Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Zweytes Capitel. Von der Erfindung summirbarer Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52909

Zweytes Capitel.

Von der Erfindung summirbarer Reihen.

§. 19.

Wenn man die Summe einer Reihe kennt, deren Glieder eine unbestimmte Größe x enthalten, in welchem Falle die gedachte Summe nothwendig eine Funktion von x ist: so kann man diese Summe auch für jeden Werth von x angeben. Wenn man daher $x + dx$ für x setzt, so ist die Summe der daraus entspringenden Reihe gleich der Summe der ersten Reihe nebst ihrem Differenziale, und folglich das Differenzial der Summe auch gleich dem Differenziale der Reihe. Da aber auf diese Art sowohl die Summe als die Glieder der Reihe insgesammt durch dx multiplicirt sind, so findet man, wenn man allenthalben durch dx dividirt, eine neue Reihe, deren Summe bekannt ist. Eben so entsteht, wenn man diese Reihe mit ihrer Summe von neuem differenziirt, und darauf abermals allenthalben durch dx dividirt, wieder eine neue Reihe mit ihrer Summe; und auf diese Weise kann man aus einer summirbaren Reihe, welche die unbestimmte Größe x enthält, durch eine fortgesetzte Differenziation unzählige neue summirbare Reihen erhalten.

§. 20.

Damit dies deutlicher werde, sey folgende unbestimmte geometrische Reihe gegeben, deren Summe bekannt ist:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{etc.}$$

Differenziirt man hier, so findet man

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = dx + 2x\,dx + 3x^2dx + 4x^3dx + 5x^4dx + \text{etc.}$$

und dividirt man nunmehr durch dx, so wird

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \text{etc.}$$

Differenziirt man nun abermals, und dividirt darauf wieder durch dx, so wird

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + 5.6x^4 + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten die Trigonal-Zahlen sind. Differenziirt man nochmals, und dividirt darauf durch $3dx$, so findet man

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten die ersten Pyramidal-Zahlen sind. Fährt man auf diesem Wege weiter fort, so findet man überhaupt die Reihen, die aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{(1-x)^n}$ entspringen.

§. 21.

§. 21.

Es erhält aber diese Erfindung der Reihen einen viel größern Umfang, wenn man jedesmal vor der Differenziation sowohl die Reihe als die Summe durch irgend eine Potestät oder Funktion von x multiplicirt. So multiplicire man, da

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ꝛc.}$$

ist, allenthalben durch x^m, wodurch

$$\frac{x^m}{1-x} = x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} + x^{m+4} + \text{ꝛc.}$$

wird. Differenziirt man nunmehr und dividirt darauf durch dx, so wird

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)x^m}{(1-x)^2} = mx^{m-1} + (m+1)x^m + (m+2)x^{m+1}$$
$$+ (m+3)x^{m+2} + \text{ꝛc.}$$

und dividirt man dieses durch x^{m-1}, so erhält man

$$\frac{m-(m-1)x}{(1-x)^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x + (m+2)x^2$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Nun multiplicire man, ehe man wieder differenziirt, durch x^n, so daß

$$\frac{mx^n}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} = mx^n + (m+1)x^{n+1} + (m+2)x^{n+2} + \text{ꝛc.}$$

werde. Dann differenziire man und dividire durch dx, so kommt

$$\frac{mnx^{n-1}}{1-x} + \frac{(m+n+1)x^n}{(1-x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1-x)^3} = mnx^{n-1} + (m+1)(n+1)x^n$$
$$+ (m+2)(n+2)x^{n+1} + \text{ꝛc.}$$

Dividirt man nun durch x^{n-1} so wird

$$\frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2xx}{(1-x)^3} = mn + (m+1)(n+1)x$$
$$+ (m+2)(n+2)x^2 + \text{ꝛc.}$$

Auf

Auf diese Art kann man nach Gefallen weiter fortgehen. Man findet aber allemal die Reihen, die aus der Entwickelung der Brüche, welche die Summe darstellen, entspringen.

§. 22.

Da von der zu Anfange angenommenen geometrischen Reihe jede bestimmte Anzahl von Gliedern summirt werden kann, so lassen sich auf diese Art auch aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehende Reihen summiren. So wird, da

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots + x^n$$

ist, wenn man differenzirt und darauf durch dx dividirt,

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Hieraus lassen sich die Summen der Potestäten der natürlichen Zahlen bis zu jedem Gliede finden. Man multiplicire nemlich diese Reihe durch x, so daß

$$\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots + nx^n$$

werde. Differenzirt man nun, und dividirt durch dx, so wird

$$\frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2nn + 2n - 1)x^{n+1} - nnx^{n+2}}{(1-x)^3} = 1$$

$$+ 4x + 9x^2 + 16x^3 + \ldots\ldots + n^2x^{n-1}$$

und dieses, mit x multiplicirt, giebt,

$$\frac{x + x^2 - (n+1)^2x^{n+1} + (2nn + 2n - 1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1-x)^3} =$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots\ldots + n^2x^n.$$

Differenzirt man abermals und dividirt durch dx, so erhält man durch eine darauf angenommene Multiplication durch x die Reihe

$$x + 8x^2 + 27x^3 + \ldots\ldots n^3x^n$$

deren

deren Summe folglich gefunden werden kann. Aus dieser Reihe findet man aber auf eine ähnliche Art die Summe der Biquadrate und der höhern Potestäten.

§. 23.

Diese Methode läßt sich auf alle eine unbestimmte Größe enthaltenden Reihen anwenden, deren Summen bekannt sind. Da nun diese Eigenschaft außer den geometrischen Reihen auch allen wiederkehrenden Reihen zukommt, und dieselben nicht bloß, wenn sie ohne Ende fortlaufen, sondern auch bis zu jedem bestimmten Gliede summirt werden können: so lassen sich aus ihnen nach dieser Methode unzählige andere summirbare Reihen finden. Da es uns viel zu weit führen würde, wenn wir dieses ausführlich zeigen wollten, so wollen wir nur einen einzigen Fall erwägen. Ist nemlich die Reihe

$$\frac{x}{1-x-xx} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \text{etc.}$$

gegeben, so findet man durch die Differenziation und die Division durch dx

$$\frac{1+xx}{(1-x-xx)^2} = 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 25x^4 + 48x^5 + 91x^6 + \text{etc.}$$

Es ist aber dabey leicht einzusehen, daß alle auf diese Art entstehende Reihen ebenfalls wiederkehrende Reihen seyn werden, so daß man die Summe derselben selbst durch die Betrachtung ihrer Natur zu finden im Stande ist.

§. 24.

Ueberhaupt also kann man, wenn die Summe irgend einer unter dieser Form

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

begrif-

begriffenen Reihe, welche wir $= S$ setzen wollen, bekannt ist, auch allemal die Summe eben dieser Reihe finden, nachdem die einzeln Glieder derselben durch die Glieder einer arithmetischen Progression multiplicirt worden sind. Denn es sey die Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$

gegeben. Multiplicirt man dieselbe durch x^m, so findet man daraus

$$Sx^m = ax^{m+1} + bx^{m+2} + cx^{m+3} + dx^{m+4} + \text{ꝛc.}$$

und differenzirt man dieses und dividirt darauf durch dx, so wird

$$mSx^{m-1} + x^m \frac{dS}{dx} = (m+1)ax^m + (m+2)bx^{m+1} + (m+3)cx^{m+2} + \text{ꝛc.}$$

so wie hieraus durch die Division durch x^{m-1}

$$mS + \frac{xdS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \text{ꝛc.}$$

Wird also die Summe folgender Reihe verlangt:

$$\alpha ax + (\alpha+\beta)bx^2 + (\alpha+2\beta)cx^3 + (\alpha+3\beta)dx^4 + \text{ꝛc.}$$

so multiplicire man die vorhergehende Reihe durch β, und setze $m\beta + \beta = \alpha$, so daß $m = \frac{\alpha-\beta}{\beta}$ werde. Alsdann ist die Summe dieser Reihe

$$= (\alpha-\beta)S + \frac{\beta x dS}{dx}.$$

§. 25.

Es kann auch die Summe der gegebenen Reihe gefunden werden, wenn die einzelnen Glieder durch die Glieder einer Reihe der zweyten Ordnung, deren zweyte Differenzen also beständig sind, multiplicirt werden. Denn da wir bereits

$$mS + \frac{x\,dS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \text{etc.}$$

gefunden haben, so erhält man hieraus, wenn man mit x^n multiplicirt,

$$mSx^n + \frac{x^{n+1}dS}{dx} = (m+1)ax^{n+1} + (m+2)bx^{n+2} + (m+3)cx^{n+3} + \text{etc.}$$

so wie hieraus, wenn man differenziirt und durch dx dividirt,

$$mnSx^{n-1} + \frac{(m+n+1)x^n dS}{dx} + \frac{x^{n+1}ddS}{dx^2} = (m+1)(n+1)ax^n + (m+2)(n+2)bx^{n+1} + \text{etc.}$$

Dividirt man diese Gleichung durch x^{n-1}, und multiplicirt darauf durch k, so wird

$$mnkS + \frac{(m+n+1)kx\,dS}{dx} + \frac{kx^2ddS}{dx^2} = (m+1)(n+1)kax + (m+2)(n+2)kbx^2 + (m+3)(n+3)cx^3 + \text{etc.}$$

Nun vergleiche man diese Reihe mit der vorhergehenden, so wird:

$$\begin{array}{l|l|l}
 & \text{1ste Differ.} & \text{2te Diff.} \\
kmn+km+kn+k=\alpha & & \\
kmn+2km+2kn+4k=\alpha+\beta & km+kn+3k=\beta & \\
 & & 2k=\gamma. \\
kmn+3km+3kn+9k=\alpha+2\beta+\gamma & km+kn+5k=\beta+\gamma &
\end{array}$$

Hieraus fließt $k = \frac{1}{2}\gamma$; $m+n = \frac{2\beta}{\gamma} - 3$; und

$$mn = \frac{\alpha}{k} - m - n - 1 = \frac{2\alpha}{\gamma} - \frac{2\beta}{\gamma} + 2 = \frac{2(\alpha-\beta+\gamma)}{\gamma},$$

und es ist demnach die gesuchte Summe

$$(\alpha-\beta+\gamma)S + \frac{(\beta-\gamma)x\,dS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2}.$$

§. 26.

§. 26.

Auf ähnliche Art läßt sich auch die Summe der Reihe

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \text{etc.}$$

finden, wenn die Summe S dieser Reihe

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}$$

bekannt ist, und A, B, C, D, etc. eine Reihe formiren, deren Differenzen endlich beständig werden. Denn da die Form der Summe aus dem Vorhergehenden geschlossen werden kann, so setze man sie

$$\alpha S + \frac{\beta x dS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} + \frac{\delta x^3 d^3S}{6dx^3} + \frac{\varepsilon x^4 d^4S}{24dx^4} + \text{etc.}$$

Ferner entwickele man, um die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. zu finden, jede dieser Reihen. Dadurch wird

$$\begin{aligned}
\alpha S &= \alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 + \alpha dx^3 + \alpha ex^4 + \text{etc.}\\
\frac{\beta x dS}{dx} &= + \beta bx + 2\beta cx^2 + 3\beta dx^3 + 4\beta ex^4 + \text{etc.}\\
\frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} &= \gamma cx^2 + 3\gamma dx^3 + 6\gamma ex^4 + \text{etc.}\\
\frac{\delta x^3 d^3S}{6dx^3} &= \delta dx^3 + 4\delta ex^4 + \text{etc.}\\
\frac{\varepsilon x^4 d^4S}{24dx^4} &= \varepsilon ex^4 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Vergleicht man nun alles dieses mit der gegebenen Reihe:

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \text{etc.}$$

so findet man durch die Vergleichung der einzelnen Glieder

$$\begin{aligned}
\alpha &= A\\
\beta &= B - \alpha = B - A\\
\gamma &= C - 2\beta - \alpha = C - 2B + A\\
\delta &= D - 3\gamma - 3\beta - \alpha = D - 3C + 3B - A\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nach-

Nachdem man diese Werthe gefunden, ist die gesuchte Summe

$$Z = AS + \frac{(B - A)xdS}{1 . dx} + \frac{(C - 2B + A)x^2ddS}{1 . 2dx^2} + \frac{(D - 3C + 3B - A)x^3d^3S}{1 . 2 . 3dx^3} + \text{2c.}$$

oder, wenn man die Differenzen der Reihe A, B, C, D, 2c. auf die gewöhnliche Art ausdruckt,

$$Z = AS + \frac{\Delta A . xdS}{1dx} + \frac{\Delta^2 A . x^2d^2S}{1.2dx^2} + \frac{\Delta^3 A . x^3d^3S}{1.2.3dx^3} + \text{2c.}$$

wenn nemlich, wie wir angenommen haben,

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{2c.}$$

ist. Wenn also die Differenzen der Reihe A, B, C, D, E, 2c. endlich beständig werden, so kann man die Summe der Reihe Z durch einen endlichen Ausdruck darstellen.

§. 27.

Da, wenn e die Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithme = 1 ist,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{2c.}$$

ist, so nehme man diese Reihe statt der vorigen. Da nun $S = e^x$ ist, so ist auch $\frac{dS}{dx} = e^x$, $\frac{ddS}{dx^2} = e^x$; u. s. f. (Th. 1. Cap. 7. §. 188.) Es läßt sich daher die Summe der Reihe

$$A + Bx + \frac{Cx^2}{1.2} + \frac{Dx^3}{1.2.3} + \frac{Ex^4}{1.2.3.4} + \text{2c.}$$

welche aus jener Reihe und aus der Reihe A, B, C, D, 2c. zusammengesetzt ist, auf diese Art ausdrucken:

$$e^x(A + \frac{x\Delta A}{1} + \frac{xx\Delta^2 A}{1.2} + \frac{x^3\Delta^3 A}{1.2.3} + \frac{x^4\Delta^4 A}{1.2.3.4} + \text{2c.}$$

ausdrucken.

Ist z. B. die Reihe

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

gegeben, so ist aus

$$\begin{array}{lllllll} \text{der Reihe } & A, & B, & C, & D, & E, & \text{etc.} \\ A = & 2, & 5, & 10, & 17, & 26, & \text{etc.} \\ \triangle A = & & 3, & 5, & 7, & 9, & \text{etc.} \\ \triangle^2 A = & & & 2, & 2, & 2, & \text{etc.} \end{array}$$

und also die Summe der Reihe

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

$$=$$

$$e^x(2 + 3x + xx) = e^x(1 + x)(2 + x).$$

Dieses ist aber auch von selbst klar, denn es ist

$$2e^x = 2 + \frac{2x}{1} + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^4}{24} + \text{etc.}$$

$$3xe^x = 3x + \frac{3x^2}{1} + \frac{3x^3}{2} + \frac{3x^4}{6} + \text{etc.}$$

$$xxe^x = x^2 + \frac{x^3}{1} + \frac{x^4}{2} + \text{etc., also}$$

$$e^x(2 + 3x + xx) = 2 + 5x + \frac{10x^2}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \text{etc.}$$

§. 28.

Das bisher Vorgetragene erstreckt sich nicht bloß auf die Reihen, die ohne Ende fortlaufen, sondern auch auf die Summe jeder Anzahl von Gliedern; denn die Coefficienten a, b, c, d, etc. können ohne Ende fortgehen, oder nach Belieben abgebrochen werden. Da indeß dies keiner weitern Erläuterung bedarf, so wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf die Folgen richten, die aus dem Bisherigen fließen.

Wenn

Wenn also irgend eine Reihe gegeben ist, deren einzelne Glieder aus zwey Faktoren bestehen, davon die einen eine Reihe machen, deren Differenzen endlich beständig werden: so läßt sich die Summe dieser Reihe angeben, wenn dieselbe mit Beyseitsetzung der gedachten Faktoren summirt werden kann. Ist nemlich die Reihe

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \text{ꝛc.}$$

gegeben, und machen darin A, B, C, D, E, ꝛc. eine Reihe, deren Differenzen endlich beständig werden: so läßt sich die Summe jener Reihe angeben, wofern die Summe von dieser

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{ꝛc.}$$

bekannt ist. Denn sucht man aus der Progression A, B, C, D, E, ꝛc. die daraus nach und nach sich ergebenden Differenzen, und zwar nach der dazu im ersten Theile befindlichen Anleitung

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
A, & & B, & & C, & & D, & & E, & & F, & & \text{ꝛc.} \\
& \triangle A, & & \triangle B, & & \triangle C, & & \triangle D, & & \triangle E, & & \text{ꝛc.} & \\
& & \triangle^2 A, & & \triangle^2 B, & & \triangle^2 C, & & \triangle^2 D, & & \text{ꝛc.} & & \\
& & & \triangle^3 A, & & \triangle^3 B, & & \triangle^3 C, & & \text{ꝛc.} & & & \\
& & & & \triangle^4 A, & & \triangle^4 B, & & \text{ꝛc.} & & & & \\
& & & & & \triangle^5 A, & & \text{ꝛc.} & & & & &
\end{array}$$

so ist die Summe der gegebenen Reihe:

$$Z = SA + \frac{x\,dS}{1\,dx}\triangle A + \frac{x^2\,ddS}{1.2\,dx^2}\triangle^2 A + \frac{x^3 d^3 S}{1.2.3.dx^3}\triangle^3 A + \text{ꝛc.}$$

wenn in den höhern Differenzialien von S, dx als beständig betrachtet wird.

§. 29.

Wenn also die Differenzen der Reihe A, B, C, D, ꝛc. niemals beständig werden, so wird die Summe Z durch eine neue unendliche Reihe ausgedruckt, die öfters stärker convergirt als die gegebene, und es wird auf diese Art die gegebene Reihe in eine andere ihr gleiche verwandelt. Um dies zu erläutern wollen wir diese Reihe betrachten:

$$Y = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{6} + \text{2c.}$$

wovon bekannt ist, daß sie den Logarithmen von $\frac{1}{1-y}$ ausdruckt, so daß $Y = -l(1-y)$ ist. Dividirt man diese Reihe durch y, und setzt dabey $y = x$, und $Y = yZ$, so daß $Z = -\frac{1}{y}l(1-y) = -\frac{1}{x}l(1-x)$ ist: so wird

$$Z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \text{2c.}$$

und vergleicht man diese Reihe mit folgender:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{2c.} = \frac{1}{1-x}$$

so findet man für die Reihe A, B, C, D, E, 2c. diese Werthe:

$$1, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{5},$$

$$-\frac{1}{1.2}, \quad -\frac{1}{2.3}, \quad -\frac{1}{3.4}, \quad -\frac{1}{4.5},$$

$$\frac{1.2}{1.2.3}, \quad \frac{1.2}{2.3.4}, \quad \frac{1.2}{3.4.5},$$

$$-\frac{1.2.3}{1.2.3.4}, \quad -\frac{1.2.3}{2.3.4.5},$$

2c.

Es wird also $A = 1$; $\Delta A = -\frac{1}{2}$; $\Delta^2 A = \frac{1}{3}$; $\Delta^3 A = -\frac{1}{4}$; 2c.

Da ferner $S = \frac{1}{1-x}$ ist, so ist

$$\frac{dS}{1.dx} = \frac{1}{(1-x)^2};$$

d²S

$$\frac{d^2S}{1.2.dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3};$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3.dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}; \text{ ꝛc.}$$

Gebraucht man diese Werthe, so erhält man die Summe

$$Z = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{x^2}{3(1-x)^3} - \frac{x^3}{4(1-x)^4} + \frac{x^4}{5(1-x)^5}$$
$$+ \text{ ꝛc.}$$

Da nun $x = y$, und $Y = -l(1-y) = yZ$ ist, so hat man hieraus

$$-l(1-y) = \frac{y}{1-y} - \frac{y^2}{2(1-y)^2} + \frac{y^3}{3(1-y)^3} - \frac{y^4}{4(1-y)^4}$$
$$+ \text{ ꝛc.}$$

und diese Reihe druckt allerdings $l(1 + \frac{y}{1-y}) = l\frac{1}{1-y} = -l(1-y)$ aus, wie auch selbst aus dem sonst schon (Einl. Th. 1. Cap. 7. § 123.) Bewiesenen, bekannt ist.

§. 30.

Damit aber auch der Gebrauch des Bisherigen bekannt werde, wenn bloß die ungeraden Potestäten vorkommen und die Zeichen abwechseln, so sey folgende Reihe gegeben:

$$Y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11} + \text{ ꝛc.}$$

woraus erhellet (Einl. Th. 1. Cap. 8. §. 140.) daß $Y = A \tang. y$ ist. Dividirt man diese Reihe durch y, und setzt man $\frac{Y}{y} = Z$, und $yy = x$, so wird

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \text{ ꝛc.}$$

Vergleicht man diese Reihe mit folgender:

$$S = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{ ꝛc.}$$

 so

so wird $S = \frac{1}{1+x}$, und die Reihe der Coefficienten A, B, C, D, 2c. wird

$$A = 1, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{5}, \quad \tfrac{1}{7}, \quad \tfrac{1}{9}, \text{ 2c.}$$

$$\Delta A = \quad -\frac{2}{3}; \quad -\frac{2}{3\cdot 5}; \quad -\frac{2}{5\cdot 7}; \quad -\frac{2}{7\cdot 9};$$

$$\Delta^2 A = \quad \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}; \quad \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}; \quad \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9};$$

$$\Delta^3 A = \quad -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}; \quad -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9};$$

$$\Delta^4 A = \quad \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$$

2c.

Da aber $S = \frac{1}{1+x}$ ist, so wird

$$\frac{dS}{1\,dx} = \frac{1}{(1+x)^2};$$

$$\frac{ddS}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1+x)^3};$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} = \frac{1}{(1+x)^4};$$

Substituirt man daher diese Werthe, so wird $Z =$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{3(1+x)^2} + \frac{2.4.x^2}{3\cdot 5(1+x)^3} + \frac{2.4.6x^3}{3\cdot 5\cdot 7(1+x)^4} + \text{2c.}$$

Führt man also $yy = x$ wieder ein, und multiplicirt man durch y, so wird $Y = \text{A tang.}\, y =$

$$\frac{y}{1+yy} + \frac{2y^3}{3(1+yy)^2} + \frac{2.4y^5}{3\cdot 5(1+yy)^3} + \frac{2.4.6y^7}{3\cdot 5\cdot 7(1+yy)^4} + \text{2c.}$$

§. 31.

Es kann aber auch diese letzte Reihe, welche einen Kreisbogen durch die Tangente ausdruckt, auf eine andere Art ver-

verwandelt werden, indem man sie mit der Logarithmischen Reihe vergleicht. Wir wollen nemlich die Reihe

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \text{ꝛc.}$$

nehmen, und sie mit folgender:

$$S = \tfrac{1}{0} - \frac{x}{2} + \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \text{ꝛc.} = \tfrac{1}{0} - \tfrac{1}{2} l(1+x)$$

vergleichen. Hier sind die Werthe der Buchstaben A, B, C, D, ꝛc.

$$A = \tfrac{0}{1}; \quad \tfrac{2}{3}; \quad \tfrac{4}{5}; \quad \tfrac{6}{7}; \quad \tfrac{8}{9}; \text{ ꝛc.}$$

$$\triangle A = \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{2}{3\cdot 5}; \quad \frac{2}{5\cdot 7}; \quad \frac{2}{7\cdot 9}; \text{ ꝛc.}$$

$$\triangle^2 A = \quad \frac{-2\cdot 4}{3\cdot 5}; \quad \frac{-2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}; \quad \frac{-2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}; \text{ ꝛc.}$$

$$\triangle^3 A = \quad \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}; \quad \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}; \text{ ꝛc.}$$

Da ferner $S = \tfrac{1}{0} - \tfrac{1}{2} l(1+x)$ ist, so wird

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2(1+x)};$$

$$\frac{ddS}{1.2dx^2} = +\frac{1}{4(1+x)^2};$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3dx^3} = -\frac{1}{6(1+x)^3};$$

$$\frac{d^4S}{1.2.3.4dx^4} = +\frac{1}{8(1+x)^4}; \text{ ꝛc.}$$

Es ist demnach $SA = S.\tfrac{0}{1} = 1$; und aus dem Uebrigen ergiebt sich

$$Z = 1 - \frac{x}{3(1+x)} - \frac{2xx}{3\cdot 5(1+x)^2} - \frac{2\cdot 4x^3}{3\cdot 5\cdot 7(1+x)^3} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun $x = yy$, und multiplicirt zugleich durch y, so wird

$$Y = A\,\mathrm{tang}.\,y =$$

$$y - \frac{y^3}{3(1+yy)} - \frac{2y^5}{3.5(1+yy)^2} - \frac{2.4y^7}{3.5.7(1+yy)^3} - \text{etc.}$$

Diese Verwandlung wird also durch das unendliche Glied z in der Reihe S nicht verhindert. Sollte aber jemanden noch ein Zweifel übrig seyn, der löse nur die einzeln Glieder der gegenwärtigen Reihe außer dem ersten in unendliche Reihen auf, wo er denn finden wird, daß die zuerst gegebene Reihe wirklich herauskomme.

§. 32.

Bisher haben wir nur solche Reihen betrachtet, in welchen alle Potestäten der veränderlichen Größe vorkommen. Jetzt wollen wir zur Betrachtung solcher Reihen fortgehen, die in allen Gliedern eben dieselbe Potestät der veränderlichen Größe enthalten, dergleichen folgende ist:

$$S = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} + \frac{1}{d+x} + \text{etc.}$$

Ist nemlich die Summe dieser Reihe S bekannt, und ist dieselbe eine Funktion von x, so findet man durchs Differenziiren und durchs Dividiren durch $-dx$:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(b+x)^2} + \frac{1}{(c+x)^2} + \frac{1}{(d+x)^2} + \text{etc.}$$

Differenziirt man nun abermals und dividirt darauf durch $-2dx$, so erhält man die Reihe der Würfel:

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(b+x)^3} + \frac{1}{(c+x)^3} + \frac{1}{(d+x)^3} + \text{etc.}$$

und diese von neuem differenziirt und durch $-3dx$ dividirt, giebt

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{(a+x)^4} + \frac{1}{(b+x)^4} + \frac{1}{(c+x)^4} + \frac{1}{(d+x)^4} + \text{etc.}$$

Auf

Auf eine ähnliche Art kann man die Summen aller folgenden Poteſtäten finden, wenn nur die Summe der erſten Reihe bekannt iſt.

§. 33.

Dergleichen Bruch-Reihen, die eine unbeſtimmte Größe enthalten, haben wir aber in der Einleitung (Th. 1. Cap. 10.) gefunden, wo wir gezeigt haben, daß, wenn die halbe Peripherie eines Kreiſes, deſſen Radius $= 1$ iſt, $= \pi$ geſetzt wird,

$$\frac{\pi}{n \sin . \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \&c. \text{ und}$$

$$\frac{\pi \cos . \frac{m}{n}\pi}{n \sin . \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \&c.$$

ſey, (§. 178.) Da wir nun für m und n jede Zahl ſetzen können, ſo wollen wir $n = 1$ und $m = x$ annehmen, damit wir Reihen erhalten, die denen im vorhergehenden §. ähnlich ſind. Alsdann iſt

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \&c.$$

$$\frac{\pi \cos . x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

Durch die Differenziation ist man also im Stande, die Summen aller Potestäten, die aus diesen Brüchen entstehen, zu finden.

§. 34.

Wir wollen zuvörderst die erste Reihe betrachten, und der Kürze wegen $\frac{\pi}{\sin.\pi x} = S$ setzen. Sucht man hiervon die höhern Differenzialien, so daß man dx als beständig behandelt, so ist

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$$
$$+ \frac{1}{3-x} - \text{etc.}$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2}$$
$$- \frac{1}{(3-x)^2} - \text{etc.}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3}$$
$$+ \frac{1}{(3-x)^3} - \text{etc.}$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4}$$
$$- \frac{1}{(3-x)^4} - \text{etc.}$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5}$$
$$+ \frac{1}{(3-x)^5} - \text{etc.}$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{(1-x)^6} - \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6}$$
$$- \frac{1}{(3-x)^6} - \text{etc.}$$

etc.

wo

wo zu bemerken ist, daß die Zeichen vor den geraden Potestäten, so wie auch die vor den ungeraden einerley Gesetze folgen. Von allen diesen Reihen findet man daher die Summen aus den Differenzialien des Ausdrucks

$$S = \frac{\pi}{\sin.\pi x}.$$

§. 35.

Um diese Differenziation auf eine einfachere Art auszudrucken, wollen wir

$$\sin.\pi x = p; \text{ und } \cos.\pi x = q$$

setzen, wodurch denn

$$dp = \pi dx \cos.\pi x = \pi q dx, \text{ und } dq = \pi p dx$$

wird. Da nun $S = \frac{\pi}{p}$ ist, so wird

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2 q}{pp};$$

$$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{\pi^3(pp + 2qq)}{p^3} = \frac{\pi^3(qq + 1)}{p^3}, \text{ weil } pp + qq = 1$$

$$\frac{-d^3S}{dx^3} = \pi^4\left(\frac{5q}{pp} + \frac{6q^3}{p^4}\right) = \frac{\pi^4(q^3 + 5q)}{p^4}$$

$$\frac{d^4S}{dx^4} = \pi^5\left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p}\right) = \frac{\pi^5(q^4 + 18q^2 + 5)}{p^5}$$

$$\frac{-d^5S}{dx^5} = \pi^6\left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{pp}\right) = \frac{\pi^6(q^5 + 58q^3 + 61q)}{p^6}$$

$$\frac{d^6S}{dx^6} = \pi^7\left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p}\right) =$$

$$\frac{\pi^7(q^6 + 179q^4 + 479q^2 + 61)}{p^7}$$

$$\frac{-d^7S}{dx^7} = \pi^8\left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2}\right) =$$

$$\frac{\pi^8}{p^8}(q^7 + 543q^5 + 3111q^3 + 1385q)$$

d^8S

$$\frac{d^8S}{dx^8} = \pi^9\left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{1008000q^6}{p^7} + \frac{83664q^4}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p}\right)$$

u.

Diese Ausdrücke lassen sich leicht, so weit man will, fortsetzen. Denn wenn

$$\pm\frac{d^nS}{dx^n} = \pi^{n+1}\left(\frac{\alpha q^n}{p^{n+1}} + \frac{\beta q^{n-2}}{p^{n-1}} + \frac{\gamma q^{n-4}}{p^{n-3}} + \frac{\delta q^{n-6}}{p^{n-5}} + \text{u.}\right)$$

ist, so ist das Differenzial davon mit veränderten Zeichen

$$\mp\frac{d^{n+1}S}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)\alpha q^{n+1}}{p^{n+2}} + \left.\begin{matrix} n\alpha \\ +(n-1)\beta \end{matrix}\right\}\frac{q^{n-1}}{p^n} \left.\begin{matrix} +(n-2)\beta \\ +(n-3)\gamma \end{matrix}\right\}\frac{q^{n-3}}{p^{n-2}} \left.\begin{matrix} +(n-4)\gamma \\ +(n-5)\delta \end{matrix}\right\}\frac{q^{n-5}}{p^{n-4}}\ \text{u.}\right)$$

§. 36.

Hieraus erhält man also die Summe der §. 34. befindlichen Reihen auf folgende Art bestimmt:

$$S = \pi \cdot \frac{1}{p}$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2}{1} \cdot \frac{q}{p^2}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{\pi^3}{2}\left(\frac{2q^2}{p^3} + \frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{\pi^4}{6}\left(\frac{6q^3}{p^4} + \frac{5q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = \frac{\pi^5}{24}\left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p}\right)$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5} = \frac{\pi^6}{120}\left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^6S}{720dx^6} = \frac{\pi^7}{720}\left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^4}{p^3} + \frac{61}{p}\right)$$

$-d^7S$

$$\frac{-d^7S}{5040dx^7}=\frac{\pi^8}{5040}\left(\frac{5040q^7}{p^8}+\frac{10920q^5}{p^6}+\frac{7266q^3}{p^4}+\frac{1385q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8S}{40320dx^8}=\frac{\pi^9}{40320}\left(\frac{40320q^8}{p^9}+\frac{100800q^6}{p^7}+\frac{83664q^4}{p^5}+\frac{24568q^2}{p^3}+\frac{1385}{p}\right)$$

ꝛc.

§. 37.

Um nun auch die andere oben (§. 33.) gefundene Reihe

$$\frac{\pi\cos.\pi x}{\sin.\pi x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3-x}+ \text{ꝛc.}$$

auf eine ähnliche Art zu behandeln, so sey, der Kürze wegen, $\frac{\pi\cos.\pi x}{\sin.\pi x}=T$, wodurch man folgende Summationen findet:

$$T=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}- \text{ꝛc.}$$

$$\frac{-dT}{dx}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(2-x)^2}+\frac{1}{(2+x)^2}+ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{ddT}{2dx^2}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1+x)^3}-\frac{1}{(2-x)^3}+\frac{1}{(2+x)^3}- \text{ꝛc.}$$

$$\frac{-d^3T}{6dx^3}=\frac{1}{x^4}+\frac{1}{(1-x)^4}+\frac{1}{(1+x)^4}+\frac{1}{(2-x)^4}+\frac{1}{(2+x)^4}+ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{d^4T}{24dx^4}=\frac{1}{x^5}-\frac{1}{(1-x)^5}+\frac{1}{(1+x)^5}-\frac{1}{(2-x)^5}+\frac{1}{(2+x)^5}- \text{ꝛc.}$$

$$\frac{-d^5T}{120dx^5}=\frac{1}{x^6}+\frac{1}{(1-x)^6}+\frac{1}{(1+x)^6}+\frac{1}{(2-x)^6}+\frac{1}{(2+x)^6}+ \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Hier sind in den geraden Potestäten alle Glieder positiv, dagegen in den ungeraden die Zeichen + und — mit einander abwechseln.

§. 38.

Um nun die Werthe dieser Differenzialien zu finden, so sey abermals $\sin.\pi x = p$, und $\cos.\pi x = q$, so daß $pp + qq = 1$ werde: alsdann ist $dp = \pi q dx$, und $dq = -\pi p dx$. Braucht man diese Werthe, so wird

$$T = \pi . \frac{q}{p}$$

$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2\left(\frac{qq}{pp} + 1\right) = \frac{\pi^2}{pp}$$

$$\frac{ddT}{dx^2} = \pi^3\left(\frac{2q^3}{p^3} + \frac{2q}{p}\right) = \frac{2\pi^3 q}{p^3}$$

$$\frac{-d^3T}{dx^3} = \pi^4\left(\frac{6q^4}{p^4} + \frac{8qq}{pp} + 2\right) = \pi^4\left(\frac{6qq}{p^4} + \frac{2}{pp}\right)$$

$$\frac{d^4T}{dx^4} = \pi^5\left(\frac{24q^3}{p^5} + \frac{16q}{p^3}\right)$$

$$\frac{-d^5T}{dx^5} = \pi^6\left(\frac{120q^4}{p^6} + \frac{120qq}{p^4} + \frac{16}{pp}\right)$$

$$\frac{d^6T}{dx^6} = \pi^7\left(\frac{720q^5}{p^7} + \frac{960q^3}{p^5} + \frac{272q}{p^3}\right)$$

$$\frac{-d^7T}{dx^7} = \pi^8\left(\frac{5040q^6}{p^8} + \frac{8400q^4}{p^6} + \frac{3696q^2}{p^4} + \frac{272}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8T}{dx^8} = \pi^9\left(\frac{40320q^7}{p^9} + \frac{80640q^5}{p^7} + \frac{48384q^3}{p^5} + \frac{7936q}{p^3}\right)$$

etc.

Diese Formeln lassen sich leicht nach Gefallen weiter fortsetzen. Denn wenn

$$\pm \frac{d^nT}{dx^n} = \pi^{n+1}\left(\frac{\alpha q^{n-1}}{p^{n+1}} + \frac{\beta q^{n-3}}{p^{n-3}} + \frac{\gamma q^{n-5}}{p^{n-5}} + \frac{\delta q^{n-7}}{p^{n-7}} + \text{etc.}\right)$$

ist, so ist der folgende Ausdruck:

$$\mp \frac{d^{n+1}T}{dx^{n+1}} =$$

$$\pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)\alpha q^n}{p^{n+2}} + \frac{(n-1)(\alpha+\beta)q^{n-2}}{p^n} + \frac{(n-3)(\beta+\gamma)q^{n-4}}{q^{n-2}} + \text{etc.}\right)$$

§. 39.

Die Summen der Reihen, die §. 37. stehen, sind demnach, wenn man $\sin.\pi x = p$, und $\cos.\pi x = q$ setzt,

$$T = \pi . \frac{q}{p}$$

$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2 \frac{1}{pp}$$

$$\frac{ddT}{2dx^2} = \pi^3 \frac{q}{p^3}$$

$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \pi^4 \left(\frac{qq}{p^4} + \frac{1}{3pp}\right)$$

$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \pi^5 \left(\frac{q^3}{p^5} + \frac{2q}{3p^3}\right)$$

$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \pi^6 \left(\frac{q^4}{p^6} + \frac{3qq}{3p^4} + \frac{2}{15pp}\right)$$

$$\frac{d^6T}{720dx^6} = \pi^7 \left(\frac{q^5}{p^7} + \frac{4q^3}{3p^6} + \frac{17q}{45p^3}\right)$$

$$\frac{-d^7T}{5040dx^7} = \pi^8 \left(\frac{q^6}{p^8} + \frac{5q^4}{3p^6} + \frac{11q^2}{15p^4} + \frac{17}{315pp}\right)$$

$$\frac{d^8T}{40320dx^8} = \pi^9 \left(\frac{q^7}{p^9} + \frac{6q^5}{3p^7} + \frac{6q^3}{5p^5} + \frac{62q}{315p^3}\right)$$

etc.

§. 40.

Außer diesen Reihen haben wir in der Einleitung verschiedene andere gefunden, aus welchen man auf eine ähnliche Art durch die Differenziation neue Reihen ableiten kann. Wir haben nemlich (Einl. Th. 1. §. 182.) gezeigt, daß

$$\frac{1}{2x} - \frac{\pi\sqrt{x}}{2x \operatorname{tang}.\pi\sqrt{x}} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4-x} + \frac{1}{9-x} + \frac{1}{16-x}$$
$$+ \frac{1}{25-x} + \text{etc.}$$

ist. Setzt man nun die Summe dieser Reihe = S, oder

$$S = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\operatorname{cos}.\pi\sqrt{x}}{\operatorname{sin}.\pi\sqrt{x}}$$

so wird

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2xx} + \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{\operatorname{cos}.\pi\sqrt{x}}{\operatorname{sin}.\pi\sqrt{x}} + \frac{\pi\pi}{4x(\operatorname{sin}.\pi\sqrt{x})^2},$$

und dieses ist daher die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(4-x)^2} + \frac{1}{(9-x)^2} + \frac{1}{(16-x)^2} + \frac{1}{(25-x)^2} + \text{etc.}$$

Dann haben wir auch gezeigt (§. 183.), daß

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{9+x} + \frac{1}{16+x} + \text{etc.}$$

ist. Setzt man also die Reihe = S, so wird

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(4+x)^2} + \frac{1}{(9+x)^2} + \frac{1}{(16+x)^2} + \text{etc.}$$

Nun ist aber

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} - \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2} + \frac{1}{2xx}$$

Folglich ist

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} + \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2} - \frac{1}{2xx}.$$

Auf eine ähnliche Art kann man durch fortgesetzte Differenziation die Summen der folgenden Potestäten finden.

§. 41.

Wenn der Werth eines Produkts bekannt ist, welches aus Faktoren, die eine unbestimmte Größe enthalten, besteht: so lassen sich durch eben diese Methode unzählige summirbare Reihen finden. Es sey nemlich der Werth dieses Produkts

$(1+xx)$

$(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)(1+\varepsilon x)$ 2c. $= S$
oder irgend einer Funktion von x: so ist, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$lS = l(1+\alpha x) + l(1+\beta x) + l(1+\gamma x) + l(1+\delta x) + \text{2c.}$$

Differenzirt man diese Gleichung und dividirt darauf durch dx, so wird

$$\frac{dS}{Sdx} = \frac{\alpha}{1+\alpha x} + \frac{\beta}{1+\beta x} + \frac{\gamma}{1+\gamma x} + \frac{\delta}{1+\delta x} + \text{2c.}$$

woraus man durch fortgesetzte Differenziation die Summen aller Potestäten dieser Brüche, auf die an den vorhergehenden Beyspielen ausführlich gezeigte Art, findet.

§. 42.

Wir haben aber in der Einleitung (Th. 1. Cap. 11. §. 184.) verschiedene Ausdrücke mitgetheilt, auf welche sich diese Methode anwenden läßt. Bedeutet nemlich π einen Kreisbogen von 180°, dessen Radius $= 1$ ist, so haben wir gezeigt, daß

$$\sin. \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n} \cdot \frac{4nn-mm}{4nn} \cdot \frac{16nn-mm}{16nn} \cdot \frac{36nn-mm}{36nn} \cdot \text{2c.}$$

$$\cos. \frac{m\pi}{2n} = \frac{nn-mm}{nn} \cdot \frac{9nn-mm}{9nn} \cdot \frac{25nn-mm}{25nn} \cdot \frac{49nn-mm}{49nn} \cdot \text{2c.}$$

ist. Setzt man nun $n = 1$ und $m = 2x$, so wird

$$\sin. \pi x = \pi x \cdot \frac{1-xx}{1} \cdot \frac{4-xx}{4} \cdot \frac{9-xx}{9} \cdot \frac{16-xx}{16} \text{ 2c.}$$

oder

$$\sin. \pi x = \pi x \cdot \frac{1-x}{1} \cdot \frac{1+x}{1} \cdot \frac{2-x}{2} \cdot \frac{2+x}{2} \cdot \frac{3-x}{3} \cdot \frac{3+x}{3} \cdot \frac{4-x}{4} \text{ 2c.}$$

und

$$\cos.\pi x = \frac{1-4xx}{1} \cdot \frac{9-4xx}{9} \cdot \frac{25-4xx}{25} \cdot \frac{49-4xx}{49} \text{ ꝛc. oder}$$

$$\cos.\pi x = \frac{1-2x}{1} \cdot \frac{1+2x}{1} \cdot \frac{3-2x}{3} \cdot \frac{3+2x}{3} \cdot \frac{5-2x}{5} \cdot \frac{5+2x}{5} \text{ ꝛc.}$$

Hieraus aber fließt, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$l\sin.\pi x = l\pi x + l\frac{1-x}{1} + l\frac{1+x}{1} + l\frac{2-x}{2} + l\frac{2+x}{2} + l\frac{3-x}{3} + \text{ꝛc.}$$

$$l\cos.\pi x = l\frac{1-2x}{1} + l\frac{1+2x}{1} + l\frac{3-2x}{3} + l\frac{3+2x}{3} + l\frac{5-2x}{5} + \text{ꝛc.}$$

§. 43.

Differenziirt man diese Logarithmische Reihen und dividirt allenthalben durch dx, so giebt die erste:

$$\frac{\pi\cos.\pi x}{\sin.\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{ꝛc.}$$

und dies ist eben die Reihe, welche wir §. 37. betrachtet haben. Die andere aber giebt

$$\frac{-\pi\sin.\pi x}{\cos.\pi x} = -\frac{2}{1-2x} + \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{3-2x} + \frac{2}{3+2x} - \frac{2}{5-2x} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man daher $2x = z$, so daß $x = \frac{z}{2}$ wird, und dividirt man überdies durch -2, so wird:

$$\frac{\pi\sin.\frac{1}{2}\pi z}{2\cos.\frac{1}{2}\pi z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} - \text{ꝛc.}$$

Da aber $\sin.\frac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1-\cos.\pi z}{2}}$, und $\cos.\frac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1+\cos.\pi z}{2}}$ ist, so wird dadurch

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos.\pi z)}}{\sqrt{(1+\cos.\pi z)}} = \frac{2}{1-z} - \frac{2}{1+z} + \frac{2}{3-z} - \frac{2}{3+z} + \frac{2}{5-z} - \text{ꝛc.}$$

oder, wenn man x anstatt z setzt,

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\text{cos}.\pi x)}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\pi x)}} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x} - \text{etc.}$$

Addirt man diese Reihe zu der vorhin gefundenen, nemlich zu

$$\frac{\pi\,\text{cos}.\pi x}{\text{sin}.\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{etc.}$$

so erhält man die Summe folgender Reihe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} - \text{etc.}$$

$$=$$

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\text{cos}.\pi x)}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\pi x)}} + \frac{\pi\,\text{cos}.\pi x}{\text{sin}.\pi x}.$$

Da aber der Bruch $\frac{\sqrt{(1-\text{cos}.\pi x)}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\pi x)}}$, wenn man den Zähler und Nenner durch $\sqrt{(1-\text{cos}.\pi x)}$ multiplicirt, in $\frac{1-\text{cos}.\pi x}{\text{sin}.\pi x}$ übergeht, so wird dadurch die Summe jener Reihe $= \frac{\pi}{\text{sin}.\pi x}$ welches eben dieselbe ist, die wir §. 34 gehabt haben. Wir wollen daher auch nicht länger dabey verweilen.