Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Viertes Kapitel. Von der Verwandlung der Funktionen in Reihen.

Viertes Capitel.

Von der Verwandlung der Funktionen in Reihen.

§. 70.

Es ist schon in dem vorhergehenden Capitel der Nutzen zum Theil gezeigt worden, den die daselbst für die Differenzen gefundenen allgemeinen Ausdrücke in der Erfindung der Reihen haben, die den Werth einer jeden Funktion von x ausdrucken. Ist nemlich y eine gegebene Funktion von x, so ist der Werth, den sie bey $x = 0$ erhält, bekannt; und setzt man denselben $= A$, so ist, wie wir gesehen haben,

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2d^2y}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{rc.} = A.$$

Auf diese Art erhält man nicht bloß meistentheils eine unendliche Reihe, deren Summe einer beständigen Größe A gleich ist, wenn sich schon in den einzelen Gliedern derselben eine veränderliche Größe x befindet: sondern man kann auch die Funktion y selbst durch eine Reihe ausdrucken. Es ist nemlich

$$y = A + \frac{xdy}{dx} - \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} - \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{rc.}$$

wovon bereits einige Beyspiele angeführt worden sind.

§. 71.

Um aber dieser Untersuchung einen weitern Umfang zu geben, wollen wir annehmen, daß die Funktion y in z übergehe, wenn man allenthalben $x + \omega$ für x setzt, so daß also z

eben

eben eine solche Funktion von $x + \omega$ als y von x sey. Für diesen Fall haben wir gezeigt (Cap. 3. §. 48.) daß

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddx}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ist. Da man also alle Glieder dieser Reihe durch eine fortgesetzte Differenziation von y, indem man dx als beständig betrachtet, finden, und zugleich den Werth von z durch die Substitution von $x + \omega$ für x wirklich darstellen kann: so erhält man auf diese Art jederzeit eine Reihe, die dem Werthe von z gleich ist, und welche, wenn ω eine sehr kleine Größe ist, sehr stark convergirt, und in einer eben nicht grossen Anzahl von Gliedern den Werth von z näherungsweise giebt. Hieraus fällt der große Nutzen dieser Formel bey dem Approximationsgeschäfte in die Augen.

§. 72.

Um bey der Erklärung des außerordentlichen Nutzens dieser Formel nach der Ordnung zu verfahren, wollen wir zuvörderst in die Stelle von y algebraische Funktionen von x setzen. Zuerst sey also $y = x^n$, wo denn, wenn man $x + \omega$ für x setzt, $z = (x + \omega)^n$ wird. Da nun bey dieser Voraussetzung

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1};$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4};$$

ꝛc.

wird: so erhält man, wenn man diese Werthe substituirt,

$(x+\omega)^n$

$$(x + \omega)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}\omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}\omega^3 + \text{ꝛc.}$$

welches die bekannte Newtonianische Formel ist, um das Binomium $(x + \omega)^n$ in eine Reihe zu verwandeln. Die Anzahl der Glieder dieser Reihe ist allemal eine endliche Zahl, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

§. 73.

Hieraus können wir auch eine Progression finden, die den Werth der Potestät eines Binomiums auf die Art ausdruckt, daß die Reihe abbricht, wenn der Exponent der Potestät eine ganze negative Zahl ist. Denn setzt man

$\omega = \frac{-ux}{x+u}$; so wird $z = (x + \omega)^n = \left(\frac{xx}{x+u}\right)^n$, und folglich

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \frac{nx^nu}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^nu^2}{1 \cdot 2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3(x+u)^3}x^nu^3 + \text{ꝛc.}$$

Dividirt man nun allenthalben durch x^{2n}, so wird

$$(x+u)^{-n} = x^{-n} - \frac{nx^{-n}u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{-n}u^2}{1 \cdot 2 \cdot 3(x+u)^3} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{-n}u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(x+u)^3} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man hierauf $-n = m$, so wird

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^mu}{1(x+u)} + \frac{m(m+1)x^mu^2}{1 \cdot 2(x+u)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^mu^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(x+u)^3} + \text{ꝛc.}$$

und diese Reihe besteht allemal, wenn m eine ganze negative Zahl ist, aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Es ist also diese Reihe der vorhin gefundenen gleich, wenn man u und m für ω und n setzt. Es folgt nemlich daraus

$$(x + u)^m = x^m + \frac{mx^{m-1}u}{1} + \frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

§. 74.

Eben diese Reihe kann auch aus dem im Anfange des 70sten §. stehenden Ausdrucks hergeleitet werden. Denn da, wenn y für $x = 0$ in A übergeht,

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{xxddy}{1 \cdot 2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dx^4} - \text{ꝛc.} = A$$

ist: so setze man $y = (x + a)^n$, wodurch $A = a^n$ wird. Da nun

$$\frac{dy}{dx} = n(x + a)^{n-1}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)(x + a)^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3}; \text{ ꝛc. ist: so wird}$$

$$(x+a)^n - \frac{n}{1}x(x+a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2(x+a)^{n-2} - \text{ꝛc.} = a^n.$$

Dividirt man nunmehr durch $a^n(x+a)^n$, so findet man

$$(x + a)^{-n} = a^{-n} - \frac{na^{-n}x}{1(x+a)} + \frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1 \cdot 2(x+a)^2} - \text{ꝛc.}$$

und setzt man hier u, x und $-$ m für x, a und n, so entsteht daraus die vorhin gefundene Reihe.

§. 75.

Wenn man für m gebrochene Zahlen setzt, so laufen beyde Reihen ohne Ende fort. Wenn aber u in Vergleichung mit x eine sehr kleine Größe ist, so nähern sich dieselben dem wahren Werthe in einem hohen Grade. Es sey also

also $m = \frac{\mu}{\nu}$, und $x = a^{\nu}$, so ist aus der zuerst gefundenen Reihe

$$(a^{\nu} + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\mu}\left(1 + \frac{\mu u}{\nu a^{\nu}} + \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu . 2\nu}\cdot\frac{uu}{a^{2\nu}} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu . 2\nu . 3\nu}\cdot\frac{u^3}{a^{3\nu}} + \text{rc.}\right)$$

Dagegen giebt die zuletzt gefundene Reihe

$$(a^{\nu} + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\mu}\left(1 + \frac{\mu u}{\nu(a^{\nu}+u)} + \frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu . 2\nu(a^{\nu}+u)^2} + \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu . 2\nu . 3\nu(a^{\nu}+u)^3} + \text{rc.}\right)$$

Aber diese letztere Reihe convergirt viel stärker als die vorhergehende, indem ihre Glieder selbst dann abnehmen, wenn $u > a^{\nu}$ ist, in welchem Falle die vorhergehende Reihe divergirt.

Ist also $\mu = 1$; und $\nu = 2$, so ist

$$\sqrt{(a^2 + u)} = a\left(1 + \frac{1u}{2(a^2+u)} + \frac{1.3u^2}{2.4(a^2+u)^2} + \frac{1.3.5u^3}{2.4.6(a^2+u)^3} + \text{rc.}\right)$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man für ν nach und nach die Zahlen 3, 4, 5, rc. setzt, und $\mu = 1$ bleiben läßt,

$$\sqrt[3]{(a^3+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{3(a^3+u)} + \frac{1.4u^2}{3.6(a^3+u)^2} + \frac{1.4.7u^3}{3.6.9(a^4+u)^3} + \text{rc.}\right)$$

$$\sqrt[4]{(a^4+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{4(a^4+u)} + \frac{1.5u^2}{4.8(a^4+u)^2} + \frac{1.5.9u^3}{4.8.12(a^3+u)^3} + \text{rc.}\right)$$

$$\sqrt[5]{(a^5+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{5(a^5+u)} + \frac{1.6u^2}{5.10(a^5+u)^2} + \frac{1.6.11u^3}{5.10.15(a^5+u)^3} + \text{rc.}\right)$$

§. 76.

Nach diesen Formeln läßt sich jegliche Wurzel aus jeder gegebenen Zahl auf eine leichte Art finden. Ist nemlich eine Zahl c gegeben, so suche man die ihr am nächsten kommende Potestät, es mag dieselbe kleiner oder größer seyn. Im letzten Falle nimmt man u negativ, im ersten hingegen positiv. Scheint dabey die sich ergebende Reihe nicht genug zu convergiren, so multiplicire man die Zahl c durch eine Potestät, f^ν nemlich, wenn die νte Wurzel gesucht werden soll, und suche die Wurzel der Zahl $f^\nu c$, welche, durch f dividirt, die gesuchte Wurzel geben wird. Je größer aber f genommen wird, desto stärker convergirt die Reihe, und das um so mehr, wenn sich eine ähnliche Potestät a^ν nicht sehr von $f^\nu c$ unterscheidet.

Erstes Exempel.

Die Quadrat-Wurzel aus der Zahl 2 zu finden.

Wenn man ohne weitere Vorbereitung $a = 1$, und $u = 1$ setzt, so wird

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1.3}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^3} + \text{rc.}$$

Diese Reihe convergirt zwar sehr stark, indeß ist es doch besser die Zahl 2 zuvor durch ein anderes Quadrat z. B. 25 zu multipliciren, wobey das Produkt 50 einem andern Quadrate 49 sehr nahe komme. Man suche demnach die Quadrat-Wurzel aus 50, welche mit 5 dividirt, $\sqrt{2}$ giebt. Es ist aber alsdenn $a = 7$, $u = 1$, und also

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \text{rc.}\right)$$

$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \text{rc.}\right.$$

und

und hiernach ist in Decimal-Brüchen sehr leicht zu rechnen. Es ist nemlich

$$\begin{array}{rcr}
\frac{7}{5} & = & 1{,}4000000000000 \\
\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100} & = & 140000000000 \\
\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200} & = & 2100000000 \\
\text{d. Vorherg. in } \frac{5}{300} & = & 35000000 \\
\text{d. Vorherg. in } \frac{7}{400} & = & 612500 \\
\text{d. Vorherg. in } \frac{9}{500} & = & 11025 \\
\text{d. Vorherg. in } \frac{11}{600} & = & 202 \\
 & & 3 \\ \hline
\text{Folglich } \sqrt{2} & = & 1{,}4142135623730
\end{array}$$

Zweytes Exempel.

Die Cubik-Wurzel aus der Zahl 3 zu finden.

Man multiplicire die Zahl 3 durch den Cubus 8, und suche die Cubik-Wurzel aus der Zahl 24, wo denn $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ ist. Man setze also $a = 3$ und $u = -3$. Alsdann ist

$$\sqrt[3]{24} = 3\left(1 - \frac{1.3}{3.24} + \frac{1.4.3^2}{3.6.24^2} - \frac{1.4.7.3^3}{3.6.9.24^3} + \text{rc.}\right)$$

und

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3.8} + \frac{1.4}{3.6.8^2} - \frac{1.4.7}{3.6.9.8^3} + \text{rc.}\right)$$

oder

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{24}\cdot\tfrac{4}{48} - \tfrac{1}{24}\cdot\tfrac{4}{48}\cdot\tfrac{7}{72} + \text{rc.}\right)$$

Diese Reihe convergirt schon stark, indem jedes folgende Glied mehr als achtmal kleiner als das vorhergehende ist. Wenn man aber die 3 durch den Cubus 729 multiplicirt, so erhält man 2187, und dann wird $\sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{(13^3 - 10)} = 9\sqrt[3]{3}$. Da nun $a = 13$ und $u = -10$ ist, so wird

$\sqrt[3]{3} =$

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{13}{9}\left(1 - \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 2187} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 10^2}{3 \cdot 6 \cdot 2187^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10^3}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2187^3} + \text{rc.}\right)$$

und in dieser Reihe ist jedes folgende Glied mehr als 200mal kleiner als das vorhergehende.

§. 77.

Die Entwickelung der Potestäten des Binomiums ist von einem so weiten Umfange, daß man darnach alle algebraische Funktionen behandeln kann. Soll z. B. der Werth folgender Funktion $\sqrt{(a + 2bx + cxx)}$ durch eine Reihe ausgedruckt werden, so kann solches nach den vorhergehenden Formeln geschehen, wenn man zwey Glieder als eins betrachtet. Hiernächst kann aber auch diese Entwickelung vermittelst des zuerst gegebenen Ausdrucks vorgenommen werden. Denn setzt man $\sqrt{(a + 2bx + cxx)} = y$, so wird, wenn man $x = 0$ nimmt, $y = \sqrt{a}$, und also auch $A = \sqrt{a}$. Da nun die Differenzialien von y auf die Art sich verhalten, daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + cx}{\sqrt{(a + 2bx + cxx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ac - bb}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3(bb - ac)(b + cx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{3(bb - ac)(ac - 5bb - 8bcx - 4ccxx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{7}{2}}}$$

ist: so wird

$$\sqrt{(a+2bx+cxx)} - \frac{(b+cx)x}{\sqrt{(a+2bx+cxx)}} - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^{\frac{5}{2}}} - \frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$- \text{rc.} = \sqrt{a}.$$

Wenn

Wenn man also allenthalben durch $\sqrt{(a + 2bx + cxx)}$ multiplicirt, so wird diese Reihe rational, und

$$\sqrt{a}(a+2bx+cxx) = a+2bx+cx-(b+cx)x-\frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)}-$$

$$\frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2}-\frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^3}$$

$$-\text{ꝛc. oder}$$

$$\sqrt{(a+2bx+cxx)} = \sqrt{a}+\frac{bx}{\sqrt{a}}-\frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)\sqrt{a}}-$$

$$\frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2\sqrt{a}}-\text{ꝛc.}$$

§. 78.

Nun wollen wir zu den transcendenten Funktionen fortgehen, und sie für y setzen. Es sey also zuvörderst $y = lx$, wo denn, wenn man $x + \omega$ für x setzt, $z = l(x + \omega)$ wird. Zugleich zeige l jeden Logarithmen an, dessen Verhältniß zu den hyperbolischen $n:1$ ist, so daß für die hyperbolischen Logarithmen $n = 1$, und für die gemeinen $n = 0{,}4342944819032$ sey. Alsdann sind die Differenzialien von $y = lx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x};\ \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{n}{x^2};\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2n}{x^3};\ \text{ꝛc.}$$

und daraus erhält man

$$l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \text{ꝛc.}$$

Auf ähnliche Art wird, wenn man ω negativ setzt,

$$l(x-\omega) = lx - \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} - \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} - \text{ꝛc.}$$

Zieht man also diese Reihe von der vorhergehenden ab, so wird

$$l\frac{x+\omega}{x-\omega} = 2n\left(\frac{\omega}{x} + \frac{\omega^3}{3x^3} + \frac{\omega^5}{5x^5} + \frac{\omega^7}{7x^7} + \frac{\omega^9}{9x^9} + \text{ꝛc.}\right.$$

§. 79.

Wenn man in der zuerst gefundenen Reihe

$$l(x + \omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \text{etc.}$$

$\omega = \frac{xx}{u-x}$ setzt, so wird $x + \omega = \frac{ux}{u-x}$, und

$$l(x+\omega) = lu + lx - l(u-x) = lx + \frac{nx}{u-x} - \frac{nxx}{2(u-x)^2} + \text{etc.}$$

desgleichen

$$l(u-x) = lu - \frac{nx}{u-x} + \frac{nxx}{2(u-x)^2} - \frac{nx^3}{3(u-x)^3} + \text{etc.}$$

und, wenn man x negativ nimmt,

$$l(u+x) = lu + \frac{nx}{u+x} + \frac{nxx}{2(u+x)^2} + \frac{nx^3}{3(u+x)^3} + \frac{nx^4}{4(u+x)^4} + \text{etc.}$$

Vermittelst dieser Reihen lassen sich die Logarithmen sehr schnell finden, wenn die Reihen stark convergiren. Das thun aber folgende Reihen, die aus den vorhergehenden leicht abgeleitet werden.

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \text{etc.}\right)$$

$$l(x-1) = lx - n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \text{etc.}\right)$$

Da diese beyden Reihen bloß in Ansehung der Zeichen von einander verschieden sind, so dient, wenn man darnach rechnet, einerley Arbeit dazu, daß man aus dem bekannten Logarithmen der Zahl x die Logarithmen der Zahlen x + 1 und x − 1 findet. Außerdem hat man aus den übrigen Reihen

$$l(x+1) = l(x-1) + 2n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \text{etc.}\right)$$

$$l(x-1) = lx - n\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + \text{etc.}\right)$$

l(x+1)

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

§. 52.

Aus dem gegebenen Logarithmen einer Zahl x lassen sich also die Logarithmen der angrenzenden Zahlen $x + 1$ und $x - 1$ leicht finden; ja man kann auch aus dem Logarithmen der Zahl $x - 1$ den Logarithmen der Zahl, die um 2 größer ist, und umgekehrt ableiten. Ob dies gleich in der Einleitung weitläuftig genug gezeigt worden ist, so wollen wir doch hier einige Beyspiele hinzufügen.

Erstes Exempel.

Aus dem gegebenen hyperbolischen Logarithmen der Zahl 10, welcher = 2,302585092994o ist, die hyperbolischen Logarithmen der Zahlen 11 und 9 zu finden.

Da diese Aufgabe hyperbolische Logarithmen betrifft, so ist $n = 1$, und wir haben daher folgende Reihen:

$$l11 = l10 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} + \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} + \frac{1}{5.10^5} - \text{ꝛc.}$$

$$l9 = l10 - \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} - \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} - \frac{1}{5.10^5} - \text{ꝛc.}$$

Um die Summen dieser Reihen zu finden, addire man die geraden und ungeraden Glieder besonders. Dann findet man

$\frac{1}{10} = 0{,}0000000000000$	$\frac{1}{2.10^2} = 0{,}0050000000000$
$\frac{1}{3.10^3} = 0{,}0003333333333$	$\frac{1}{4.10^4} = 0{,}0000250000000$
$\frac{1}{5.10^5} = 0{,}0000020000000$	$\frac{1}{6.10^6} = 0{,}0000001666666$
$\frac{1}{7.10^7} = 0{,}0000000142857$	$\frac{1}{8.10^8} = 0{,}0000000012500$
$\frac{1}{9.10^9} = 0{,}0000000001111$	$\frac{1}{10.10^{10}} = 0{,}0000000000100$
$\frac{1}{11.10^{11}} = 0{,}0000000000009$	$\frac{1}{12.10^{12}} = 0{,}0000000000001$
Sume $= 0{,}1003353477310$	Sume $= 0{,}0050251679267$

Die Summe von beyden ist 0,1053605156577

Die Differenz hingegen 0,0953101798043

Nun ist $l10 = 2{,}3025850929940$

Also wird $l11 = 2{,}3978952727983$

und $l9 = 2{,}1972245773363$

Hieraus fließt ferner $l3 = 1{,}0986122886681$

und $l99 = 4{,}5951198501346$

Zweytes Exempel.

Aus dem hyperbolischen Logarithmen der Zahl 99, der so eben gefunden worden ist, den Logarithmen der Zahl 101 zu finden.

Man gebrauche dazu die vorhin gefundene Reihe:

$$l(x+1) = l(x-1) + \frac{2}{x} + \frac{2}{3.x^3} + \frac{2}{5.x^5} + \frac{2}{7.x^7} + \text{ꝛc.}$$

Da nun in dem gegenwärtigen Falle $x = 100$ ist, so wird

$$l101 = l99 + \frac{2}{100} + \frac{2}{3.100^3} + \frac{2}{5.100^5} + \frac{2}{7.100^7} + \text{ꝛc.}$$

Die Summe dieser vier Glieder ist $= 0{,}0200006667066$, und diese Zahl zu dem Logarithmen von 99 gesetzt, giebt $l101 = 4{,}6151205168412$.

Drit-

Drittes Exempel.

Aus dem tabellarischen Logarithmen der Zahl 10, welcher $= 1$ ist, die Logarithmen der Zahlen 11 und 9 zu finden.

Da wir hier gemeine tabellarische Logarithmen suchen, so ist $n = 0{,}4342944819032$. Setzt man also $x = 10$, so ist

$$l11 = l10 + \frac{n}{10} + \frac{n}{2.10^2} - \frac{n}{3.10^3} + \frac{n}{4.10^4} - \text{ꝛc.}$$

$$l9 = l10 - \frac{n}{10} - \frac{n}{2.10^2} - \frac{n}{3.10^3} - \frac{n}{4.10^4} - \text{ꝛc.}$$

Nun addire man die geraden und ungeraden Glieder besonders. Dann wird

$\frac{n}{10} = 0{,}0434294481903$	$\frac{n}{2.10^2} = 0{,}0021714724095$
$\frac{n}{3.10^3} = 0{,}0001447648273$	$\frac{n}{4.10^4} = 0{,}0000108573620$
$\frac{n}{5.10^5} = 0{,}0000008685889$	$\frac{n}{6.10^6} = 0{,}0000000723824$
$\frac{n}{7.10^7} = 0{,}0000000062042$	$\frac{n}{8.10^8} = 0{,}0000000005428$
$\frac{n}{9.10^9} = 0{,}0000000000482$	$\frac{n}{10.10^{10}} = 0{,}0000000000043$
$\frac{n}{11.10^{11}} = 0{,}0000000000005$	$\frac{n}{12.10^{12}} = 0{,}0000000000000$
Sume $= 0{,}0435750878593$	Sume $= 0{,}0021824027010$

Das Aggregat von beyden ist	....	0,0457574905603
Die Differenz hingegen	....	0,0413926851583
Nun ist	$l10 =$	1,0000000000000
Folglich	$l11 =$	1,0413926851583
und	$l9 =$	0,9542425094396
Hieraus aber fließt ferner	$l3 =$	0,4771212547198
und	$l99 =$	1,9956351945979

Vier-

Viertes Exempel.

Aus dem jetzt gefundenen tabellarischen Logarithmen der Zahl 99 den tabellarischen Logarithmen von 101 zu finden.

Gebraucht man hier eben die Reihe, deren wir uns bey dem vorhergehenden Exempel bedienten, so erhält man

$$l101 = l99 + 2n\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{3 \cdot 100^3} + \frac{1}{5 \cdot 100^5} + \text{etc.}\right)$$

Setzt man nun für n den erforderlichen Werth, so findet man sehr bald die Summe dieser Reihe $= 0{,}0086861791849$

und addirt man dieselbe zu $l99 = 1{,}9956351945979$

so findet man $l101 = 2{,}0043213637829$

§. 81.

Nun wollen wir y in unserm allgemeinen Ausdrucke einen Exponential-Werth beylegen, und $y = a^x$ setzen, wodurch denn, bey der Substitution von $x + \omega$ für x, $z = a^{x+\omega}$ wird. Da nun in diesem Falle

$$\frac{dy}{dx} = a^x la; \quad \frac{ddy}{dx^2} = a^x (la)^2; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = a^x (la)^3; \text{ etc.}$$

ist, so wird

$$a^{x+\omega} = a^x\left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}\right)$$

und dividirt man diese Gleichung durch a^x, so findet man die Reihe für die Exponential-Größe, die wir schon in der Einleitung Th. 1. Cap. 7. §. 125. kennen gelernt haben, nemlich

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man ω negativ nimmt,

$$a^{-\omega} = 1 - \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1 \cdot 2} - \frac{\omega^3 (la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}$$

Ver-

Verbindet man nun beyde Reihen mit einander, so erhält man

$$\frac{a^{\omega} + a^{-\omega}}{2} = 1 + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6 (la)^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{a^{\omega} + a^{-\omega}}{2} = \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2} + \frac{\omega^5 (la)^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.}$$

Hierbey ist zu merken, daß la den hyperbolischen Logarithmen der Zahl a bedeüte.

§. 82.

Vermittelst dieser Formel kann man zu jedem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl finden. Es sey nemlich irgend ein Logarithme aus einem Systeme gegeben, worin $la = 1$ ist. Man suche in eben diesem Systeme den Logarithmen x, der u am nächsten kommt, und nehme $u = x + \omega$. Da nun die Zahl, welche zu dem Logarithmen x gehört, $= y = a^x$ ist, so wird die Zahl, die zu dem Logarithmen $u = x + \omega$ gehört, $= a^{x+\omega} = z$, und folglich

$$z = y(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe wird, da ω eine sehr kleine Zahl ist, sehr stark convergiren, und wir wollen den Gebrauch derselben an einem Beyspiele zeigen.

Exempel.

Man soll die Zahl finden, welche folgender Potestät der 2, $2^{2^{24}}$ gleich ist.

Da $2^{24} = 16777216$ ist, so ist $2^{2^{24}} = 2^{16777216}$ und folglich $l2^{2^{24}} = 16777216\, l2$. Nimmt man nun die gemeinen Logarithmen, so ist

$$l2 = 0{,}30102999566398119521373889$$

und

und der Logarithme der gesuchten Zahl

$$5050445,259733675932039063$$

Die Characteristik dieses Logarithmen zeigt an, daß die gesuchte Zahl aus 5050446 Zifern bestehe, und da diese nicht insgesammt gefunden werden können, so ist es genug die Anfangs-Zifern, die aus der Mantisse, 259733675932039063 $= u$ gefunden werden müssen, anzugeben. Nun findet man aus den Tafeln für die Zahl, deren Logarithme diesem Logarithmen am nächsten kommt, $18 . 101 = 1,818$. Setzt man also diese Zahl $= y$, so hat man

$x = 0,259593878885948644$, und also
$\omega = 0,000139797046090410$. Da nun
$a = 10$ ist, so ist
$la = 2,302585092994045684017991 4$, und
$\omega la = 0,00032189459437298$. Ferner ist
$y = 1,818000000000000000$

$$\frac{\omega la}{1} y = 585204372569020$$

$$\frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} y = 94187062064$$

$$\frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} y = 10106100$$

$$\frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} y = 810$$

$$1818585298569737997$$

Dieses sind die Anfangs-Zifern der gesuchten Zahl, und unter ihnen ist höchstens die letzte der Wahrheit nicht ganz angemessen.

§. 83.

Wir wenden uns zu den transcendenten Größen, die vom Kreise abhangen, und hier sey, so wie immer der Halbmesser

messer des Kreises $= 1$, und y bedeute einen Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, oder es sey $y = A\,\sin.\,x$. Setzt man nun $x + \omega$ für x, so wird $z = A\,\sin\,(x + \omega)$. Um den Werth davon auszudrucken, suche man die Differenzialien von y:

$$\frac{dy}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}}$$

ꝛc.

Hieraus ergiebt sich

$$A\sin.(x+\omega) = A\sin.x + \frac{\omega}{\sqrt{(1 - xx)}} + \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{\omega^4(9x + 6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} + \frac{\omega^5(9 + 72x^2 + 24x^4)}{120(1 - xx)^{\frac{9}{2}}} + \text{ꝛc.}$$

§. 84.

Wenn also der Bogen bekannt ist, dessen Sinus $= x$ ist, so kann man vermittelst dieser Formel den Bogen finden, zu dem der Sinus $x + \omega$ gehört, wenn ω eine sehr kleine Größe ist. Die Summe der Reihe, welche man hinzu addiren muß, wird zwar in Theilen des Halbmessers ausgedruckt, indeß läßt sie sich leicht auf einen Bogen reduciren, wie folgendes Exempel zeigen wird.

Exem-

Exempel.

Man soll den Kreisbogen finden, dessen Sinus

$$= \tfrac{1}{3} = 0,3333333333$$

ist.

Man suche aus den Sinus-Tafeln den Bogen, dessen Sinus zunächst kleiner als $\frac{1}{3}$ ist, und dies ist der Bogen von $19^{0}, 28^{I}$, dessen Sinus $= 0,3332584$ ist. Man setze also $19^{0}, 28^{I}, = A\,\text{sin}.\,x = y$, so wird $x = 0,3332584$, $\omega = 0,0000749$, und $\sqrt{(1 - xx)} = \text{cos}.\,y = 0,9428356$. Es ist also der gesuchte Bogen z, dessen Sinus $= \frac{1}{3}$ gegeben ist,

$$= 19^{0}, 28^{I} + \frac{\omega}{\text{cos}.\,y} + \frac{\omega^2\,\text{sin}.\,y}{2\,.\,\text{cos}.\,y^3}.$$

Denn dieser Ausdruck ist schon hinlänglich. Es ist aber, um mit den Logarithmen zu rechnen,

$$l\omega = 5,8744818$$

$$l\,\text{cos}.\,y = \underline{9,9744359}$$

$$l\frac{\omega}{\text{cos}.\,y} = 5,9000459;\quad \frac{\omega}{\text{cos}.\,y} = 0,0000794412$$

$$l\frac{\omega^2}{\text{cos}.\,y} = 1,8000918$$

$$l\frac{\text{sin}.\,y}{\text{cos}.\,y} = \underline{9,5483452}$$

$$1,3484370$$

$$l2 = \underline{0,3010300}$$

$$l\frac{\omega^2\,\text{sin}.\,y}{2\,\text{cos}.\,y^3} = 1,0474070;\quad \frac{\omega^2\,\text{sin}.\,y}{2\,\text{cos}.\,y^3} = \underline{0,0000000011}$$

$$\text{Summe} = 0,0000794423$$

und dieses ist der Werth des Bogens, der zu $19^{0}, 28^{I}$ addirt werden muß. Um denselben in Secunden auszudrucken, nehme man seinen Logarithmen, nemlich

5,9000518

$$\begin{array}{lr} & 5{,}9000518 \\ \text{und ziehe davon ab} & \underline{4{,}6855749} \\ \text{so bleibt} & 1{,}2144769 = 116{,}38615 \end{array}$$

Diese Zahl zeigt die Secunden an; druckt man aber den Bruch in Tertien und Quarten u. s. f. aus, so wird der gesuchte Bogen

$$= 19^{0},\ 28^{I},\ 16^{II},\ 23^{III},\ 10^{IV},\ 8^{V},\ 24^{VI}.$$

§. 85.

Auf ähnliche Art läßt sich ein Ausdruck für die Cosinus finden. Setzt man nemlich $y = A\cos.x$, so bleibt, da $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ist, die vorhergehende Reihe bis auf die Zeichen unverändert, und es ist daher

$$A\cos.(x+\omega) = A\cos x - \frac{\omega}{\sqrt{(1-x)}} - \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} - \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} - \text{rc.}$$

Diese Reihe convergirt eben so wie die vorhergehende allezeit sehr stark, wenn man aus den Sinus-Tafeln den nächsten Winkel nimmt, so daß meistentheils das erste Glied $\frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}}$ hinreicht. Wenn indeß x der Einheit oder dem Sinus Totus sich sehr nähert, so hört die Reihe, wegen der Kleinheit ihrer Nenner, auf, zu convergiren, und in diesem Falle bedient man sich, da die Differenzen sehr klein werden, besser der gewöhnlichen Interpolation.

§. 86.

Nun bedeute y einen Bogen, dessen Tangente gegeben ist, oder es sey $y = A\,\text{tang.}\,x$, und $z = A\,\text{tang.}\,(x+\omega)$; folglich

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \text{etc.}$$

Um diese Glieder zu finden, suche man die Differenzialien von y, nemlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+xx)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2+6xx}{(1+xx)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+xx)^4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24-240x^2+120x^4}{(1+xx)^5}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{-720x+2400x^3-720x^5}{(1+xx)^6}$$

Nachdem man diese Differenzialien gefunden, so ist

$$A\tan(x+\omega) = A\tan x +$$

$$\frac{\omega}{1(1+xx)} - \frac{\omega^2 x}{(1+xx)^2} + \frac{\omega^3}{(1+xx)^3}(xx-\tfrac{1}{3}) - \frac{\omega^4}{(1+xx)^4}(x^3-x) +$$

$$\frac{\omega^5}{(1+xx)^5}(x^4-2x^2+\tfrac{1}{5}) - \frac{\omega^6}{(1+xx)^6}(x^5-\tfrac{10}{3}x^3+x) + \text{etc.}$$

§. 87.

Es kann aber diese Reihe, deren Fortschreitungs-Gesetz nicht leicht zu erkennen ist, in eine andere verwandelt werden, wobey dieses Gesetz sogleich in die Augen fällt. Man setze zu dem Ende $A\tan x = 90^\circ - u$, so daß $x = \cot u = \frac{\cos. u}{\sin. u}$ sey: so wird $1+xx = \frac{1}{\sin. u^2}$ und folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx} = \sin. u^2$. Da ferner $dx = \frac{-du}{\sin. u^2}$, oder $du = -$

$= - dx\sin.u^2$ ist, so bekommt man bey fortgesetzter Differenziation

$$\frac{ddy}{dx} = 2du\sin.u\cos.u = du\sin.2u = -dx\sin.u^2\sin.2u$$

$$\text{folglich } \frac{ddy}{1dx^2} = + \sin.u^2.\sin.2u.$$

$$\frac{d^3y}{2dx^2} = - du\sin.u.\cos.u.\sin.2u - du.\sin.u^2.\cos.2u =$$

$$- du\sin u.\sin 3u = dx\sin u^3\sin.3u,$$

$$\text{folglich } \frac{d^3y}{1.2.dx^3} = + \sin u^3.\sin.3u.$$

$$\frac{d^4y}{1.2.3dx^3} = du\sin u^2(\cos.u.\sin.3u + \sin.u.\cos.3u) =$$

$$du\sin u^2.\sin.4u = - dx\sin u^4.\sin 4u,$$

$$\text{folglich } \frac{d^4y}{1.2.3dx^4} = - \sin.u^4.\sin.4u.$$

$$\frac{d^5y}{1.2.3.4dx^4} = - du\sin u^3(\cos u.\sin.4u + \sin.u.\cos.4u) =$$

$$- du\sin u^3.\sin 5u = + dx\sin u^5.\sin.5u$$

$$\text{folglich } \frac{d^5y}{1.2.3.4dx^5} = + \sin u^5.\sin.5u.$$

2c.

Hieraus aber kann man folgern

$$A.tg.(x+\omega) = A tg x + \frac{\omega}{1}\sin.u.\sin.u - \frac{\omega^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u$$

$$+ \frac{\omega^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u - \frac{\omega^4}{4}\sin.u^4.\sin.4u + \frac{\omega^5}{5}\sin.u^5.\sin.5u$$

$$- \frac{\omega^6}{6}\sin.u^6.\sin.6u + 2c.$$

wo, da $A tg x = y$ und $A tg x = 90^0 - u$ ist, $y = 90^0 - u$ seyn wird.

§. 88.

Wenn $A\cot x = y$ und $A\cot(x+\omega) = z$ gesetzt wird, so ist

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Da aber $dy = \frac{-dx}{1+xx}$ ist, so stimmen die Glieder dieser Reihe mit den vorhin gefundenen bis auf die Zeichen zusammen. Setzt man daher wie vorhin $A\tang x = 90^\circ - u$, oder $A\cot x = u$, so daß $u = y$ ist, so wird

$$A\cot(x+\omega) = A\cot x - \frac{\omega}{1}\sin.u.\sin.u + \frac{\omega^2}{2}\sin.u^2.\sin 2u$$
$$- \frac{\omega^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u + \frac{\omega^4}{4}\sin.u^4.\sin.4u - \frac{\omega^5}{5}\sin.u^5.\sin.5u + \text{etc.}$$

Dieser Ausdruck folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden. Denn da $A\cot(x+\omega) = 90^\circ - A\tang(x+\omega)$ und $A\cot.x = 90^\circ - A\tang.x$ ist, so ist $A\cot.(x+\omega) - A\cot.x = - A\tang(x+\omega) + A\tang.x$

§. 89.

Aus diesen Ausdrücken lassen sich viele sehr schöne Folgerungen herleiten, wenn man für x und ω gegebene Werthe setzt. Es sey zuvörderst $x = 0$. Da $u = 90^\circ - A\tang x$ ist, so wird alsdann $u = 90^\circ$; $\sin.u = 1$; $\sin.2u = 0$; $\sin.3u = -1$; $\sin.4u = 0$; $\sin.5u = 1$; $\sin.6u = 0$; $\sin.7u = -1$; ꝛc., und folglich

$$A\tang.\omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \frac{\omega^9}{9} - \frac{\omega^{11}}{11} + \text{etc.}$$

welches die bekannte Reihe für den Bogen ist, dessen Tangente $= \omega$ ist. Ferner sey $x = 1$, wo denn $A\tang.x = 45^\circ$, und also $u = 45^\circ$, und $\sin.u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.2u = 1$; $\sin.3u$

=

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.4u = 0$; $\sin.5u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.6u = -1$;

$\sin.7u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.8u = 0$; $\sin.9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; ꝛc. wird.

Hieraus erhält man

$$A\tang(1 + \omega) = 45^\circ + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \frac{\omega^7}{7.16} + \frac{\omega^9}{9.32} - \frac{\omega^{10}}{10.32} + \frac{\omega^{11}}{11.64} - \frac{\omega^{13}}{13.128} + \frac{\omega^{14}}{14.128} - \text{ꝛc.}$$

Nun sey $\omega = -1$, so wird $A\tang(1 + \omega) = 0$, und $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, und folglich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.1} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{10.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man diesen Werth anstatt des Bogens von 45° in jenen Ausdruck, so bekommt man $A\tang(1 + \omega) =$

$$\frac{\omega+1}{1.2} - \frac{\omega^2+1}{2.2} + \frac{\omega^3+1}{3.2^2} - \frac{\omega^5-1}{5.2^3} + \frac{\omega^6-1}{6.2^3} - \frac{\omega^7-1}{7.2^4} + \text{ꝛc.}$$

Es ist aber jene Reihe sehr bequem, um den Werth von $\frac{\pi}{4}$ näherungsweise zu finden.

§. 90. a.

Da

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5\,2^3} - \frac{6}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{ꝛc.}$$

ist, die Glieder aber, in deren Nennern die Zahlen 2, 6, 10, ꝛc. vorkommen, nemlich $\frac{1}{2.2} - \frac{1}{6.2^3} + \frac{1}{10.2^5} - \frac{1}{14.2^7}$

 + ꝛc.

$+$ ꝛc., den Bogen $\frac{1}{2}\,\mathrm{Atg}\,\frac{1}{2}$ ausdrucken: so ist

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Atg}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{11.2^6} + \text{ꝛc.}$$

Nun erhält man aus der zweyten Formel, wenn man darin ω negativ nimmt,

$$\mathrm{Atg.}(1-\omega) = \left\{ \begin{aligned} & + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{ꝛc.} \\ & - \frac{\omega}{1.2} - \frac{\omega^2}{2.2} - \frac{\omega^3}{3.2^2} + \frac{\omega^5}{5.2^3} + \frac{\omega^6}{6.2^3} + \frac{\omega^7}{7.2^4} - \text{ꝛc.} \end{aligned} \right.$$

und setzt man also $\omega = \frac{1}{2}$, so wird

$$\mathrm{Atg.}\tfrac{1}{2} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{ꝛc.} \\ & - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{2.2^3} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{6.2^9} + \frac{1}{7.2^{11}} - \text{ꝛc.} \end{aligned} \right.$$

Nimmt man hier die durch 2, 6, 10, ꝛc. getheilten Glieder besonders, so wird

$$\begin{aligned} \mathrm{Atg.}\tfrac{1}{2} = {} & \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Atg.}\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \text{ꝛc.} \\ & - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Atg.}\tfrac{1}{2} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \mathrm{Atg.}\tfrac{1}{2} = {} & \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{ꝛc.} \\ & - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Atg.}\tfrac{1}{8} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Setzt

Setzt man aber diesen Werth in die obige Reihe, und druckt man dabey auch $A tg. \frac{1}{8}$ durch eine Reihe aus, so erhält man

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3.2^1} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} + \frac{1}{9.2^4} + \text{ꝛc.} \\ -\frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \text{ꝛc.} \\ -\frac{1}{1.2^4} + \frac{1}{3.2^{10}} - \frac{1}{5.2^{16}} + \frac{1}{7.2^{22}} - \frac{1}{9.2^{28}} + \text{ꝛc.} \end{cases}$$

§. 90. b.

Diese und viele andere Reihen erhält man, wenn man $x = 1$ setzt. Nimmt man aber $x = \sqrt{3}$, so daß $A tang. x = 60^\circ$ wird: so ist $u = 30^\circ$, $\sin. u = \frac{1}{2}$; $\sin. 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 1$; $\sin. 4u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 5u = \frac{1}{2}$; $\sin. 6u = 0$; $\sin. 7u = -\frac{1}{2}$; ꝛc. und folglich

$$A tang. (\sqrt{3} + \omega) = 60^\circ + \frac{\omega}{1.2^2} - \frac{\omega^2\sqrt{3}}{2.2^3} + \frac{\omega^3}{3.2^3} - \frac{\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5} + \frac{\omega^5}{5.2^6} - \frac{\omega^7}{7.2^8} + \frac{\omega^8\sqrt{3}}{8.2^9} - \frac{\omega^9}{9.2^9} + \frac{\omega^{10}\sqrt{3}}{10.2^{11}} - \frac{\omega^{11}}{11.2^{12}} + \text{ꝛc.}$$

Und setzt man $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so daß $A tg. x = 30^\circ$ ist, so wird $u = 60^\circ$; $\sin. u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 3u = 0$; $\sin. 4u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 5u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 6u = 0$; $\sin. 7u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ꝛc., und folglich

$$A tg. \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \omega\right) = 30^\circ + \frac{3\omega}{1.2^2} - \frac{3\omega^2\sqrt{3}}{2.2^3} + \frac{3^2\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5} - \frac{3^3\omega^5}{5.2^6} + \text{ꝛc.}$$

Ist also $\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, so wird, weil $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ist,

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.2^3} - \frac{1}{4.2^5} - \frac{1}{5.2^6} + \frac{1}{7.2^8} + \frac{1}{8.2^9} - \text{etc.}$$

§. 91.

Nun wollen wir den §. 87. gefundenen allgemeinen Ausdruck

$$\text{A tang.}(x + \omega) = \text{A tang.}\, x$$
$$+ \frac{\omega}{1}\sin.u.\sin.u - \frac{\omega^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u + \frac{\omega^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u$$
$$- \text{etc.}$$

wieder zur Hand nehmen, und $\omega = -x$ setzen, so daß $\text{A tang.}(x + \omega) = 0$ wird. Dadurch erhält man

$$\text{A tang.}\, x =$$
$$\frac{x}{1}\sin.u.\sin.u + \frac{x^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u + \frac{x^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u + \text{etc.}$$

Da aber $\text{A tang.}\, x = 90^\circ - u = \frac{\pi}{2} - u$, so ist $x = \cot.u$ $= \frac{\cos.u}{\sin.u}$ und folglich

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos.u.\sin.u + \tfrac{1}{2}\cos.u^2.\sin.2u + \tfrac{1}{3}\cos.u^3.\sin.3u +$$
$$\tfrac{1}{4}\cos.u^4.\sin 4u + \text{etc.}$$

Diese Reihe ist um so merkwürdiger, da der Werth derselben, man mag für u einen Bogen annehmen, was für einen man will, immer unverändert $\frac{\pi}{2}$ bleibt. Setzt man hingegen $\omega = -2x$, so wird, weil $\text{A tang.}(-x) = -\text{A tang.}\, x$ ist

$$2\,\text{A tang.}\, x =$$
$$\frac{2x}{1}\sin.u.\sin.u + \frac{4x^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u + \frac{8x^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u + \text{etc.}$$

Da

Da nun $A\,tang.\,x = \frac{\pi}{2} - u$, und $x = \frac{cos.u}{sin.u}$ ist, so wird

$$\pi = 2u + \frac{2}{1} cos.u \,.\, sin\,u + \frac{2^2}{2} cos.u^2 \,.\, sin.2u + \frac{2^3}{3} cos.u^3 \,.\, sin.3u + \text{etc.}$$

Es sey $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, so ist $cos.u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $sin.u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin.2u = 1$; $sin.3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $sin.4u = 0$; $sin.5u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$;

$sin.6u = -1$; $sin.7u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $sin.8u = 0$; $sin.9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

und folglich

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^3}{6} - \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} + \frac{2^5}{10} + \frac{2^5}{11} - \text{etc.}$$

Ob nun dieses gleich eine divergirende Reihe ist, so verdient sie doch wegen ihrer Einfachheit bemerkt zu werden.

§. 92.

Setzt man in dem gefundenen allgemeinen Ausdrucke $\omega = -x - \frac{1}{x} = \frac{-1}{sin.u \,.\, cos.u}$, weil $x = \frac{cos.u}{sin.u}$ ist: so wird

$$A\,tang.(x + \omega) = A\,tang. - \frac{1}{x} = - A\,tang.\,\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + A\,tang.\,x.$$

Hierdurch erhält man also folgenden Ausdruck:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{sin.u}{1\,cos.u} + \frac{sin.2u}{2\,cos.u^2} + \frac{sin.3u}{3\,.\,cos.u^3} + \frac{sin.4u}{4\,cos.u^4} + \frac{sin.5u}{5\,.\,cos.u^5} + \text{etc.}$$

und diese Reihe giebt, wenn man darin $u = 45^\circ$ setzt, eben die Reihe, die wir zuletzt gefunden haben. Setzt man aber $\omega = -\sqrt{(1 + xx)}$, so wird, weil $x = \frac{cos.u}{sin.u}$ ist, $\omega = -\frac{1}{sin.u}$, und

$$\mathrm{Atang.}(x - \sqrt{(1+xx)}) = -\mathrm{Atang.}(\sqrt{(1+xx)} - x) =$$

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{Atang.}\frac{1}{x} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Atang.}x\right) = -\tfrac{1}{2}u, \text{ und}$$

$$\mathrm{Atang.}\, x = \frac{\pi}{2} - u.$$

Hierdurch findet man

$$\frac{\pi}{2} = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{1}\sin.u + \tfrac{1}{2}\sin.2u + \tfrac{1}{3}\sin.3u + \tfrac{1}{4}\sin.4u + \text{etc.}$$

und differenzirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$0 = \tfrac{1}{2} + \cos.u + \cos.2u + \cos.3u + \cos.4u + \cos.5u + \text{etc.}$$

eine Reihe, deren Beschaffenheit aus der Natur der wiederkehrenden Reihen erkannt wird.

§. 93.

Auf eine ähnliche Art lassen sich auch durch die Differenziation der übrigen vorhin gefundenen Reihen neue summirbare Reihen erhalten. Zuvörderst folgt aus der Reihe

$$\mathrm{Atang.}(1+\omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \text{etc.}$$

diese:

$$\frac{1}{2+2\omega+\omega^2} = \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^5}{8} - \frac{\omega^6}{16} + \frac{\omega^8}{32} - \text{etc.}$$

welche sich aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{2-2\omega+\omega^2}{4+\omega^4} = \frac{1}{2+2\omega+\omega^2}$ ergiebt. Hiernächst folgt aus der Reihe

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos.u\,.\,\sin.u + \tfrac{1}{2}\cos.u^2\,.\,\sin.2u + \tfrac{1}{3}\cos.u^3\,.\,\sin.3u +$$

$$\cos.u^4\,.\,\sin.4u + \text{etc.}$$

durch die Differenziation

$$0 = 1 + \cos.2u + \cos.u.\cos.3u + \cos.u^2.\cos.4u + \cos.u^3.\cos.5u$$

$$+ \text{etc.}$$

Endlich

Endlich giebt die Reihe

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin.u}{\cos.u} + \frac{\sin.2u}{2\cos.u^2} + \frac{\sin.3u}{3\cos.u^3} + \frac{\sin.4u}{4\cos.u^4} + \text{ꝛc.}$$

auf eben dem Wege

$$0 = \frac{1}{\cos.u^2} + \frac{\cos.u}{\cos.u^3} + \frac{\cos.2u}{\cos.u^4} + \frac{\cos.3u}{\cos.u^5} + \frac{\cos.4u}{\cos.u^6} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$0 = 1 + \frac{\cos.u}{\cos.u} + \frac{\cos.2u}{\cos.u^2} + \frac{\cos.3u}{\cos.u^3} + \frac{\cos.4u}{\cos.u^4} + \text{ꝛc.}$$

§. 94.

Es ist aber der §. 87. gefundene Ausdruck:

$$A\,\text{tang.}(x + \omega) =$$

$$A\,\text{tg.}x + \frac{\omega}{1}\sin u.\sin.u - \frac{\omega^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u + \frac{\omega^3}{3}\sin u^3.\sin.3u - \text{ꝛc.}$$

wenn $x = \cot.u$, oder $u = A\cot.x = 90^\circ - A\,\text{tang.}x$ ist, sehr nützlich, um zu einer jeden gegebenen Tangente den zugehörigen Bogen oder Winkel zu finden. Denn ist die Tangente $= t$ gegeben, und hat man aus den Tafeln, die ihr am nächsten kommende Tangente $= x$ gefunden, die zu dem Bogen $= y$ gehört, so ist $u = 90^\circ - y$. Setzt man also $x + \omega = t$, oder $\omega = t - x$, so ist der gesuchte Bogen

$$= y + \frac{\omega}{1}\sin.u.\sin.u - \frac{\omega^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u + \text{ꝛc.}$$

Diese Regel ist dann vorzüglich nützlich, wenn die Tangente sehr groß ist, und folglich der gesuchte Bogen nicht viel von 90° unterschieden ist, weil in diesen Fällen die gewöhnliche Interpolations-Methode wegen des großen Zuwachses, den die Tangenten bekommen, zu sehr von der Wahrheit abführt. Wir wollen daher diese Regel durch ein Exempel erläutern.

Exem-

Exempel.

Den Bogen zu finden, dessen Tangente = 100 ist, wenn der Radius = 1 gesetzt wird.

Der Bogen, der dem gesuchten am nächsten kommt, ist $89°, 25'$, und seine Tangente ist $x = 98,217943$

Zieht man sie ab von $t = 100,$

so bleibt $\omega = 1,782057$

Da ferner $y = 89°, 25'$ ist, so ist $u = 0°, 35'$; $2u = 1°, 10'$; $3u = 1°, 45'$; ꝛc. Um nun die einzelnen Glieder vermittelst der Logarithmen zu finden, so addire man

$$
\begin{aligned}
\text{zu}\quad l\omega &= 0,2509215\\
l\sin. u &= 8\,0077867\\
l\sin. u &= 8,0077867; \text{ dadurch wird}\\
\hline
l\omega.\sin. u.\sin. u &= 6\,2664949.
\end{aligned}
$$

Zieht man hievon ab $4\,6855749$, so findet man

$1,5809200$, und es ist folglich

$\omega.\sin. u.\sin. u = 38,09956$ Secunden.

Ferner addire man

$$
\begin{aligned}
\text{zu}\quad l\omega \sin. u^2 &= 6,2664949\\
l\omega &= 0,2509215\\
l\sin. 2u &= 8,3037941\\
\hline
&\ 4,8262105, \text{ ziehe}\\
\text{hievon ab}\quad l2 &= 0,3010300, \text{ so wird}\\
\hline
l\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin. u^2.\sin. 2u &= 4,5251805.
\end{aligned}
$$

Zieht man hievon ab $4,6855749$, so bleibt

$9,8396056$, und es ist folglich

$\frac{1}{2}\omega^2 \sin. u^2.\sin. 2u = 0,69120$ Secunden.

Nun

Nun addire man

$$\text{zu} \quad l\,\omega^3 = 0{,}7527645$$
$$l\,\sin u^3 = 4{,}0233601$$
$$l\,\sin 3u = 8{,}4848479$$

3,2609725, ziehe

hievon ab $l\,3 = 0{,}4771213$, so wird

$$l\tfrac{1}{3}\,\omega^3 \sin u^3 . \sin 3u = 2{,}7838512.$$

Zieht man hievon ab 4,6855749, so bleibt

8,0982763, und es ist folglich

$$\tfrac{1}{3}\,\omega^3 \sin u^3 . \sin 3u = 0{,}01254 \text{ Secunden.}$$

Endlich addire man

$$\text{zu} \quad l\,\omega^4 = 1{,}0036860$$
$$l\,\sin u^4 = 2{,}0311468$$
$$l\,\sin 4u = 8{,}6097341$$

1,6445669, ziehe

hievon ab $l\,4 = 0{,}6020600$, so wird

$$l\tfrac{1}{4}\,\omega^4 \sin u^4 . \sin 4u = 1{,}0425069.$$

Zieht man hievon ab 4,6855749, so bleibt

6,3569320, und es ist folglich

$$\tfrac{1}{4}\,\omega^4 \sin u^4 . \sin 4u = 0{,}00023 \text{ Secunden.}$$

Es sind also

die positiven Glieder	die negativen Glieder
38,09956	0,69120
0,01254	0,00023
38,11210	0,69143

subtr. 0,69143

$37{,}42067 = 37^{\mathrm{II}},\ 25^{\mathrm{III}},\ 14^{\mathrm{IV}},\ 24^{\mathrm{V}},\ 36^{\mathrm{VI}}.$

Es

Es enthält also der Bogen, dessen Tangente hundertmal so groß ist als der Radius, =

$$89^{0},\ 25^{I},\ 37^{II},\ 25^{III},\ 14^{IV},\ 24^{V},\ 36^{IV}$$

und dabey kann der Fehler sich nicht bis auf die Quarten, sondern bloß auf die Quinten erstrecken, so daß derselbe gewiß $89^{0}, 25^{I}, 37^{II}, 25^{III}, 14^{IV}$ enthält. Wird eine größere Tangente gegeben, so läßt sich der Bogen, wenn gleich . größer wird, dennoch leicht finden, weil der Winkel u dabey kleiner wird.

§. 95.

So wie wir bisher für y einen Kreisbogen gesetzt haben, so wollen wir nun dafür die reciproken Funktionen annehmen, dergleichen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, ꝛc. sind. Es sey also $y = \sin x$. Setzt man dabey $x + \omega$ für x, so wird $z = \sin(x + \omega)$, und die Gleichung

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

giebt, da $\frac{dy}{dx} = \cos x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$; ꝛc. ist,

$$\sin(x + \omega) = \sin x + \omega\cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2\sin x - \tfrac{1}{6}\omega^3\cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4\sin x + \text{ꝛc.}$$

und wenn man ω negativ nimmt,

$$\sin(x - \omega) = \sin x - \omega\cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2\sin x + \tfrac{1}{6}\omega^3\cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4\sin x - \text{ꝛc.}$$

Setzt man hingegen $y = \cos x$, so wird, weil $\frac{dy}{dx} = -\sin x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\cos x$; $\frac{d^4y}{dx^3} = \sin x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \cos x$; ꝛc. ist,

$$\cos(x + \omega) = \cos x - \omega\sin x - \tfrac{1}{2}\omega^2\cos x + \tfrac{1}{6}\omega^3\sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4\cos x - \text{ꝛc.}$$

und wenn man ω negativ nimmt,

$$\cos.(x-\omega) = \cos.x + \omega \sin.x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos.x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin.x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \cos.x + \text{rc.}$$

§. 96.

Der Nutzen, den diese Formeln bey Verfertigung und Interpolirung der Tafeln der Sinus und der Cosinus leisten, ist außerordentlich groß. Denn kennt man den Sinus und Cosinus irgend eines Bogens x, so kann man daraus mit leichter Mühe die Sinus und Cosinus der Winkel $x+\omega$ und $x-\omega$ finden, wenn ω klein genug ist, denn in diesem Falle convergiren die gefundenen Reihen stark. Man muß aber dabey ω in Theilen des Halbmessers ausdrucken, wozu man die nöthigen Einheiten aus der Division der Zahl

$$3{,}14159265358979323846$$

welche den Bogen von 180° ausdruckt, durch 180, und des hierdurch gefundenen Quotienten durch 60 u. s. f. findet. Hierdurch erhält man

$$1^{\circ} = 0{,}017453292519943295769$$
$$1^{I} = 0{,}000290888208665721596$$
$$1^{II} = 0{,}000004848136811095359$$
$$\text{rc.}$$

Erstes Exempel.

Die Sinus und Cosinus der Winkel von 45°, 1^{I}, und 44°, 59^{I} aus dem Sinus und Cosinus des Winkels von 45° zu finden, die beyde

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071067811865 \text{ sind,}$$

Da

Da also

$$\sin. x = \cos. x = 0{,}7071067811865, \text{ und}$$
$$\omega = 0{,}0002908882086, \text{ ist,}$$

so suche man, um sich die Multiplicationen zu erleichtern,

$$2\omega = 0{,}0005817764173$$
$$3\omega = 0{,}0008726646259$$
$$4\omega = 0{,}0011635528346$$
$$5\omega = 0{,}0014544410432$$
$$6\omega = 0{,}0017453292519$$
$$7\omega = 0{,}0020362174605$$
$$8\omega = 0{,}0023271056692$$
$$9\omega = 0{,}0026179938779$$

Hiernach findet man $\omega \sin. x$ und $\omega \cos. x$ auf folgende Art:

7	0,00020362174605
0	. . . . .
7	0,00000203621746
1	2908882
0	. . .
6	174532
7	20362
8	2372
1	29
1	2
8	2
6	0

$$\omega \sin. x = \omega \cos. x = 0{,}00020568902490,$$

folglich, $\frac{1}{2} \omega \cos. x = 0{,}00010284451245.$

Nun

Nun multiplicire man

durch ω.	1 .	0,0000002908882
	0 .	. . .
	2 .	. 58178
	8 .	. 23271
	4 .	. 1164
	4 .	. . 116
	5 .	. . 14

so wird $\frac{1}{2}\omega^2 \cos. x = 0{,}0000002991625$,

und $\frac{1}{6}\omega^2 \cos. x = 0{,}0000000997208$; ferner

durch ω	9 .	0,0000000000262
	9 .	. . 26
	7 .	. . 2

so wird $\frac{1}{6}\omega^3 \cos. x = 0{,}0000000000290$

Um also den Sinus von 45°, 1' zu finden, addire man zu

$$\sin. x = 0{,}7071067811865$$
$$\omega \cos. x = 2056890249$$
$$0{,}7073124702114$$
subtrah. $\frac{1}{2}\omega^2 . \sin x = 299162$
$$0{,}7073124402952$$
und $\frac{1}{6}\omega^3 . \cos. x = 29$

so wird $\sin. 45°, 1' = 0{,}703124402923 = \cos. 44°, 59'$.

Um hingegen den cos. 45', 1' zu bekommen, subtrahire man

von $\cos. x = 0{,}7071067811865$
$$\omega \sin. x = 2056890249$$
$$0{,}7069010921616$$
und $\frac{1}{2}\omega^2 \cos. x = 299162$
$$0{,}7069010622454$$, und
addire $\frac{1}{6}\omega^3 \sin. x = 29$

so findet man $cs. 45°, 1' = 0{,}7069010622483 = \sin. 44°, 59'$.

Zweytes Exempel.

Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus des Bogens von $67^\circ, 30'$ den Sinus und Cosinus der Bogen von $67^\circ, 31'$ und $67^\circ, 29'$ zu finden.

Wir wollen hier die Rechnung nur bis auf sieben Decimal-Theiler Stellen fortführen, als womit man sich in den gemeinen Tafeln zu begnügen pflegt; und so können wir uns dieselbe durch die Logarithmen erleichtern. Da also

$$x = 67^\circ, 30' \text{ und}$$

$$\omega = 0{,}000290888; \text{ so ist } \mathrm{l}\,\omega = 6{,}4637259 \text{ und}$$

$$\begin{array}{rlrl}
\mathrm{l}\sin. x = & 9{,}9656153; & \mathrm{l}\cos x = & 9{,}5828397 \\
\mathrm{l}\,\omega = & 6{,}4637259; & \mathrm{l}\,\omega = & 6{,}4637259 \\
\hline
\mathrm{l}\,\omega \sin. x = & 6{,}4293412; & \mathrm{l}\,\omega \cos. x = & 6{,}0465656 \\
\mathrm{l}\tfrac{1}{2}\omega = & 6{,}1626959; & \mathrm{l}\tfrac{1}{2}\omega = & 6{,}1626959 \\
\hline
\mathrm{l}\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin. x = & 2{,}5920371; & \mathrm{l}\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos. x = & 2{,}2092615
\end{array}$$

folglich

$$\omega \sin. x = 0{,}00026874; \quad \omega \cos. x = 0{,}00011232$$

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin. x = 0{,}00000004; \quad \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos. x = 0{,}00000001$$

und hieraus wird

$$\sin. 67^\circ, 31' = 0{,}9239908; \quad \cos. 67^\circ, 31' = 0{,}3824147$$

$$\sin. 67^\circ, 29' = 0{,}9237681; \quad \cos. 67^\circ, 29' = 0{,}3829522$$

und die Glieder $\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin. x$ und $\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos. x$ hätte man nicht einmal nöthig gehabt.

§. 95. §. 97.

Aus den gefundenen Reihen:

$$\sin. (x + \omega) = \sin. x + \omega \cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin. x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos. x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin. x + \text{ic.}$$

$$\cos. (x + \omega) = \cos x - \omega \sin. x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x + \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin. x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \cos. x - \text{ic.}$$

$$\sin. (x - \omega) = \sin. x - \omega \cos. x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x + \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos. x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x - \text{ic.}$$

$$\cos. (x - \omega) = \cos. x + \omega \sin. x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos. x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin. x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \cos. x + \text{ic.}$$

folgt

folgt durch die Verbindung

$$\frac{\sin.(x+\omega)+\sin.(x-\omega)}{2} =$$

$$\sin.x - \tfrac{1}{2}\omega^2\sin.x + \tfrac{1}{24}\omega^4\sin.x - \tfrac{1}{720}\omega^6\sin.x + \text{rc.} = \sin.x.\cos.\omega$$

und

$$\frac{\sin.(x+\omega)-\sin.(x-\omega)}{2} =$$

$$\omega\cos.x - \tfrac{1}{6}\omega^3\cos.x + \tfrac{1}{120}\omega^5\cos.x - \text{rc.} = \cos.x.\sin.\omega.$$

Hieraus fließen die bereits (im ersten Theile im vierten Capitel §. 201.) gefundenen Reihen.

$$\cos.\omega = 1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{24}\omega^4 - \tfrac{1}{720}\omega^6 + \text{rc.}$$

$$\sin.\omega = \omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{120}\omega^5 - \tfrac{1}{5040}\omega^7 + \text{rc.}$$

und eben diese Reihen erhält man, wenn man $x = 0$ setzt. Denn da $\cos.x = 1$ und $\sin.x = 0$ wird, so giebt die erste Reihe den $\sin.\omega$ und die zweyte den $\cos.\omega$.

§. 98.

Nun sey $y = \text{tang}\,x$, und also $z = \text{tang}.(x+\omega)$. Da

$$y = \frac{\sin.x}{\cos.x};\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos.x^2};\quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{\sin\,x}{\cos.x^3};$$

$$\frac{d^3y}{2dx^3} = \frac{1}{\cos.x^2} + \frac{3\sin.x^2}{\cos.x^4} = \frac{3}{\cos.x^4} - \frac{2}{\cos.x^2};$$

$$\frac{d^4y}{2.4dx^4} = \frac{3\sin.x}{\cos\,x^5} - \frac{\sin.x}{\cos.x^3};$$

$$\frac{d^5y}{2.4dx^5} = \frac{15}{\cos.x^6} - \frac{15}{\cos.x^4} + \frac{2}{\cos.x^2}\ \text{ist:}$$

so wird

$$\text{tang}.(x+\omega) =$$

$$\text{tang}.x + \frac{\omega}{\cos.x^2} + \frac{\omega^2\sin.x}{\cos.x^3} + \frac{\omega^3}{\cos.x^4} + \frac{\omega^4\sin.x}{\cos.x^5}$$

$$- \frac{2\omega^3}{3\cos.x^2} - \frac{\omega^4\sin.x}{3\cos.x^3};$$

und vermittelst dieser Formel lassen sich aus jeder gegebenen Tangente die Tangenten der nächst größern und kleinern Winkel finden. Vermittelst der Anwendung des Lehrsatzes von der Erfindung der Summe einer geometrischen Progression aber bekommt man hieraus, da die erste Reihe eine geometrische enthält,

$$\text{tang.}(x+\omega)=\text{tang.}x+\frac{\omega+\omega^2\,\text{tang.}x}{\text{cos.}x^2-\omega^2}-\frac{2\omega^3}{3\text{cos.}x^2}-\frac{\omega^4\,\text{sin.}x}{3\text{cos.}x^3}\ \text{etc.}$$

oder

$$\text{tang.}(x+\omega)=\frac{\text{sin.}x\,.\,\text{cos.}x+\omega}{\text{cos.}x^2-\omega^2}-\frac{2\omega^3}{3\text{cos.}x^2}-\frac{\omega^4\,\text{sin.}x}{3\text{cos.}x^3}\ \text{etc.}$$

und diese Formel ist zum Gebrauche bequemer.

§. 99.

Aehnliche Ausdrücke lassen sich für die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten finden. Denn ist y = dem Logarithmen des Sinus eines Winkels x, welches man auf diese Art ausdruckt,

$$y=l\,\text{sin.}x$$

und $z=l\,\text{sin.}(x+\omega)$: so ist, weil $\frac{dy}{dx}=\frac{n\,\text{cos.}x}{\text{sin.}x}$,

$$\frac{ddy}{dx^2}=\frac{-n}{\text{sin.}x^2};\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{n\,\text{cos.}x}{\text{sin.}x^3}\ \text{etc.}$$

und folglich

$$z=l\,\text{sin.}(x+\omega)=l\,\text{sin.}x+\frac{n\omega\,\text{cos.}x}{\text{sin.}x}-\frac{n\omega^2}{2\text{sin.}x^2}+\frac{n\omega^3\,\text{cos.}x}{3\text{sin.}x^3}\ \text{etc.}$$

wo n die Zahl bedeutet, mit welcher die hyperbolischen Logarithmen multiplicirt werden müssen, wenn man daraus die gegebenen Logarithmen bekommen will. Ist hingegen

$$y=l\,\text{tang.}x,\ \text{und}\ z=l\,\text{tang.}(x+\omega)$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\sin.x.\cos.x} = \frac{2n}{\sin.2x};\quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{-2n\cos.2x}{(\sin.2x)^2};$$

und folglich

$$l\,\mathrm{tang}.(x+\omega) = l\,\mathrm{tang}.x + \frac{2n\omega}{\sin.2x} - \frac{2n\omega^2\cos.2x}{(\sin.2x)^2}\ ꝛc.$$

und vermittelst dieser Formeln lassen sich die Logarithmen der Sinus und Tangenten interpoliren.

§. 100.

Jetzt wollen wir setzen, y bedeute den Bogen, dessen Sinus den Logarithmen x habe, also $y = A.l\sin.x$, und $z = A.l\sin.(x+\omega)$ annehmen: so ist $x = l\sin.y$, und

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n\cos.y}{\sin.y},\ \text{oder}\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sin.y}{n\cos.y};\ \text{ferner}$$

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{dy}{n\cos.y^2} = \frac{dx\sin.y}{n^2\cos.y^3};\ \text{und}\ \frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin.y}{n^2\cos.y^3};$$

folglich

$$z = y + \frac{\omega\sin.y}{n\cos.y} + \frac{\omega^2\sin.y}{2n^2\cos.y^3} + ꝛc.$$

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn der Logarithme des Cosinus gegeben ist. Ist hingegen

$$y = A.l\,\mathrm{tang}.x,\ \text{und}\ z = A.l\,\mathrm{tang}.(x+\omega)$$

so wird, weil $x = l\,\mathrm{tang}.y$ ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n}{\sin.y.\cos.y},\ \text{und}\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sin.y.\cos.y}{n} = \frac{\sin.2y}{2n}$$

daher denn

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{2dy\cos.2y}{2n} = \frac{dx\sin.2y\cos.2y}{2nn}$$

und

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin.2y\cos.2y}{2nn} = \frac{\sin.4y}{4nn};\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\sin.2y.\cos.4y}{2n^3}\ ꝛc.$$

folglich

$$z = y + \frac{\omega \sin 2y}{2n} + \frac{\omega^2 \sin 2y \,.\, \cos 2y}{4nn} + \frac{\omega^3 \sin 2y \,.\, \cos 4y}{12n^3}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

§. 101.

Da der Gebrauch dieser Formeln bey Verfertigung der Tafeln der Logarithmen der Sinus und der Tangenten aus dem Vorhergehenden abgenommen werden kann, so verweile ich dabey nicht, sondern gehe zur Betrachtung des Falls fort, wo

$$y = e^x \sin nx, \text{ und } z = e^{x+\omega} \sin . n(x+\omega)$$

ist. In diesem Falle hat man

$$\frac{dy}{dy} = e^x(\sin nx + n \cos nx)$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = e^x((1-nn)\sin . nx + 2n \cos . nx)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x((1-3nn)\sin nx + n(3-nn)\cos . nx)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^x((1-6nn+n^4)\sin . nx + n(4-4nn)\cos . nx)$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = e^x((1-10nn+5n^4)\sin nx + n(5-10nn+n^4)\cos . nx).$$

Substituirt man diese Werthe und dividirt darauf durch e^x, so wird

$$e^\omega \sin . n(x+\omega) = \sin . nx + \omega \sin . nx + \frac{(1-nn)}{2}\omega^2 \sin . nx$$
$$+ n\omega \cos . nx + \frac{2n\omega^2}{2} \cos . nx$$
$$+ \frac{(1-3nn)}{6}\omega^3 \sin . nx + \frac{(1-6nn+n^4)}{24}\omega^4 \sin . nx + \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{n(3-nn)}{6}\omega^3 \cos . nx + \frac{n(4-4nn)}{24}\omega^4 \cos . nx + \text{ꝛc.}$$

Aus der großen Menge der wichtigen Folgen, welche sich hieraus herleiten lassen, will ich bloß folgende hersetzen.

Wenn $x = 0$ ist, so ist

$$e^{\omega} \sin. n\omega = n\omega + \frac{2n\omega^2}{2} + \frac{n(3-nn)}{6}\omega^3 + \frac{n(4-4nn)}{24}\omega^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}\omega^5 + \text{ꝛc.}$$

Wenn $\omega = -x$ ist, so wird, weil $\sin. n(x + \omega) = \omega$ ist,

$$\tan g\, nx = \frac{nx - \frac{2n}{2}x^2 + \frac{n(3-nn)}{6}x^3 - \frac{n(4-4nn)}{24}x^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}x^5 - \text{ꝛc}}{1 - x + \frac{1-nn}{2}x^2 - \frac{1-3nn}{6}x^3 + \frac{1-6nn+n4}{24}x^4 - \text{ꝛc.}}$$

Ueberhaupt aber hat man, wenn $n = 1$ ist,

$$e^{\omega}\sin.(x+\omega) = \sin.x(1+\omega-\tfrac{1}{3}\omega^3 - \tfrac{1}{6}\omega^4 - \tfrac{1}{30}\omega^5 + \tfrac{1}{630}\omega^7 + \text{ꝛc.})$$
$$+\,\omega\cos.x(1+\omega+\tfrac{1}{3}\omega^2 - \tfrac{1}{30}\omega^4 - \tfrac{1}{90}\omega^5 - \tfrac{1}{630}\omega^6 + \text{ꝛc.})$$

Wenn aber $n = 0$ wird, so bekommt man, weil $\sin n(x+\omega) = n(x+\omega)$; $\sin nx = nx$; und $\cos. nx = 1$ wird, wenn man allenthalben durch n dividirt,

$$e^{\omega}(x+\omega) = x + \omega x + \tfrac{1}{2}\omega^2 x + \tfrac{1}{6}\omega^3 x + \tfrac{1}{24}\omega^4 x + \text{ꝛc.}$$
$$+\,\omega + \omega^2 + \tfrac{1}{2}\omega^3 + \tfrac{1}{6}\omega^4 + \tfrac{1}{24}\omega^5 + \text{ꝛc.}$$

und die Beschaffenheit dieser Reihe fällt in die Augen.