleichen Theile Differenzialien, und zwar derjenigen Größen, welche man sich als Aggregate von ihnen gedenkt, nennen; und wenn eine von diesen Größen $= x$ gesetzt wird, das Differenzial derselben, durch dx bezeichnen. Da also das Verhältniß von $dx : x$ durch keine Zahl, so groß man dieselbe auch annehmen mag, dargestellt werden kann: so gehört auch das Verhältniß $n dx : x$, n mag angenommen seyn, wie es will, nur daß es eine bestimmte Zahl bedeute, zu denen, welche sich nicht angeben lassen. Denn wollte man das Gegentheil behaupten, so sey $n dx : x = p$, also $n dx = px$. Alsdenn wäre auch $dx : x = p : n$, und da p und n bestimmte Zahlen wären, so hätte man in $p : n$ einen deutlichen und bestimmten Ausdruck für das Verhältniß von $dx : x$, welches wider den Begriff von dx streitet. Hieraus folgt:

1. daß man bey den Größen, welche man sich als Aggregate von Differenzialien oder solchen Theilen vorstellt, deren Verhältniß zu der Größe nicht angegeben werden kann, die Menge der Theile unbestimmt lassen muß, und daher auch nur diejenigen Untersuchungen dabey anzustellen im Stande ist, welche diese Voraussetzung zulassen.

2. Daß aber gleichwohl die Differenzialien wirkliche Größen sind, und an sich betrachtet, nie mit Null verwechselt werden dürfen, welches denn natürlich auch von den Produkten aus Differenzialien und gegebenen Größen gilt.

3. Daß folglich auch die Differenzialien, nachdem man sie ihrer Natur gemäß, durch Zeichen ausgedruckt hat, alle Operationen zulassen, welche man mit ähnlichen Constructionen bestimmter Größen vorzunehmen gewohnt ist.

4. Daß, wenn Differenzialien oder Produkte aus Differenzialien und gegebenen Größen als Null betrachtet werden sollen, solches nur dann geschehen dürfe, wenn die vorgesetzte Absicht weiter keine Größen erfordert, als solche, die sich bestimmt geben lassen.

Wenn man also unter den unendlich kleinen Größen keine andere versteht, als diejenigen, welche jetzt betrachtet worden sind: so fällt in die Augen, warum man dieselben durch besondere Zeichen, und nicht durch o ausdrucken muß. Ferner braucht man den offenbar harten Satz nicht, daß diese Größen in Ansehung ihres arithmetischen Verhältnisses gleich, und dabey doch in Ansehung des geometrischen Verhältnisses ungleich, ja eine unendlichmal größer als eine andere seyn könne. Auch wird dadurch, wie sich in der Folge zeigen wird, den Widersprüchen vorgebauet, welche man sonst in der Lehre von den Differenzialien wahrzunehmen glauben muß. Die Schlußfolge §. 306, deren vorhin gedacht wurde, erscheint in ihrer ganzen Richtigkeit und Stärke. Endlich bleibt dabey die Vorstellung von den Integralien als Summen aller vorhergehenden Differenzialien, welche in der Integral Rechnung und bey der Anwendnung derselben so wichtig und unentbehrlich ist, von allen Schwierigkeiten frey.

Dies

Dies kann ohnstreitig hier hinreichen, den mitgetheilten Begriff von den unendlich kleinen, oder denjenigen Größen, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, vorläufig zu empfehlen.

Da also der Begriff von den Differenzialien, wobey man sich dieselben als wirkliche Größen gedenkt, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, auf keine Weise etwas widersprechendes in sich schließt: so darf man allerdings bey allgemeinen Untersuchungen über die Größen von ihm ausgehen, und es kommt nur darauf an: nicht bloß nichts dawider streitendes zu behaupten, sondern alle Sätze von den aus Differenzialien bestehenden Größen gerade aus dem in ihm enthaltenen Kennzeichen abzuleiten. Sollen nun Größen aus Differenzialien auf die Art bestehen, daß man sie als Summen derselben betrachten kann: so wird jede Untersuchung derselben unmöglich, wofern man nicht annimmt, daß die Menge der Differenzialien in jeder derselben eben so groß, als in jeder andern, sey; und in diesem Stücke sind daher die Differenzialien den in den beyden ersten Capiteln untersuchten Differenzen ähnlich. Eben diese Uebereinstimmung nimmt man ferner darin wahr, daß der Gegenstand der Untersuchung solcher Größen, die als Summen von Differenzialien betrachtet werden, kein anderer ist, als das Verhältniß ihrer Differenzialien, unter der Voraussetzung, daß die Menge derselben in jeder Größe dieselbe sey, wodurch also die Größen selbst veränderliche Größen werden. Ueberhaupt wird also auch die Lehre von den Differenzialien, oder die Differenzial-Rechnung auf eine ähnliche Art eingetheilt werden können, als nach S. 299. 300. die Lehre von den Differenzen.

Nun seyen y und z veränderliche Größen, und dy das Differenzial von y, so wie dz das Differenzial von z. Sind y und z nicht weiter bekannt, so kann weder dy noch dz deutlich, sondern bloß wie hier durch ein willkührliches Zeichen ausgedruckt, und also das Verhältniß dy : dz nicht angegeben, sondern bloß angezeigt werden. Ist hingegen y eine Funktion von z, so findet derselbe Schluß statt, welcher S. 293. in der Lehre von den Differenzen gebraucht wurde. Da nemlich die veränderlichen Größen in Ansehung der Menge ihrer Differenzialien in ihnen nicht von einander verschieden gedacht werden dürfen, und folglich auch die Menge der Differenzialien einer Funktion dieselbe seyn muß, als die Menge der Differenzialien derjenigen Größe, wovon sie eine Funktion ist: so muß, da z + dz von z um das Differenzial dz verschieden ist, auch jede Funktion von z + dz, welche man aus einer Funktion von z erhält, wenn man darin allenthalben z + dz für z setzt, von der Funktion von z um eins ihrer Differenzialien unterschieden seyn. Verwandelt man daher eine gegebene Funktion von z auf die gedachte Art in eine Funktion von z + dz, und zieht von dieser, nachdem man die dazu nöthigen, in der Funktion selbst angezeigten, Operationen vorgenommen hat, die gegebene Funktion ab: so findet man in dem Reste das Differenzial der gegebenen Funktion, und zwar durch dz, z und beständige Größen, und also deutlich ausgedruckt. Es sey z. B. die gegebene Funktion

$$z^2$$

so ist die nach der vorstehenden Regel daraus abgeleitete:

$$(z + dz)^2 = z^2 + 2zdz + dz^2$$

und folglich

$$z^2 + 2zdz + dz^2 - z^2 = 2zdz + dz^2$$

das gesuchte Differenzial von z^2 in einem deutlichen Ausdrucke.

drucke. Auf ähnliche Art findet man für das Differenzial der Funktion z^3 den Ausdruck:

$$3z^2dz + 3zdz^2 + dz^3$$

und für das Differenzial der allgemeinen Funktion von z^n diesen:

$$nz^{n-1}dz + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}dz^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-3}dz^3$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

und zwar für jeden Werth für n: so daß also auch die Art die Differenzialien der Funktionen deutlich auszudrucken, mit der Art, die Differenzen der Funktionen zu finden, übereinstimmt.

Aus diesem Grunde sind auch bey dem S. 294. 295. stehenden Satze nur einige leichte Modificationen nöthig, um ihn den Differenzialien anzupassen. Mit diesen Modificationen nemlich lautet er folgendermaßen.

Da ferner die veränderlichen Größen, als Summen von Differenzialien betrachtet, dadurch veränderliche Größen sind, weil sie als aus gleich großen Mengen von Differenzialien bestehend gedacht werden, und die Gleichheit der Mengen ihrer Differenzialien keine Veränderung leiden kann, wenn man jede dieser Größen um eins ihrer Differenzialien vermehrt: so ist es auch bey der Untersuchung der veränderlichen Größen, als solcher, gleichviel, ob man diese veränderlichen Größen selbst nimmt, oder jede derselben um eins ihrer Differenzialien vermehrt. Sind daher zwey veränderliche Größen einander gleich, sie mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen: so muß man auch wieder eine Gleichung bekommen, wenn man statt jeder der veränderlichen Größe, woraus sie etwa zusammengesetzt sind, eben diese Größen, um eins ihrer Differenzialien vermehrt, setzt. Ist daher

$$y = \pm z \pm x \pm w \pm v + \text{ꝛc.}$$

so ist auch

$$y + dy = \pm z \pm dz \pm x \pm dx \pm w \pm dw \pm v \pm dv \pm \text{ꝛc.}$$

und daher, wenn man hiervon die vorhergehende Gleichung abziehet,

$$dy = \pm dz \pm dx \pm dw \pm dv \pm \text{ꝛc.}$$

und ist

$$y = zx$$

so ist auch

$$y + dy = (z + dz)(x + dx) = zx + xdz + zdx + dxdy$$

und

$$dy = xdz + zdx + dxdy,$$

und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Wenn das Differenzial einer Funktion wieder eine veränderliche Größe ist: so gilt das Bisherige von ihm, in so fern es eine veränderliche Größe ist, natürlich ebenfalls, und so werden zweyte, dritte, vierte Differenzialien u. s. w. bey ihm möglich. Man findet aber jedes von den folgenden aus dem unmittelbar vorhergehenden eben so, als man das erste aus der gegebenen Funktion erhält, und so braucht hier davon nicht besonders geredet zu werden.

Allein man druckt deswegen die Differenzialien deutlich aus, um die Differenzialien zweyer und mehrerer veränderlichen Größen mit einander zu vergleichen, und ihr Verhältniß zu einander anzugeben, in so fern dasselbe durch endliche Größen bestimmt werden kann. Ob nemlich gleich die Größen, welche kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, an sich betrachtet, nie = 0 gesetzt werden dürfen: so so kommen sie doch in Ansehung unserer nicht in Betrachtung, und wir haben das Verhältniß zweyer Differenzialien zu einander in aller uns erreichbaren Schärfe und Genauigkeit ausgedruckt, wenn wir den Quotienten desselben so darstellen, daß dabey keine Größe, die sich angeben läßt, vernachläßiget und aus der Acht gelassen wird. Weiter gehen wir ja in der gemeinen Mathematik nie. Hierdurch wird eine sehr vortheilhafte Abkürzung der nach den vorhergehenden Regeln für die Differenzialien der Funktionen gefundenen deutlichen Ausdrücke möglich. Denn soll z. B. das Verhältniß des Differenzials der Funktion z^2 zu dem Differenziale von z, oder

$$d.z^2 : dz$$

angegeben werden: so ist, da $d.z^2 = 2zdz + dz^2$, und $dz^2 = dz.dz$ ist,

$$d.z^2 : dz = 2zdz + dz.dz : dz$$

und also der Quotient des Verhältnisses von $d.z^2 : dz$

$$2z + dz$$

wofür man, weil sich dz durch keine Größe, so klein man sie auch annehmen mag, ausdrucken läßt, $2z$ setzen kann. Wollte jemand behaupten, daß man sich dadurch von der Schärfe, welche in der gemeinen Mathematik beobachtet wird, entferne, der würde vor allen Dingen beweisen müssen, daß wir bey der Bestimmung der Verhältnisse in der gemeinen Mathematik auch das bestimmt ausdruckten, was sich seiner Natur nach gar nicht bestimmt ausdrukken läßt; und wem dieses möglich schiene, mit dem hörte aller fernere Streit auf. Auf ähnliche Art ist der Quotient des Verhältnisses

$$d.z^3 : dz$$

da $d.z^3 = 3z^2dz + 3zdz^2 + dz^3$, und $dz^2 = dz.dz$, so wie $dz^3 = dz.dz^2$ ist,

(3z²

$$3z^2 + 3zdz + dz^2 = 3z^2 + (3z + dz)dz,$$

und da jedes Produkt aus einem Differenziale und endlichen Größen zu jeder gleichartigen endlichen Größe ein eben so wenig anzugebendes Verhältniß hat, als das Differenzial allein genommen: so kann man dafür wieder, ohne der mathematischen Schärfe im geringsten zu nahe zu treten, $3z^2$ setzen. Ueberhaupt wird hiernach der Quotient des Verhältnisses

$$d.z^n : dz$$

$$\frac{nz^{n-1}dz + \frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}dz^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dz^3 + \text{rc.}}{dz}$$

$$=$$

$$\frac{(nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}dz + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dz^2)dz}{dz}$$

$$=$$

$$nz^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dz + \text{rc.}\right)dz$$

und folglich, wenn wir bloß angeben wollen, was sich seiner Natur nach angeben läßt,

$$d.z^n : dz = \frac{d.z^n}{dz} = nz^{n-1}.$$

Wenn man das Bisherige sorgfältig überdenkt, wird man leicht von selbst finden, daß es zur Erfindung aller der Abkürzungen hinreiche, welche bey dem Geschäfte, die Differenzialien der Funktionen deutlich auszudrucken, gebraucht werden. Und da man dabey alles lediglich aus dem Begriffe ableitet, daß das Differenzial jeder veränderlichen Größe, obgleich nicht $= 0$, sondern stets eine wirkliche, aber auf keine Art bestimmt anzugebende Größe ist, und die-

ser

ser Begriff keine Schwierigkeiten hat, da es nie verlangt wird, das Differenzial irgend einer veränderlichen Größe selbst anzugeben: so kann dasselbe wenigstens als ein Versuch gelten, die Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung Anfängern zu erleichtern Uebrigens bedarf es kaum erwähnt zu werden, daß die Ausdrücke

$$\frac{d.z^n}{dz} = nz^{n-1}, \text{ und } d.z^n = nz^{n-1}dz$$

einander völlig gleichbedeutend sind.

Allein so außer allem Zweifel auch die bisher betrachteten Abkürzungen der deutlichen Ausdrücke der Differenzialien sind; so betreffen sie doch nur außer den ersten Differenzialien diejenigen zweyten und höhern Differenzialien, wobey das Differenzial der veränderlichen Größe der Funktion beständig ist, und es kann daher das Gesagte, bey aller seiner Richtigkeit und Gewißheit, den Fehler der Unvollständigkeit und Unzulänglichkeit zu haben scheinen. Nun bedürfen zwar allerdings die zweyten und höhern Differenzialien solcher Funktionen, wobey das Differenzial ihrer veränderlichen Größe ebenfalls eine veränderliche Größe ist, in Ansehung der bey ihrer Darstellung möglichen, üblichen und selbst nothwendigen Abkürzungen einer besondern Untersuchung; allein die Schlüsse, worauf sich diese Abkürzungen gründen, sind von den bisherigen nicht verschieden. Denn es sey y irgend eine Funktion von x, und x eine Funktion der veränderlichen Größe z im engern Verstande, und also das Differenzial von z beständig; so ist, allgemein ausgedruckt, nach §. 129.

$$dx = pdz.$$
$$dy = qdx = Pdz$$
$$ddy = rddx + sdx^2 + dxddx.$$

Da

Da aber ddx allemal $= \upsilon dz^2$, und $dx^2 = \omega dz^2$ wird: so folgt hieraus

$$ddy = \varrho dz^2 + \sigma dz^2 + \tau dz^3;$$

und soll daher ddy mit dz^2 verglichen werden, so fällt dabey nach den obigen Gründen $\tau dz^3 = \tau dz^2 . dz$ weg, und es wird

$$\frac{ddy}{dz^2} = \varrho + \sigma.$$

Es sey z. B. $y = x^2$ und $x = z^2$, also $y = z^4$; so ist

$$dx = 2zdz$$

$$dy = 2xdx = 4z^3dz, \text{ und}$$

$$ddy = 2(xddx + dx^2 + dxddx).$$

Nun ist aber $ddx = 2dz^2$, und $dx^2 = 4z^2dz^2$; folglich

$$ddy = 2(2z^2dz^2 + 4z^2dz^2 + 4zdz^3),$$

und also

$$\frac{ddy}{dz^2} = 12z^2 = d^2 . z^4.$$

Will man daher das zweyte Differenzial von y vor der Bestimmung desselben, durch das Differenzial derjenigen veränderlichen Größe, deren Differenzial beständig ist, und wovon y eine Funktion ist, so abkürzen, daß man nur die Glieder behält, die bey der Erforschung des verlangten Verhältnisses wirklich gebraucht werden können: so hat man

$$ddy = rddx + sdx^2,$$

und auf ähnliche Art lassen sich auch in andern Fällen die nöthigen Abkürzungen finden und beweisen. Uebrigens setze ich hier voraus, was allgemein zugestanden werden muß, daß bey der wirklichen Bestimmung des Verhältnisses der Differenzialien, die Ausdrücke derselben allemal auf solche reducirt werden müssen, die durch endliche Größen und beständige Differenzialien dargestellt sind, wofern nicht etwa der Fall ist, daß die vorkommenden Differenzialien durchaus

von

von einer und derselben Art sind; und bemerke nur noch, daß sich, wenn y eine Funktion von x, und x eine Funktion von z ist, beweisen läßt, daß sich jedes zweyte Differenzial von dx, oder ddx, durch ein Produkt aus dz^2 und einer endlichen Größe, das dritte Differenzial von dx, oder d^3x, durch ein Produkt aus dz^3 und einer endlichen Größe ausdrucken läßt, und daß sich hierauf dasjenige gründet, was Euler im 4ten Capitel § 134 f. von diesen Differenzial-Größen behauptet. Soviel jetzt hiervon; vielleicht in der Folge ein Mehreres.

Da die Menge der Differenzialien in einer veränderlichen Größe durch keine Zahl ausgedruckt werden kann, S. 308 f. so bleibt uns bey der Darstellung der Differenzialien der veränderlichen Größen, wenn diese Größen selbst gegeben sind, nichts weiter möglich, als diejenigen Differenzialien in ihrer natürlichen Ordnung, so weit wir es etwa für nützlich halten, auszudrucken, die entweder auf die in den gegebenen Größen enthaltenen folgen, oder vor denselben vorhergehen. Es sey die gegebene veränderliche Größe y, und y irgend eine Funktion von x. Ferner sey

$$y^{I} = y + dy;\quad y^{II} = y + 2dy;\quad y^{III} = y + 3dy;\ \text{ꝛc.}$$
$$y_{I} = y - dy;\quad y_{II} = y - 2dy;\quad y_{III} = y - 3dy;\ \text{ꝛc.}$$

desgleichen

$$dy = y^{I} - y;\quad dy^{I} = y^{II} - y^{I};\quad dy^{II} = y^{III} - y^{II}\ \text{ꝛc.}$$
$$dy_{I} = y - y_{I};\quad dy_{II} = y_{I} - y_{II};\quad dy_{II} = y_{II} - y_{III}\ \text{ꝛc.}$$

und allgemein

$$y^{n} = y + ndy;\quad y_{n} = y - ndy$$

und

$$dy^{n-1} = y^{n} - y^{n-1};\quad dy_{n-1} = y_{n} - y_{n-1}$$

so wird, da $y =$ eine Funktion von x ist,

der

der hier stehende Ausdruck	gleich derselben Funktion von x, wenn man darin für x allenthalben setzt
y^{I}	$x + dx$
y^{II}	$x + 2dx$
y^{III}	$x + 3dx$
y^{IV}	$x + 4dx$
⋮	⋮
y^{n}	$x + ndx$
ferner	
y_{I}	$x - dx$
y_{II}	$x - 2dx$
y_{III}	$x - 3dx$
y_{IV}	$x - 4dx$
⋮	⋮
y_{n}	$x - ndx$

und will man daher dy; dy^{I}; dy^{II}; dy^{III}; dy^{IV} ꝛc. oder dy_{I}; dy_{II}; dy_{III}; dy_{IV} ꝛc. durch dx und endliche Größen ausdrucken, so darf man die Funktionen suchen, welche den Ausdrücken y^{I}; y^{II}; y^{III}; ꝛc. y_{I}; y_{II}; y_{III}; ꝛc. gleich sind, und darauf mit denselben nach diesen Gleichungen verfahren:

$$dy = y^{I} - y; \quad dy^{I} = y^{II} - y^{I}; \quad dy^{II} = y^{III} - y^{II}; \text{ ꝛc.}$$

$$dy_{I} = y - y_{I}; \quad dy_{II} = y_{I} - y_{II}; \quad dy_{III} = y_{II} - y_{III}; \text{ ꝛc.}$$

Uebrigens ist allemal, so wie in der Lehre von den Differenzen

$$y = \Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_{V} + \text{ ꝛc.}$$

war, auf ähnliche Art hier,

$$y = dy_{I} + dy_{II} + dy_{III} + dy_{IV} + dy_{V} + \text{ ꝛc.}$$

ein Satz, der sowohl bey den Anwendungen der Differenzial-

Rech-

Rechnung, als auch in der Integral-Rechnung von der äußersten Wichtigkeit ist.

Ob die Differenzialien, woraus Eine gegebene veränderliche Größe besteht, einander gleich seyn oder nicht? läßt sich, da man dieselben nach der beschriebenen Methode deutlich darstellen kann, leicht untersuchen. Es verhält sich aber damit völlig, wie mit den Differenzen der veränderlichen Größen; und da sie also nur bey den wenigsten veränderlichen Größen einander gleich sind: so entsteht die Frage:

Ob es hinlänglich sey, bey der Untersuchung des Verhältnisses der Differenzialien der veränderlichen Größen, überhaupt genommen, bloß diejenigen Differenzialien zum Grunde zu legen, welche man nach den S. 312 f. mitgetheilten Regeln findet?

Eben diese Frage hätte auch schon in der Lehre von den Differenzen aufgeworfen werden können, weil sich die Differenzialien von den Differenzen bloß darin unterscheiden, daß diese zu ihren Größen ein endliches, obgleich unbekanntes, Verhältniß haben, das Verhältniß von jenen zu ihren Größen hingegen kleiner ist, als jedes Verhältniß, das sich angeben läßt. Die Antwort aber ist bejahend und leicht. Es sind nemlich die Ausdrücke, welche man nach der gewöhnlichen Methode für die Differenzialien der veränderlichen Größen findet, nicht bloß Ausdrücke für das nächste Differenzial, sondern allgemeine Darstellungen aller in jenen Größen enthaltenen Differenzialien. Denn sind die gegebenen veränderlichen Größen veränderliche Größen in engerer Bedeutung, oder auch von der Art, daß sie unter die Form $y = az$ u. dgl. gehören: so sind alle ihre Differenzialien einander gleich, und was also von einem gilt, das gilt auch von allen. Sind aber dieselben solche Funktionen, daß die Differenzialien ungleich werden: so enthält das gedachte Differenzial, außer dem Differenziale der veränderlichen Größe der Funktion, auch diese veränderliche Größe selbst, und begreift deswegen alle in den gegebenen veränderlichen Größen enthaltene Differenzialien unter sich. Es sey z. B. $y = z^2$, und also $dy = 2zdz + dz^2$, um dasselbe vollständig auszudrucken. Man suche $dy^n = y^{n+1} - y^n = (z + (n+1)dz)^2 - (z + ndz)^2 = 2zdz + 2ndz^2 + dz^2$. Da y und z, so wie sie, als veränderliche Größen, ihre Einheiten in gleicher Menge enthalten müssen, also auch hier bloß durch dieses Kennzeichen gegeben sind: so kann man allemal, wenn y in irgend einer Funktion von z gegeben ist, $y + ndy = Y$, und $z + ndz = Z$ setzen, und dann Y nicht nur als eben die Funktion von Z ansehen, welche y von z ist, sondern auch dy als die Differenzialien von Y, und dz als die Differenzialien von Z betrachten. Auf diese Art aber wird in dem gegenwärtigen Falle $Y = Z^2$, und $dY = 2Zdz + dz^2 = dy^n$; und setzt man hierin $Z = z + ndz$, so wird $2Zdz + dz^2 = 2zdz + 2ndz^2 + dz^2$. Da übrigens hieraus zugleich erhellet, daß man, wenn man bey der Untersuchung des Verhältnisses der Differenzialien nicht die nächsten, oder nach der S. 312 f. beschriebenen Methode sich ergebenden, sondern irgend andere nehmen wollte, doch allemal dy^n nehmen müßte, wenn man von irgend einer veränderlichen Größe das gleichliegende Differenzial genommen hätte; und $dy^n = y^{n+1} - y^n$, hingegen $dy = y^1 - y$ ist: so lassen sich auch die Differenzialien auf keine bequemere Art ausdrucken, als eben nach der gedachten Methode.

Wenn man in dem Gesagten statt des Worts Differenzial den Ausdruck Differenz, und statt dy das Zeichen Δy

u. s. f.

u. s. f. setzt: so paßt die aufgeworfene Frage und die Beantwortung derselben durchaus in die Lehre von den Differenzen; und wäre sie daselbst aufgeworfen und beantwortet worden, so würde man sie durch eine entgegenstehende Abänderung für die Differenzial-Rechnung haben einrichten können. Dieses rührt ebenfalls her von der vorhin S. 311. und S. 321. erwähnten Uebereinstimmung zwischen den Differenzen und den Differenzialien, aber nicht daher, weil man die Differenzialien aus den Differenzen durch genugsam fortgesetzte Verkleinerung dieser letztern erhalten könnte. Denn man setze die Theilung einer Differenz so weit fort, als man irgend will und kann: so haben die Theile, auf welche man kommt, zu der Differenz, und also auch zu der veränderlichen Größe derselben, noch immer ein endliches Verhältniß, welches bey den Differenzialien nicht statt findet. Oder soll man die Theilung der Differenzen ohne Ende fortsetzen? Dann kann man ja selbst in Gedanken das Ende dieser Theilung nicht erreichen; und wie stimmt das mit einander überein, daß die Differenzialien kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, seyn, und doch durch eine unbegrenzte Theilung sollen gefunden werden können? da jene Redensart im Grunde nichts anders sagt, als: die Differenzialien sind Größen, welche man durch keine Theilung irgend einer Größe finden kann?

Um bey dieser Gelegenheit noch einiger andern Vorstellungen von den Differenzialien zu gedenken, so ist es gar nicht ungewöhnlich, sich dieselben auch, ohne sie erst von den Differenzen abzuleiten, sogleich als unbestimmt kleine Theile ihrer Größen zu gedenken, so daß ihr Verhältniß zu diesen Größen gleichwohl ein endliches Verhältniß bleibt. So erklärt z. B. Raymond-Roux in seinen Leçons élémentaires de Calcul infinitésimal das Differenzial auf folgende Art: La *différentielle* ou la *fluxion* d'une quantité x sera une partie de x assez petite pour devoir s'évanouir en comparaison de la quantité dont elle fait partie; c'est à dire, que la fluxion de x n'est autre chose que x divisée par l'unité, suivie d'un assez grand nombre de zeros, pour que le quotient soit négligeable en comparaison du dividende, ou fluxion de $x = \frac{x}{1000\ldots.0}$ fluxion de $y = \frac{1}{1000\ldots.0}$ y, 2c. Nach dieser Erklärung wären also nicht bloß Differenzialien bey veränderlichen Größen möglich, sondern es ließen sich dergleichen auch sehr gut bey beständigen Größen gedenken! Man braucht nicht mehr, um das Falsche derselben einzusehen; allein es werden dabey noch schönere Behauptungen nothwendig. So findet sich z. E. in den Schriften von einigen, die eben die Meinung von den Differenzialien haben, ob sie gleich dabey die Differenzen gebrauchen, der Satz, daß die abgekürzten Differenzial-Ausdrücke nur beynahe wahr seyn, und denn heißt es weiter: Wenn zwey Größen beynahe gleich sind, so sind auch ihre Gleichvielfachen, ihre gleichnamigen Theile, ihre gleichvielte Potenzen oder Wurzeln 2c. beynahe gleich. Ferner: wenn zwey Größen beynahe gleich sind, und es werden Größen dazu addirt oder davon subtrahirt, welche beynahe gleich sind, oder sie werden mit beynahe gleichen Größen multiplicirt oder dividirt u. s. f. so sind die Resultate auch beynahe gleich; so daß, da diese Grundsätze durch die ganze Differenzial-Rechnung gebraucht werden, die ganze Differenzial-Rechnung zu einer Beynaherechnung gemacht wird. Nun bedeute n eine solche Zahl, daß $\frac{x}{n}$ nach der gedachten Mathematiker Begriffe ein Differenzial von x ausdrucke. Dann sind

$$x + \frac{x}{n} \text{ und } x, \text{ oder } x(1 + \frac{1}{n}) \text{ und } x$$

beynahe gleich; folglich, nach dem einen von den angeführten Grundsätzen, beynahe

$$(x(1+\frac{1}{n}))^m = x^m(1+\frac{1}{n})^m = x^m,$$

und

$$(1 + \frac{1}{n})^m = 1$$

was auch m für eine Zahl bedeute. Hätte Euler das im Jahr 1748 gewußt, als er seine Einleitung in die Analysis des Unendlichen schrieb; würde er wohl im siebenten Capitel des ersten Buchs, §. 119 behauptet haben, daß $(1 + k\omega)^i = 1 + x$ in den daselbst den Buchstaben k, ω, i, und x beygelegten Bedeutungen sey? Und wenn von den beynahe gleichen Größen überall eben das beynahe wahr seyn soll, was von den gleichen Größen streng und vollkommen wahr ist: so müssen doch auch die Potestäten gleicher Größen, wenn ihre Exponenten beynahe gleich sind, einander beynahe gleich seyn. Nun sey beynahe m = n, wobey also m, wie ich hier annehmen will, so viel nemlich, als es das Wort, beynahe, erlaubt, größer seyn kann als n. Da

$$dx = dx$$

ist, so muß nach dem angeführten Satze beynahe

$$dx^m = dx^n$$

und eben so

$$\frac{a}{dx^m} = \frac{a}{dx^n}$$

seyn. Man vergleiche hiermit den 95sten §. des ersten Theils der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung! Endlich ließe sichs wahrlich nicht, ohne ein Wunder zu Hülfe zu nehmen, erklären, wie die Differenzial-Rechnung die endlichen Größen, welche sie finden lehrt, aus beynahe wahren Größen genau zusammensetzen könne, ohne das Weggelassene je wieder dazu zu nehmen? Das zu erklären, wie die, welche gedachten durchaus falschen Begriff von den Differenzialien zum Grunde legen, im Stande gewesen sind, aus diesem falschen Begriffe so viele wahre Lehrsätze herzuleiten? ist leicht. Sie haben nemlich diese Lehrsätze, nicht aus dem Begriffe, sondern aus und durch Constructionen gefunden, und die mathematischen Constructionen lassen sich nicht so verwirren und verderben, als sich wohl durch Worte ausgedruckte Begriffe verwirren und verderben lassen. Wer genau überlegt, was dx unter den Umständen, unter welchen wir es brauchen, andeuten kann, und dabey das, bey den Ausdrücken der Differenzialien überhaupt, übliche Verfahren gehörig untersucht, wird in Ansehung des wahren Begriffs von den Differenzialien nicht zweifelhaft bleiben.

Weit scheinbarer ist die Theorie derer, die behaupten, daß man durch die Differenzial-Formeln und Gleichungen weiter nichts als die Grenze gewisser Verhältnisse, und z. B. durch $dy = nz^{n-1}dz$, oder $\frac{dy}{dz} = nz^{n-1}$, bloß die Grenze des Verhältnisses ausdrucke, welcher sich, wenn $y = z^n$ ist, das Verhältniß $dy : dz$ ohne Ende nähern kann; allein genau geprüft kämpft sie gleichwohl mit einer doppelten Unbequemlichkeit. Die eine ist, daß man dabey nicht füglich vermeiden kann, dy und dz in Nichtse zu verwandeln, und dann erst den für $\frac{dy}{dz}$ gefundenen Ausdruck als eine genaue Bestimmung ihres Verhältnisses anzusehen; die andere aber, daß man dabey gezwungen ist, eine Menge uneigentlicher Redensarten, die einer weitläuftigen Erklärung bedür-

bedürfen, einzuführen. Jenes thut selbst Hr. Kästner in seinen Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen, S. 11. in dem Zusatze 16; dieses findet man allenthalben. Gleichwohl hat diese Theorie, insbesondere unter den neuern Mathematikern, viel Anhänger gefunden, und vorzüglich haben sie Hr. Karsten in seiner Abhandlung vom Mathematisch-Unendlichen, der ersten unter den 1786 zu Halle von ihm herausgegebenen mathematischen Abhandlungen, und Hr. *L'Huilier* in der in eben dem Jahre von der hiesigen Akademie der Wissenschaften gekrönten Preisschrift: Exposition élémentaire des principes des calculs superieurs, von allen Zweifeln zu befreyen, und wider alle Einwürfe zu sichern gesucht. Es wird daher nicht unzweckmäßig seyn, beyder Schriften noch mit etwas Mehrerm zu gedenken.

Hr. Karsten verwirft also zuvörderst den Eulerischen Grundsatz: Jede Größe kann ohne Ende vermehrt werden. Jener vermeinte Grundsatz, sagt er §. 20, ist wenigstens in der Allgemeinheit genommen, falsch, wie man ihn hier anwenden will, und man kann ihn ohne Umstände verwerfen: denn man ist eben so gut berechtiget, festzusetzen, jede Größe könne ohne Ende vermindert werden. Daraus würde also folgen, es sey unmöglich, daß eine Größe $= 0$ werden könne, denn hiemit hätte ja die Verminderung ein Ende. Seiner Meinung nach enthalten daher unendliche Größen für den Verstand keinen Widerspruch, und zwar unendliche Größen in der Bedeutung, wobey $\frac{1}{\infty} = 0$ ist. Im 29sten und 30sten §. erklärt er sich ferner über das unendlich Kleine und über die Differenzialien auf folgende Art: „Der Ausdruck unendlich klein rührt von der Vorstellung her, wie vermittelst der Division eines Ganzen mit einer beständig wachsenden Zahl der Quotient der Größe o immer näher gebracht werden kann. Sie ist der Vorstellung ganz ähnlich, wie vermittelst der Division mit einer veränderlichen beständig abnehmenden Zahl der Quotient größer als jede noch zu bestimmende Größe werden kann, sie sey so groß, als man will. Kurz man wählte für das Zeichen $\frac{1}{\infty} = 0$ den Ausdruck unendlich klein, weil man für das Zeichen $\frac{1}{0} = \infty$ den Ausdruck unendlich groß gewählt hatte. Ehemalige Vorstellungen von der Sache könnten dem Leser Zweifel übrig lassen, ob man auch berechtigt sey, das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ schlechterdings mit o für gleichgültig anzunehmen. Um solchem Zweifel zu begegnen, muß ich an die sehr bekannte trigonometrische Formul $\frac{1}{\sec. \alpha} = \cot. \alpha$ erinnern. Wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, setzt man $\sec. \alpha = \infty$, also $\frac{1}{\infty} = \cot. 90^\circ$. Nach aller Geständniß bezeichnet $\frac{1}{\infty}$ das unendlich Kleine, und nach aller Geständniß ist $\cot. 90^\circ = 0$, also kann $\frac{1}{\infty}$ kein Mittelding zwischen Nichts und Etwas seyn. Wenn ich nun voraus setze, daß $\frac{1}{\infty}$ nichts mehr und nichts weniger bedeute als o, so versteht es sich von selbst, daß $a + \frac{1}{\infty} = a - \frac{1}{\infty} = a$ sey, oder daß $\frac{1}{\infty}$ in allen solchen Fällen aus einer Formel wegfallen müsse, wenn die o selbst, oder was vielleicht damit multiplicirt ist, wegfallen muß. Das ist es, was die Regel sagen will:

Das

Das unendlich Kleine verschwinde in Vergleichung mit dem Endlichen.

Vormals mogte man diese Regel nöthig haben, jetzt ist sie ganz überflüssig. Wenn man bey Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Geometrie oder andere Theile der Mathematik $x + dx = x$, $y + dy = y$ nimmt: so liegt allemal die Voraussetzung zum Grunde, daß dx oder dy so viel als $\frac{1}{\infty}$, mithin nichts anders als 0 sey. Die ehemaligen Zweifel dagegen rühren von den ganz undeutlichen Begriffen her, die man sich davon machte, was dx, dy eigentlich bedeuten solle." Man sieht hieraus, daß Hr. Karsten eben denselben Begriff von den Differenzialien zum Grunde legt, der im gegenwärtigen übersetzten Eulerischen Werke angenommen worden ist, ob er gleich die Behauptung verwirft, auf welche man denselben hierin gebauet findet; aber so bleibt die Quelle, woraus die Schwierigkeiten in den ersten Grundsätzen der Differenzial-Rechnung fließen, immer noch unverstopft. Denn einmal läßt sich aus dem gedachten Begriffe nicht erklären, warum die beständigen Größen kein Differenzial haben. Zum andern giebt derselbe keine sichere Regel an die Hand, wornach man sich bey der Weglassung einiger Differenzial-Ausdrücke und der Beybehaltung anderer richten könnte. Endlich bleibt dabey drittens immer die Schwierigkeit zurück, daß man in der Differenzial-Rechnung bloße Nichtse untersuche, und, ohne eine Verschiedenheit unter ihnen aus dem Begriffe derselben herleiten zu können, sie gleichwohl verschiedentlich bezeichne, und bey der Vergleichung als wirklich von einander verschieden behandele. Ob dieser zuletzt gedachten Schwierigkeit auf folgende Art hinlänglich begegnet werde? wird jeder Uneingenommene von selbst schon beurtheilen: „Es sey

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ꝛc.}$$
$$z = fx + gx^2 + hx^3 + kx^4 + \text{ꝛc.}$$

so müssen y und z beyde o werden, wenn man $x = 0$ setzt. Dagegen ist der Exponent des Verhältnisses $y : z$

$$\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ꝛc.}}{f + gx + hx^2 + kx^3 + \text{ꝛc.}}$$

und dieser wird $\frac{a}{f}$, wenn man $x = 0$ setzt, in allen andern Fällen aber ist der Werth des Exponenten $\frac{y}{z}$ von $\frac{a}{f}$ verschieden. Wenn nun gleich in dem Falle $x = 0$ nicht weiter gefragt werden kann, wie vielmal z und y enthalten sey? weil es sich von selbst versteht, daß alle Nullen einander gleich sind, und weiter keine Größe haben, die man vergleichen könnte: so läßt sich doch oft durch andere Schlußfolgen beweisen, daß der letzte Werth des Exponenten $\frac{y}{z}$ für den besondern Fall $x = 0$ dem Exponenten des Verhältnisses zweyer andern Größen gegen einander, welches man eigentlich suchte, gleich seyn müsse. Eben diese Grenze des Verhältnisses $y : z$ stellte man sich sonst als das Verhältniß der dem eingeführten Sprachgebrauche gemäß, nun unendlich klein gewordenen Größen $y : z$ vor, und in diesem Sinne konnte man so reden, als wenn die eine unendlich kleine Größe z in der andern y so und so vielmal enthalten sey, oder als wenn zwischen zweyen unendlich kleinen Größen jedes endliche Verhältniß statt haben könne.“ Wenn $y = ax + bx^2 + cx^3 + \text{ꝛc.}$ und $z = fx + gx^2 + hx^3 + \text{ꝛc.}$ ist: so ist allerdings y sowohl als z für $x = 0$ ebenfalls o, und $\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + \text{ꝛc.}}{f + gx + hx^2 + \text{ꝛc.}}$. Allein da hieraus für

$x = 0$

$x = 0$ auch $\frac{0}{0} = \frac{a}{f}$ fließt, und alle Nullen einerley seyn sollen, so ist $0 : 0 = 1$, und so muß auch $a : f = 1$, und also $a = f$ seyn; und wozu alsdenn die Bestimmung des Verhältnisses $y : z$ durch $a : f$? „Aber es zeigt sich ja der Nutzen von dergleichen Bestimmungen in so vielen Fällen und so offenbar, daß man darauf das Recht, diese Bestimmungen zu gebrauchen, gründen könnte?" Giebt man Größen zu, die kleiner sind, als jede Größe, die sich angeben läßt; und dergleichen Größen gebraucht man ja schon in der Elementar-Mathematik: so ändern sich vorstehende Schlüsse in folgende. Wenn $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ + ꝛc. und $z = fx + gx^2 + hx^3 + kx^4$ + ꝛc. ist: so ist sowohl y als z für $x = 0$ ebenfalls 0, und $a = f$, und es hört also in diesem Falle alle Vergleichung der Größen, y und z, mit einander auf. Allein wenn man x kleiner nimmt, als jede Größe, die sich angeben läßt, und a, b, c, d, ꝛc. f, g, h, k, ꝛc. endliche Größen bedeuten, so werden auch y und z Größen die kleiner sind, als jede anzugebende Größen, aber weder 0, noch nothwendig einander gleich. Ihr Verhältniß zu einander ist vielmehr alsdann

$$\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ꝛc.}}{f + gx + hx^2 + kx^3 + \text{ꝛc.}}$$

so daß x kleiner als jede anzugebende Größe ist; und wenn daher das Verhältniß $y : z$ nur so weit ausgedruckt werden soll, als wir es durch endliche Größen zu thun im Stande sind: so bekommt man

$$\frac{y}{z} = \frac{a}{f}.$$

Hier hat man es nicht mit Nullen, sondern mit Größen zu thun, die kleiner sind, als jede Größe, die sich angeben läßt; und wenn man durch Bestimmung und Vergleichung der

Nichtse wirklich etwas wahres und brauchbares findet: so hat man es sicher allemal auf die Art gefunden, daß man zwar von Nichtsen geredet, aber im Grunde immer Größen, die kleiner sind, als jede anzugebende Größe, darunter gedacht, und seine vorgegebenen Nichtse durchaus als dergleichen Größen behandelt hat.

Dieses vorausgesetzt will ich gerne zugeben, daß man mich mit Recht tadeln würde, wenn ich behaupten wollte, daß die unter dem Namen der Exhaustion bekannte Methode der Alten, gehörig erweitert, unzulänglich sey, um den Grund der Differenzial Rechnung fest zu legen. Dieses leugne ich keinesweges selbst und an sich genommen, sondern ich verlange nur, daß man die dabey nöthigen unbestimmbar kleinen Größen nicht mit Null verwechsele und wirklichen Nichtsen gleich annehme; und behaupte dabey, daß die gewöhnliche Art, die Gründe der Differenzial Rechnung auf die Exhaustions-Methode zu bauen, weitläuftiger und unbequemer sey, als es nöthig ist. Wo haben wohl die Alten bey ihren Exhaustionen Größen gebraucht, die Nullen gleich gesetzt werden könnten? Durch die Einführung solcher Größen erweitert man die Exhaustions-Methode der Alten nicht, sondern man entfernt sich gänzlich von ihr. Und wie schwer ist das mit einander zu vereinigen, oder vielmehr wie unmöglich, daß man einmal durch keine noch so weit fortgesetzte Theilung einer endlichen Größe je auf Null kommen könne, und denn doch die endlichen Differenzen durch eine solche Theilung zu verschwindenden Größen machen soll? Hr. L'Huilier vermeidet diese Klippe, allein wenn man ein Beyspiel von der oben gedachten Weitläuftigkeit und Unbequemlichkeit anführen will, braucht man sich auch nur auf seine Exposition &c. zu berufen. Damit dieses Urtheil

nicht

nicht unbillig scheine, will ich die Erklärungen und Lehrsätze, aber ohne die hinzugefügten Erläuterungen und Beweise, hersetzen, auf welche Hr. L'Huilier die Erfindung der Differenzialien bauet. Sie sind folgende:

Erste Erklärung.

Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujour plus grande qu'une quantité constante proposée; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle: cette *quantité* constante est dite la *limite* en grandeur ou en petitesse de la quantité variable.

Zweyte Erklärung.

Soit un rapport variable toujours plus petit qu'un rapport donné, mais qui puisse être rendu plus grand qu'aucun rapport assigné plus petit que ce dernier: le *rapport* donné est appelé la *limite en grandeur* du rapport variable. Item: soit un rapport variable toujours plus grand qu'un rapport donné; mais qui puisse être rendu plus petit qu'aucun rapport assigné plus grand que ce dernier: le *rapport* donné est appelé la *limite en petitesse* du rapport variable.

Erster Lehrsatz.

Soit une quantité constante; & soit une quantité variable toujours plus petite ou toujours plus grande que la première, mais qui puisse en différer moins que d'aucune quantité assignée plus petite qu'elle. Le rapport d'égalité est la limite en petitesse ou en grandeur du rapport de la quantité constante à la quantité variable. Et reciproquement, si le rapport d'égalité est la limite, soit en grandeur soit en petitesse, du rapport d'une quantité constante à une quan-

quantité variable plus grande ou plus petite qu'elle, la quantité variable peut différer de la quantité constante moins que d'aucune quantité assignée.

Zweyter Lehrsatz.

Soient deux quantités variables susceptibles de limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse; & ayant entr'elles un rapport constant; je dis que leurs limites sont entr'elles dans le même rapport.

Soient A & B deux quantités variables, dont les limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse, soient A' & B'; & soit le rapport de a à b le rapport constant des quantités A & B. Je dis que aussi $A' : B' = a : b$.

Dritter Lehrsatz.

Soient deux quantités variables d'espèces différentes susceptibles de limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse. Que les rapports de ces quantités variables à deux quantités constantes soient toujours égaux entr'eux. Je dis que les rapports de leurs limites aux mêmes quantités constantes sont aussi égaux entr'eux.

Soient A & B deux quantités variables, dont les limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse, soient A' & B'; & soient a & b deux quantités constantes, respectivement, des mêmes espèces qu'elles. Si on a toujours la proportion $A : a = B : b$, je dis qu'on a aussi la proportion $A' : a = B' : b$.

Vier=

Vierter Lehrsatz.

Si deux rapports variables, susceptibles de limites, sont toujours égaux entr'eux, leurs rapports limites sont aussi égaux entr'eux.

Que les rapports de A à B & de C à D soient toujours égaux entr'eux & que les rapports de A' à B' & de C' à D' soient respectivement leurs limites; je dis que les rapports de A' à B' & de C' à D' sont aussi égaux entr'eux.

Fünfter Lehrsatz.

Le rapport composé d'un nombre quelconque de rapports susceptibles de limites a pour limite le rapport composé des rapports limites des premiers.

Sechster Lehrsatz.

Soient A, B, C, D, . . . L, M, N, des quantités données; soit x une quantité variable non susceptible de limite en petitesse (ou qui peut être rendue plus petite qu'aucune quantité assignée); soient b, c, d, . . . l, m, n, des exposants donnés qui vont successivement en croissant.

Soit Q une fonction de x telle que, $Q = A + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \&c. \ldots Lx^l + Mx^m + Nx^n +$;

je dis que le rapport d'égalité est la limite du rapport de Q à A, en petitesse ou en grandeur, suivant que B est positif ou négatif.

Lehnsatz.

Soit Q une quantité variable susceptible de limite, laquelle soit Q': je dis que le rapport limite du rapport de Q à une quantité constante A est égal au rapport de Q' à A.

Sieben=

Siebenter Lehrsatz.

Soit a un nombre donné; soit n un exposant donné; soit x une quantité variable, dont la variation, que j'appellerai changement, soit $\triangle x$; je dis: que le rapport des changements simultanés de $a^{n-1}x$ & de x^n peut approcher du rapport de a^{n-1} à nx^{n-1} plus près que n'en approche aucun rapport assigné plus petit ou plus grand que celui-là, suivant que n est plus grand ou plus petit que l'unité.

Achter Lehrsatz.

Soit Q une fonction de x de la forme $Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + Ex^e + \ldots$ Et soit $Q = Aax^{a-1} + Bbx^{b-1} + Ccx^{c-1} + Ddx^{d-1} + Eex^{e-1} + \ldots\ldots$; je dis que le rapport de A' à Q' est la limite du rapport des changements simultanés de $A'x$ & de Q, par un même changement $\triangle x$ de x. En effet, le rapport des changements simultanês de $A'x$ & de Q est celui de A' à la quantité Q' augmentée de la somme des produits de $\triangle x$ & de ses puissances par des puissances de x & des facteurs constants. Donc, pour une même valeur de x, le rapport de A' à Q' est bien la limite du rapport de ces changements simultanés.

Ich lasse es bey der bloßen Mittheilung dieser Sätze mit den Worten des Verfassers bewenden, um Raum zu den übrigen hieher gehörigen Anmerkungen zu behalten. Aber vielleicht fällt jemanden der Gedanke ein: „Wozu so viel Worte über die Natur der Differenzialien? Wir haben so manche unvollkommne Erklärungen in der Mathematik, ohne dabey über die Eigenschaften der Gegenstände derselben im mindesten ungewiß zu seyn. Was läßt sich z. B. selbst über die

die Erklärung der geraden Linie und des geradlinigen Winkels sagen, die nichts weniger als Definitionen, im strengen Sinne genommen, sind; und wie evident sind gleichwohl die Sätze von den geraden Linien und Winkeln! Wenn denn nun auch in der Beschreibung der unendlich kleinen Größen nicht alles ganz genau paßt und wörtlich verstanden werden darf, was schadets? Wer sich mit der Differenzial- und Integral-Rechnung selbst bekannt macht, kann wegen der Wahrheit ihrer Vorschriften nicht in Ungewißheit bleiben." Zuvörderst gebe ich sehr gern zu, daß derjenige, der den Begriff von den Differenzialien zu berichtigen und einen unbezweifelten Grundsatz für die Differenzial Rechnung zu finden sucht, bloß den Anfang des Weges zu einem reizenden und fruchtbaren Gefilde ebene; allein dieses scheint mir, jenes Einwurfs ungeachtet, nothwendig und wichtig. Denn daß in der Elementar-Mathematik und also auch in der Euclideischen Geometrie unvollkommene Erklärungen hinreichen, rühret daher, weil die Elementar-Mathematik die Größe unmittelbar in Constructionen betrachtet, und häufig weiter nichts als Beschreibungen erfordert werden, um diese Constructionen zu machen. Dahingegen untersucht die allgemeine Mathematik, wovon die Differenzial-Rechnung ein Theil ist, die Größe zwar vermittelst Constructionen, aber nicht in denselben, sondern in deutlichen Begriffen; und wie kann ein Strom klar fließen, wenn seine Quelle trübe ist? Und denn enthalten die unvollkommenen Erklärungen der Elementar-Mathematik, von welchen man sagen kann, daß sie nicht geändert zu werden brauchen, nichts, woraus etwas widersprechendes flösse. So lange man daher keinen wahrhaftig mathematischen Grundsatz hat, der an die Stelle des Unendlichen gesetzt werden kann, und dennoch die Untersuchungen, so durch dieses Mittel geschehen, weder erschwert noch verlängert:

längert: so lange kommt die ehrenvolle Benennung der völlig genauen Wissenschaft nur dem niedrigsten Theile der Mathematik zu. Aber vielleicht ist folgendes, für manchen wenigstens, wichtiger. Es werden nicht nur durch die Differenzial- und Integral-Rechnung viele, auch ohne sie mögliche, Untersuchungen in einem sehr hohen Grade erleichtert und abgekürzt; sondern es machen auch diese beyde Rechnungen eine, gewiß eben so große, Menge von Untersuchungen über die Größe erst möglich, und die angewandte und praktische Mathematik kann des Differenzial- und Integral-Calculs bey dem jetzigen Zustande der Sachen schlechterdings nicht entbehren. Nun gründe man diesen Calcul auf Principien, welche von denen der gemeinen Mathematik, und ich möchte sagen, von denen der geraden Vernunft, wesentlich verschieden sind; ists denn Wunder, wenn diejenigen, die die Mathematik wegen der Anwendung auf die Geschäfte des Lebens treiben, sich durch die Dornen abschrecken lassen, womit er umzäunt ist, und in dem Gebiete der gemeinen Mathematik verweilen? Man muß von dem, der Theorien brauchen soll, nicht bloß verlangen, daß er sie lerne, sondern ihm auch die Erlernung derselben in seiner Lage möglich, und ohne Nachtheil der Gründlichkeit angenehm und leicht machen.

Und nun zur weitern Entwickelung der Schwierigkeiten womit die Eulerische Theorie von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen kämpft.

Zu §. 84 und 85.

Man darf in der Mathematik allerdings nicht immer einerley oder gleiche Größen durch einerley oder dieselbigen Zeichen ausdrucken, aber umgekehrt müssen dieselbigen Zeichen immer dieselbigen Größen bedeuten, oder es muß das Gegen-

Gegentheil, wenn es statt finden soll, ausdrücklich angezeigt werden. Es sey also, wie Euler verlangt,

$$n : 1 = 0 : 0$$

weil $n \cdot 0 = 0$ ist. Ferner bedeute m eine von n verschiedene Zahl. Aus eben dem Grunde, aus welchem $n \cdot 0 = 0$ ist, ist auch $m \cdot 0 = 0$, und also auch, so wie $n : 1 = 0 : 0$ ist,

$$m : 1 = 0 : 0; \text{ folglich}$$

$$n : 1 = m : 1; \text{ und } n = m.$$

Zu §. 86.

Wenn $dx = 0$, und auch $adx = 0$ ist: so verhält sich

$$adx : dx = 0 : 0.$$

Nun sollen nach dem 85sten § die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können: (inter cyphras ratio quaecunque intercedere potest) also wäre nicht bloß

$$adx : dx = a : 1, \text{ sondern auch}$$

$$adx : dx = A : 1$$

wie verschieden auch A von a seyn mögte. Hierdurch würde die Möglichkeit adx und dx mit einander zu vergleichen gänzlich aufgehoben.

Zu §. 88.

Eine Linie ist eine Fläche, deren Breite = 0 ist. Gäbe es unter den Nullen verschiedene Ordnungen, so ließe sich vielleicht auch geometrisch scharf darthun, daß die Breite von einigen Linien in Vergleichung mit der Breite anderer unendlich groß sey, obgleich keine eine Breite hätte.

Zu §. 90 – 95.

So wie es Größen giebt, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, so giebt es auch solche, die größer sind, als jede anzugebende Größe, d. h. beyde Arten von Größen lassen sich denken. Jene werden selbst in der Elementar-Mathematik gebraucht, zu diesen gehören die Mengen der Differenzialien in jeder Größe. Warum sollte man also, da man jene durch dx bezeichnet, wenn x die gegebene Größe ist, nicht auch für diese ein besonderes Zeichen, z. B. ∞ brauchen. Aber nun stehen auch dx und ∞ einander gegenüber, und so wie jenes nicht = 0 ist, so bedeutet auch ∞ keine unendliche Größe im metaphysischen Verstande. So wie man durch eine, ohne Ende fortgesetzte, Verkleinerung jeder endlichen Größe sich dem Differenziale derselben immer mehr nähert, ohne es je zu erreichen, und also noch weniger dadurch zu 0 gelangt, weil dx nicht = 0 ist: so nähert man sich auch der durch ∞ angezeigten Größe durch eine ohne Ende fortgesetzte Vermehrung immer mehr, erreicht sie aber nie, und gelangt also auch noch weniger zu dem Unendlichen, welches 0 gegenüber gedacht werden muß. Für dieses Unendliche will ich das Zeichen [∞] gebrauchen, und dann würde allerdings, wenn man beym bloß Gedenkbaren stehen bliebe, nicht nur

$$\frac{x}{dx} = \infty, \text{ und } \infty \,.\, dx = x$$

sondern auch

$$\frac{x}{[\infty]} = 0, \text{ und } [\infty] \,.\, 0 = x$$

seyn. Was indeß diese Gleichung $[\infty] \,.\, 0 = x$ betrifft, so wird sich weiter hin Gelegenheit finden, sie genauer zu erklären. Das Zeichen ∞ wird aber sehr verschieden gebraucht. So setzt man nicht bloß

$$\frac{x}{dx} = \infty; \text{ sondern auch } \frac{ax}{dx} = \infty;$$

auch ist es nicht ungewöhnlich, die Summen von Reihen wie folgende:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ rc.
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 +$ rc.
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 +$ rc.

durch eben dieses Zeichen auszudrucken. Sehr häufig entsteht daraus kein Nachtheil; allein wenn man mehrere durch ∞ ausgedruckte Größen mit einander vergleichen will, so ist auch klar, daß man seine Behauptungen nicht auf das Zeichen ∞ bauen müsse. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß wenn ∞ weiter nichts als eine unbestimmbar große Größe bedeuten soll, der Begriff im Grunde nicht verändert werde, wenn man dafür $\infty + a$ oder $\infty - a$ setzt, oder überhaupt diese Bezeichnungen und ∞ mit einander verwechselt, denn $\infty + a$ und $\infty - a$ zeigen eben sowohl unbestimmbar große Größen an als ∞. Was aber das Zeichen $[\infty]$ betrifft, so kann man von der dadurch ausgedruckten Größe immer sagen, was Haller von der Ewigkeit sagt:

Ich häufe ungeheure Zahlen
Gebürge Millionen auf.
Ich setze Zeit auf Zeit und Welt auf Welt zu Hauf
Und wenn ich von der grausen Höh
Mit Schwindeln wieder nach dir seh,
Ist alle Macht der Zahl, vermehrt zu tausend Malen
Noch nicht ein Theil von dir
Ich zieh sie ab, und du liegst ganz vor mir.

nur mit dem Unterschiede, daß man nicht eben das Recht hat, die Ewigkeit so mit den imaginären Dingen zu vergleichen, als die durch $[\infty]$ angedeuteten Größen mit den imaginären Größen zusammengestellt worden sind. Unter der folgenden Nummer werde ich diese Begriffe brauchen, um über die sogenannten unendlichen Größen noch eins und das andere zu sagen; jetzt kehre ich zu Eulern zurück.

Im 94sten §. wird behauptet, man müsse in der Geometrie sogar zugeben, daß das Produkt aus einer unendlichen Größe in Null eine endliche Größe seyn könne, weil aus

$$\text{tang.}\,\alpha \,.\, \text{cot.}\,\alpha = r^2$$

wenn $\alpha = R$ ist, $\infty \,.\, 0 = r^2$ folge. Aus dem was Euler behauptet, fließt dieses allerdings; allein wenn aus richtigen Vordersätzen durch richtige Schlüsse nichts Falsches muß herausgebracht werden können, und jene Behauptung nicht zugegeben werden kann, ohne andere ausgemachte Wahrheiten über den Haufen zu werfen: so ist ja dieselbe ein sicheres Kennzeichen, daß die Sätze, worauf sie gebauet ist, falsch sind. Wenn $\alpha = R$ ist, so ist $\text{tang.}\,\alpha = [\infty]$ und $\text{cot.}\,\alpha = 0$. Aber will man aus $\text{tang.}\,\alpha \,.\, \text{cot.}\,\alpha = r^2$ für $\alpha = R$ den Satz

$$[\infty] \,.\, 0 = r^2$$

herleiten, so ist dabey noch einiges zu beobachten, was weiter unten angeführt werden wird.

Zu §. 95 - 97.

Wenn in der Elementar-Mathematik die Linie durch eine Länge ohne Breite erklärt oder beschrieben, die Grenzen der Linien Punkte genennt, und weil man eine Linie theilen kann, wo man will, in jeder Linie unzählige Punkte angenommen werden: so sind das Vorstellungen und Behauptungen, wowider kein Mensch etwas einwenden kann; und wenn man bey den Untersuchungen, wobey man den Begriff der Linie gebraucht, weiter nichts fordert: so kann allenthalben das hellste Licht herrschen. Allein man ziehe aus jenen Behauptungen die Folge: Jede Linie bestehe aus unendlich vielen Punkten; und verschwende dann seine Zeit mit der Bestimmung der unendlichen Mengen der Punkte

in

in verschiedenen Linien: so wird und muß man sich, obgleich nach und nach, doch immer bald, aus der lichtvollsten Gegend in dicke Finsterniß versezt sehen. In der Rücksicht sind zwar die Differenzialien von den Punkten verschieden, daß sie als wirkliche Theile ihrer Größen gedacht werden müssen: allein übrigens darf man nur mit ihnen so verfahren, als nach dem Vorigen mit den Punkten, um in dasselbe Labyrinth zu gerathen. Wenn x jede veränderliche Größe bedeutet, so ist, das Verhältniß von $x : dx$ anzugeben, keine noch so große Zahl hinreichend. Dies fließt aus dem Begriffe des Differenzials; und was könnte die Lehre von den Differenzialien für Schwierigkeiten haben, wenn man darin weiter nichts als dieses fordert. Allein man folgere daraus, daß $\frac{x}{dx} = \infty$ sey, und denke sich das ∞, wie gewöhnlich; und daneben auch dx als unendlich klein, im gewöhnlichen Verstande: so hat man auf einmal nicht bloß unendlich große und unendlich kleine Größen, sondern auch unendlich große Größen, die unendlichmal kleiner als andere unendlich große Größen, und unendlich kleine, die unendlichmal kleiner als andere unendlich kleine Größen sind. Noch mehr! Man hat alsdenn so viele unendlich große und unendlich kleine als endliche Größen, ja sogar unendlich viele Ordnungen unendlich großer und unendlich kleiner Dinge: ja wenn ein unendlich großes schon wer weiß wie vielmal unendliche Male auf einander gehäuft ist, so ist es doch wieder soviel als Nichts gegen ein anderes Unendliche; und wenn ein unendlich Kleines wer weiß wie vielmal unendliche Mal in Theile getheilt ist, so ist doch jeder Theil noch ein unendlich großes gegen andere unendlich Kleine. Das sind doch wohl keine *toleranter vera, quae explicatione rigidantur?* Und wozu nun diese ganze geheimnißvolle

Sprache? Was ist man dadurch im Stande zu finden, was man nicht ohne sie viel leichter und bequemer finden könnte? Wenn man Dinge an sich zu untersuchen unternimmt, welche bloß in Vergleichung mit einander untersucht werden können, und untersucht zu werden brauchen: so kann dasjenige, was man findet, aus dem ersten Grunde nicht anders als verworren und falsch, und aus dem andern nicht anders als unnütz und unbrauchbar seyn. Daß zu dieser Classe der Inhalt des 95, 96 und 97sten §. gehöre, glaube ich nur nöthig zu haben, anzuzeigen.

3. Einige anderweitige hieher gehörige Betrachtungen.

Zu §. 102 - 111.

Wenn man nach speciellen Regeln, die nur auf eine Art passen, weil sie bloß aus dem Begriffe dieser Art abgeleitet sind, auch die übrigen neben ihr liegenden, wenn gleich mit ihr zu einem und demselben Geschlechte gehörenden, Arten behandelt: so darf man sich nicht wundern, wenn man dadurch auf Resultate geführt wird, die nicht erlauben, den angenommenen zu eingeschränkten Gesichtspunkt beyzubehalten. Auf diese Weise aber verhält es sich mit den individuellen Reihen, welche der Verf. aus der allgemeinen Formel:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{rc.}$$

hergeleitet hat. Es haben dieselben ganz und gar keine Schwierigkeit, wenn man dabey vor Augen behält, daß die Regeln der Division bey den positiven und negativen Zahlen bald auf die Vorstellung: jede negative Zahl sey weniger als 0; und bald auf den Begriff gegründet sind, wobey das

Nega-

Negative als dem Positiven entgegengesetzt, und das Positive noch vom Absoluten unterschieden gedacht wird. Wenn

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \text{ꝛc.}$$

gesetzt wird, so werden die Regeln der ersten Gattung, wenn aber $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$ angenommen wird, die Regeln der zweyten Gattung befolgt. Man kann daher nicht sagen, daß schlechterdings und ohne alle weitere Rücksicht

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \text{ꝛc.} = -1$$

sey, weil sowohl $\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{ꝛc.}$,

als auch $\frac{1}{1-2} = -\frac{1}{1}$ nach richtigen Regeln gefunden werde: denn so richtig diese Regeln sind, so liegt dabey gleichwohl ein doppelter Begriff von den negativen Zahlen zum Grunde. Allein da ohne Einschränkung

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

seyn müßte, wenn jene Regeln nicht durch die bey ihnen angenommenen Gesichtspunkte eingeschränkt wären: so läßt sich aus den vom V. angeführten Reihen allerdings beweisen, daß man sich, wenn die Regeln vom Positiven und Negativen ganz allgemein und ohne alle weitere Rücksicht gebraucht werden sollen, die negativen Zahlen, außer auf die doppelte vorhin berührte Art, auch noch als Zeichen des mehr als unendlich Großen gedenken müsse. Thut man dieses, so wird zwar die Bedeutung der negativen Zahlen mannigfaltig, und man muß in jedem Falle, wenn man am Ende auf dergleichen Zahlen stößt, aus andern Umständen bestimmen, was für eine Bedeutung statt habe: allein ähnliche Fälle giebt es in der unbestimmten Mathematik in

Menge, und es entsteht also daher kein Einwurf. Aber das könnte wichtiger scheinen, daß alsdenn die negativen Zahlen solche Zahlen vorstellen müßten, die größer wären als das Unendliche, welches ich oben S. 340. durch [∞] zu bezeichnen vorgeschlagen habe. Indeß zugegeben, daß die durch das Zeichen [∞] ausgedruckten Zahlen, und also noch mehr die unter die Form [∞] + m gehörigen imaginär seyen; wir gebrauchen ja auch sonst mit Vortheil imaginäre Größen im Calcul, warum sollten wir diese Gattung verwerfen? zumal da jene imaginären Größen bloße Verkürzungsmittel der anzustellenden Untersuchungen sind, und, wofern das Gesuchte nicht unmöglich ist, am Ende aus der Rechnung wegfallen; diese hingegen häufig in Resultaten vorkommen, welche wir nicht für unmöglich erklären dürfen, ohne die schönsten Regeln der Mathematik über den Haufen zu stoßen. Uebrigens verweise ich wegen der Bedeutungen, welche wir den negativen Zahlen beylegen müssen, auf das, was ich darüber in den Zusätzen zum achten Capitel des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen und in der folgenden Betrachtung, von S. 352. an, gesagt habe.

Dieses vorausgesetzt haben die Reihen, welche Euler im 103ten § aus der Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{rc.}$$

ableitet, keine Schwierigkeit. Es ist vielmehr ganz natürlich, daß z. B.

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{rc.}$$

ist, weil man diesen Werth von $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1}$ durch die Division der 1 mit einer Größe, die kleiner als 0 gedacht

wird,

wird, findet, und also der Quotient größer werden muß als [∞], welches $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ rc. ist. Auch kann man mit vollem Rechte sagen, daß

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{rc.} = -1$$

sey, weil -1 ja auch eine Zahl vorstellt, die größer seyn soll, als [∞]; nur muß man nicht daraus ableiten wollen, daß allemal und ohne Rücksicht

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{rc.}$$

sey, wovon der Grund ebenfalls in dem Gesagten liegt. Eben so natürlich ist es, daß $\frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$, wenn man seinen Werth nach der Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{rc.}$$

sucht, mehr giebt, als man nach eben dieser Formel für $\frac{1}{1-2} = -1$ findet, u. s. f. Aber was sollen uns Größen, die größer sind als das [∞]? Antwort: Zeichen sollen sie uns seyn, wenn sie in Resultaten vorkommen, daß wir an ihrer Stelle die negativen Größen zu nehmen haben, aus deren Entwickelung sie erhalten werden können. Man erinnere sich hier an die aus der Lehre von der Hyperbel hergehörigen Fälle, welche Wallisen so viele Schwierigkeiten machten, und Varignon zuerst erklärte, und wobey ein Raum, der nach den Voraussetzungen, die beym Calcul angenommen werden, mehr als unendlich groß seyn sollte, nichts anders als ein negativer oder auf der entgegengesetzten Seite befindlicher endlicher Raum ist. Doch auch hiervon nachher S. 352 f. mehr.

Allein wie verhält es sich mit den Reihen, welche §. 104. aus der Formel

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

abgeleitet werden? Hieraus findet man

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{(1-1)^2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{ꝛc.}$$

und da vorhin

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.}$$

war, und $\frac{1}{0}$ nach dem Obigen $= [\infty]$ seyn soll: so sollte ja auch

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{ꝛc.} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.}$$

seyn. Noch mehr! Wenn man in jener Formel für x die Zahl -2 setzt, so bekommt man

$$\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{ꝛc.} = 1.$$

Wie kann $1 = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{ꝛc.}$ seyn? oder: Wie kann, da durch $(1-2)^2$ dividiren eben so viel ist, als durch -1 dividiren, und den Quotienten nochmals durch -1 theilen, und jene Division schon mehr als das Unendliche giebt, folglich diese das Unendliche, unendliche Mal genommen, hervorbringen müßte, $\frac{1}{(1-2)^2} = 1$ werden? Dergleichen Knoten sind leicht geschürzt, aber in der That noch leichter gelöset. Wenn man $\frac{1}{(1-1)^2}$ oder $\frac{1}{(1-2)^2}$ nach der Formel:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{ꝛc.}$$

entwickelt: so dividirt man im ersten Falle 1 durch 0, und den gefundenen Quotienten wieder durch 0; im andern aber 1 erst durch -1, und darauf den Quotienten nochmals durch -1.

— 1. Wenn man hingegen $\frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0}$ und $\frac{1}{(1-2)^2}$ $= 1$ findet: so dividirt man im ersten Fall 1 durch 0, und im zweyten 1 durch 1; und so wäre es doch in der That zu bewundern, wenn jemand sich wundern wollte, daß einerley Größe durch verschiedene Größen dividirt, verschiedene Quotienten geben. Allein vielleicht wendet hier jemand ein, daß man auf diese Art bey der Anwendung der Sätze von den Zeichen + und — in Gefahr sey, sich zu irren, wenn man dieselben ganz unbedingt befolgte? Ich kann dieses an meinem Theile nicht leugnen, da bekanntermaßen bedingte Sätze nie als unbedingte gebraucht werden dürfen; und daß insbesondere die Behauptung: bey zwey Größen geben einerley Zeichen sowohl im Produkte als im Quotienten +, und verschiedene —; keine allgemeine und unbedingte Wahrheit haben, habe ich in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, Berlin 1788, im ersten Abschnitte §. 98 f. genugsam gezeigt, und daher auch an diesem Orte jene Behauptung anders entwickelt und genauer bestimmt, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt.

„Wenn aber die negativen Zahlen bald weniger als 0 und bald mehr als das [∞] bedeuten: so wäre es ja wohl gut, wenn man die negativen Zahlen von jener Bedeutung von denen, welchen diese zukäme, auch durch die Bezeichnungsart unterschiede, etwa so, wie nach dem B. §. 104. schon mehrere gewollt haben?“ Man könnte es wohl thun, allein es müßte auf eine andere Art geschehen, und dabey auch noch die negativen Zahlen, wenn man sie als den positiven entgegengesetzt gedenkt, unterschieden werden. Indeß wozu soll man es thun, da man die Bedeutung der negativen Zahlen jedesmal so lange unbestimmt lassen kann, bis man

man die bestimmte Bedeutung derselben braucht, und es dann allemal leicht ist, die unter den daseyenden Umständen statt findende Bedeutung zu erkennen. Nur muß man sich hüten, daß man den Satz: In der Multiplication und Division geben einerley Zeichen + und verschiedene — nicht auf Fälle ausdehne, wofür er nicht bewiesen worden ist; dies ist das Einzige, was zu beobachten übrig bleibt, was aber auch schlechterdings beobachtet werden muß.

Nun ein Paar Worte von der Benennung Summe §. 110. 111. Man hat gar nicht nöthig, für die Fälle, wo es Euler vorschlägt, die Bedeutung dieses Worts zu verändern, es wäre auch in der That nicht gut, wenn man es thun müßte, da sich die gewöhnliche Bedeutung durch den langen und häufigen Gebrauch zu fest gesetzt hat, als daß man darüber nach Gefallen gebieten könnte. Denn wenn man von den Reihen

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.} = [\infty]$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \text{ꝛc.} = -1$$
$$1 + 3 + 9 + 27 + 87 + 243 + 729 + 2187 + \text{ꝛc.} = -\tfrac{1}{2}$$

u. s. w.

immer mehr und mehr Glieder zu einander addirt, so nähert man sich ja dem Werthe von $[\infty]$, von -1, von $-\frac{1}{2}$ u. s. f. die angeführte Bedeutung von -1 und $-\frac{1}{2}$ vorausgesetzt, immer mehr und mehr; und wenn dieses bey den Reihen mit abwechselnden Gliedern nicht statt findet, so bekömmt man doch aus diesen die dadurch ausgedruckte Größe jedesmal genau, wenn man das in dem ꝛc. enthaltene zu den wirklich addirten Gliedern hinzusetzt. So ist z. B.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \frac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}$$

1 —

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \frac{64}{1+2} = \tfrac{1}{3}$$

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \frac{128}{1+2} = \tfrac{1}{3}$$

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \frac{729}{1+3} = \tfrac{1}{4}$$

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729 - \frac{2187}{1+3} = \tfrac{1}{4}$$

u. s. f.

Man kann also allerdings in jedem Falle oder für jeden Werth von x,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{ꝛc.}$$

setzen, aber unter den einzeln Fällen, die unter diese allgemeine Formel gehören, giebt es welche, wo es besser ist, den Werth von $\frac{1}{1-x}$ oder von $\frac{1}{1+x}$ unmittelbar aus diesen Ausdrücken zu entwickeln, als denselben aus den unendlichen Reihen zu suchen, welche ihnen gleich sind, weil man dasjenige, was man hieraus findet, nicht eher zu beurtheilen im Stande ist, als bis man es mit dem verglichen hat, was die Ausdrücke $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{1}{1+x}$, unmittelbar angewandt, geben.

Zum Schlusse dieser Betrachtung bemerke ich nur noch, daß der Anfang des 107ten §. einen wirklichen Widerspruch enthalte, wenn man darin das Zeichen ∞ eben so versteht, als nach meiner Annahme dieses [ ] gedacht werden muß, denn

1 +

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^{[\infty]}$$

muß nothwendig allemal $\frac{1}{1 - x}$ seyn, ob man gleich das [∞]ste Glied selbst in Gedanken nie erreicht.

Von dem sogenannten unendlich Großen und unendlich Kleinen der Mathematiker.

Es hat Gelehrte gegeben, die bewunderten, wie unser endliche Geist unendliche Reihen fassen könne, und wohl gar darin eine Probe seines unendlichen Ursprungs fanden. Hr. Kästner ist so menschenfeindlich, diesen Traum zu stören, und in seinen Betrachtungen über die Art, wie allgemeine Begriffe im göttlichen Verstande sind, Göttingen 1767, zu behaupten: das Unendliche, welches unser Geist bey den unendlichen Reihen fasse, sey so endlich, so den Kräften eines endlichen Geistes angemessen, daß man bey einiger Ueberlegung sich wundern müsse, wie man sich darüber habe wundern können. Der Marquis de l'Hôpital sagt im Anfange der Vorrede zu seiner Analyse des infiniment petits: L'Analyse qu'on explique dans cet Ouvrage, suppose la commune; mais elle en est fort différente. L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies: celle-ci *pénétre jusques dans l'infini même.* Elles compare les différences infiniment petites des grandeurs finies; elle découvre les rapports de ces différences, et par-la elle fait connoître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. *On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini*: car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes, quatriemes, et ainsi de suite,

suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. *De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis.* Hier ist Bewunderung zu wenig, staunen muß man! Denn ist der Geist, der das Unendliche zu fassen vermag, schon unendlich, so muß der, welcher das Unendliche vom Unendlichen faßt, zum wenigsten unendlichmal unendlich seyn. Dazu nehme man die Gewalt, mit welcher unser Geist in der höhern Analyse über das Unendliche herrscht. Vor dem Schelten Gottes fliehen nur Berge, auf seinen Befehl entstehen nur Welten, die endlich sind. Die höhere Analyse winkt, so verschwinden unendliche Größen zu Tausenden; sie befiehlt, so schwingen sie sich aus Nichts hervor und stehen da. Nur Schade, daß bloße Namen zwar die Dinge aus unserm Gesichtskreise entfernen, aber nicht ihre Natur verändern können. Schade, daß alle auf die Unendlichkeit des Gegenstandes der höhern Analyse gebaute Lobsprüche dieser Wissenschaft noch nicht einmal so fest gegründet sind, als Kartenhäuser, woran sich Kinder ergötzen! Ich habe nichts dawider, wenn man mich hier an die Ehrfurcht erinnern will, welche man einem Manne, der in dem Jahrhunderte Newtons, Leibnitzens, der Bernoulli und Huyghens zu den großen Mathematikern gehörte, schuldig ist; ich kenne sie, und hätte deswegen gerne die ausgezogene Stelle nicht hergesetzt. Allein soll denen, für welche ich schreibe, die folgende Untersuchung wichtig seyn, so mußte ich ihnen ein Beyspiel vor Augen legen, zu was für Behauptungen über den Gegenstand derselben selbst Mathematiker vom ersten Range sich haben verleiten lassen. Und warum soll man von den Verirrungen großer Männer nicht frey sprechen, da dieselben, eben weil sie Verirrungen großer Männer sind, mit einem verführerischen Schein umgeben sind, und überdies wahre Größe nicht gänzliche Freyheit von Fehlern, sondern nur neben Fehlern große und ausgebreitete Verdienste erfordert? Zur Sache! d. h. zum Beweise des Satzes:

Daß die Mathematik kein anderes unendlich Große anerkenne, als dasjenige, über welches oder jenseits dessen nichts mehr statt findet; mit andern Worten: kein anderes als das metaphysisch Unendliche, oder dasjenige, welches ich S. 340. durch [∞] ausgedruckt habe; daß ferner das unendlich Kleine, welches sie braucht, diesem unendlich Großen im strengsten Verstande gegenüberstehe, und nichts anders als 0 sey; daß sie folglich alle Verschiedenheit sowohl unter mehrern unendlich großen als unendlich kleinen Größen Einer Art, und also noch mehr unendliche Ordnungen bey denselben, durchaus verwerfe; daß ihr unendlich Großes und ihr unendlich Kleines, oder ihr [∞] und ihr 0, ganz und gar nicht bloß der Differenzial- und Integral-Rechnung eigenthümlich sey, sondern eben so in andern Theilen der Mathematik gebraucht werde; daß folglich alle Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung gefunden, bewiesen und gebraucht werden können, ohne jene Begriffe dabey im geringsten zu Hülfe zu nehmen; daß die aus [∞], 0, und endlichen Größen willkührlich zusammengesetzten Größen in der ganzen Mathematik nicht anders gebraucht werden müssen, als solches darin entweder mit den imaginären oder auch mit den irrationalen Größen geschieht; und daß also die Entfernung, in welcher die Mathematik öfters von ihrer Schwester der Philosophie hat stehen müssen, nicht von der Denkungsart dieser beyden Schönen selbst, sondern von den Hindernissen herrühre, welche ihre Liebhaber denselben in den Weg gelegt haben.

Es ist wahr, es wird in der Mathematik und insbesondere in der höhern Analyse sehr häufig vom Unendlichen und unendlich Kleinen gesprochen, ohne daß man unter jenem das [∞], und unter diesem o denken darf: allein alle diese unendlich großen und unendlich kleinen Größen gleichen völlig dem Papiergelde, welches zwar den Namen führt, und unter denen, welche sich darüber vereiniget haben, die Stelle des Geldes vertritt, aber, an sich betrachtet, doch bloß den Werth des Papiers hat. Um sich davon zu überzeugen braucht man nur die unendlichen Größen etwas näher und genauer zu untersuchen.

Wenn wir uns eine unendliche Größe von irgend einer Art vorstellen wollen, so gehen wir allemal von einer endlichen Größe derselben Art aus, und setzen entweder zu ihren Einheiten in Gedanken ohne Ende immer eine mehr hinzu, oder dividiren dieselbe fortgesetzt, durch immer kleinere und kleinere Brüche. Auf jenem Wege sind wir, sogar in Gedanken, nicht im Stande, das Unendliche ohne das Unendliche zu erreichen, ich will sagen, zu einer unendlichen Größe zu gelangen, ohne eine unendliche Menge von Einheiten zu der angenommenen endlichen Größe hinzugesetzt zu haben: und eben dieses muß von dem andern Wege behauptet werden, wenn man die Brüche, womit man dividirt, auf die Art immer kleiner und kleiner macht, daß man ihre Nenner entweder durch die Addition, oder durch die Multiplication vergrößert. Wollen wir uns daher eine unendliche Größe irgend einer Art wirklich gedenken, so bleibt kein anderes Mittel übrig, als von einer endlichen Größe derselben Art auszugehen, diese durch irgend eine unbenannte Zahl zu dividiren, den Divisor durch die Subtraction immer kleiner zu machen, bis er in o verwandelt wird, und nun den zugehörigen Quotienten unendlich groß anzunehmen. Da sich jede Zahl durch fortgesetzte Subtraction einer oder mehrerer ihrer Einheiten in o verwandeln läßt, und der Satz: der Quotient nimmt in eben dem Verhältnisse zu, in welchem bey unverändertem Dividend der Divisor abnimmt, keine Ausnahme zuläßt: so schwingen wir uns auf diese Art allerdings zum Unendlichen auf: allein es ist auch klar:

1. daß, da o die Grenze der Verminderung des Divisors ist, (und dies leidet keinen Widerspruch, wofern man nicht die Zahlen relativ sich gedenken, und dadurch alles ohne Noth verwirren will) der auf dem beschriebenen Wege denkbare Quotient die Grenze der Vermehrung der dividirten Größe, oder wenn man diese = a setzt,

$$\frac{a}{o} = [\infty] . a$$

seyn müsse.

2. daß wir, wenn wir unendliche Größen irgend einer Art construiren wollen, weiter nichts thun können, als endliche Größen derselben Art so zu verzeichnen oder darzustellen, daß dabey zugleich der Weg, auf welchem man dieselben ohne Ende wachsen lassen kann, vor Augen liege. Dieses findet sich sehr deutlich bey folgender Darstellung:

$$\frac{1}{o} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{2c.}$$

desgleichen bey der Construction der Tangente eines rechten Winkels, u. dgl.

3. daß wir jedesmal, wenn wir uns eine unendlich große Größe vorstellen, ein Produkt aus einer gleichartigen endlichen Größe und der durch [∞] bezeichneten unendlichen Zahl denken, und daß also das Unendliche der Größen nicht in ihren Einheiten, sondern lediglich in ihrer Zahl gedacht werde.

4. daß,

4. daß, da o und [∞] einander gegenüberstehen, o in eben dem Verstande unendlich klein sey, als [∞] das unendlich Große bedeutet, und daß also unendlich klein und o, desgleichen eine unendlich kleine Größe und eine endliche Größe von eben der Art, entweder mit o multiplicirt oder durch [∞] dividirt, einerley sagen wollen.

Dieses vorausgesetzt sollte man zuvörderst die unendlich großen Größen nicht bloß durch das Zeichen [∞], welches man besser allein für die unendlich große Zahl brauchte, sondern durch dieses Zeichen und das Zeichen der Einheit, welche die Art jener Größen bestimmte, z. B. wenn a diese Einheit bedeutete, durch [∞] . a bezeichnen; und die ähnliche Form o . a für die unendlich kleinen Größen wenigstens dann gebrauchen, wenn man unmittelbar auf die Bezeichnungen unendlich großer und unendlich kleiner Größen weitere Schlüsse bauen wollte. Auf diese Art erhielte man aus der Gleichung $\text{tang.}\,\alpha \,.\, \text{cot.}\,\alpha = r^2$, §. 94. und S. 324, wenn $\alpha = R$ würde, nicht sowohl $[\infty] . o = r^2$, als vielmehr

$$[\infty] . r . o . r = [\infty] . o . r^2 = r^2$$

und da das [∞] nichts anders bedeutet als $\frac{1}{o}$, und folglich $[\infty] . o = \frac{1}{o} . o = 1$ ist: so sagte nunmehr die Formel $[\infty] . o . r^2 = r^2$ nichts weiter, als es sey $1 . r^2 = r^2$. Hierwider hat die Geometrie nichts einzuwenden, aber wo lehrt sie aus einer unbegrenzten geraden Linie und o ein Rechteck oder ein Quadrat hervorbringen? wie ihr §. 94. am Ende beygelegt wird. Wenn man in $[\infty] . o . r^2 = r^2$ anstatt o . r den gleichbedeutenden Ausdruck $\frac{r}{[\infty]}$ setzt, so ist ebenfalls $\frac{[\infty] . r^2}{[\infty]} = r^2$.

Zum andern kommt es nun bey dem Beweise, daß es keine verschiedene unendliche Größen Einer Art in der Mathematik gebe, wegen der Nr. 2. stehenden Behauptung bloß darauf an, daß dargethan werde, die Mathematik fordere nie, Zahlen anzunehmen, die größer als [∞] wären; (wobey es sich aber von selbst versteht, daß absolute Zahlen gemeint werden, denn sobald relativ geredet wird, können Welten Punkte, und Punkte Welten heißen.) Dieses ist leicht. Da nemlich o die Grenze der Verminderung jeder Zahl m ist: so ist auch der zu $\frac{m}{o}$ gehörige Quotient die Grenze der Vermehrung derselben. Aber vielleicht wendet man ein: $\frac{m}{o}$ müsse dabey doch immer größer seyn als $\frac{n}{o}$, wenn m größer als n sey. Dieser Einwurf ist sehr scheinbar, so lange man sich die Art, wie wir die unendlich große Zahl uns denken, nicht deutlich vorstellt. Denn da $\frac{1}{o} = [\infty]$ ist, und jede Zahl $m = 1 . m$ ist: so scheint natürlich $\frac{m}{o} = \frac{1 . m}{o} = m . [\infty]$, und $\frac{m}{o} = \frac{1 . n}{o} = n . [\infty]$, und also $\frac{m}{o} : \frac{n}{o} = m : n$ zu seyn. Allein da o nicht bloß die Abwesenheit der 1, sondern die Abwesenheit jeder Zahl andeutet, und daher $m . o = o = n . o$ ist: so kann man auch $\frac{m}{o} = \frac{m}{m . o}$ und $\frac{n}{o} = \frac{n}{n . o}$ setzen; und da auf diese Art $\frac{m}{o} : \frac{n}{o} = 1 : 1$ wird, so fällt dadurch der gemachte Schluß gänzlich über den Haufen. Auch bleibt, wenn man sich auf dem S. 355. beschriebenen Wege von einer endlichen Zahl zur unendlichen aufschwingen will, der anfängliche endliche Divisor willkühr-

lich.

lich. Man gehe also vom $\frac{m}{m}$ aus, so hat man allemal $\frac{1}{1}$, und die unendlich große Zahl oder

$$[\infty] = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc. ohne Ende.}$$

„Aber wenn $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.} = [\infty]$ ist, so müssen doch nothwendig die Summen der Reihen

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.} \\ 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + \text{ꝛc.} \\ 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + \text{ꝛc.} \end{array}\right\} \text{ohne Ende}$$

nothwendig mehr als $[\infty]$ bedeuten.“ Dergleichen Reihen setzt man entweder willkührlich zusammen, und dann sind ihre Summen chimärische Größen; oder man erhält sie durch die Entwickelung der Brüche: $\frac{1}{1-2}$; $\frac{1}{1-3}$; $\frac{1}{1-4}$; u. dgl. In diesem Falle bleibt man nicht bey den absoluten Zahlen stehen, denn die positiven und negativen Zahlen gehören zu den relativen, indem dabey auf den Gang, welchen man im Zählen nimmt, Rücksicht genommen wird. Man lege die Vorstellung zum Grunde, welche man in meinen Zusätzen zum achten Capitel des ersten Buchs der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen findet: so sagt der Ausdruck, mehr als unendlich groß, bey den Zahlen nichts anders als negativ, und es wird

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.} = -1$$
$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + \text{ꝛc.} = -\tfrac{1}{2}$$
$$1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + \text{ꝛc.} = -\tfrac{1}{3}$$

u. s. f.

So wie sichs nun in Ansehung des Unendlichen bey den Zahlen verhält, eben so ists in dieser Rücksicht bey den continuirlichen Größen. Zwar kann man sich in jeder endlichen geraden Linie zwey von einander entfernte Punkte gedenken, sich

sich die Linie nach einer Seite unbegrenzt vorstellen, und so zwey unendliche gerade Linien sich einbilden, welche um die Entfernung der angenommenen Punkte verschieden zu seyn scheinen; oder eine nach beyden Seiten unbegrenzte Linie, so wie auch eine nach allen Seiten unbegrenzte Fläche oder dergleichen körperlichen Raum, in Theile theilen, die zum Theil begrenzt, zum Theil unbegrenzt sind, und die Theile so wie ihre Grenzen unendlich groß nennen: allein hat man alsdenn unendliche Linien, und unendliche Flächen, und körperliche Räume, wie sie die Geometrie giebt? Wenn $\alpha = R$ wird, so soll die Tangente unendlich groß seyn. Ist sie es etwa nur, weil sie von der einen, oder weil sie von keiner Seite begrenzt ist? Ein Kreis, dessen Radius unendlich groß gedacht wird, verwandelt sich in eine gerade Linie; eine Kugelfläche von eben dem Halbmesser, in eine Ebene. Ist dieses wahr, wenn der Ausdruck unendlich groß nicht im strengsten Sinne genommen wird? und läßt sich ein größerer Radius denken, ohne ihn endlich aber negativ zu nehmen? Wir gelangen nicht anders zum Begriffe des Unendlichen, als so, daß wir uns etwas endliches von eben der Art vorstellen, und durch o dividiren. Man nehme alle die Fälle, wo wir in der Geometrie eben dieses zu thun ein Recht haben, und untersuche das Unendliche, wozu sie führen. Man wird allemal finden, daß man entweder zu unendlichen Größen komme, die unter die Form $[\infty] . a$ gehören, oder daß man einen Fehlschluß begangen, und Bestimmungen übersehen habe. Dies letzte fände z. B. statt, wenn man aus der Gleichung für die Parabel, $px = y^2$, herleiten wollte, daß, für $x = [\infty]$, y nothwendig ein kleineres Unendliche bedeuten müsse. Denn soll $x = [\infty]$ seyn, so muß es in $\frac{x}{o}$ übergehen. Da aber $a : y = y : x$ ist, so kann man statt x nicht anders $\frac{x}{0}$ setzen, als wenn man auch $\frac{y}{0}$ statt des einen y schreibt. Allein dann bleibt nicht mehr, wie bey der Parabel seyn muß, $a : y = y : x$, sondern man hat die Proportion $a : \frac{y}{0} = y : \frac{x}{0}$. Ueberhaupt rühren alle paradoxe Behauptungen, welche man in der Mathematik bey den unendlichen Größen hat, so wie auch alle übrige, aus undeutlichen und verworrenen Vorstellungen her, und verschwinden insgesammt, sobald man an deren Stelle deutliche Begriffe braucht.

Dieser Umstand verleitet mich zu einer Ausschweifung, wegen welcher ich um Verzeihung bitte, wenn sie wirklich Ausschweifung ist; den Gegenstand derselben wird hoffentlich Niemand für unwichtig erklären.

Ich habe oben S. 283 f. die Elementar- und allgemeine Mathematik auf die Art unterschieden, daß ich behauptete, die Elementar-Mathematik betrachte die Größen unmittelbar in Constructionen, die allgemeine hingegen vermittelst Constructionen in deutlichen Begriffen. In jener werden daher die Größen durch die Merkmale gegeben, wodurch sie sich von allen andern unterscheiden, in dieser durch eine bekannte Größe von eben der Art, und durch das Verhältniß, welches sie zu dieser Größe haben. Hieraus fließt, um nur einiges zu berühren,

1. daß der Gegenstand der allgemeinen Mathematik viel allgemeiner ist als der der Elementar-Mathematik, obgleich auch diese sich nie mit einzelnen Größen, sondern mit den Arten und den niedrigsten Geschlechtern der Größen beschäftiget.

2. daß die Constructionen, welche in der allgemeinen Mathematik gebraucht werden, keine nothwendige, sondern willkührliche Constructionen sind, deren Ausdehnung also lediglich von der Bedeutung abhängt, welche wir den darin gebrauchten Zeichen beygelegt haben.

Nur dieses vorausgesetzt, wer muß nicht zugeben, einmal, daß es in der allgemeinen Mathematik eine Sache von der äußersten Wichtigkeit sey, den Umfang der gebrauchten Constructionen jedesmal aufs genaueste und deutlichste zu bestimmen; und zweytens, daß die Resultate der allgemeinen Mathematik bey der Anwendung auf die weniger allgemeinen Fälle allemal erst nach der Natur dieser Fälle modificirt werden müssen, wenn sie durchaus passend seyn sollen. Wenn man nach diesen Regeln den Vortrag der allgemeinen Mathematik einrichten will, so ist es freylich unvermeidlich, manche Unterscheidungen zu machen, die dem, welcher von der Nothwendigkeit jener Regeln nicht lebhaft überzeugt ist, überflüssig scheinen können, und dann um so eher in Gefahr sind verworfen zu werden, weil durch sie die Erlernung der Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik schwerer zu werden scheint. Allein man übergehe dieselben, so wird freylich der Anfang des Weges, welchen man seine Schüler führt, ihnen lichtvoller und angenehmer seyn, aber dagegen in der Folge desto mehr dunkle und dornige Stellen haben. Wie soll man z. B. das erklären, daß man durch bekannte und nicht verwerfliche Entwickelungen

$$\frac{1}{1-1} = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+ \text{2c.} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{(1-1)^2} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+ \text{2c.} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{(1-2)^2} = 1+4+12+32+80+192+448+ \text{2c.} = 1$$

findet.

findet. Nach dem, was ich in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra über die Zeichen + und —, insbesondere S. 68 f. §. 98 - 103. gesagt habe, kann man nicht nur, sondern man muß selbst den Zähler 1, in den Brüchen $\frac{1}{(1-1)^2}$ und $\frac{1}{(1-2)^2}$, nicht absolute, ja nach den Regeln der allgemeinen Multiplication und Division, außerdem noch als ein Produkt, und also entweder als $+1 \times +1$, oder als -1×-1 ansehen. Hierdurch wird

$$\frac{1}{(1-1)^2} = \frac{+1 \times +1}{0 \times 0} = \frac{-1 \times -1}{0 \times 0}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{(1-2)^2} = \frac{+1 \times +1}{-1 \times -1} = \frac{-1 \times -1}{-1 \times -1}.$$

Nun ist $\frac{+1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ rc., folglich

$$\frac{+1}{0} \times \frac{+1}{0} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \text{rc.}$$

Ferner ist $\frac{+1}{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 +$ rc., folglich

$$\frac{+1}{-1} \times \frac{+1}{-1} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 + 448 + \text{rc.}$$

Eben das findet man, wenn man $+1$ im ersten Fall durch 0, und den Quotienten nochmals durch 0, im zweyten aber durch -1, und den Quotienten nochmals durch -1, auf die Art dividirt, daß man $0 = 1 - 1$, und $-1 = 1 - 2$ setzt. Nach eben den Regeln also, nach welchen man $\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ rc. findet, ergiebt sich zwar auch $\frac{1}{(1-1)^2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 +$ rc.; so wie ebenfalls bey $\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 +$ rc.

und

und $\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 +$ ꝛc. einerley Regeln gebraucht worden sind. Aber da die Vorstellung welche der Bruch $\frac{1}{1-2}$ giebt, von der, welche der Bruch $\frac{1}{(1-1)^2}$ erzeugt, ganz verschieden ist, so muß nothwendig bey der Entwickelung verschiedenes kommen. Es ist daher auch ganz natürlich, daß der Bruch $\frac{-1 \times -1}{0 \times 0}$ nicht anders den Werth bekommt, welchen man für den Bruch $\frac{+1 \times +1}{0 \times 0}$ durch die Entwickelung findet, als wenn man ihn zuvor in $\frac{+1}{0 \times 0}$ verwandelt hat, und daß es sich auf ähnliche Art mit dem Bruche $\frac{-1 \times -1}{-1 \times -1}$ verhält. Wenn man aber aus $\frac{1}{(1-2)^2}$ nichts weiter als 1 herleitet, so handelt man dabey nach Regeln, welche sich auf die Vorstellung von den negativen Zahlen gründen, bey welcher sie, nicht kleiner als 0, sondern den absoluten Zahlen entgegengesetzt gedacht werden, und diese Vorstellung ist von der so eben gedachten, so wenig man sie auch unterscheidet, sehr verschieden. Ob man daher gleich den Bruch $\frac{1}{0}$ in gewissen Rücksichten den Brüchen $\frac{1}{(1-1)^2}$; $\frac{+1 \times +1}{0 \times 0}$; $\frac{-1 \times -1}{0 \times 0}$, so wie diesen $\frac{1}{1}$ den Brüchen $\frac{1}{(1-2)^2}$; $\frac{+1 \times +1}{-1 \times -1}$; $\frac{-1 \times -1}{-1 \times -1}$ gleich setzen kann: so darf man solches doch auch nur in diesen Rücksichten thun; und da sich dieselben mit den gebrauchten Substitutionen ändern: so muß man nothwendiger Weise

bey

bey der Entwickelung auf Resultate stoßen, die nicht allgemein mit einander verwechselt, oder einander gleich gesetzt werden können. Einen andern Fall anzuführen, wo der Mangel an Genauigkeit in den ersten Bestimmungen Schwierigkeiten erzeugt, die, bey größerer Sorgfalt dabey, sogleich verschwinden: so ist bekanntermaßen, wenn α einen spitzigen Winkel bedeutet, die Secante von α positiv und die Secante von $2R + \alpha$ negativ, und doch liegen beyde Secanten, wenn man die ersten Schenkel der Winkel α und $2R + \alpha$ auf einander legt, so, daß die Vergleichung derselben mit einem Wege, den man hin und her machen, und mit einer Treppe, die man hinauf und hinunter steigen kann, (Geometrische Abhandlungen, von Abr. Gotth. Kästner, erste Sammlung, Göttingen 1790 S. 463. 464) nicht zu den glücklichen Gleichnissen gehört. Als Linie betrachtet und vollständig ausgedruckt, ist nemlich jede Secante eines Winkels y, oder

$\mathrm{sec.}\, y = \frac{r^2}{\mathrm{cos.}\, y}$, also $\mathrm{sec.}\, \alpha = \frac{r^2}{\mathrm{cos.}\, \alpha}$, und $\mathrm{sec.}\,(2R + \alpha) = \frac{r^2}{\mathrm{cos.}\,(2R + \alpha)}$; folglich $\mathrm{sec.}\, \alpha$ positiv, weil $\mathrm{cos.}\, \alpha$ positiv, und $\mathrm{sec.}\,(2R + \alpha)$ negativ, weil $\mathrm{cos.}\,(2R + \alpha)$ negativ ist. Auf diese Art ist für die Rechnung sowohl als für die Zeichnung allen Schwierigkeiten selbst die Quelle verstopft, und man hat gar nicht nöthig, zu einer doppelten Einheit, einer bejahten und einer verneinten, seine Zuflucht zu nehmen, sondern kann dieselbe, wie es in der Geometrie seyn muß, entweder positiv oder negativ sich denken, nur daß man die einmal angenommene Voraussetzung beybehalte. Auch sehe ich nicht ein, wozu überhaupt die doppelte Einheit hier dienen könne? Denn da der Satz

$$\mathrm{sec.}\, \alpha = \frac{r^2}{\mathrm{cos.}\, \alpha}, \text{ oder } \mathrm{sec.}\, \alpha : r = r : \mathrm{cos.}\, \alpha$$

ein

ein allgemeiner Satz ist, und seyn muß: so wäre bey einem doppelartigen Halbmesser oder Einheit

$$\text{sec.}\,\alpha : -r = \mp r : \text{cos.}\,\alpha, \text{ und sec.}\,\alpha = \frac{-r^2}{\text{cos.}\,\alpha};$$

und wer also bey dem angeführten Satze keine doppelte Einheit sieht, der übersieht nicht, sondern er nimmt nur nicht wahr, was nicht da ist. Um zur Sache selbst zurück zu kehren, so hat man in der allgemeinen Mathematik noch weit mehr Ursache, sich vor dunkeln und unvollständigen Begriffen zu hüten, als in jeder andern Wissenschaft; weil man hier die zum Grunde gelegten Begriffe immer vor Augen behalten muß, indem man unmittelbar aus denselben folgert, dagegen in der allgemeinen Mathematik von den Begriffen zu Constructionen forteilt, und bey den Operationen, welche man damit vornimmt, die zum Grunde gelegten Begriffe sehr bald aus dem Gesichte verliert. Auch ist in andern Wissenschaften die Prüfung des Gefundenen durch Anwendung auf einzelne Fälle meistentheils leichter. Aber wie oft sind nicht die Untersuchungen der allgemeinen Mathematik so transcendent, daß jede Erläuterung durch einzelne Fälle eben so unpassend seyn würde, als wenn man ein Differenzial mit der Veränderung vergleichen wollte, welche die Höhe des Oceans erfährt, wenn man eine Schwalbe im Fluge daraus ihren Durst löscht? Hat man sich nicht ganz genau mit dem Sinne und der Ausdehnung oder dem Umfange der Constructionen bekannt gemacht, welche man braucht, oder verliert man denselben aus den Augen: so wird man ein Spiel dieser Constructionen, und öfters nach Orten hingeschleudert, von welchen man keinen Rückweg finden kann, weil man den Weg, der zu denselben führt, nicht kennen zu lernen suchte. Ich hoffe, daß diese Betrachtung mich rechtfertigen werde, wenn ich bey der Erklärung der ersten Gründe

der

der Mathematik hie und da Unterscheidungen mache, wo dergleichen von andern entweder noch gar nicht gemacht, oder doch nicht genug verfolgt worden sind. Ich habe dieses in Rücksicht auf die gemeine Algebra bereits sowohl in meiner Anleitung zur Selbsterlernung der Buchstabenrechnung und Algebra in Briefen, als auch in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra gethan, und wage es hier ebenfalls in der höhern Mathematik. Nach den Urtheilen, welche über jene Versuche gefällt worden sind, darf ich freylich hoffen, daß man den gegenwärtigen nicht ganz verwerfen werde, muß aber auch einigen Einwürfen entgegen sehen, die mir hier ein Paar Worte nöthig machen. Der erste, daß durch dergleichen Unterscheidungen die Anfangsgründe der Mathematik zu sehr erschwert werden, ist bloß scheinbar; davon bin ich durch die damit beym Unterrichte gemachten Versuche überzeugt. Ein anderer ist: die Mathematik werde dadurch mit problematischen Sätzen überhäuft. Wenn Kenner sich die Mühe geben wollen, meine Vorschläge und Behauptungen zu prüfen: so können dieselben entweder über den Haufen geworfen, oder zu Sätzen erhoben werden, die nicht mehr problematisch sind. Der dritte: daß durch meine Methode gleichwohl nicht alle Schwierigkeiten gehoben werden, und die Art, wie einige weggeräumt werden, nicht den gehörigen Grad der Leichtigkeit haben. Diesen Einwurf will ich gern nicht widerlegen, wenn mir nur jene Schwierigkeiten angezeigt und Winke gegeben werden, wie man einen höheren Grad der Leichtigkeit erhalten kann. Ueberhaupt soll mir jede gründliche Belehrung um so willkommner seyn, je tiefer sie eindringt, und alle Bitten, die ich sonst etwa thun könnte, vereinigen sich dahin, den Gesichtspunkt nicht aus den Augen zu verlieren, daß ich den Weg zur Erlernung der Mathematik Anfängern

gern

gern auf die Art eben machen mögte, daß sie zwar vom Anfang an angestrengtes Nachdenken beweisen müßten, aber doch in keinem höhern Grade, als jedem möglich, und zur Erhaltung alles, von dem Studium dieser Wissenschaft zu erwartenden, formellen Nutzens, nothwendig ist.

Um zu dem Unendlichen zurück zu kehren, so wird das, was ich S. 355 bis S. 361. gesagt habe, hinreichend seyn zum Beweise, daß wir allerdings im Stande sind, uns zu dem Begriffe einer unendlich großen Zahl aufzuschwingen, daß wir aber, wenn wir bey den absoluten Zahlen stehen bleiben wollen, auf keine Weise über dieselbe hinauszugehen vermögen, und daß, wenn die Zahlen relativ gedacht werden, zwar mehr als unendlich großen Zahlen, dem Namen nach, entstehen können, die aber, sobald jene Relation wegfällt, durchaus als endliche Zahlen erscheinen. Ueberlegt man insbesondere, daß wir bey der Herleitung der unendlichen Zahl aus endlichen durch die Division mit 0, die 0 als das Zeichen der Abwesenheit aller Zahlen betrachten: so fällt auch die Behauptung über den Haufen, daß verschiedene Zahlen, durch 0 dividirt, doch nothwendig verschiedene unendlich große Zahlen geben müssen, und die angeführten Sätze sind wider alle Einwürfe gesichert. Allein demungeachtet könnte mancher glauben, es seyen dadurch noch nicht alle Schwierigkeiten gehoben, weil wir doch die unendliche Zahl, da sie keinen Widerspruch enthalte, zu sich selbst setzen, desgleichen mit jeder endlichen Zahl multipliciren und dividiren könnten, und so nothwendig zu mehrern der Größe nach verschiedenen unendlich großen Zahlen gelangten. Eben so verhalte sichs, könnte hinzugefügt werden, mit allen übrigen unendlichen Größen. Wenn $[\infty] \cdot a$

irgend

irgend eine unendliche Größe vorstelle, so müsse doch $[\infty].\,ma$ nothwendig eine von jener verschiedene unendliche Größe ausdrucken. Daß wir das Vermögen besitzen, mehrere reelle Begriffe willkührlich mit einander zu combiniren, wer könnte das leugnen. Wer wollte einem Maler das Vermögen absprechen, einen Venuskopf auf einen Pferdehals zu setzen, den Leib mit Gliedern von verschiedenen Thieren mit bunten Federn und mit Flügeln auszuschmücken, und um aus allen Elementen etwas anzubringen das schöne Bild in einen grausenhaften Fisch sich verlieren zu lassen? nur muß er sich nicht schmeicheln, nun ein wundervolles Werk uns aufgestellt zu haben. Auf ähnliche Art, was sollte uns hindern, das Zeichen des reellen Begriffs der unendlich großen Zahl mit den Zeichen der eben so reellen Begriffe von endlichen Zahlen oder jeden Größen, wie wir wollen, zu combiniren? wofern wir nur nicht verlangen, daß jede dieser Combinationen reelle Zahlen und Größen vorstellen solle. Wie sehr wir uns bey willkührlichen Constructionen betrügen können, wenn wir dabey die Bedeutung, welche ihnen nach den Umständen zukommt, unter welchen wir sie gemacht haben, nicht beständig und genau vor Augen behalten, mag folgendes Beyspiel zeigen. Wenn $\alpha = R$ ist, so ist allemal tang. α eine unendlich große Linie in dem Verstande, daß keine größere gedacht werden kann, denn sie ist von beyden Seiten unbegrenzt. Nun sey der Radius einmal $= r$ und dann $= mr$. Da allgemein tang. α . cot. $\alpha = r^2$ ist, so hätte man für $\alpha = R$, wenn $[\infty]$ die unendliche gerade Linie im strengen Verstande bedeutete, nicht nur

$$[\infty].\,0 = r^2, \text{ sondern auch } [\infty].\,0 = m^2r^2$$

und folglich nicht nur $[\infty] = \frac{r^2}{0}$, sondern auch $\frac{m^2r^2}{0}$. Was wollen wir hieraus schließen? Daß es mehrere der Größe nach verschiedene unendliche, von beyden Seiten unbegrenzte, gerade Linien gebe? oder, daß das Unendliche keine Verschiedenheit in der Größe zulasse, wenn der Begriff desselben reell seyn soll? Am besten wäre es unstreitig, da wir doch das Unendliche uns nicht anders vorstellen können, als nach der Art, wie wir uns dazu vom gleichartigen Endlichen aufschwingen, wenn man bloß diejenigen Quotienten unendlich groß nennte, welche entstehen, wenn man jede Größe durch sich selbst oder durch die Zahl, welche die Menge der in ihr enthaltenen Einheiten ausdruckt, zu dividiren anfängt, und dann den Divisor in 0 übergehen läßt. Hierdurch würde alle Verschiedenheit in der Größe unter den unendlichen Größen einer und derselben Art unmöglich, und die allgemeine Mathematik hätte kein anderes reelle Unendliche als die Elementar-Mathematik. Nur ein Einwurf bliebe noch möglich, und zwar folgender: „Man nehme eine unendliche gerade Linie, ein unendliches Quadrat, und einen unendlichen Cubus, und nenne einen Theil jener Linie a. Dies vorausgesetzt, muß die Linie $= [\infty] . a$, das Quadrat $[\infty]^2 . a^2$, und der Cubus $= [\infty]^3 . a^3$ seyn, und hier sind also drey reelle Ordnungen der unendlichen Zahl $[\infty]$“. Allein einmal unternimmt man, wenn man auf diese Art schließt, das Unendliche durchs Endliche zu messen; und stellt sich eben deswegen das Unendliche zweytens nicht als unendlich vor, sondern bildet sich dabey nur eine sehr weit, aber doch immer erreichbare, Grenze ein; und endlich bliebe drittens übrig, mit Bailly in seiner Histoire de l'Astronomie moderne zu sagen: L'infini est le gouffre, ou se perdent nos pensées.

Indeß entsteht nun eine doppelte Frage, nemlich: Wie soll man es machen, wenn unendliche Größen unter solchen Umstän-

Umständen vorkommen, daß dabey und damit die einfachen mathematischen Operationen nöthig werden? und: Wie sind die Fälle zu erklären, wenn das Verhältniß einer Größe, die nicht unendlich groß im absoluten Verstande ist, zu einer endlichen Größe = 1 : 0 gefunden wird? wohin z. B. derjenige gehört, dessen Montucla im 2ten Theile seiner Histoire des Mathematiques S. 300 gedenkt. Ich beantworte diese letzte Frage zuerst, weil sie die leichteste ist. Man darf nemlich in diesen Fällen nur vor Augen behalten, daß durch den gefundenen Quotienten nichts weiter angezeigt werden solle, als, der Nenner des gesuchten Verhältnisses sey eine unendlich große Zahl sey. Daß man dabey, wenn der eine Raum a und der andere b gesetzt, und a : b = 1 : 0 gefunden wird, nicht schließen darf, es sey $a = \frac{b}{0}$, und folglich eine unendlich große Größe im absoluten Verstande, rührt daher, weil die 0, welche man braucht, unter solchen Umständen gefunden wird, daß sie nicht ein Zeichen der Abwesenheit aller Zahlen, sondern bloß die Abwesenheit der 1 anzeigt. Was die erste Frage betrifft, so werden zwar allerdings die Größen, welche man aus reellen unendlichen Größen durch die einfachen mathematischen Operationen zusammensetzt, wenn sie nicht unter die Formen [∞] und [∞] . a gehören, eben so wohl imaginäre Größen, als die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen: allein hierin liegt auch zugleich die Antwort auf die aufgeworfene Frage. Während des Calculs mag man sich immerhin der Größe nach verschiedene unendlich große Größen einbilden, und nach Gefallen combiniren und trennen: dadurch bekommen dieselben keine Realität, sondern sind nur ein Verkürzungsmittel der Untersuchungen. Oder soll es keine imaginäre Größe weiter geben, als die geraden Wurzeln aus negativen Größen? wozu gehörte dann a b c d, wenn jeder dieser vier Buchstaben eine gerade Linie bedeutet? Aber wenn jene eingebildete unendliche Größen in den letzten Resultaten bleiben, so ist nur ein Fall, bey welchem die aufgelösten Aufgaben mögliche Aufgaben seyn können, und dieser findet dann statt, wenn die Einheit, welche bey dem Zeichen des Unendlichen steht, eben dieselben Dimensionen hat, als das Zeichen des Unendlichen, und mit diesen Dimensionen wirklich gedacht werden kann. Bedeutet z. B. a eine gerade Linie, so sind $[\infty]^2 . a^2$ und $[\infty]^3 . a^3$ wenn man dazu durch die mathematischen Operationen gelangt, deswegen nicht imaginär, sondern den Ausdrücken $[\infty] . a^2$ und $[\infty] . a^3$ gleichbedeutend, weil der Ausdruck $[\infty]^2 . a^2$ eigentlich nichts anders als ein Quadrat, und dieser, $[\infty]^3 . a^3$ eigentlich nichts anders als einen Cubus, deren Seiten unendlich groß sind, bedeutet. Auf diese Art wird daher der Gebrauch des $[\infty]$ in der Mathematik durch das Bisherige auf keine Weise eingeschränkt, sondern es enthält dasselbe nur die Regeln, ohne welche man bey dem Gebrauche des Unendlichen öfters ungewiß und in Gefahr ist, Fehlschlüsse zu machen.

Ich wende mich zu einer andern Betrachtung. Wenn man aus dem Endpunkte eines Halbmessers eines Kreises auf dem Halbmesser eine senkrechte Linie errichtet: so hat dieselbe mit der Peripherie des Kreises weiter keinen Punkt gemein als denjenigen, in welchem sie auf dem Halbmesser senkrecht steht; alle ihre übrige Punkte liegen außerhalb des Kreises. Es heiße der gedachte gemeinschaftliche Punkt A, der in der Tangente ihm nächste B, und der in der Peripherie ihm nächste b. Da B und b wegen des angeführten Satzes nicht zusammen fallen können, so muß zwischen ihnen eine gerade Linie möglich seyn, aber diese gerade Linie kann zu jeder gegebenen geraden Linie kein Verhältniß haben, welches sich durch irgend eine Zahl, so groß sie auch angenommen wird, ausdrucken ließe. Hier haben wir also eine gerade Linie, die kleiner ist als jede gerade Linie, die sich angeben läßt, und welche gleichwohl nicht $= 0$ ist, und durch sie gelangen wir sehr leicht zu Quadraten und Würfeln von ähnlicher Art. Ich will hier die Realität der Größen, die kleiner sind, als jede gleichartige Größe, welche sich angeben läßt, ohne daß man sie deswegen $= 0$ setzen könnte, ihre Realität nemlich in der reinen Mathematik, nicht beweisen, sondern nur durch ein Paar Beyspiele erläutern: denn ich denke nicht, daß man Einwendungen dawider machen werde. Aber wie soll man nun dergleichen Größen nennen? unendlich kleine Größen? dann müßten sie $= 0$ seyn; oder Differenzialien? diese Benennung kommt ihnen nicht allgemein, sondern nur unter gewissen Umständen zu. Man erlaube mir daher, sie mit dem Namen Elemente zu belegen, ohne daß dadurch denselben Einfachheit und Untheilbarkeit beygelegt werde, denn diese kommt ihnen auf keine Weise zu. Ferner erlaube man mir eine jede Größe dieser Art, wenn die Gattung, zu welcher sie gehört, durch die Einheit a bestimmt wird, durch $\partial . a$ oder ∂a zu bezeichnen. Da bey diesen Voraussetzungen ∂a nicht $= 0 . a$ ist, so kann auch $\frac{a}{\partial a}$ nicht $= [\infty]$ seyn, aber eben so wenig durch irgend eine Zahl, wie groß man sie auch annehmen mag, ausgedruckt werden. Es heiße daher die Zahl, welche $\frac{a}{\partial a}$ gleich gesetzt werden kann, unbestimmbar groß, und ihr Zeichen sey ∞. Dann ist die durch ∞ ausgedruckte Zahl keine unendliche Zahl, und eben so wenig ∞a eine unendlich große Größe. Ferner ist $\frac{a}{\partial a} = \infty$, und $\frac{ma}{\partial a} = m\infty$;

$\frac{a^2}{(\delta a)^2} = \infty^2$, so wie $\frac{ma^2}{(\delta \alpha)^2} = m\infty^2$ u. s. w. und es lassen sich also unter den unbestimmbar großen Zahlen und Größen eben die Verschiedenheiten und Ordnungen gedenken, welche unter den endlichen, oder bestimmbar großen Zahlen und Größen statt finden, und zwar so, daß allen diesen unbestimmbar großen Größen in der reinen Mathematik die Realität schlechterdings nicht abgesprochen werden kann. Da aber zugestanden werden muß, daß nur $\frac{a}{0 \cdot a}$ eine unendliche Größe sey, so werden durch diese Verschiedenheiten und Ordnungen unter den unbestimmbar großen Größen auf keine Weise reelle unendlich große Größen einer Art, die in der Größe verschieden wären, in die Mathematik, eingeführt: sondern wenn man dieses behauptet hat, so hat das daher gerührt, weil man das unbestimmbar Große mit dem unendlich Großen verwechselte.

Ich kann diese Gelegenheit nicht vorbey lassen, ohne noch einiges andere theils über die Elemente, oder unbestimmbar kleinen Bestandtheile der Größen, theils über die unbestimmbar großen Größen, und insbesondere über die Art und den großen Nutzen ihres Gebrauchs in der Mathematik zu sagen.

Wenn δa ein Element von a bezeichnet, oder unter δa eine Größe gedacht werden soll, die kleiner ist, als jede Größe, die sich angeben läßt: so ist auch $m\delta a$ kleiner als jede anzugebende Größe, wofern nur m eine bestimmbare Zahl bedeutet. Der Beweis dieses Satzes ist dem S. 308, 309. ähnlich. Stellt man sich daher unter A und a bestimmbare

Größen

Größen Einer Art vor, so hat man gar nicht nöthig ∂A und ∂a gleich anzunehmen, sondern man kann, wenn solches aus andern Gründen nützlich ist, $\partial A : A = \partial a : a$, oder $\frac{A}{\partial A} = \frac{a}{\partial a} = \infty$ setzen, und folglich dem Zeichen ∞ die Bedeutung einer zwar unbestimmbar großen, aber dabey gleichwohl beständigen Zahl beylegen. Thut man dieses, so ist allemal

$$1 = \partial . 1 . \infty; \quad a = \partial a . \infty; \quad \text{und } \frac{1}{\infty} = \partial . 1; \quad \frac{a}{\infty} , \partial a;$$

Ferner lassen sich reelle Verschiedenheiten in Ansehung der Größe, so wie auch reelle Ordnungen, sowohl unter den Elementen als unter den unbestimmbar großen Zahlen und Größen denken, und ihrer Natur gemäß bezeichnen. Eben deswegen sind drittens bey und mit diesen Größen alle einfache mathematische Operationen erlaubt; aber wenn irgend eine dieser Größen wirklich dargestellt werden soll, so können wir solches nie anders als auf dem Wege der Näherung thun. Hierin liegen alle Regeln, welche man bey dem Gebrauche der Elemente und der unbestimmbar großen Größen nöthig hat. Man unterscheide daher das unendlich Große von dem unbestimmbar Großen, da sie durch ihre Natur von einander verschieden sind, auch durch die Bezeichnung, und verwechsele solche selbst dann nicht, wenn daraus der Beschaffenheit der vorgesetzten Absicht wegen kein Fehler entstehen könnte. Wenn man z. B. aus der bekannten Formel für die Berechnung der Brennweiten bey sphärischen Hohlspiegeln $f = \frac{dr}{2d - r}$ die Bestimmung des Orts, wo das Bild eines vor einem ebenen Spiegel stehenden Objekts erscheint, ableiten will: so ist allerdings nicht nur

$$f = \frac{[\infty]d}{2d - [\infty]} = \frac{[\infty]d}{-[\infty]} = -d; \text{ sondern auch}$$

 f =

$$f = \frac{\infty d}{2d - \infty} = \frac{\infty d}{-\infty} = -d$$

S. 341; allein warum wollte man nicht lieber bloß $f = \frac{[\infty]d.}{2d - [\infty]} = -d$ brauchen, da auf diese Art die strengste Wahrheit gefunden wird. Eben so verhält sichs mit den Formeln für die Erfindung der natürlichen Logarithmen

$$la = (a^{\frac{1}{\infty}} - 1)\infty, \text{ und } la = (a^{\frac{1}{[\infty]}} - 1)[\infty].$$

Wenn man unmittelbar nach diesen Formeln rechnen will, mag man darunter nach Gefallen wählen, man kann nach der einen nicht anders handeln als nach der andern. Allein will man daraus auf die bekannte Art den Satz:

$$l(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \text{rc.}$$

herleiten, so bekommt derselbe nicht anders als durch den Gebrauch der letzten Formel strenge Gewißheit. Ferner brauche man das Zeichen ∞, wenn man unbestimmbar große Zahlen oder Größen deutlich ausdrucken will, allemal so, das seine Bedeutung beständig bleibe, und setze im zweyten Falle die Einheit, wodurch die Gattung der Größe bestimmt wird, dazu. Hiemit ist verbunden, daß man verschiedene unbestimmbar große Zahlen und Größen, auf eben die Art als verschiedene bestimmbare Zahlen und Größen, verschiedentlich bezeichne, und es wird dieses nothwendig, wenn verschiedene unbestimmbar große Zahlen und Größen mit einander verglichen werden sollen. Eben so brauche man drittens zur Bezeichnung der unbestimmbar kleinen Größen oder der Elemente verschiedene Zeichen, und betrachte dieselben, absolute genommen, nie als Nullen. Beobachtet man diese Regeln, und modificirt man darnach, wo es nöthig ist, das bey dem Gebrauche der fälschlich sogenannten unendlich großen und unendlich kleinen Größen übliche Verfahren:

fahren: so sind die unbestimmbar großen und kleinen Größen in der Mathematik von dem größten Nutzen. Wenn diese Behauptung noch bewiesen zu werden brauchte, so dürfte ich nur daran erinnern, daß man durch die genannten Größen in den Stand gesetzt werde, die Größen von einer neuen und ganz andern Seite zu betrachten, als es geschieht, wenn man sich dieselben bloß als Aggregate bestimmter oder bestimmbarer Theile gedenkt, und wegen des daher entspringenden Vortheils auf Cavaleri Geometrie des Untheilbaren (Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota; auctore P. *Bonaventura Cavalerio*. Bononiae, MDCLIII.) verweisen. Durch Annahme unbestimmbar kleiner Größen gelangt man nemlich zu alle dem, wozu Cavaleri sein Untheilbares brauchte, vermeidet aber, weil man diese Größen nicht als untheilbare oder einfache Größen zu denken nöthig hat, alle die Schwierigkeiten, worin ihn die Einfachheit seiner Elemente verwickelte. Kommen endlich unbestimmbare Größen in letzten Resultaten vor, so ist solches, wie ebenfalls aus dem Gesagten erhellt, ein Kennzeichen, daß man das Gesuchte nicht anders als auf dem Wege der Näherung bekommen könne. So viel hier von diesem Gegenstande, eine weitere Ausführung gehört an einen andern Ort.

Ich ziehe aus dem, was ich, von S. 352. an, über das sogenannte unendlich Große und unendlich Kleine der Mathematiker gesagt habe, folgende Behauptungen.

Die Größen, welche in der allgemeinen Mathematik vorkommen, sind der Zahl nach, wodurch sie ausgedruckt werden, entweder bestimmte oder unbestimmte, und jene entweder endliche oder unendliche, theils unendlich große, theils unendlich kleine, diese entweder bloß unbestimmte aber dabey bestimmbare, oder unbestimmbare, theils unbestimmbar große, theils unbestimmbar kleine. Ferner untersucht die allgemeine Mathematik, da ihr Endzweck ist, Verhältnisse zu erforschen, nie das Unendliche, weder das unendlich Große noch das unendlich Kleine, selbst, indem dabey keine Verhältnisse zu erforschen sind; sondern es gehören alle Größen, über welche sie sich verbreitet, zu den endlichen; und wenn in ihr unendlich große und unendlich kleine Größen, oder in den Constructionen, welche sie zum Grunde legt, die Zeichen [∞]; [∞].a; o.a und o vorkommen, so befinden sie sich entweder in den letzten Resultaten, oder werden bloß als Erleichterungsmittel gebraucht. Eben so wenig unternimmt sie das Verhältniß unbestimmbarer Größen zu untersuchen, und zwar aus eben dem Grunde; findet aber auch auf eben die Art öfters dergleichen Größen, oder bedient sich ihrer, um desto schneller ihr Ziel zu erreichen. Also bleiben bloß die endlichen Größen, für den wirklichen Gegenstand der allgemeinen Mathematik übrig; und da diese nunmehr nicht weiter als in bestimmte und in unbestimmte, obgleich nicht unbestimmbare, eingetheilt werden können: so hat auch die ganze allgemeine Mathematik nicht mehr als zwey Haupttheile, davon der erste mit Recht den Namen der gemeinen Mathematik führt. Was den andern Haupttheil oder denjenigen betrifft, welcher sich mit der Untersuchung unbestimmter Größen beschäftiget: so bedient man sich darin bey der Erforschung der Verhältnisse der gegebenen Größen entweder bestimmter oder unbestimmter Constructionen: in jenen denkt man sich die Größen als unbestimmte Mengen bestimmter und in jeder Größe durchaus einander gleicher Einheiten, in diesen als unbestimmbare, aber bey allen gleich große, Mengen, bald gleicher bald ungleicher Einheiten. Die Größen, welche durch die erste Art der Constructionen dargestellt werden können, sind allerdings veränderliche Größen, aber ihre Veränderlichkeit hat Schranken; dagegen diejenigen, welche durch die andere Gattung ausgedruckt werden, veränderliche Größen ohne Einschränkung sind. Hiernach läßt sich der zweyte Haupttheil der allgemeinen Mathematik von neuem in zwey Theile theilen, die, mit bekannten Namen, unbestimmte Mathematik, und höhere Mathematik genennt werden können, wenn man sich bey dem letztern die Differenzial- und Integral-Rechnung in ihrem ganzen Umfange gedenkt. Logisch beurtheilt ist also die unbestimmte Mathematik sowohl von der gemeinen als von der höhern Mathematik unterschieden, und kann als zwischen beyden mitten inne stehend angesehen werden. Um hier auch der Elementar-Mathematik mit ein Paar Worten zu gedenken, so betrachtet dieselbe die Größen in solchen Constructionen, welche die unterscheidenden Merkmale der Größen, nicht aber ihr Verhältniß zu andern ausdrucken, und also Anschauungen erzeugen und nicht Begriffe; übrigens aber hat auch sie es theils mit bestimmten theils mit unbestimmten Größen zu thun, und theilt sich ferner noch nach dem Unterschiede der Größen, nach welchem dieselben entweder continuirliche oder discrete, oder beydes zugleich sind, in Geometrie, Arithmetik und Mechanik ein. Ich will diesen letzten Theil aus gewissen Gründen hier weglassen, ob ich gleich sonst der reinen Mechanik sehr gern eine Stelle in dem Gebiete der reinen Mathematik einräume; und dann läßt sich also die ganze reine Mathematik auf die Art eintheilen, wie es folgende Tabelle darstellt.

Reine Mathematik.

1. Elementar-Mathematik.
   a. Bestimmte.
      α. Geometrie.
      β. Arithmetik.
      γ. Vermischte Geometrie.
   b. Unbestimmte.
      α. Sogenannte höhere Geometrie.
      β. Unbestimmte Analytik.
      γ. Vermischte höhere Geometrie.
2. Allgemeine Mathematik.
   a. Gemeine Mathematik,
      α. in so fern sie die Größe überhaupt,
      β. in so fern dieselbe in ihren Hauptarten, oder
         aa. die continuirlichen, und
         bb. die discreten Größen betrachtet.
   b. Unbestimmte Mathematik, mit ähnlichen Abtheilungen.
   c. Höhere Mathematik.
      α. Höhere Mathematik in möglichster Allgemeinheit.
         aa. Differenzial-Rechnung.
         bb. Integral-Rechnung.
      β. Anwendungen der Differenzial- und Integral-Rechnung,
         aa. bey continuirlichen, und
         bb. bey discreten Größen.

Unter vermischter Geometrie verstehe ich die Anwendungen der Arithmetik auf die Geometrie, und habe übrigens deswegen allemal die Theile, welche sich mit den continuirlichen Größen beschäftigen, denen, welche die discrete Größe zum Gegenstande haben, vorgesetzt, weil sie sich bey der Behandlung der Mathematik als reine Vernunftwissenschaft zuerst darbieten.

Und

Und nun ist klar:

1. Daß die Mathematik kein anderes unendlich Große anerkenne, als dasjenige, über welches oder jenseits dessen nichts mehr statt findet, und dessen Zeichen [∞] ist; so wie auch, daß das unendlich Kleine, welches sie braucht, diesem unendlich Großen im strengsten Verstande gegenüberstehe, und nichts anders als o sey. Denn

a. kommt in der bestimmten Elementar-Mathematik das unendlich Große und unendlich Kleine entweder gerade so vor, oder es sind zugleich Bedingungen hinzugefügt, welche, bey einiger Aufmerksamkeit, nicht übersehen lassen, daß nicht absolut, sondern relativ geredet werde. In diesem Falle hat man es aber nicht mit dem Unendlichen, sondern nur mit dem uns Unbestimmbaren zu thun.

b. findet auch in den übrigen Theilen der reinen Mathematik kein anderes reelle unendlich Große oder unendlich Kleine statt. Denn wollte man darin von andern unendlich großen und unendlich kleinen Größen ausgehen, so trüge man dieselben in die Mathematik hinein, fände sie aber nicht darin. Braucht man ferner die Zeichen [∞] und o während der Untersuchung, als wenn es Verschiedenheiten und Ordnungen unter den dadurch ausgedruckten Größen gäbe: so hat man deswegen eben so wenig reelle unendlich Große und unendlich Kleine in der Mathematik, als man mögliche unmögliche, oder rationale Irrational-Zahlen hat, weil man Zeichen von unmöglichen und Irrational-Zahlen wie die Zeichen der reellen und der Rational-Zahlen braucht. Findet man endlich unendlich große oder unendlich kleine Größen durch die mathematischen Operationen und aus

endlichen

endlichen Größen, ohne daß dieselben in der Form [∞] a, und o. a erscheinen: so entdeckt man bey genauerer Ueberlegung, entweder, daß die Aufgabe zu den unmöglichen gehöre, oder es ist die Abweichung von der gedachten Form nur scheinbar.

c. Was insbesondere die Differenzial- und Integral-Rechnung betrifft, so darf man bey der Festsetzung ihrer Hauptregeln nur den Weg einschlagen, den ich oben S. 308 f. gegangen bin, um auch darin auf kein anderes unendlich Große und unendlich Kleine zu stoßen. Doch hiervon werde ich noch nachher reden.

2. Daß die Mathematik alle Verschiedenheit sowohl unter mehrern unendlich großen als unendlich kleinen Größen Einer Art, und also noch mehr unendliche Ordnungen bey denselben durchaus verwerfe. Dieses folgt aus dem Vorhergehenden nothwendiger Weise, und so sehr, daß es demjenigen, der die Natur der willkührlichen Constructionen und der allgemeinen mathematischen Operationen nicht kennt, befremden kann, im Calcul die Zeichen verschiedener unendlicher Größen und selbst Ordnungen derselben zu erblicken. Man braucht sich indeß nur die sogenannte Multiplication und Erhebung zu Dignitäten als das, was sie wirklich sind, nemlich als bloße Combinationen, und die Division und Extraction der Wurzeln als Trennung gegebener Combinationen gedenken, um das eben so thunlich und nützlich zu finden, als den Gebrauch der imaginären Wurzelgrößen.

3. Daß das unendlich Große und unendlich Kleine, im wahren Sinne genommen, ganz und gar nicht bloß der Differenzial- und Integral-Rechnung eigenthümlich sey, sondern eben so in andern Theilen der Mathematik gebraucht werde. Hier setze ich weiter nichts

dazu,

dazu, als daß ich unter den andern Theilen der Mathematik diejenigen verstehe, welche zusammen die unbestimmte allgemeine Mathematik ausmachen.

4. Daß alle Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung gefunden, bewiesen und gebraucht werden können, ohne das Unendliche im eigentlichen Sinne im geringsten zu Hülfe zu nehmen. Sobald bewiesen ist, daß die Differenzialien an sich genommen, nicht $= 0$ gesetzt werden dürfen, sobald fallen auch alle unendlich große Größen, von welchen so oft in der Differenzial- und Integral-Rechnung geredet wird, von selbst weg; und daß jenes nicht erlaubt sey, ist hoffentlich durch das Obige hinlänglich dargethan worden. Ferner kommt es bey der Erfindung und dem Beweise der Regeln der Differenzial Rechnung in Ansehung des Punkts, wovon hier die Rede ist, nur auf folgende drey Regeln an: $d.(x + y + z) = dx + dy + dz$; $d.xy = xdy + ydx$; und $d.x^m = mx^{m-1}dx$; und dabey braucht man kein unendlich Kleines und noch weniger ein unendlich Großes zu Hülfe zu nehmen; was aber die Integral-Rechnung betrifft, so ist sie die umgekehrte Methode der Differenzialien, und also in der jetzigen Rücksicht von der Differenzial-Rechnung nicht verschieden. Endlich wäre es warlich keine preißwürdige Art, das Unendliche zu untersuchen, um das Endliche zu finden, und es kontrastirt sehr, wenn man behauptet, die höhere Analyse dringe in das Unendliche, ja selbst in das Unendliche vom Unendlichen, und doch am Ende dadurch nichts als das Verhältniß endlicher Größen findet.

5. Daß die aus $[\infty]$, 0, und endlichen Größen zusammengesetzten Größen in der ganzen Mathematik nicht anders gebraucht werden müssen, als solches darin entweder mit den imaginären oder auch mit den irrationalen

Größen

Größen geschieht. Dies fließt aus dem unter den vorhergehenden Nummern Gesagten hinlänglich.

6. Daß also die Entfernung, in welcher die Mathematik öfters von ihrer Schwester der Philosophie hat stehen müssen, nicht von der Denkungsart dieser beyden Schönen selbst, sondern von den Hindernissen herrühre, welche ihre Liebhaber denselben in den Weg gelegt haben. Ich habe in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik und die Art, die Vollkommenheit und Brauchbarkeit derselben zu vergrößern, Berlin 1789. S. 137. die Kenntniß der Formen, oder die reine Vernunftkenntniß, eingetheilt in mathematische, in philosophische, und in mathematische durch die philosophische erhöhte Kenntniß Auf diese letzte Stufe der Formen-Kenntniß erhebt man sich durch das Studium der allgemeinen Mathematik, und man kann also dabey die Hülfe der Philosophie nicht entbehren, wenigstens insofern nicht, als man dazu eine Fertigkeit, aus Begriffen zu schließen, haben muß. Wenn die allgemeine Mathematik mit der Philosophie, auch nur in Ansehung des Unendlichen wirklich im Widerspruche stände, auf welche Seite sollte der Vorwurf fallen? Sollte die Philosophie in dem, was die Mathematik von ihr bedarf, irrig seyn; wie traurig stünde es dann mit ihr? sollte aber vollends die Mathematik bey gehöriger Unterstützung von Seiten der Philosophie, in ihrem Gebiete Widersprüche wider den gesunden Verstand als unwiderleglich zurücklassen müssen; was sollte man dann überhaupt von der Gewißheit unserer Kenntnisse, wenn sie nicht unmittelbar auf sinnliche Wahrnehmungen sich stützen, urtheilen? Doch es läßt sich alles erklären, wenn man annimmt, daß die Mathematiker bisweilen die Philosophie zu wenig gebraucht,

braucht, und die Philosophen auf der andern Seite die Nothwendigkeit ihrer Wissenschaft zu einem vollkommenen Mathematiker nicht einleuchtend genug dargestellt haben. Schwesterlich vereint, erklimmen Mathematik und Philosophie den höchsten Gipfel menschlicher Kenntnisse; getrennt, sind beyde in Gefahr, bald hier bald da zu straucheln, und erreichen ihr Ziel nie ganz und immer spät.

Und nun noch ein Paar Worte zur Erläuterung der Endlichkeit der unbestimmbaren Größen. Es bedeute x irgend eine endliche Größe, z. B. eine gerade Linie, und dx ein Element derselben, oder eine Größe von eben der Art, die aber kleiner sey, als jede gleichartige Größe, die gegeben werden kann, und gleichwohl weder o noch einfach. Dann ist $\frac{x}{dx} = \infty$ eine unbestimmbar große Zahl, und $x = \infty \,.\, dx$. Da x eine endliche Größe ist, so sind auch x^2; x^3; x^4; x^5; ꝛc. endliche Größen, und darunter, wenn x eine gerade Linie bedeutet, x^2 und x^3 reell. Nun ist aber, weil $x = \infty \,.\, dx$ gesetzt werden kann, $x^2 = \infty^2 \,.\, dx^2$; und $x^3 = \infty^3 dx^3$; ja wenn x eine absolute Zahl bedeutet, so sind auch $x^4 = \infty^4 dx^4$; $x^5 = \infty^5 dx^5$; ꝛc. reelle endliche Größen. Mit was für einem Rechte könnte man also behaupten, daß ∞ in diesen Beyspielen eine unendlich große Zahl bedeute, da jede endliche Größe, sie mag bestimmbar oder unbestimmbar seyn, mit einer unendlichen Zahl multiplicirt, keine endliche Größe geben kann? Oder soll $dx = o$ seyn? Wem dieses bey dem, was dawider nicht nur von mir, sondern von so vielen andern von jeher gesagt worden ist, noch annehmungswerth scheint, dem wäre es vergebliche Mühe, weiter zu widersprechen, denn Er kann aus Nichts hervorbringen, was er will.

Inhalt
des
fünften Capitels.

Von der Differenziation der algebraischen Funktionen einer veränderlichen Größe.

α. Wenn dieselbe die Form p + q + r + s + ꝛc. oder ap + bq + cr + f hat, §. 158.

β. Wenn darin Potestäten der veränderlichen Größe vorkommen, §. 159 - 161.

aa. Wenn die Exponenten dieser Potestäten ganze und positive Zahlen sind, §. 159. 160.

bb. Wenn dieselben negative oder gebrochene Zahlen sind, §. 161.

γ. Wenn sie Potestäten von solchen Funktionen sind, deren Differenzial nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann, §. 162.

δ. Wenn sie Produkte aus zweyen oder mehrern Funktionen einer veränderlichen Größe, und die Differenzialien dieser Funktionen bekannt sind, §. 163.

ε. Besondere Regeln für die Fälle, wenn Brüche in den Faktoren vorkommen, §. 164.

b. Wenn dieselbe irgend eine gebrochene Funktion ist, §. 165 - 168.

α. Allgemeine Regel, §. 165.

β. Besondere Regeln, §. 166.

c. Noch einige Regeln, um das Differenzial bequemer auszudrucken, §. 167. 168.

α. wenn die gegebene Funktion ein Produkt, §. 167.

β. wenn dieselbe ein Bruch ist, deren Zähler oder Nenner einen Faktor hat, der eine Potestät ist, §. 168.

3. Wenn die gegebene Funktion irgend eine algebraische Funktion ist, §. 169 - 177.

a. Wie man die irrationalen Funktionen durch Reduction auf rationale unter die vorhergehenden Regeln bringe, §. 169.

b. Allgemeine Regel der Differenziation jeder algebraischen Funktion, §. 170 - 177.

α. Diese Regel selbst, §. 170.

β. Erläuterung derselben durch Beyspiele, §. 171 ⸗ 173.

aa. Wo $y = p \pm q$ ist, §. 171.

bb. Wo $y = pq$ ist, §. 172.

cc. Wo $y = \frac{p}{q}$ ist, §. 173.

c. Noch einige allgemeine Betrachtungen, § 174 ⸗ 177.

α. über die ersten, §. 174, 175.

β. über die zweyten und übrigen Differenzialien aller algebraischen Funktionen, §. 176. 177.

Anmerkungen und Zusätze

zum

fünften Capitel.

Es würde eine sehr überflüssige Sache seyn, die Vortreflichkeit des Ganges, welchen Euler in diesem Capitel genommen, und der Art, wie er darin seinen Gegenstand behandelt hat, zu rühmen, sie giebt sich selbst zu empfinden. Eben so wenig bedarf dieses Capitel, wegen der darin durchaus herrschenden großen Deutlichkeit, Erläuterungen; und ich setze daher bloß zu dem 152sten §. ein Paar Worte hinzu.

Euler setzt darin den Binomischen Lehrsatz, oder daß

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \text{etc.}$$

sey, in der Allgemeinheit voraus, wobey n jede ganze und gebrochene, positive und negative Zahl bedeuten kann. Er hatte dazu ein Recht, ob er gleich selbst die Richtigkeit des gedachten Lehrsatzes, in dem gedachten Umfange, erst geraume Zeit nach der Herausgabe der Differenzial-Rechnung elementarisch bewiesen hat, nemlich im neunzehnten Bande der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften, vom Jahr 1774. (Die Besitzer meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, finden seinen Beweis in dem Anhange zum ersten Theile, unter den Zusätzen zum achten Capitel. S. 460 f.) Will man indeß, so kann man die Erfindung der Differenzialien der Funktionen, die unter die Form x^n gehören, von dem Binomischen Lehrsatze ganz unabhängig machen, und zwar auf folgende Art.

Wenn x eine veränderliche Größe bedeutet, so ist, unabhängig von dem Binomischen Lehrsatze,

$$d.x^2 = 2x dx; \text{ und } d.x^3 = 3x^2 dx.$$

Ferner läßt sich beweisen, daß wenn, für irgend einen Werth für n, $d.x^n = nx^{n-1}dx$ ist, auch allemal $d.x^{n+1} = (n+1)x^n dx$ sey. Denn es ist

$$x^{n+1} = x^n . x; \text{ also}$$

$$d.x^{n+1} = d.x^n.x = (x^n + nx^{n-1}dx)(x+dx) - x^{n+1}$$

$$=$$

$$x^{n+1} + \left.\begin{matrix} nx^n \\ x^n \end{matrix}\right\} dx + nx^{n-1}dx^2 - x^{n+1}$$

$$=$$

$$(n+1)x^n dx.$$

Nun ist aber aus $d.x^2 = 2x dx$, und $d.x^3 = 3x^2 dx$ die Formel $d.x^n = nx^{n-1}dx$ wahr für $n = 2$, und $n = 3$; also nach dem geführten Beweise nunmehr auch für $n = 4$; $n = 5$; $n = 6$; $n = 7$; u. s. f. ohne Ende. Hat man auf diese Weise die Richtigkeit der Formel, $d.x^n = nx^{n-1}dx$, für jeden ganzen positiven Werth von n dargethan, so findet man die Richtigkeit derselben für die übrigen Werthe nach der gewöhnlichen und bekannten Methode ebenfalls, ohne den Binomischen Lehrsatz im geringsten zu gebrauchen.

Wenn man daher den Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Binomischen Lehrsatzes mit Hülfe der Differen-

zial-

zial-Rechnung führen will: so ist es nicht einmal nöthig, die Wahrheit dieses Satzes für die ganzen positiven Werthe von n zuvor auf andere Art außer Zweifel zu setzen. Allein die Erfindung der zweyten und folgenden Differenzen von x^n muß bekannt seyn, wenigstens für den Fall, wenn dx beständig ist. Nun findet man nach Regeln, die den Binomischen Lehrsatz gar nicht voraussetzen,

$$d.x^n = nx^{n-1}dx; \quad d^2.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2;$$
$$d^3.x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Ferner ist klar, daß jederzeit, wenn

$$d^m.x^n = Ax^{n-m}dx^m$$

ist,

$$d^{m+1}.x^n = (n-m)Ax^{n-m-1}dx^{m+1}$$

seyn müsse. Da also die Formel $d^m.x^n = Ax^{n-m}dx^m$ wahr ist, wenn man $m = 2$ und $A = n(n-1)$, desgleichen, wenn man $m = 3$, und $A = n(n-1)(n-2)$ setzt: so muß sie auch wahr seyn, wenn man $m = 4$, und $A = n(n-1)(n-2)(n-3)$, desgleichen, wenn man $m = 5$, und $A = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ und überhaupt, wenn man, für jeden Werth von m,

$$A = n(n-1)(n-2)(n-3)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-m+1)$$

setzt. Dieses und daß $d^{n+1}.x^n$, wenn dx beständig ist, allemal $= 0$ sey, vorausgesetzt, ist der Beweis des Binomischen Lehrsatzes mit Hülfe der Differenzial-Rechnung folgender. Es sey

$$(1+x)^n = 1 + A^Ix + A^{II}x^2 + A^{III}x^3 + \ldots + A^mx^m + A^{m+1}x^{m+1} + \text{ꝛc.}$$

so ist

$$n(1+x)^{n-1}dx = A^Idx + 2A^{II}xdx + 3A^{III}x^2dx + \text{ꝛc.}$$

und daher

$$n(1+x)^{n-1} = A^I + 2A^{II}x + 3A^{III}x^2 + \text{ꝛc.}$$

Soll nun x jeden Werth haben können, so muß dieses alles auch gelten, wenn man $x = 0$ setzt. Und da hiedurch

$n(1^{n-1}) = n = A^{I}$ wird, so erhellet, daß in der angenommenen Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + A^{I}x + A^{II}x^2 + A^{III}x^3 + \ldots + A^{m}x^{m} + A^{m+1}x^{m+1} + \text{ꝛc.}$$

A^{I} nichts anders bedeuten könne als n. Ferner ist

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}dx^2 = 2A^{II}dx^2 + 6A^{III}x\,dx^2 + \text{ꝛc.}$$

oder

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2A^{II} + 6A^{III}x + \text{ꝛc.}$$

und es kann daher aus ähnlichen Gründen, wie vorhin, A^{II} nichts anders als $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ bedeuten. Ueberhaupt aber ist

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(1+x)^{n-m}dx^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1).A^{m}dx^m + \text{ꝛc.}$$

oder

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(1+x)^{n-m} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1).A^{m}$$

und also

$$A^{m} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)m}.$$

Man hat also für die Werthe von A^{I}; A^{II}; A^{III}; ꝛc. in der Formel $(1+x)^n = 1 + A^{I}x + A^{II}x^2 + A^{III}x^3 + \text{ꝛc.}$

$$A^{I} = n$$

$$A^{II} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$A^{III} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$A^{IV} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\vdots$$

$$A^{m} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-1)m}.$$

Inhalt

Inhalt
des
sechsten Capitels.

Von der Differenziation der transcendenten Funktionen.

 2) wenn

2) wenn die zweyten und folgenden Differenzialien gesucht werden, §. 184.

γ. Die Differenziation solcher Funktionen, welche aus algebraischen und logarithmischen Größen bestehen, §. 185.

b. der Exponential-Größen, §. 186-193.

α. wenn $d \cdot a^x$ gesucht wird, §. 186-188.

β. wenn $y = p^q$ ist, und dy gesucht wird, §. 189-192.

γ. wenn die Exponenten ebenfalls Exponential-Größen sind, §. 193.

c. derjenigen transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen, §. 194-207.

α. Von der Erfindung der ersten Differenzialien dieser Größen, §. 194. 200.

1. wenn dieselben unter die Form A . sin. x, §. 194. 195.
2. wenn sie unter die Form A . cos. x, §. 196;
3. wenn sie unter die Form A . tang. x, §. 197;
4. wenn sie unter die Formen A . cot. x, A . sec. x, A . cosec. x, gehören, §. 198.
5. Beyspiele, §. 199.

β. Von der Erfindung der zweyten und folgenden Differenzialien der betrachteten Größen, §. 200.

d. derjenigen transcendenten Größen, die sich aus der Umkehrung der vorhergehenden ergeben, §. 201-207.

α. Von der Erfindung der ersten Differenzialien dieser Größen, §. 201-205, und zwar

1. des sin. x, §. 201.
2. des cos. x, §. 202.
3. der tang. x, §. 203.
4. der cot. x, §. 204.
5. der sec. x, und der cosec. x, §. 205.

β. Von

β. Von der Erfindung der zweyten und folgenden Differenzialien dieser Größen, §. 205. 206.

1. der Sinus und Cosinus, §. 205.

2. der Tangente, §. 206.

γ. aller derjenigen Größen, in welchen Sinus und Cosinus vorkommen, §. 207.

Wegen der Erläuterungen, welche der 180ste und 181ste §. nöthig haben, verweise ich auf meine Zusätze zu dem siebenten und achten Capitel der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, im Anhange zu meiner Uebersetzung des ersten Theils dieses Werkes.

Inhalt
des
siebenten Capitels.

Von der Differenziation der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

bb. Funk-

Inhalt

Inhalt
des
achten Capitels.

Von der fernern Differenziation der Differenzial-Formeln.

Inhalt
des
neunten Capitels.

Von den Differenzial-Gleichungen.

7. Von