Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Anmerkungen und Zusätze zum fünften Capitel.

Anmerkungen und Zusätze

zum

fünften Capitel.

Es würde eine sehr überflüssige Sache seyn, die Vortreflichkeit des Ganges, welchen Euler in diesem Capitel genommen, und der Art, wie er darin seinen Gegenstand behandelt hat, zu rühmen, sie giebt sich selbst zu empfinden. Eben so wenig bedarf dieses Capitel, wegen der darin durchaus herrschenden großen Deutlichkeit, Erläuterungen; und ich setze daher bloß zu dem 152sten §. ein Paar Worte hinzu.

Euler setzt darin den Binomischen Lehrsatz, oder daß

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \text{etc.}$$

sey, in der Allgemeinheit voraus, wobey n jede ganze und gebrochene, positive und negative Zahl bedeuten kann. Er hatte dazu ein Recht, ob er gleich selbst die Richtigkeit des gedachten Lehrsatzes, in dem gedachten Umfange, erst geraume Zeit nach der Herausgabe der Differenzial-Rechnung elementarisch bewiesen hat, nemlich im neunzehnten Bande der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften, vom Jahr 1774. (Die Besitzer meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, finden seinen Beweis in dem Anhange zum ersten Theile, unter den Zusätzen zum achten Capitel. S. 460 f.) Will man indeß, so kann man die Erfindung der Differenzialien der Funktionen, die unter die Form x^n gehören, von dem Binomischen Lehrsatze ganz unabhängig machen, und zwar auf folgende Art.

Wenn x eine veränderliche Größe bedeutet, so ist, unabhängig von dem Binomischen Lehrsatze,

$$d.x^2 = 2x\,dx; \text{ und } d.x^3 = 3x^2dx.$$

Ferner läßt sich beweisen, daß wenn, für irgend einen Werth für n, $d.x^n = nx^{n-1}dx$ ist, auch allemal $d.x^{n+1} = (n+1)x^n dx$ sey. Denn es ist

$$x^{n+1} = x^n . x; \text{ also}$$

$$d.x^{n+1} = d.x^n.x = (x^n + nx^{n-1}dx)(x + dx) - x^{n+1}$$

$$=$$

$$x^{n+1} + \left.\begin{matrix} nx^n \\ x^n \end{matrix}\right\} dx + nx^{n-1}dx^2 - x^{n+1}$$

$$=$$

$$(n+1)x^n dx.$$

Nun ist aber aus $d.x^2 = 2x\,dx$, und $d.x^3 = 3x^2dx$ die Formel $d.x^n = nx^{n-1}dx$ wahr für $n = 2$, und $n = 3$; also nach dem geführten Beweise nunmehr auch für $n = 4$; $n = 5$; $n = 6$; $n = 7$; u. s. f. ohne Ende. Hat man auf diese Weise die Richtigkeit der Formel, $d.x^n = nx^{n-1}dx$, für jeden ganzen positiven Werth von n dargethan, so findet man die Richtigkeit derselben für die übrigen Werthe nach der gewöhnlichen und bekannten Methode ebenfalls, ohne den Binomischen Lehrsatz im geringsten zu gebrauchen.

Wenn man daher den Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Binomischen Lehrsatzes mit Hülfe der Differen-

zial-

zial-Rechnung führen will: so ist es nicht einmal nöthig, die Wahrheit dieses Satzes für die ganzen positiven Werthe von n zuvor auf andere Art außer Zweifel zu setzen. Allein die Erfindung der zweyten und folgenden Differenzen von x^n muß bekannt seyn, wenigstens für den Fall, wenn dx beständig ist. Nun findet man nach Regeln, die den Binomischen Lehrsatz gar nicht voraussetzen,

$$d\,.\,x^n = n x^{n-1} dx;\quad d^2\,.\,x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2;$$
$$d^3\,.\,x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Ferner ist klar, daß jederzeit, wenn

$$d^m\,.\,x^n = A x^{n-m} dx^m$$

ist,

$$d^{m+1}\,.\,x^n = (n-m) A x^{n-m-1} dx^{m+1}$$

seyn müsse. Da also die Formel $d^m . x^n = A x^{n-m} dx^m$ wahr ist, wenn man $m = 2$ und $A = n(n-1)$, desgleichen, wenn man $m = 3$, und $A = n(n-1)(n-2)$ setzt: so muß sie auch wahr seyn, wenn man $m = 4$, und $A = n(n-1)(n-2)(n-3)$, desgleichen, wenn man $m = 5$, und $A = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ und überhaupt, wenn man, für jeden Werth von m,

$$A = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots (n-m+1)$$

setzt. Dieses und daß $d^{n+1} . x^n$, wenn dx beständig ist, allemal $= 0$ sey, vorausgesetzt, ist der Beweis des Binomischen Lehrsatzes mit Hülfe der Differenzial-Rechnung folgender. Es sey

$$(1+x)^n = 1 + A^I x + A^{II} x^2 + A^{III} x^3 + \ldots + A^m x^m + A^{m+1} x^{m+1} + \text{ꝛc.}$$

so ist

$$n(1+x)^{n-1} dx = A^I dx + 2A^{II} x\, dx + 3A^{III} x^2 dx + \text{ꝛc.}$$

und daher

$$n(1+x)^{n-1} = A^I + 2A^{II} x + 3A^{III} x^2 + \text{ꝛc.}$$

Soll nun x jeden Werth haben können, so muß dieses alles auch gelten, wenn man $x = 0$ setzt. Und da hiedurch

$n(1^{n-1}) = n = A^{I}$ wird, so erhellet, daß in der angenommenen Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + A^{I}x + A^{II}x^2 + A^{III}x^3 + \ldots + A^{m}x^{m} + A^{m+1}x^{m+1} + \text{ꝛc.}$$

A^{I} nichts anders bedeuten könne als n. Ferner ist

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}dx^2 = 2A^{II}dx^2 + 6A^{III}x\,dx^2 + \text{ꝛc.}$$

oder

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2A^{II} + 6A^{III}x + \text{ꝛc.}$$

und es kann daher aus ähnlichen Gründen, wie vorhin, A^{II} nichts anders als $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ bedeuten. Ueberhaupt aber ist

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(1+x)^{n-m}dx^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1).A^{m}dx^{m} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(1+x)^{n-m} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1).A^{m}$$

und also

$$A^{m} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)m}.$$

Man hat also für die Werthe von A^{I}; A^{II}; A^{III}; ꝛc. in der Formel $(1+x)^n = 1 + A^{I}x + A^{II}x^2 + A^{III}x^3 + \text{ꝛc.}$

$$A^{I} = n$$

$$A^{II} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$A^{III} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$A^{IV} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\vdots$$

$$A^{m} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-1)m}.$$

Inhalt