Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Anmerkungen und Zusätze zum ersten und zweyten Capitel.

Anmerkungen und Zusätze
zum
ersten und zweyten Capitel.

Wenn man den Theil der Differenzial-Rechnung, welcher sich mit den Differenzen beschäftiget, aus dem S. 284. festgesetzten Gesichtspunkte betrachtet, oder annimmt, daß in der Lehre von den Differenzen das Verhältniß der Einheiten solcher Größen erforscht werde, auf deren Zahlen man bey dieser Vergleichung nicht zu sehen braucht, weil dieselben bey den verglichenen Größen gleich groß vorausgesetzt werden: so gebührt der erste Platz darin der Anweisung, die gedachten Einheiten deutlich auszudrucken, weil ohne dies die Untersuchung ihres Verhältnisses unmöglich ist. Angenommen also, daß y und z zwey gleichartige Größen bedeuten, deren Verhältniß bloß von ihren Einheiten abhängt: so ändert sich zuvörderst das Verhältniß von y und z nicht, wenn man my für y, und mz für z setzt, m mag übrigens vorstellen, was es will, eine ganze oder gebrochene, eine absolute oder positive oder negative, eine rationale oder irrationale, eine mögliche oder imaginäre Zahl, und es sind daher y und z veränderliche Größen in dem Verstande, in welchem Euler in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen *) diese Benennung nimmt. Dieses vorausgesetzt,

 ist

*) Im ersten Theile im ersten Capitel, so wie auch im zweyten Theile im ersten Capitel, gleich im Anfange.

ist leicht einzusehen, daß man die Einheiten von y und z selbst, nicht anders als unbestimmt gedenken und ausdrucken kann, ob sich gleich dabey der doppelte Fall annehmen läßt, daß diese Einheiten zu ihren Größen entweder irgend ein endliches Verhältniß haben oder nicht. Jenes findet in der Lehre von den Differenzen und Summen, dieses in der Differenzial- und Integral-Rechnung statt. Nun sey $\triangle y$ die Einheit von y, welche zu y irgend ein endliches aber unbekanntes Verhältniß hat, und eben so $\triangle z$ die Einheit von z: so ist offenbar, daß sich das Verhältniß $\triangle y : \triangle z$, wenn die Art, wie y und z von einander abhangen, nicht gegeben ist, bloß andeuten, aber nicht entwickeln läßt, und dabey muß es also auch bey ihnen sein Bewenden haben. Anders ist der Fall, wenn y irgend eine Funktion von z wird. Denn setzt man z. B $y = az$, und behält dabey $\triangle y$ und $\triangle z$ in der angenommenen Bedeutung: so muß, wenn beyde Größen y und z aus einer gleich großen Anzahl von Einheiten bestehen sollen, nothwendig $\triangle y = a\triangle z$, und also

$$\triangle y : \triangle z (= a\triangle z : \triangle z) = a : 1$$

werden. Unterscheidet man daher veränderliche Größen und Funktionen veränderlicher Größen auf die Art, daß man unter jenen bloß diejenigen veränderlichen Größen versteht, welche einzig und allein als Summen ihrer Einheiten gedacht werden; und unter Funktionen veränderlicher Größen alle diejenigen veränderlichen Größen begreift, welche aus jenen und aus beständigen Größen auf irgend eine Art zusammengesetzt sind: so ist klar,

1. daß man das Verhältniß der Einheiten zweyer veränderlicher Größen bloß bezeichnen, aber nicht entwickeln und deutlich ausdrucken kann; sondern daß dieses

2. nur

2. nur dann möglich wird, wenn die gegebenen Größen Funktionen von andern veränderlichen Größen sind.

Was aber die Art und Weise betrifft, das gedachte Verhältniß in diesem zweyten Falle zu finden: so beruhet dieselbe auf folgendem leichten Satze: Da die veränderlichen Größen, man mag diese Benennung im engern oder im weitläuftigern Verstande nehmen, in Ansehung der Menge ihrer Einheiten nicht von einander verschieden gedacht werden dürfen, und folglich die Menge der Einheiten einer Funktion dieselbe seyn muß, als die Menge der Einheiten derjenigen Größe, wovon sie eine Funktion ist: so muß, da $z + \Delta z$ von z um die Einheit Δz unterschieden ist, auch jede Funktion von $z + \Delta z$, welche man aus einer Funktion von z erhält, wenn man darin allenthalben $z + \Delta z$ für z setzt, von der Funktion von z um eine ihrer Einheiten unterschieden seyn. Verwandelt man daher eine gegebene Funktion von z auf die gedachte Art in eine Funktion von $z + \Delta z$, und zieht von dieser, nachdem man die dazu nöthigen, in der Funktion selbst angezeigten, Operationen vorgenommen hat, die gegebene Funktion ab: so findet man in dem Reste die Einheit der gegebenen Funktion, und zwar durch Δz, z und beständige Größen, und also deutlich ausgedruckt. Es sey, z. B. die gegebene Funktion von z:

$$z^2;$$

so ist die nach der gegebenen Vorschrift daraus abgeleitete:

$$(z + \Delta z)^2 = z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2$$

und folglich

$$z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2 = 2z\Delta z + \Delta z^2$$

die gesuchte Einheit der Funktion von z^2 in einem deutlichen Ausdrucke. Auf ähnliche Art findet man für die Einheit der Funktion z^3 den Ausdruck:

$$3z^2\triangle z + 3z\triangle z^2 + \triangle z^3$$

und für die Einheit der allgemeinen Funktion z^n den Ausdruck:

$$nz^{n-1}\triangle z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}\triangle z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-3}\triangle z^3$$
$$+ \text{rc.}$$

wo, da der Binomische Lehrsatz (S. Zusätze zum ersten Theile meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen) für jeden Werth von n erwiesen worden ist, n jede Zahl, von was für einer Art sie seyn mag, bedeuten kann.

Was ich bisher Einheiten veränderlicher Größen genennt habe, belegt Euler mit dem Namen, Differenz, und statt der Redensart: die Einheit einer veränderlichen Größe, oder einer Funktion von einer veränderlichen Größe deutlich ausdrucken, gebraucht er diese: die Differenz einer veränderlichen Größe, oder einer Funktion von einer veränderlichen Größe finden. Beyde Ausdrücke sind gut, wie, bey einiger Ueberlegung, jeder von selbst sieht, und ich werde mich ihrer daher in der Folge ebenfalls bedienen. Bis jetzt habe ich es nicht gethan, so wie ich mir dieselbe Freyheit, wo es mir nützlich scheinen wird, auch noch ferner vorbehalte, um die Hauptsätze der Lehre von den Differenzen und Summen unmittelbar aus dem Begriffe dieser Theile der Differenzial- und Integral-Rechnung, und, wie ich hoffe, zugleich auf eine leichtere Art abzuleiten.

Da ferner die veränderlichen Größen dadurch veränderliche Größen sind, weil sie aus gleich großen Mengen von Einheiten bestehen, und die Gleichheit der Mengen ihrer Einheiten keine Veränderung leiden kann, wenn

man

man jede dieser Größen um eine ihrer Einheiten vermehrt: so ist es auch bey der Untersuchung der veränderlichen Größen als solcher (d. h. unter der Bedingung, daß alles von ihnen zu Behauptende auf die gleiche Menge ihrer Einheiten in ihnen, und zugleich darauf allein, gegründet werde) gleichviel, ob man diese veränderlichen Größen selbst nimmt, oder jede derselben um eine Einheit vermehrt. Sind daher zwey veränderliche Größen, sie mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen, einander gleich: so muß man auch wieder eine Gleichung bekommen, wenn man statt jeder der veränderlichen Größen im engern Verstande, woraus sie etwa zusammengesetzt sind, eben diese Größen, um eine ihrer Einheiten vermehrt, setzt. Ist daher

$$y = \pm z \pm x \pm w \pm v \pm \text{ꝛc.}$$

so ist auch

$$y + \Delta y = \pm z \pm \Delta z \pm x \pm \Delta x \pm w \pm \Delta w \pm v \pm \Delta v \pm \text{ꝛc.}$$

und daher, wenn man hiervon die vorhergehende Gleichung abzieht,

$$\Delta y = \pm \Delta z \pm \Delta x \pm \Delta w \pm \Delta v \pm \text{ꝛc.}$$

und ist

$$y = zx$$

so ist auch

$$y + \Delta y = (z + \Delta z)(x + \Delta x) = zx + x\Delta z + z\Delta x + \Delta z\Delta x$$

und

$$\Delta y = x\Delta z + z\Delta x + \Delta z\Delta x$$

und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Da dieses die Hauptsätze zur Erfindung der ersten Differenzen gegebener Funktionen sind, aus welchen die übrigen im Werke befindlichen abgeleitet werden: so kann ich mich zu der Art und Weise wenden, die zweyten und folgenden Differenzen gegebener Funktionen zu finden, oder deutlich auszudrucken, habe aber dabey nicht nöthig, weitläuftig zu seyn. Denn ist die Einheit oder erste Differenz einer gegebenen Funktion wieder eine Funktion; so gilt das Vorhergehende, in sofern sie eine Funktion ist, natürlich auch von ihr; und behandelt man sie darnach: so findet man auf eben die Art die zweyte Differenz aus der ersten, als man die erste aus der gegebenen Funktion bekam. Ist ferner die zweyte Differenz ebenfalls eine Funktion: so läßt sich auch von ihr behaupten, was so eben von der ersten im ähnlichen Falle gesagt worden ist; und also auch aus der zweyten Differenz auf eben die Art die dritte finden, als die zweyte aus der ersten, oder die erste aus der gegebenen Funktion selbst, abgeleitet werden kann. Auf ähnliche Art kann man immer fort schließen, und zur wirklichen Anwendung des Gesagten darf man nur vor Augen behalten, was man bey einiger Ueberlegung bald findet, daß die Einheiten der veränderlichen Größen im engern Verstande keine veränderliche Größen seyn können, sondern nothwendig beständig seyn müssen.

Auf diese Art ist vieles von dem, was Euler in den ersten 10 §§. des ersten Capitels sagt, zur Erfindung der Differenzen, entbehrlich; aber dieses benimmt ihm nichts von seiner Wichtigkeit, sondern es würde vielmehr die vorstehende Entwickelung der Eulerischen sehr weit nachstehen, wenn man dabey die Methode, die Differenzen auszudrukken, welche §. 10. enthalten ist, auf der Seite lassen müßte, indem dieselbe bey dem Gebrauche der Differenzen äußerst nothwendig und wichtig ist. Allein der Weg dazu ist nicht versperrt, sondern er bietet sich nur etwas später dar; und ob dies nachtheilig sey oder nicht, wird sich bald beurtheilen lassen.

Zuvor

Zuvor muß ich folgendem Einwurfe begegnen. „Wenn der Grund feststeht, auf welchem der Satz S. 293. sich stützt, so muß man auch folgendes behaupten können. Wenn y irgend eine Funktion von z, $\triangle y$ die Differenz von y, und $\triangle z$ die Differenz von z bedeutet: so muß, nachdem man y um $n\triangle y$, und z in dem y gleichen Ausdrucke allenthalben um $n\triangle z$ vermehrt, die nöthigen Operationen vorgenommen, und die gegebene Gleichung von der gefundenen abgezogen hat, $n\triangle y$ dem in der andern Hälfte der resultirenden Gleichung sich ergebenden Ausdrucke gleich seyn, n mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will. Ist dies, so muß man auch für n die um eins verminderte Zahl $n-1$ setzen können, und thut man solches, so muß, wenn zuletzt der für $(n-1)\triangle y$ gefundene Werth von dem für $n\triangle y$ gefundenen abgezogen wird, der Werth von $\triangle y$ eben so herauskommen, als ihn der S. 293. stehende Satz giebt. Es sey aber z. B. $y = z^2$, so bekommt man

$$n\triangle y = 2nz\triangle z + n^2\triangle z^2, \text{ und}$$

$$(n-1)\triangle y = 2nz\triangle z - 2z\triangle z + n^2\triangle z^2 - 2n\triangle z^2 + \triangle z^2$$

und folglich

$$n\triangle y - (n-1)\triangle y = \triangle y = 2z\triangle z + 2n\triangle z^2 - \triangle z^2,$$

und nach der S. 293. gegebenen Regel findet man

$$\triangle y = 2z\triangle z + \triangle z^2;$$

wie läßt sich dieser Widerspruch heben?“ Ich habe die veränderlichen Größen eingetheilt in veränderliche Größen in engerer Bedeutung, und in Funktionen; und zu jenen die gerechnet, welche man sich nicht anders als Summen ihrer Einheiten gedenken kann. Wenn daher von veränderlichen Größen in engerer Bedeutung die Rede ist: so hat man allerdings ein Recht anzunehmen, daß die Einheiten von jeder derselben einander gleich sind, und daß sich die Einheiten zweyer solcher veränderlichen Größen zu einander eben so als diese Größen selbst verhalten. Es seyen z. B. y und z zwey veränderliche Größen in engerer Bedeutung; so hat sowohl Δy als Δz die Größe, die demselben einmal, obgleich unbestimmter Weise, beygelegt ist, beständig; und wenn $y = az$ ist: so verhält sich $\Delta y : \Delta z = y : z = az : z = a : 1$. Allein, wenn die gegebenen veränderlichen Größen Funktionen sind, so verhält es sich meistens (denn einige sind allerdings ausgenommen, wie z. B., wenn $y = az$ ist) auf eine andere Art. Wollte man nemlich auch die Einheiten oder Bestandtheile der Funktionen einander gleich annehmen, so würde man dadurch die ganze Untersuchung der veränderlichen Größen, als solcher, unmöglich machen, weil man dadurch in der That die gegebenen veränderlichen Größen in beständige verwandelte. Denn es sey $y = x^2$: so ist nothwendiger Weise $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$. Nun sey $y + \Delta y = Y$, und $x + \Delta x = X$: so ist auch $Y = X^2$, und $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^2$; folglich $\Delta y = 2Xdx + \Delta x^2$. Sollte daher $2Xdx + \Delta x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$ seyn, so würde auch $X = x$ seyn müssen, und es könnte demnach x nicht den Werth von X in sich schließen, welches doch seyn muß, wenn x eine veränderliche Größe bleiben soll. Muß man also annehmen, daß die Funktionen veränderlicher Größen nicht immer, oder vielmehr in den wenigsten Fällen, Summen gleicher, sondern ungleicher Bestandtheile sind: so muß man auch, wenn verschiedene, unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende, Bestandtheile derselben allgemein ausgedruckt werden sollen, die Zeichen dazu so einrichten, daß dadurch zugleich die Stelle dieser Bestandtheile angedeutet werde. Dazu ist nun die Eulerische Bezeichnungsart sehr bequem, und sie wird daher, so wenig als wir sie bisher gebraucht haben, so bald man auf den gegenwärtigen Punkt gekommen ist, nothwendig. Es sey also y irgend einer Funktion

von

von z gleich, und y werde $y + n\triangle y$, wenn z in $z + n\triangle z$ verwandelt wird. Ferner sey

$$y + \triangle y = y^{\mathrm{I}};\quad y + 3\triangle y = y^{\mathrm{III}};$$
$$y + 2\triangle y = y^{\mathrm{II}};\quad y + 4\triangle y = y^{\mathrm{IV}};$$
ꝛc.

und $\triangle y = y^{\mathrm{I}} - y$; $\triangle y^{\mathrm{I}} = y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}}$; $\triangle y^{\mathrm{II}} = y^{\mathrm{III}} - y^{\mathrm{II}}$; ꝛc.: so wird man nie versucht werden, so zu schließen, als es in dem angeführten Einwurfe am Ende geschehen ist, sondern vielmehr auf folgende Art: Ist

$$y = z^2;$$

so ist, wenn man den bey y in der Stelle der Exponenten stehenden deutschen Buchstaben eben die Bedeutung giebt, welche vorhin die dabey stehenden römischen Ziefern hatten,

$$y + n\triangle y = y^{\mathfrak{n}} = 2nz\triangle z + n^2\triangle z^2$$
$$y + (n-1)\triangle y = y^{\mathfrak{n}-1} = 2nz\triangle z - 2z\triangle z + n^2\triangle z^2 - 2n\triangle z^2 + \triangle z^2$$
und also
$$y^{\mathfrak{n}} - y^{\mathfrak{n}-1} = \triangle y^{\mathfrak{n}-1} = 2z\triangle z + (2n-1)\triangle z^2;$$

und wem könnte es dabey einfallen, $\triangle y = 2z\triangle z + \triangle z^2$ mit $\triangle y^{\mathfrak{n}-1}$ zu verwechseln?

Angenommen also, daß die Lehre von den Differenzen ganz methodisch vorgetragen werden soll: so scheint es am füglichsten in folgender Ordnung geschehen zu können.

1. Den Anfang muß der Begriff von dieser Lehre machen, so daß dabey der Gegenstand derselben, und die Absicht, in welcher er darin untersucht wird, deutlich und entwickelt angegeben werde.

2. Hierauf muß die Art und Weise folgen, die Einheiten, oder Bestandtheile, oder Differenzen der veränderlichen

chen Größen überhaupt, in so fern man unter jenen endliche Größen versteht, deutlich auszudrucken. Dann muß

3. die Natur der gedachten Bestandtheile oder Differenzen genauer entwickelt, und damit die Beschreibung der übrigen auf diese Entwickelung sich gründenden Methoden, die Differenzen darzustellen, verbunden werden.

4. Ist dieses geschehen, so ist der Weg zur Untersuchung des Verhältnisses der Differenzen gegebener veränderlicher Größen gebahnt, und dadurch auch der Ort dieser Untersuchung bestimmt.

5. Den Beschluß kann endlich die Lehre von dem Gebrauche der Differenzen machen, wofern man nicht lieber die Anleitung dazu bis nach der Lehre von den Summen versparen will.

Da es hier nicht meine Absicht ist, die Lehre von den Differenzen vollständig abzuhandeln, sondern bloß eins und das andere zu berühren, was mir nicht undienlich scheint, Anfänger in der höhern Mathematik, zur eigenen Ueberlegung anzuleiten, (welches bekanntlich durch Vorzeichnung und Vergleichung mehrerer zu Einem Ziele führenden Wege am besten geschehen kann) und zugleich, sie so viel als möglich vor den Schwierigkeiten zu verwahren, die so manche bey der Erlernung der höhern Mathematik finden: so habe ich nicht nöthig, das bis jetzt aus Eulern nicht berührte ebenfalls aus den oben mitgetheilten Hauptsätzen abzuleiten, und dadurch erwähnten Anfängern das Vergnügen zu entziehen, was sie durch die eigene Herleitung desselben sich verschaffen können. Noch weniger kann ich mich entschließen, hier schon die Betrachtungen anzustellen, welche eigentlich

erst

erst in der Lehre von den Differenzialien gebraucht werden. Ich setze also bloß noch einige leichte Anmerkungen über die Lehre von den Summen her.

Zuvörderst fließt der Satz, S. 27, daß

$$y = \Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_{V} + \text{ꝛc.}$$

ist, sehr leicht aus der in diesen Anmerkungen von den veränderlichen Größen gegebenen Vorstellung, wobey Δy^{n} ein allgemeiner Ausdruck für die Einheiten von y ist, und alle vorhergehende Einheiten von y diejenigen werden, welche der V. durch $\Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} +$ ꝛc. ausgedruckt hat.

Zum andern ergeben sich nicht weniger leicht die Regeln, welche bey der Abänderung der S. 28. §. 28. zum Grunde gelegten Formeln befolgt worden sind, aus dem Satze, daß bey den veränderlichen Größen im engern Verstande das Verhältniß ihrer Einheiten dem Verhältniß der Größen selbst gleich sey; und wenn daher Anfängern, wie bisweilen zu geschehen pflegt, die Art zu schließen, welche in dem angeführten §. herrscht, nicht einleuchtend ist, so liegt die Schwierigkeit in nichts als in gewissen dunkeln Vorstellungen.