Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Erstes Capitel. Von der Umformung der Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52909

Erstes Capitel.

Von der Umformung der Reihen.

§. 1.

Da meine Absicht gegenwärtig ist, den Gebrauch der Differenzial-Rechnung sowohl in der gesammten Analysis als in der Lehre von den Reihen zu zeigen: so muß ich noch einiges aus der gemeinen Algebra, welches man in den gewöhnlichen Anleitungen dazu nicht antrifft, vorausschicken. Das meiste findet man zwar in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen, einiges aber ist darin nicht berührt worden, theils mit Vorsatz, weil es besser schien, solches erst da zu untersuchen, wo es gebraucht wird, theils weil nicht alles in der Folge nöthige, zum voraus übersehen werden konnte. Hieher gehört die Umformung der Reihen, welche den Inhalt des gegenwärtigen Capitels ausmachen soll, oder die Verwandlung der Reihen in unzählige andere, die insgesammt dieselbe Summe haben, so daß sich, wenn man die Summe der gegebenen Reihe kennt, auch alle übrige summiren lassen. Nach der Vorausschickung dieses Capitels werden wir die Lehre von den Reihen desto besser durch die Differenzial- und Integral-Rechnung zu erweitern im Stande seyn.

§. 2.

Wir wollen aber vorzüglich solche Reihen betrachten, deren Glieder durch die successiven Potestäten einer unbestimmten Größe multiplicirt sind, indem diese sich am weitesten erstrecken und einen größern Nutzen gewähren.

Es sey also die allgemeine Reihe

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

gegeben, deren Summe wir, sie mag nun bekannt oder unbekannt seyn, durch S bezeichnen wollen, und es sey also

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

Setzt man nun $x = \frac{y}{1 + y}$, wobey man durch den Gebrauch der unendlichen Reihen

$$\begin{array}{lllllll}
x & = y & - y^2 & + y^3 & - y^4 & + y^5 & - y^6 + \text{etc.} \\
x^2 & = y^2 & - 2y^3 & + 3y^4 & - 4y^5 & + 5y^6 & - 6y^7 + \text{etc.} \\
x^3 & = y^3 & - 3y^4 & + 6y^5 & - 10y^6 & + 15y^7 & - 21y^8 + \text{etc.} \\
x^4 & = y^4 & - 4y^5 & + 10y^6 & - 20y^7 & + 35y^8 & - 56y^9 + \text{etc.}
\end{array}$$

erhält: so findet man, wenn man diese Werthe substituirt, und die Reihe nach den Potestäten von y ordnet,

$$\begin{array}{llllll}
S = ay & - ay^2 & + ay^3 & - ay^4 & + ay^5 & \text{etc.} \\
 & + b & - 2b & + 3b & - 4b & \\
 & & + c & - 3c & + 6c & \\
 & & & + d & - 4d & \\
 & & & & + e & {}^{*})
\end{array}$$

§. 3.

*) Man überlege hier nur, wie die Zahl-Coefficienten in den für die Potestäten von x gefundenen Reihen nach und nach aus einander entstehen, so wird man diese ganze Summe aufs gründlichste sich vorzustellen im Stande seyn.

§. 3.

Da wir $x = \frac{y}{1+y}$ gesetzt haben, so ist $y = \frac{x}{1-x}$; und braucht man diesen Werth, so wird die Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

in folgende verwandelt:

$$S = a \cdot \frac{x}{1-x} + (b-a)\frac{x^2}{(1-x)^2} + (c-2b+a)\frac{x^3}{(1-x)^3} + \text{etc.}$$

In dieser Reihe ist der Coefficient des zweyten Gliedes, $b - a$, die erste Differenz von a aus der Reihe $a, b, c, d, e,$ etc. welche wir oben (Th. 1. §. 4) durch Δa bezeichnet haben; ferner der Coefficient des dritten Gliedes, $c - 2b + a$ die zweyte Differenz $\Delta^2 a$, der Coefficient des vierten Gliedes, die dritte Differenz $\Delta^3 a$, u. s. f. *) Gebraucht man daher diese Differenzen von a, so wie man sie nach und nach aus der Reihe $a, b, c, d, e,$ etc. erhält, so wird die gegebene Reihe in folgende verwandelt:

$$S = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \frac{x^4}{(1-x)^4}\Delta^3 a + \text{etc.}$$

deren Summe bekannt ist, sobald man die Summe der gegebenen Reihe kennt. **)

§. 4.

Ist also die Reihe $a, b, c, d,$ etc. so beschaffen, daß ihre Differenzen endlich beständig werden, und dies wird seyn, wenn das allgemeine Glied derselben eine ganze rationale Funktion ist (Th. 1. §. 48.): so hat die Reihe $\frac{x}{1-x}a +$

*) Man vergleiche Th. 1. §. 10.

**) In dem Folgenden wird diese letzte Reihe gebraucht, um die Summe der vorhergehenden zu finden.

$\frac{x^2}{(1-x)^2}\triangle a$ † ꝛc. endlich verschwindende Glieder, und dann ist man im Stande ihre Summe durch einen endlichen Ausdruck auszudrucken. Sind z. B. schon die ersten Differenzen der Reihe a, b, c, d, ꝛc. beständig, so ist die Summe der Reihe

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$=$$
$$\frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\triangle a.$$

Sind hingegen die zweyten Differenzen jener Coefficienten-Reihe beständig, so ist die Summe der gegebenen Reihe =

$$\frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\triangle a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\triangle^2 a.$$

Es lassen sich daher die Summen solcher Reihen aus den Differenzen ihrer Coefficienten sehr leicht finden.

I. Die Summe der Reihe,

$$1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \text{ꝛc.}$$

zu finden.

Es ist

die Reihe $1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 +$ ꝛc.
die 1sten Differ. 2, 2, 2, 2, ꝛc.

Da also die ersten Differenzen beständig sind, so ist die Summe der gegebenen Reihe, weil $a = 1$, $\triangle a = 2$ ist,

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{2xx}{(1-x)^2} = \frac{x+xx}{(1-x)^2}.$$

II. Die Summe der Reihe

$$1x + 4xx + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \text{ꝛc.}$$

zu finden, deren

1ste Differ. 3, 5, 7, 9, ꝛc.
2te Differ. 2, 2, 2, ꝛc. sind.

Da

Da $a = 1$, $\Delta a = 3$, und $\Delta^2 a = 2$ ist, so ist die Summe der gegebenen Reihe =

$$\frac{x}{1-x} + \frac{3xx}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x+xx}{(1-x^3)}.$$

III. Die Summe der Reihe zu finden:

$$S = 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + 259x^6 + \text{rc.}$$

1ste Differ. 11, 25, 45, 71, 103, rc.

2te Differ. 14, 20, 26, 32, rc.

3te Differ. 6, 6, 6, rc.

Da $a = 4$, $\Delta a = 11$, $\Delta^2 a = 14$ und $\Delta^3 a = 6$ ist, so ist

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11xx}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4},$$

oder

$$S = \frac{4x - xx + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1+xx)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

§. 5.

Obgleich auf diese Art die Summen von jenen Reihen nur, in so fern dieselben aus einer unendlichen Menge von Gliedern bestehen, gefunden werden, so läßt sich doch auch die Summation eben dieser Reihen bis auf eine gewisse Anzahl von Gliedern aus eben derselben Quelle ableiten. Ist nemlich die Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots + ox^n$$

gegeben, so suche man ihre Summe, als wenn sie ohne Ende fortliefe, und diese ist

$$= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \text{rc.}$$

Nun betrachte man die Glieder, die auf das letzte ox^n folgen, nemlich

$$px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \text{etc.}$$

Wenn man diese Reihe durch x^n dividirt, so läßt sich ihre Summe nach den vorhergehenden Regeln finden, und dann giebt diese Summe, wieder mit x^n multiplicirt, die gesuchte Summe =

$$\frac{x^{n+1}}{1-x}p + \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2}\Delta p + \frac{x^{n+3}}{(1-x)^3}\Delta^2 p + \text{etc.}$$

Zieht man also diese Summe von der Summe der ersten ohne Ende fortlaufenden Reihe ab, so findet man in der Differenz die Summe des gegebenen Stücks, oder

$$S = \frac{x}{1-x}(a - x^n p) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(\Delta a - x^n \Delta p) +$$
$$\frac{x^3}{(1-x)^3}(\Delta^2 a - x^n \Delta^2 p) + \text{etc.}$$

I. Die Summe der Reihe zu finden:

$$S = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots\ldots + nx^n.$$

Man suche die Differenzen der Coefficienten sowohl dieser als der auf nx^n folgenden Glieder

1, 2, 3, 4, etc.	$n+1$, $n+2$, $n+3$, etc.
1, 1, 1, etc.	1, 1, etc.

Da man auf diese Art $a=1$, $\Delta a = 1$, $p = n+1$, $\Delta p = 1$ findet, so ist die gesuchte Summe

$$S = \frac{x}{1-x}(1 - (n+1)x^n) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(1 - x^n), \text{ oder}$$

$$S = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

II. Die Summe folgender endlichen Reihe zu finden:

$$S = 1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots\ldots + n^2x^n.$$

Man suche zuvörderst die Differenzen auf folgende Art:

1, 4, 9, 16, ꝛc.	$(n+1)^2$, $(n+2)^2$, $(n+3)^2$ + ꝛc.
3, 7, 9,	$2n+3$, $2n+5$,
2, 2,	2,

Hat man diese gefunden, so ist

$$S = \frac{x}{1-x}(1-(n+1)^2x^n) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(3-(2n+3)x^n) + \frac{x^3}{(1-x)^3}(2-2x^n) \text{ oder}$$

$$S = \frac{x+xx-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

§. 6.

Wenn aber die gegebene Reihe nicht solche Coefficienten hat, die endlich auf beständige Differenzen führen, so leistet diese Verwandlung bey der Bestimmung der Summe keinen Vortheil. Auch kann man dabey die Summe durch keine bequemere Näherung erhalten, als solches durch die Addition der gegebenen Reihe selbst geschiehet. Denn wenn in der Reihe $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 +$ ꝛc. $x < 1$ ist, und in diesem Falle findet die Summation im eigentlichen Verstande allein statt, so ist $\frac{x}{1-x} > x$, und es convergirt daher die gefundene Reihe weniger als die gegebene. Ist aber x darin $= 1$, so werden alle Glieder der neuen Reihe unendlich groß, und in diesem Falle ist diese Verwandlung von gar keinem Nutzen.

§. 7.

Wir wenden uns zur Betrachtung solcher Reihen, in welchen die Zeichen + und — mit einander abwechseln, dergleichen man aus den vorhergehenden erhält, wenn man x negativ nimmt. Es sey daher

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{rc.}$$

von welcher Reihe man die entgegengesetzte bekommt, wenn man in der vorhin betrachteten x negativ seyn läßt. Sucht man hier wieder, wie vorhin, die Differenzen $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a$ aus der Reihe a, b, c, d, e, rc., so daß man die Zeichen bloß auf die Potestäten von x bezieht: so wird die Reihe

$$S = \frac{x}{1+x}a - \frac{x^2}{(1+x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3}\Delta^2 a - \frac{x^4}{(1+x)^4}\Delta^3 a + \text{rc.}$$

Man sieht hieraus, daß sich diese Reihen in eben den Fällen summiren lassen, in welchen solches bey den vorhergehenden möglich war, wenn nemlich die Reihe a, b, c, d, rc. endlich zu beständigen Differenzen führt.

§. 8.

In diesem Falle ist aber die gedachte Verwandlung sehr nützlich, um den Werth der gegebenen Reihe durch die Näherung zu finden. Denn wie groß auch x in der Reihe

$$ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{rc.}$$

seyn mag, so ist doch der Bruch $\frac{x}{1+x}$, nach dessen Potestäten die daraus gemachte Reihe fortschreitet, kleiner als die Einheit. Ist z. B. $x = 1$, so ist $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$, und ist $x < 1$, z. B. $x = \frac{1}{n}$, so wird $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, und es convergirt daher die durch die Verwandlung gefundene Reihe immer stärker als die gegebene. Um insbesondere den Fall zu betrachten, wenn $x = 1$ ist, so sey

$$S = a - b + c - d + e - f + \text{rc.}$$

Bezeichnet man hier die ersten, zweyten und folgenden Differenzen, welche die Reihe a, b, c, d, e, rc. giebt, durch Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, rc. so wird

S =

$$S = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta a + \frac{1}{8}\Delta^2 a - \frac{1}{16}\Delta^3 a + \text{etc.}$$

und dadurch erhält man die Summe, wenn sich dieselbe nicht genau darstellen läßt, durch eine hinlänglich bequeme Näherung.

§. 9.

Den Gebrauch dieser letzten Verwandlung, wobey wir $x = 1$ gesetzt haben, wollen wir an einigen Beyspielen zeigen, und zwar zuvörderst an solchen, wo die wahre Summe endlich ausgedruckt werden kann. Dergleichen geben die divergirenden Reihen, bey welchen die Zahlen a, b, c, d, e, etc. endlich zu beständigen Differenzen führen; da aber die Summen derselben, in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes nicht dargestellt werden können, so nehmen wir diese Benennung hier in der ihr oben (Th. 1. Cap. 3. §. 111.) beygelegten Bedeutung, so daß darunter nichts anders verstanden wird, als der Werth des endlichen Ausdrucks, aus dessen Entwickelung die gegebene Reihe entspringt.

I. Es sey also die Leibnitzische Reihe gegeben:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

Da hier alle Glieder einander gleich sind, so werden alle Differenzen $= 0$; und da $a = 1$ ist, so ist $S = \frac{1}{2}$.

II. Es sey die Reihe gegeben:

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.}$$

1ste Differ. $= \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1,$ etc.

Da $a = 1$, und $\Delta a = 1$ ist, so wird $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

III. Es sey die Reihe gegeben:

$$S = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \text{etc.}$$

1ste Differ. $= \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2,$ etc.

Da $a = 1$ und $\Delta a = 2$ ist, so wird $S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$.

IV. Es sey die Reihe der Trigonal-Zahlen gegeben:

$$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \text{rc.}$$

1ste Differ. $= 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$ rc.

2te Differ. $= 1,\ 1,\ 1,\ 1,$ rc.

Da $a = 1$, $\triangle a = 2$ und $\triangle^2 a = 1$ ist, so wird

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}.$$

V. Es sey die Reihe der Quadrat-Zahlen gegeben:

$$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{rc.}$$

1ste Differ. $= 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,$ rc.

2te Differ. $= 2,\ 2,\ 2,\ 2,$ rc.

Da $a = 1$, $\triangle a = 3$ und $\triangle^2 a = 2$ ist, so wird

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{8} = 0.$$

VI. Es sey die Reihe der Biquadrat-Zahlen gegeben:

$$S = 1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \text{rc.}$$

1ste Differ. $= 15,\ 65,\ 175,\ 369,\ 671,$ rc.

2te Differ. $= 50,\ 110,\ 194,\ 302,$ rc.

3te Differ. $= 60,\ 84,\ 108,$ rc.

4te Differ. $= 24,\ 24,$ rc.

Es ist also

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{15}{4} + \tfrac{50}{8} - \tfrac{60}{16} + \tfrac{24}{32} = 0.$$

§. 10.

Wenn die Reihen stärker divergiren, wie z. B. die geometrischen und andere ihnen ähnliche, so kann man dieselben auf diese Art sogleich in mehr convergirende Reihen verwandeln, und wenn diese neuen Reihen noch nicht stark genug convergiren, so kann man daraus durch Wiederholung der Verwandlung noch stärker convergirende Reihen finden.

I. Es sey die geometrische Reihe gegeben:

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{rc.}$$

1ste

1ste Differ. = 1, 2, 4, 8, 16, ꝛc.
2te Differ. = 1, 2, 4, 8, ꝛc.
3te Differ. = 1, 2, 4, ꝛc.

Da das erste Glied aller dieser Differenzen $= 1$ ist, so ist die Summe der gegebenen Reihe

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \text{ꝛc.}$$

wovon die Summe $= \frac{1}{3}$ ist. Denn es entspringt diese letzte Reihe aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{2+1}$, da hingegen die gegebene aus dem Bruche $\frac{1}{1+2}$ entsteht.

II. Es sey die wiederkehrende Reihe gegeben:

$$S = 1 - 2 + 5 - 12 + 29 - 70 + 169 - \text{ꝛc.}$$

1ste Differ. = 1, 3, 7, 17, 41, 99, ꝛc.
2te Differ. = 2, 4, 10, 24, 58, ꝛc.
3te Differ. = 2, 6, 14, 34, ꝛc.
4te Differ. = 4, 8, 20, ꝛc.
5te Differ. = 4, 12, ꝛc.
6te Differ. = 8, ꝛc.

Es formiren also die hier nach und nach gefundenen Differenzen folgende geometrische Progression mit doppelten Gliedern:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, ꝛc.

und es ist daher

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{8} - \tfrac{2}{16} + \tfrac{4}{32} - \tfrac{4}{64} + \tfrac{8}{128} - \text{ꝛc.}$$

oder, weil sich außer dem ersten Gliede jede zwey folgende Glieder aufheben, $S = \frac{1}{2}$. Es entspringt aber die gegebene Reihe aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2}$, wie

wir

wir bey der Erklärung der Natur der wiederkehrenden Reihen gezeigt haben. *)

III. Es sey die hypergeometrische Reihe gegeben:

$$S = 1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + 5040 - \text{etc.}$$

deren Differenzen am leichtesten auf folgende Art aufgesucht werden können.

	1ste Diff.	2te Diff.	3te Diff.
1	1	3	11
2	4	14	64
6	18	78	426
24	96	504	3216 ꝛc.
120	600	3720	27240
720	4320	30960	256320
5040	35280	287280	2656080
40320	322560	2943360	
362880	3265920		
3628800			

Setzt man diese Differenzen weiter fort, so findet man

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \frac{16687}{256}$$
$$+ \frac{148329}{572} - \frac{1468457}{1024} + \frac{16019531}{2048} - \frac{190899411}{4096} + \text{etc.}$$

Zieht man die beyden ersten Glieder zusammen, so wird $S = \frac{1}{4} + A$, wenn

A =

*) Von den wiederkehrenden Reihen handelt Euler in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen im 5ten und 13ten Capitel des 1sten Theils. Von der hier gegebenen wiederkehrenden Reihe findet man nach einer kurzen Ueberlegung, daß die Beziehungs-Scale — 2, + 1, ist, und hat man diese entdeckt, so ist auch der Bruch bekannt, aus dessen Entwickelung die Reihe entspringt.

$$A = \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \text{ꝛc.}$$

ist. Sucht man nun von neuem auf eben die Art die Differenzen, so wird

$$A = \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^6} + \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \frac{615}{2^{12}} - \frac{4401}{2^{14}} + \frac{36585}{2^{16}}$$
$$- \frac{342207}{2^{18}} + \frac{3565323}{2^{20}} - \frac{40866525}{2^{22}} + \text{ꝛc.}$$

Vereiniget man abermals die beyden ersten Glieder, weil sie convergiren, so wird

$$A = \frac{7}{2^6} + B, \text{ wenn } B = \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \text{ꝛc. ist.}$$

Nimmt man aber auch von dieser Reihe die Differenzen, so wird

$$B = \frac{21}{2^9} - \frac{15}{2^{12}} + \frac{159}{2^{15}} - \frac{429}{2^{18}} + \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}}$$
$$+ \frac{338835}{2^{27}} - \frac{2771097}{2^{30}} + \text{ꝛc.}$$

Zieht man hier die vier ersten Glieder in eine Summe zusammen, und setzt man $B = \frac{153}{2^{12}} + \frac{843}{2^{18}} + C$, so daß $C = \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} + \text{ꝛc.}$ ist, so findet man bey wirklicher Vereinigung etlicher Glieder $C = \frac{15645}{2^{24}} - \frac{60417}{2^{30}}$, und hieraus schließt man endlich auf die Summe der gegebenen Reihe, welche auf diese Art $S = 0,40082038$ wird. Da indeß die Reihe so außerordentlich divergirt, so kann man davon kaum 3 oder 4 Ziffern als genau ansehen; aber ausgemacht ist, daß diese Summe zu klein ist. Ich habe nemlich auf andern Wegen dieselbe $= 0,4036524077$ herausgebracht, und hier ist selbst die letzte Zifer noch richtig.

§. 11.

§. 11.

Vorzüglich groß ist aber der Nutzen dieser Verwandlung, wenn Reihen, die langsam convergiren, in schneller convergirende verwandelt werden sollen. Da indeß in diesem Falle die folgenden Glieder kleiner sind als die vorhergehenden, so werden die ersten Differenzen negativ, daher man denn bey den folgenden auf die Zeichen sorgfältig Rücksicht zu nehmen hat.

I. Es sey die Reihe gegeben:

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

$$\text{1ste Diff.} = -\tfrac{1}{2};\ -\frac{1}{2.3};\ -\frac{1}{3.4};\ -\frac{1}{4.5};\ -\frac{1}{5.6}$$

$$\text{2te Diff.} = +\tfrac{1}{3};\quad \frac{2}{2.3.4};\ \frac{2}{3.4.5};\ \frac{2}{4.5.6};$$

$$\text{3te Diff.} = -\tfrac{1}{4};\quad -\frac{2.3}{2.3.4.5};\ -\frac{2.3}{3.4.5.6}$$

$$\text{4te Diff.} = \quad +\tfrac{1}{5};\ \text{etc.}$$

Hiernach ist also

$$S = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \text{etc.}$$

und von beyden Reihen ist bereits in der Einleitung gezeigt worden, daß sie den hyperbolischen Logarithmen von 2 geben. *)

II. Es

*) Daß $l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$ ist, läßt sich aus $l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$ (Einl. Th. 1. §. 123.) herleiten; daß aber $l2 = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \text{etc.}$ erinnere ich mich, wenigstens jetzt nicht, in der Einleitung gelesen zu haben.

II. Es sey die Reihe für den Zirkel (Einl. Th. 1. §. 140.) gegeben.

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{ꝛc.}$$

$$\text{1ste Diff.} = -\frac{2}{1.3};\ -\frac{2}{3.5};\ -\frac{2}{5.7};\ -\frac{2}{7.9};\ -\frac{2}{9.11};\ \text{ꝛc.}$$

$$\text{2te Diff.} = +\frac{2.4}{1.3.5};\ \frac{2.4}{3.5.7};\ \frac{2.4}{5.7.9};\ \frac{2.4}{7.9.11};\ \text{ꝛc.}$$

$$\text{3te Diff.} = -\frac{2.4.6}{1.3.5.7};\ -\frac{2.4.6}{3.5.7.9};\ - \text{ꝛc.}$$

Hieraus folgt also

$$S = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1.2}{3.5.2} + \frac{1.2.3}{3.5.7.2} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$2S = 1 + \tfrac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \text{ꝛc.}$$

III. Den Werth der unendlichen Reihe zu finden:

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + l6 - l7 + l8 - l9 + \text{ꝛc.}$$

Da die Differenzen im Anfange gar zu ungleich sind, so vereinige man die ersten Glieder bis zu $l10$ aus den Tafeln, wodurch man $-0{,}3911005$ findet, und also

$$S = -0{,}3911005 + l10 - l11 + l12 - l13 + l14 - l15 + \text{ꝛc.}$$

bekömmt. Nun nehme man diese Logarithmen aus den Tafeln, und suche ihre Differenzen auf folgende Art:

	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.	5. Diff.
$l10 = 1{,}0000000$	+	−	+	−	+
$l11 = 1{,}0413927$	413927				
$l12 = 1{,}0791812$	377885	36042	5779		
$l13 = 1{,}1139434$	347622	30263	4487	1292	368
$l14 = 1{,}1461280$	321846	25776	3563	924	
$l15 = 1{,}1760913$	299633	22213			

Hieraus findet man

$$l10 - l11 + l12 - l13 + \text{2c.} = \frac{1,0000000}{2} - \frac{413927}{4} -$$

$$\frac{36042}{8} - \frac{5779}{16} - \frac{1292}{32} - \frac{368}{64} = 0,4891606$$

und es ist daher die Summe der gegebenen Reihe

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + \text{2c.} = 0,0980601 = l1,253315.$$

§. 12.

So wie wir diese Verwandlungen dadurch zu Stande gebracht haben, daß wir in der gegebenen Reihe für x den Bruch $\frac{y}{1 \pm y}$ setzten: so giebt es noch unzählige andere Verwandlungen, wenn anstatt x andere Funktionen von y gesetzt werden. Es sey abermals die Reihe:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{2c.}$$

gegeben. Setzt man darin $x = y(1 - y)$, so erhält man dafür

$$\begin{array}{llllll} S = ay & - ayy & & & & \\ & + byy & - 2by^3 & + by^4 & & \\ & & + cy^3 & - 3cy^4 & + 3cy^5 & - cy^6 \\ & & & + dy^4 & - 4dy^5 & + 6dy^6 \\ & & & & + ey^5 & - 5ey^6 \\ & & & & & + fy^6 \end{array} \text{2c.}$$

Läßt sich nun eine von diesen Reihen summiren, so läßt sich auch die Summe der andern finden. Ist z. B.

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{2c.} = \frac{x}{1 - x},$$

so wird

$$S = y - y^3 - y^4 + y^6 + y^7 - y^9 - y^{10} + \text{2c.}$$

und die Summe dieser Reihe ist $= \frac{y - yy}{1 - y + yy}$.

§. 13.

Bricht die andere Reihe irgendwo ab, so läßt sich die Summe der ersten Reihe absolut ausdrucken. Angenommen daß $a = 1$ sey, und daß in der gefundenen Reihe alle Glieder nach dem ersten verschwinden, so daß $S = y$ werde; so wird, weil $x = y - yy$ ist, die Summe der ersten Reihe $= \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$.

Da aber $a = 1$ ist, so wird

$$b = 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2$$

$$c = 2 = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot 2^4$$

$$d = 5 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 2^6$$

$$e = 14 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot 2^8$$

$$f = 42 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot 2^{10}$$

$$g = 132 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \cdot 2^{12} \text{ rc.}$$

und hierdurch verwandelt sich die erste Reihe in folgende:

$$S = \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)} = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + 132x^7 + \text{rc.}$$

Eben diese Reihe findet man auch, wenn man die Wurzel-Größe $\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ in eine Reihe auflöset, und diese von $\frac{1}{2}$ abzieht.

§. 14.

Um dieser Verwandlung einen desto größern Umfang zu geben, so sey $x = y(1 + ny)^\nu$, wodurch die gegebene Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{rc.}$$

in folgende verwandelt wird:

$$\begin{array}{llllll}
S = ay & + \frac{\nu}{1} nay^2 & + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} n^2ay^3 & + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} n^3ay^4 & + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4} n^4ay^5 \\
 & + by^2 & + \frac{2\nu}{1} nby^3 & + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1.2} n^2by^4 & + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)}{1.2.3} n^3by^5 \\
 & & + cy^3 & + \frac{3\nu}{1} ncy^4 & + \frac{3\nu(3\nu-1)}{1.2} n^2cy^5 \\
 & & & + dy^4 & + \frac{4\nu}{1} ndy^5 \\
 & & & & + ey^5 \\
 & & & & \text{ꝛc.}
\end{array}$$

Wenn also die Summe von jener Reihe bekannt ist, so kennt man auch die Summe von dieser, und umgekehrt. Da aber n und ν nach Belieben angenommen werden können, so lassen sich aus dieser einzigen Reihe unzählige andere summirbare Reihen finden.

§. 15.

Es können die Verwandlungen aber auch auf eine solche Art unternommen werden, daß die Summe der gefundenen Reihe irrational wird. Es sey die Reihe gegeben:

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + fx^{11} + \text{ꝛc.}$$

wo folglich

$$Sx = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ex^{10} + fx^{12} + \text{ꝛc.}$$

wird. Setzt man daher

$$x = \frac{y}{\sqrt{(1-nyy)}}, \text{ so wird } xx = \frac{y^2}{1-nyy},$$

und die gegebene Reihe wird in folgende verwandelt:

$$\frac{Sy}{\sqrt{(1-nyy)}} =$$

$$\begin{array}{l} ay^2 + nay^4 + n^2ay^6 + n^3ay^8 + n^4ay^{10} + \text{ꝛc.} \\ \quad + by^4 + 2nby^6 + 3n^2by^8 + 4n^3by^{10} + \text{ꝛc.} \\ \qquad + cy^6 + 3ncy^8 + 6n^2cy^{10} + \text{ꝛc.} \\ \qquad\quad + dy^8 + 4ndy^{10} + \text{ꝛc.} \\ \qquad\qquad + ey^{10} + \text{ꝛc.} \end{array}$$

Wenn also die Summe S aus der ersten Reihe bekannt ist, so kennt man zugleich die Summe der folgenden Reihe:

$$\frac{S}{\sqrt{(1-nyy)}} =$$
$$ay + (na+b)y^3 + (n^2a + 2nb + c)y^5 + (n^3a + 3n^2b + 3nc + d)y^7 + \text{ꝛc.}$$

§. 16.

Wenn man $n = -1$ nimmt, so werden die Coefficienten dieser Reihe die Differenzen von a, aus der Reihe a, b, c, d, ꝛc.; wenn aber die Zeichen in der gegebenen Reihe abwechseln, so werden die Coefficienten diese Differenzen, wenn man $n = 1$ setzt. Bedeuten also Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, $\Delta^4 a$, ꝛc. die Differenzen von a aus der Zahlen-Reihe a, b, c, d, e, ꝛc. und ist

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn man $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$ nimmt,

$$\frac{S}{\sqrt{(1+yy)}} = ay + \Delta a . y^3 + \Delta^2 a . y^5 + \Delta^3 a . y^7 + \text{ꝛc.}$$

Ist hingegen

$$S = ax - bx^3 + cx^5 - dx^7 + ex^9 - \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn man $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$ setzt,

$$\frac{S}{\sqrt{(1-yy)}} = ay - \Delta a . y^3 + \Delta^2 a . y^5 - \Delta^3 a . y^7 + \text{ꝛc.}$$

Wenn also die Reihe a, b, c, d, e, ꝛc. endlich auf beständige Differenzen führt, so kann jede dieser Reihen absolut summirt werden; indeß fließt diese Summation auch aus dem Obigen.

§. 17.

Wenn die Coefficienten a, b, c, d, e, ꝛc. diese Reihe: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, ꝛc. bilden, so ist, wie wir vorhin (§. 11.) gesehen haben, $a = 1$, $\Delta a = -\frac{2}{3}$; $\Delta^2 a = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$; $\Delta^3 a = -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}$; ꝛc. Hieraus ergiebt sich die Summation folgender beyden Reihen

I. Es sey $S = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 +$ ꝛc., wo also $S = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$ ist. Setzt man $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$, so wird

$$S = \tfrac{1}{2} l \frac{\sqrt{(1+yy)}+y}{\sqrt{(1+yy)}-y} = l(\sqrt{(1+yy)}+y),$$

und es ist also

$$\frac{l(\sqrt{(1+yy)}+y)}{\sqrt{(1+yy)}} = y - \tfrac{2}{3}y^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}y^5 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}y^7 + \text{ꝛc.}$$

II. Es sey $S = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 +$ ꝛc., wo folglich $S = A.\,\text{tang}.\,x$ ist. Setzt man $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$ so wird

$$S = A.\,\text{tang}.\,\frac{y}{\sqrt{(1-yy)}} = A\,\text{sin}.\,y = A\,\text{cos}.\,\sqrt{(1-yy)}.$$

Folglich hat man hier folgende Summation:

$$\frac{A\,\text{sin}.\,y}{\sqrt{(1-yy)}} = y + \tfrac{2}{3}y^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}y^5 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}y^7 + \text{ꝛc.}$$

§. 18.

Es können auch für x transcendente Funktionen von y gesetzt, und dadurch andere schwerer zu findende Summationen hergeleitet werden. Damit aber die neuen Reihen nicht gar zu zusammengesetzt werden, so muß man solche Funktionen wählen, deren Potestäten leicht dargestellt werden können, dergleichen die Exponential-Größen e^y sind. Ist also die Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{etc.}$$

gegeben, und setzt man $x = e^{ny}y$, so daß e die Zahl bedeute, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist, so wird

$$x^2 = e^{2ny}y^2; \quad x^3 = e^{3ny}y^3; \text{ u. s. w.}$$

Da nun, wie bekannt, (Einl. Th. 1. §. 123.) überhaupt

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

ist, so wird die gegebene Reihe in folgende verwandelt:

$$\begin{array}{rlllll}
S = ay & + 1nay^2 & + \frac{1}{2}n^2ay^3 & + \frac{1}{6}n^3ay^4 & + \frac{1}{24}n^4ay^5 & + \text{etc.} \\
& + by^2 & + \frac{2}{1}nby^3 & + \frac{4}{2}n^2by^4 & + \frac{8}{6}n^3by^5 & + \text{etc.} \\
& & + cy^3 & + \frac{3}{1}ncy^4 & + \frac{9}{2}n^2cy^5 & + \text{etc.} \\
& & & + dy^4 & + \frac{4}{1}ndy^5 & + \text{etc.} \\
& & & & + ey^5 & + \text{etc.}
\end{array}$$

I. Es sey die geometrische Reihe

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{etc.}$$

gegeben, wo $S = \frac{x}{1 - x}$ ist. Setzt man $n = -1$, so daß $x = e^{-y}y$, und $S = \frac{e^{-y}y}{1 - e^{-y}y} = \frac{y}{e^y - y}$ wird: so findet man die Summe

$$\frac{y}{e^y - y} = y - \tfrac{1}{2}y^3 - \tfrac{1}{6}y^4 + \tfrac{5}{24}y^5 + \tfrac{19}{120}y^6 - \text{etc.}$$

allein das Gesetz derselben läßt sich nicht erkennen.

II. Wenn in der vorhin gefundenen zweyten Reihe alle Glieder außer dem ersten $= 0$ sind, so ist $b = -na$; $c = \frac{3}{2}n^2a$; $d = -\frac{8}{3}n^3a$; $e = \frac{125}{24}n^4a$; $f = -\frac{29}{30}n^5a$; ꝛc. Da also $S = ay$, und $x = e^{ny}$ ist, so wird

$$y = x - nx^2 + \frac{3}{2}n^2x^3 - \frac{8}{3}n^3x^4 + \frac{125}{24}n^4x^5 - \frac{29}{30}n^5x^6 + \text{ꝛc.}$$

Da indeß bey diesen Reihen das Gesetz der Fortschreitung nicht in die Augen fällt, so haben die Summationen, die aus dieser Substitution abgeleitet werden, keinen sonderlichen Nutzen. Vorzüglich aber verdienen die Verwandlungen bemerkt zu werden, die auf der Substitution $x = \frac{y}{1 \pm y}$ beruhen, indem diese nicht bloß sehr merkwürdige Summationen, sondern auch sehr gute Wege an die Hand geben, die Summen der Reihen durch die Näherung zu finden. Nachdem wir dieses, ohne dabey die Differenzial-Rechnung zu gebrauchen, vorausgeschickt haben; so wollen wir uns nun zur Erklärung des Gebrauchs dieser Rechnung in der Lehre von den Reihen wenden.

Zwey-