Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Fünftes Kapitel. Von der Erfindung der Summen der Reihen aus dem allgemeinen Gliede.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52909

Fünftes Capitel.

Von der Erfindung der Summen der Reihen aus dem allgemeinen Gliede.

§. 103.

Es sey y das allgemeine Glied einer Reihe, welches zu dem Anzeiger x gehöre, und also y irgend eine Funktion von x. Ferner sey Sy das summirende Glied dieser Reihe, welches das Aggregat aller Glieder von dem ersten oder einem andern bestimmten Gliede an bis zu y, dieses eingeschlossen, ausdrucke. Dabey wollen wir die Summen der Reihen vom ersten Gliede an rechnen, so daß, wenn $x = 1$ gesetzt wird, y das erste Glied, und Sy ebenfalls dieses erste Glied gebe; hingegen, wenn $x = 0$ angenommen wird, das summirende Glied Sy verschwinde, weil gar keine Glieder summirt werden. Bey diesen Bedingungen ist also das summirende Glied Sy eine solche Funktion von x, die verschwindet, wenn $x = 0$ gesetzt wird.

§. 104.

Wenn das allgemeine Glied y aus mehrern Theilen besteht, und z. B. $y = p + q + r +$ ꝛc. ist: so kann man die Reihe selbst als ein Aggregat aus mehrern Reihen betrachten, welche die allgemeinen Glieder $p, q, r,$ ꝛc. haben. Sind daher die einzeln Summen dieser Reihen bekannt, so läßt sich

sich auch die Summe der gegebenen Reihe angeben, weil sie ein Aggregat aus den Summen der einzelnen Reihen ist. Wenn also $y = p + q + r +$ ꝛc. ist, so ist $Sy = Sp + Sq + Sr +$ ꝛc. Da wir nun oben (im ersten und zweyten Capitel) die Summen der Reihen angegeben haben, deren allgemeine Glieder Potestäten von x mit positiven Exponenten sind: so lassen sich die summirenden Glieder aller Reihen finden, deren allgemeine Glieder unter die Form $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma +$ ꝛc. gehören, wenn α, β, γ, ꝛc. ganze positive Zahlen bedeuten, oder deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind.

§. 105.

Es sey in einer Reihe, deren allgemeines zu dem Anzeiger x gehöriges Glied $= y$ ist, das vor diesem vorhergehende oder zu dem Anzeiger $x - 1$ gehörige Glied $= v$. Da in diesem Falle v aus y entspringt, wenn man $x - 1$ anstatt x setzt, so wird

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

Wenn also y das allgemeine Glied dieser Reihe

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots\ldots\ldots x-1 \quad x \\ a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots + v + y \end{array}$$

und das zu dem Anzeiger o gehörige Glied $= A$ ist: so ist v, als eine Funktion von x, das allgemeine Glied dieser Reihe:

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots\ldots\ldots x \\ A + a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots v \end{array}$$

Wenn also Sv die Summe dieser Reihe bedeutet, so ist $Sv = Sy - y + A$, und es verschwindet Sv, wenn man $x = o$ setzt, weil alsdenn $Sy = o$ und $y = A$ wird.

§. 106.

Da also

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

ist: so hat man nach dem Vorhergehenden

$$Sv = Sy - S\frac{dy}{dx} + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

und, weil $Sv = Sy - y + A$ ist,

$$S\frac{dy}{dx} = y - A + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

Sind daher die summirenden Glieder der Reihen bekannt, deren allgemeine Glieder $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc. sind: so kann man daraus das summirende Glied der Reihe erhalten, deren allgemeines Glied $= \frac{dy}{dx}$ ist. Die Größe A aber muß so beschaffen seyn, daß das summirende Glied $S\frac{dy}{dx}$ verschwinde, wenn $x = 0$ wird; und durch diese Bedingung wird dieselbe weit leichter bestimmt, als wenn man sagte, sie sey das zu 0 gehörige Glied in der Reihe, deren allgemeines Glied y ist.

§. 107.

Aus dieser Quelle schöpft man die Summe der Potestäten der natürlichen Zahlen. Denn es sey

$$y = x^{n+1}$$

Da hier

$$\frac{dy}{dx} = (n+1)x^n;$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}x^{n-1};$$

d^3y

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}x^{n-2};$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}x^{n-3};$$

ꝛc.

ist: so bekommt man, wenn man diese Werthe substituirt,

$$(n+1)Sx^n = x^{n+1} - A + \frac{(n+1)n}{1.2}Sx^{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Sx^{n-2}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

und, wenn man auf beyden Seiten durch $n+1$ dividirt,

$$Sx^n =$$
$$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{n}{2}Sx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2.3}Sx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4}Sx^{n-3}$$
$$- \text{ꝛc.}$$

$- C$ (oder einer beständigen Größe)

und diese beständige Größe muß so angenommen werden, daß das ganze summirende Glied 0 werde, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Vermittelst dieser Formel läßt sich aus den bekannten Summen der niedrigern Potestäten, deren allgemeine Glieder x^{n-1}, x^{n-2}, ꝛc. sind, die Summe der höhern Potestäten finden, welche das allgemeine Glied x^n unter sich begreift.

§. 108.

Wenn n in diesem Ausdrucke eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist die Anzahl der Glieder endlich; und daher ist sogar die Summe unzähliger Potestäten, wenn $n = 0$ ist, absolut bekannt; es ist nemlich

$$S.x^0 = x.$$

Nun kann man aber auch zu den höhern Werthen fortgehen, indem, wenn man $n = 1$ setzt

$$S.x^1 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}Sx^0 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$ wird

und setzt man nach und nach $n = 2, 3, 4,$ ꝛc., so bekommt man

$$S.x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + Sx - \tfrac{1}{3}Sx^0 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$
$$S.x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}Sx^2 - Sx + \tfrac{1}{4}Sx^0 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$$
$$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{4}{2}Sx^3 - \tfrac{4}{2}Sx^2 + Sx - \tfrac{1}{5}Sx^0, \text{ oder}$$
$$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x.$$

ꝛc.

Die folgenden Summen werden indeß durch die ferner zu erklärenden Methoden leichter gefunden.

§. 109.

Da nach dem Vorhergehenden

$$S\frac{dy}{dx} = y + \tfrac{1}{2}S\frac{ddy}{dx^2} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^3y}{dx^3} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^4y}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

ist: so wird, wenn man $\frac{dy}{dx} = z$ setzt,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dz}{dx}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2}; \text{ ꝛc.}$$

und da $dy = zdx$ ist, so wird y eine Größe, die zdx zum Differenziale hat, und dieses zeigt man auf die Art an, daß man

$$y = \int zdx$$

schreibt. Nun setzt zwar die Erfindung der Größe y aus z nach dieser Formel Integral-Rechnung voraus; aber wir können uns gleichwohl dieses Ausdrucks $\int zdx$ bedienen, wenn wir für z keine andere Funktionen von x setzen, als solche, die bey dem Differenziale zdx aus dem Vorhergehenden dargestellt werden können. Also wird

$$Sz = \int zdx + \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

wenn man dazu eine beständige Größe setzt, wobey, wenn $x = 0$ wird, die Summe Sz ebenfalls verschwindet.

§. 110.

Substituirt man aber in dem obigen Ausdrucke anstatt y den Buchstaben z, oder differenziirt man, denn dieses führt eben dahin, die vorhergehende Gleichung: so wird

$$S\frac{dz}{dx} = z + \tfrac{1}{2}S\frac{ddz}{dx^3} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

und setzt man anstatt y den Quotienten $\frac{dz}{dx}$, so bekommt man

$$S\frac{ddz}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^5z}{dx^5} - \text{ꝛc.}$$

Auf ähnliche Art findet man durch die Substitution der Werthe $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; ꝛc.

$$S\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^5z}{dx^5} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^6z}{dx^6} - \text{ꝛc.}$$

$$S\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{d^3z}{dx^3} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^5z}{dx^5} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^6z}{dx^6} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^7z}{dx^7} - \text{ꝛc.}$$

und so ferner ohne Ende.

§. 111.

Wenn nun diese Werthe für $S\frac{dz}{dx}$; $S\frac{ddz}{dx^2}$; $S\frac{d^3z}{dx^3}$; ꝛc. nach und nach in den Ausdruck

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

gebracht werden: so findet man einen Ausdruck für Sz, welcher aus den Gliedern $\int z\,dx$; z; $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; ꝛc. besteht, deren Coefficienten aber leichter auf folgendem Wege erhalten werden. Man setze

$$Sz = \int z\,dx + \alpha z + \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\gamma ddz}{dx^2} + \frac{\delta d^3z}{dx^3} + \frac{\varepsilon d^4z}{dx^4} + \text{ꝛc.}$$

und

und substituire für diese Glieder die Werthe, welche sie aus den vorhergehenden Reihen bekommen: so erhält man

$$\int z\,dx = Sz - \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} + \frac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{120}S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{etc.}$$

$$\alpha z = +\alpha S\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{2}S\frac{ddz}{dx^2} + \frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{\beta dz}{dx} = \beta S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{etc.}$$

$$\frac{\gamma ddz}{dx^2} = \gamma S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{\delta d^3z}{dx^3} = \delta S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{etc.}$$

und da diese Werthe, zusammen addirt, Sz hervorbringen müssen, so werden die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. aus folgenden Gleichungen bestimmt.

$$\alpha - \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120} = 0$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\beta}{24} + \frac{\alpha}{120} - \frac{1}{720} = 0$$

$$\zeta - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720} + \frac{1}{5040} = 0$$

etc.

§. 112.

Aus diesen Gleichungen lassen sich also nach und nach die Werthe aller dieser Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. finden. Sie sind:

$\varepsilon =$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720} = 0$$

ꝛc.

und fährt man auf diese Art weiter fort, so nimmt man wahr, daß immer abwechselnd ein Glied verschwindet. Der dritte, fünfte, siebente Buchstabe, u. s. f., also überhaupt die durch die ungeraden Zahlen ihrer Ordnung nach bestimmten, werden, die erste ausgenommen, $= 0$, so daß daher diese Reihe wider das Gesetz der Continuität zu streiten scheint. Um so nöthiger ist ein strenger Beweis der Behauptung, daß alle ungerade Glieder außer dem ersten verschwinden.

§. 113.

Da die Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. aus den vorhergehenden nach einem beständigen Gesetze bestimmt werden, so bilden sie eine wiederkehrende Reihe. Um dieselbe zu entwickeln, nehme man folgende Reihe an:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{ꝛc.}$$

und setze den Werth derselben $= V$: so ist offenbar, daß diese wiederkehrende Reihe aus der Entwickelung des Bruchs sich ergiebt

$$V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \text{ꝛc.}}$$

und wenn dieser Bruch auf andere Art in eine ohne Ende fortlaufende Reihe, die nach den Potestäten von u fortgeht,

auf-

aufgelöset werden kann, so muß gleichwohl nothwendig immer eben dieselbe Reihe

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{etc.}$$

wieder hervorgebracht werden. Auf diese Art wird sich ein anderes Gesetz die Buchstaben α, β, γ, δ, etc. zu bestimmen darbieten.

§. 114.

Da man, wenn e die Zahl bedeutet, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist,

$$e^{-u} = 1 - u + \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{24}u^4 - \tfrac{1}{120}u^5 + \text{etc.}$$

hat, so ist

$$\frac{1 - e^{-u}}{u} = 1 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{6}u^2 - \tfrac{1}{24}u^3 + \tfrac{1}{120}u^4 - \text{etc.}$$

und daher

$$V = \frac{1}{1 - e^{-u}}$$

Nun bringe man aus jener Reihe $\alpha u = \tfrac{1}{2}u$ weg, so daß

$$V - \tfrac{1}{2}u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{etc.}$$

werde, so hat man

$$U - \tfrac{1}{2}u = \frac{\tfrac{1}{2}u(1 + e^{-u})}{1 - e^{-u}}$$

Man multiplicire ferner den Zähler und Nenner durch $e^{\frac{1}{2}u}$, so wird

$$U - \tfrac{1}{2}u = \frac{u(e^{\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u})}{2(e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u})}$$

und durch die Verwandlung der Größen $e^{\frac{1}{2}u}$ und $e^{-\frac{1}{2}u}$ in Reihen,

$$U - \tfrac{1}{2}u = \frac{1 + \dfrac{u^2}{2.4} + \dfrac{u^4}{2.4.6.8} + \dfrac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \text{etc.}}{2(\tfrac{1}{2} + \dfrac{u^2}{2.4.6} + \dfrac{u^4}{2.4.6.8.10} + \text{etc.}}$$

oder

oder

$$V-\tfrac{1}{2}u=\frac{1+\frac{u^2}{2.4}+\frac{u^4}{2.4.6.8}+\frac{u^6}{2.4\ldots12}+\frac{u^8}{2.4\ldots.16}+\text{ꝛc.}}{1+\frac{u^2}{4.6}+\frac{u^4}{4.6.8.10}+\frac{u^6}{4.6\ldots14}+\frac{u^8}{4.6\ldots.18}+\text{ꝛc.}}$$

§. 115.

Da also in diesem Bruche keine ungeraden Potestäten vorkommen, so können dergleichen auch nicht in dem Ausdrucke seyn, den man daraus durch die Entwickelung erhält. Da also

$$V-\tfrac{1}{2}u=1+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\text{ꝛc.}$$

ist: so müssen die Coefficienten der ungeraden Potestäten γ, ε, η, ι, ꝛc. insgesammt verschwinden. Auf diese Art ist klar, warum in der Reihe

$$1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\text{ꝛc.}$$

die ungeraden Glieder insgesammt $=0$ sind, ohne daß dadurch das Gesetz der Stetigkeit leide. Es ist also

$$V=1+\tfrac{1}{2}u+\beta u^2+\delta u^4+\zeta u^6+\vartheta u^8+\varkappa u^{10}+\text{ꝛc.}$$

und hat man die Buchstaben β, δ, ζ, ϑ, $\varkappa$, ꝛc. durch die Entwickelung des obigen Bruchs bestimmt, so bekommt man das summirende Glied Sz der Reihe, deren allgemeines zu dem Anzeiger x gehöriges Glied z ist, auf folgende Art ausgedruckt:

$$Sz=\int zdx+\tfrac{1}{2}z+\frac{\beta dz}{dx}+\frac{\delta d^3z}{dx^3}+\frac{\zeta d^5z}{dx^5}+\frac{\vartheta d^7z}{dx^7}+\text{ꝛc.}$$

§. 116.

Da die Reihe

$$1+\beta u^2+\delta u^4+\zeta u^6+\vartheta u^8+\varkappa u^{10}+\text{ꝛc.}$$

aus der Entwickelung des folgenden Bruchs entspringt:

$$\frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \text{rc.}}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6.8.10.12.14} + \text{rc.}}$$

so werden die Buchstaben $\beta, \delta, \zeta, \vartheta, \varkappa$, rc. nach dem Gesetze fortgehen, daß

$$\beta = \frac{1}{2.4} - \frac{1}{4.6}$$

$$\delta = \frac{1}{2.4.6.8} - \frac{\beta}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10}$$

$$\zeta = \frac{1}{2.4.6..12} - \frac{\delta}{4.6} - \frac{\beta}{4.6.8.10} - \frac{1}{4.6...14}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2.4.6...16} - \frac{\zeta}{4.6} - \frac{\delta}{4.6.8.10} - \frac{\beta}{4.6...14} - \frac{1}{4.6...18}$$

rc.

ist. Es sind aber diese Werthe abwechselnd positiv und negativ.

§. 117.

Wenn also diese Buchstaben abwechselnd negativ genommen werden, so daß

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2} z - \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\delta d^3 z}{dx^3} - \frac{\zeta d^5 z}{dx^5} + \frac{\vartheta d^7 z}{dx^7} - \text{rc.}$$

ist: so werden die Buchstaben $\beta, \delta, \zeta, \vartheta$, rc. aus folgendem Bruche bestimmt:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \frac{u^8}{2.4...16} - \text{rc.}}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6...14} + \frac{u^8}{4.6...18} - \text{rc.}}$$

wenn man denselben in die Reihe

$$1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \vartheta u^8 + \varkappa u^{10} + \text{rc.}$$

auflöset. Es ist demnach

$\beta =$

$$\beta = \frac{1}{4.6} - \frac{1}{2.4}$$

$$\delta = \frac{\beta}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{4.6} - \frac{\beta}{4.6.8.10} + \frac{1}{4.6\ldots14} - \frac{1}{2.4\ldots12}$$

ꝛc.

allein hier werden alle Glieder negativ.

§. 118.

Wir wollen also $\beta = -A$; $\delta = -B$; $\zeta = -C$; ꝛc. folglich

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{A dz}{dx} - \frac{B d^3 z}{dx^3} + \frac{C d^5 z}{dx^5} - \frac{D d^7 z}{dx^7} + \text{ꝛc.}$$

setzen, und um die Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. zu bestimmen, diese Reihe betrachten:

$$1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - Eu^{10} - \text{ꝛc.}$$

welche aus der Entwickelung des Bruchs:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \frac{u^8}{2.4\ldots16} - \text{ꝛc.}}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6\ldots14} + \frac{u^8}{4.6\ldots18} - \text{ꝛc.}}$$

oder diese:

$$\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ꝛc.} = s,$$

welche aus der Entwickelung des folgenden Bruchs entspringt:

$$s = \frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \text{ꝛc.}}{u - \frac{u^3}{4.6} + \frac{u^5}{4.6.8.10} - \frac{u^7}{4.6\ldots14} + \text{ꝛc.}}$$

 Da

Da aber

$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}u = 1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \text{ꝛc.}$$

und

$$\text{sin.}\tfrac{1}{2}u = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2.4.6} + \frac{u^5}{2.4.6.8.10} - \frac{u^7}{2.4\ldots14} + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$s = \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}u}{2\,\text{sin.}\frac{1}{2}u} = \tfrac{1}{2}\text{cot.}\tfrac{1}{2}u$$

Wenn man daher die Cotangente des Bogens $\frac{1}{2}u$ in eine Reihe verwandelt, deren Potestäten nach den Potestäten von u fortgehen, so lassen sich daraus die Werthe der Buchstaben A, B, C, D, E, ꝛc. erkennen.

§. 119.

Da also $s = \frac{1}{2}\text{cot.}\frac{1}{2}u$ ist, so hat man $\frac{1}{2}u = A.\,\text{cot.}2s$ und differenziirt man, so wird $\frac{1}{2}du = \frac{-2ds}{1+4ss}$, oder $4ds + du + 4ssdu = 0$, oder $\frac{4ds}{du} + 1 + 4ss = 0$. Da aber

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$\frac{4ds}{du} = -\frac{4}{uu} - 4A - 3.4Bu^2 - 5.4Cu^4 - 7.4Du^6 - \text{ꝛc.}$$

$$1 = 1$$

$$4ss = \frac{4}{uu} - 8A - 8Bu^2 - 8Cu^4 - 8Du^6 - \text{ꝛc.}$$
$$+ 4A^2u^2 + 8ABu^4 + 8ACu^6 + \text{ꝛc.}$$
$$+ 4BBu^6 + \text{ꝛc.}$$

und

und bringt man die homogenen Glieder auf o, so bekommt man

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{A^2}{5}$$

$$C = \frac{2AB}{7}$$

$$D = \frac{2AC + BB}{9}$$

$$E = \frac{2AD + 2BC}{11}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{13}$$

$$G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{15}$$

$$H = \frac{2AG + 2BF + 2CE + DD}{17}$$

ꝛc.

und es fällt aus diesen Formeln sehr deutlich in die Augen, daß jeder dieser Werthe positiv sey.

§. 120.

Da aber die Nenner dieser Brüche sehr groß werden, und die Rechnung nicht wenig erschweren, so wollen wir statt der Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. folgende Substitutionen brauchen:

$$A = \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$B = \frac{\beta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$C = \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7}$$

$$D = \frac{\delta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9}$$

$$E = \frac{\varepsilon}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11}$$

rc.

Alsdann findet man

$$\alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$\beta = \tfrac{2}{3}\alpha^2$$

$$\gamma = 2 \cdot \tfrac{3}{3}\alpha\beta$$

$$\delta = 2 \cdot \tfrac{4}{3}\alpha\gamma \quad + \frac{8 \cdot 7}{4 \cdot 5}\beta^2$$

$$\varepsilon = 2 \cdot \tfrac{5}{3}\alpha\delta \quad + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \ldots 5}\beta\gamma$$

$$\zeta = 2 \cdot \frac{12}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha\varepsilon + 2 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \ldots 5}\beta\delta + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \ldots \ldots 7}\gamma\gamma$$

$$\eta = 2 \cdot \frac{14}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha\zeta + 2 \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \ldots 5}\beta\varepsilon + 2 \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \ldots \ldots 7}\gamma\delta$$

rc.

§. 121.

Mit mehrer Bequemlichkeit aber bedient man sich dieser Formeln:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha\alpha}{2}$$

$$\gamma = \frac{6}{3} \cdot \alpha\beta$$

$$\delta = \frac{8}{3} \cdot \alpha\gamma + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{\beta\beta}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{10}{3} \cdot \alpha\delta + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \beta\gamma$$

$\zeta =$

$$\zeta = \frac{12}{3}.\alpha\varepsilon + \frac{12.11.10}{3.4.5}.\beta\delta + \frac{12.11.10.9.8}{3.4.5.6.7}.\frac{\gamma\gamma}{2}$$

$$\eta = \frac{14}{3}.\alpha\zeta + \frac{14.13.12}{3.4.5}.\beta\varepsilon + \frac{14.13.12.11.10}{3.4.5.6.7}.\gamma\delta$$

$$\vartheta = \frac{16}{3}.\alpha\eta + \frac{16.15.14}{3.4.5}.\beta\zeta + \frac{16.15.14.13.12}{3.4.5.6.7}.\gamma\varepsilon + \frac{16.15\ldots.10}{3.4\ldots.9}.\frac{\delta\delta}{2}$$

ꝛc.

Hat man nun nach diesem Gesetze, bey welchem die Rechnung mit keiner Schwierigkeit verknüpft ist, die Werthe der Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. gefunden: so läßt sich das summirende Glied jeder Reihe, deren allgemeines oder dem Anzeiger x zugehöriges Glied $= z$ ist, auf folgende Art ausdrucken:

$$Sz = \int zdx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\alpha dz}{1.2.3dx} - \frac{\beta d^3z}{1.2.3.4.5dx^3} + \frac{\gamma d^5z}{1.2\ldots dx^5} - \frac{\delta d^7z}{1.2\ldots.9dx^7} + \frac{\varepsilon d^9z}{1.2\ldots.11dx^9} - \frac{\zeta d^{11}z}{1.2\ldots.13dx^{11}} + \text{ꝛc.}$$

Was aber die Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. betrifft, so hat man dafür folgende Werthe gefunden:

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad 1.2\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{1}{6} \qquad 1.2.3\beta = 1$$

$$\gamma = \frac{1}{6} \qquad 1.2.3.4\gamma = 4$$

$$\delta = \frac{3}{10} \qquad 1.2.3.4.5\delta = 36$$

$$\varepsilon = \frac{5}{6} \qquad 1.2.3\ldots6\varepsilon = 600$$

$$\zeta = \frac{691}{210} \qquad 1.2.3\ldots7\zeta = 24.691$$

$$\eta = \frac{35}{2} \qquad 1.2.3\ldots8\eta = 20160.35$$

$$\theta = \frac{3617}{30} \qquad 1.2.3\ldots9\theta = 12096.3617$$

$$\iota = \frac{43867}{42} \qquad 1.2.3\ldots10\iota = 86400.43867$$

$$\varkappa = \frac{1222277}{110} \qquad 1.2.3\ldots11\varkappa = 362880.1222277$$

$$\lambda = \frac{854513}{6} \qquad 1.2.3\ldots12\lambda = 79833600.854513$$

$$\mu = \frac{1181820455}{546} \qquad 1.2.3\ldots13\mu = 11404800.1181820455$$

$$\nu = \frac{76977927}{2} \qquad 1.2.3\ldots14\nu = 109109145600.76977927$$

$$\xi = \frac{23749461029}{30} \qquad 1.2.3\ldots15\xi = 43589145600.23749461029$$

$$\pi = \frac{3615841276005}{462} \qquad 1.2.3\ldots16\pi = 45287424000.3615841276005$$

ꝛc.

§. 122.

Diese Zahlen gewähren durch die ganze Lehre von den Reihen hindurch den größten Nutzen. Denn einmal lassen sich daraus die letzten Glieder in den Summen der geraden Potestäten finden, wovon oben (im ersten Theile §. 63.) bemerkt worden ist, daß man sie nicht eben so als die übrigen Glieder aus den Summen der vorhergehenden Potestäten erhalte. Denn bey den geraden Potestäten sind die letzten Glieder der Summen Produkte aus x und gewissen Zahlen, nemlich für die 2te, 4te, 6te, 8te, ꝛc. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, ꝛc. mit abwech abwechselnden Zeichen. Es entspringen aber diese Zahlen aus den Werthen der Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. welche wir vorhin gefunden haben, wenn man dieselben durch die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, ꝛc. dividirt. Uebrigens nennt man dieselben nach dem Namen ihres Erfinders Jacob Bernoulli die Bernouillischen Zahlen, und sie sind:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{6} = \mathfrak{A}$$

$$\frac{\beta}{5} = \frac{1}{30} = \mathfrak{B}$$

$$\frac{\gamma}{7} = \frac{1}{42} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{\delta}{9} = \frac{1}{30} = \mathfrak{D}$$

$$\frac{\varepsilon}{11} = \frac{5}{66} = \mathfrak{E}$$

$$\frac{\zeta}{13} = \frac{691}{2730} = \mathfrak{F}$$

$$\frac{\eta}{15} = \frac{7}{6} = \mathfrak{G}$$

$$\frac{\vartheta}{17} = \frac{3617}{510} = \mathfrak{H}$$

$$\frac{\iota}{19} = \frac{43867}{798} = \mathfrak{I}$$

$$\frac{\varkappa}{21} = \frac{174611}{330} = \mathfrak{K} = \frac{283 \cdot 617}{330}$$

$$\frac{\lambda}{23} = \frac{854513}{138} = \mathfrak{L} = \frac{11 \cdot 131 \cdot 593}{2 \cdot 3 \cdot 23}$$

$$\frac{\mu}{25} = \frac{236364091}{2730} = \mathfrak{M}$$

$$\frac{\nu}{27} = \frac{8553103}{2} = \mathfrak{N} = \frac{13 \cdot 657931}{6}$$

 $\frac{\xi}{29} =$

$$\frac{\mathfrak{\xi}}{29} = \frac{23749461029}{870} = \mathfrak{O}$$

$$\frac{\pi}{31} = \frac{8615841276005}{14322} = \mathfrak{P}$$

ꝛc.

§. 123.

Es lassen sich also die Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ꝛc. unmittelbar aus folgenden Gleichungen finden:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \mathfrak{A}^2$$

$$\mathfrak{C} = \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{2}{9} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \mathfrak{B}^2$$

$$\mathfrak{E} = \frac{10.9}{1.2} \cdot \frac{2}{11} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{11} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2} \cdot \frac{2}{13} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{13} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1}{13} \cdot \mathfrak{C}^2$$

$$\mathfrak{G} = \frac{14.13}{1.2} \cdot \frac{2}{15} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{F} + \frac{14.13.12.11}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{15} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \frac{14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{2}{15} \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

ꝛc.

und das Gesetz dieser Gleichungen ist offenbar, wenn man nur bemerkt, daß da, wo das Quadrat eines Buchstabens vorkommt, der Coefficient nur halb so groß sey, als er nach der Regel seyn zu müssen scheint. Eigentlich aber muß man die

die Glieder, in welchen die Produkte aus ungleichen Buchstaben enthalten sind, als zweymal vorkommend ansehen. Denn es ist z. B.

$$13F = \frac{12.11}{1.2}AE + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}BD + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}CC + \frac{12.11.10\ldots.5}{1.2.3\ldots.8}DB + \frac{12.11.10\ldots3}{1.2.3\ldots10}EA.$$

§. 124.

Dann finden sich die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. auch in den Ausdrücken der Summen derjenigen Bruchreihen, welche unter folgender Formel

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{ꝛc.}$$

begriffen sind, so oft n eine gerade positive Zahl bedeutet. Wir haben die Summen dieser Reihen in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen (im ersten Buche im zehnten Capitel) durch die Potestäten der halben Peripherie π, wobey der Halbmesser $= 1$ gesetzt wurde, ausgedruckt, und daselbst trifft man die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. in den Coefficienten dieser Potestäten. Damit aber dies nicht zufälliger Weise statt zu finden scheine, sondern die Nothwendigkeit davon erhelle, wollen wir eben diese Summen auf einem besondern Wege suchen, wo das Gesetz derselben sich deutlich wird wahrnehmen lassen. Da wir oben (im zweyten Capitel §. 33.) aus der Einleitung gehabt haben,

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{ꝛc.}$$

so ist, wenn man je zwey und zwey Glieder vereinigt,

$\frac{\pi}{n}$

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} - \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} - \text{ꝛc.}$$

und hieraus folgt

$$\frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2mn}\cot.\frac{m}{n}\pi.$$

Nun wollen wir $n = 1$ und anstatt m den Buchstaben u setzen, so daß

$$\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{4-u^2} + \frac{1}{9-u^2} + \frac{1}{16-u^2} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u$$

werde. Löset man diese Brüche in Reihen auf, so bekömmt man

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{u^2}{2^4} + \frac{u^4}{2^6} + \frac{u^6}{2^8} + \frac{u^8}{2^{10}} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{9-u^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{u^2}{3^4} + \frac{u^4}{3^6} + \frac{u^6}{3^8} + \frac{u^8}{3^{10}} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{16-u^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{u^2}{4^4} + \frac{u^4}{4^6} + \frac{u^6}{4^8} + \frac{u^8}{4^{10}} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

§. 125.

Setzt man daher

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.} = a$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.} = b$$

1 +

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{ꝛc.} = c$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{ꝛc.} = d$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \text{ꝛc.} = e$$

ꝛc.

so verwandelt sich die obige Reihe in folgende:

$$a + bu^2 + cu^4 + du^6 + eu^8 + fu^{10} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\text{cot.}\pi u.$$

Da nun §. 118. gefunden worden ist, daß bey den Buchstaben A, B, C, D, ꝛc., wenn man

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ꝛc.}$$

setzt, $s = \frac{1}{2}\text{cot.}\frac{1}{2}u$ wird: so bekommt man, wenn man πu anstatt $\frac{1}{2}u$, oder $2\pi u$ anstatt u setzt,

$$\tfrac{1}{2}\text{cot.}\pi u = \frac{1}{2\pi u} - A\pi u - 2^3B\pi^3u^3 - 2^5C\pi^5u^5 - 2^7D\pi^7u^7 - \text{ꝛc.}$$

und multiplicirt man durch $\frac{\pi}{u}$, so wird

$$\frac{\pi}{2u}\text{cot.}\pi u = \frac{1}{2uu} - 2A\pi^2 - 2^3B\pi^4u^2 - 2^5C\pi^6u^4 - \text{ꝛc.}$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\text{cot.}\pi u = 2A\pi^2 + 2^3B\pi^4u^2 + 2^5C\pi^6u^4 + 2^7D\pi^8u^6 + \text{ꝛc.}$$

Da wir nun so eben gefunden haben, daß

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\text{cot.}\pi u = a + bu^2 + cu^4 + du^6 + \text{ꝛc.}$$

ist, so muß auch nothwendiger Weise seyn

a =

$$\mathfrak{a} = 2A\pi^2 = \frac{2\alpha}{1.2.3} \cdot \pi^2 = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \pi^2$$

$$\mathfrak{b} = 2^3B\pi^4 = \frac{2^3\beta}{1.2.3.4.5} \cdot \pi^4 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \pi^4$$

$$\mathfrak{c} = 2^5C\pi^6 = \frac{2^5\gamma}{1.2.3\ldots7} \cdot \pi^5 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots6} \cdot \pi^6$$

$$\mathfrak{d} = 2^7D\pi^8 = \frac{2^7\delta}{1.2.3\ldots9} \cdot \pi^8 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2\ldots8} \cdot \pi^8$$

$$\mathfrak{e} = 2^9E\pi^{10} = \frac{2^9\varepsilon}{1.2.3\ldots11} \cdot \pi^{10} = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2\ldots10} \cdot \pi^{10}$$

$$\mathfrak{f} = 2^{11}F\pi^{12} = \frac{2^{11}\zeta}{1.2.3\ldots13} \cdot \pi^{12} = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2\ldots12} \cdot \pi^{12}$$

ꝛc.

§. 126.

Auf diese leichte Art lassen sich nicht nur alle Reihen der reciproken Potestäten, welche der vorhergehende §. enthält, schnell summiren, sondern es erhellet zugleich, wie ihre Summen aus den Werthen der Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. oder auch aus den Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, ꝛc. gefunden werden. Da wir also im 122sten §. funfzehn von diesen Zahlen angegeben haben, so lassen sich daraus die Summen aller geraden Potestäten bis auf folgende und zwar selbige mit eingeschlossen erhalten:

$$1 + \frac{1}{2^{30}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{4^{30}} + \frac{1}{5^{30}} + \frac{1}{6^{30}} + \text{ꝛc.}$$

Es ist nemlich die Summe dieser Reihe

$$= \frac{2^{29}\pi}{1.2.3\ldots31}\pi^{30} = \frac{2^{29}\mathfrak{P}}{1.2.3\ldots30}\pi^{30}$$

Will man diese Summen weiter fortsetzen, so ist solches durch die fernere Entwickelung der Buchstaben α, β, γ, ꝛc. oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, ꝛc. leicht.

§. 127.

§. 127.

Die Erfindung der Zahlen α, β, γ, δ, ꝛc. oder der daraus abgeleiteten 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ꝛc. verdanken wir vorzüglich der Entwickelung der Cotangente irgend eines Winkels in eine ohne Ende fortlaufende Reihe. Denn da

$$\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + \text{ꝛc.} = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u.$$

Wenn man also anstatt der Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. die Werthe derselben substituirt, so findet man

$$\frac{\alpha u^2}{1.2.3} + \frac{\beta u^4}{1.2\ldots5} + \frac{\gamma u^6}{1.2\ldots7} + \frac{\delta u^8}{1.2\ldots9} + \text{ꝛc.} = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u,$$

und wenn man die Bernoullischen Zahlen braucht

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2\ldots8} + \text{ꝛc.} = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u.$$

Aus diesen Reihen lassen sich durch die Differenziation unzählige andere herleiten, und so eine Menge von Reihen summiren, in welchen jene merkwürdige Zahlen vorkommen.

§. 128.

Wir wollen die erste Gleichung nehmen und dieselbe durch u multipliciren, so daß

$$\frac{\alpha u^3}{1.2.3} + \frac{\beta u^5}{1.2\ldots5} + \frac{\gamma u^7}{1.2\ldots7} + \frac{\delta u^9}{1.2\ldots9} + \text{ꝛc.} = u - \frac{uu}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u$$

werde.

werde. Differenziirt man und dividirt darauf durch du, so bekommt man

$$\frac{\alpha u^2}{1.2} + \frac{\beta u^4}{1.2.3.4} + \frac{\gamma u^6}{1.2....6} + \frac{\delta u^8}{1.2....8} + \text{ꝛc.} = 1 - u \cot.\tfrac{1}{2}u$$
$$+ \frac{uu}{4(\sin.\frac{1}{2}u)^2}$$

und, wenn man von neuem differenziirt,

$$\frac{\alpha u}{1} + \frac{\beta u^3}{1.2.3} + \frac{\gamma u^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.} = -\cot.\tfrac{1}{2}u + \frac{u}{(\sin.\frac{1}{2}u)^2} -$$
$$\frac{uu\cos.\frac{1}{2}u}{4(\sin.\frac{1}{2}u)^3}.$$

Wenn man hingegen die andere Gleichung differenziirt, so wird

$$\frac{\mathfrak{A}u}{1} + \frac{\mathfrak{B}u^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}u^5}{1.2....5} + \frac{\mathfrak{D}u^7}{1.2....7} = -\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u +$$
$$\frac{u}{4(\sin.\frac{1}{2}u)^2}$$

Setzt man daher $u = \pi$, so wird, weil $\cot.\frac{1}{2}\pi = 0$, und $\sin.\frac{1}{2}u = 1$ ist,

$$1 = \frac{\alpha\pi^2}{1.2.3} + \frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\gamma\pi^6}{1.2.3...7} + \frac{\delta\pi^8}{1.2.3...9} + \text{ꝛc.}$$
$$1 + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\alpha\pi^2}{1.2} + \frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\gamma\pi^6}{1.2.3...6} + \frac{\delta\pi^8}{1.2.3...8} + \text{ꝛc.}$$
$$\pi = \frac{\alpha\pi}{1} + \frac{\beta\pi^3}{1.2.3} + \frac{\gamma\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta\pi^7}{1.2.3...7} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$1 = \alpha + \frac{\beta\pi^2}{1.2.3} + \frac{\gamma\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta\pi^6}{1.2.3...7} + \text{ꝛc.}$$

und zieht man hiervon die erste Gleichung ab, so bekommt man

$$0 = \frac{(\alpha-\beta)\pi^2}{1.2.3} + \frac{(\beta-\gamma)\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(\gamma-\delta)\pi^6}{1.2.3...7} + \text{ꝛc.}$$

Ferner

Ferner ist

$$1 = \frac{\mathfrak{A}\pi^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}\pi^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}\pi^8}{1.2.3\ldots8} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\mathfrak{A}\pi}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^7}{1.2.3\ldots7} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$\frac{1}{4} = \frac{\mathfrak{A}}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^2}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^6}{1.2.3\ldots7} + \text{ꝛc.}$$

§. 129.

Aus der Tafel der Werthe der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. welche wir oben §. 121. mitgetheilt haben, erhellet, daß dieselben im Anfange abnehmen, dann aber wieder wachsen, und zwar ohne Ende. Es wird also der Mühe werth seyn zu untersuchen, in was für einem Verhältnisse diese Zahlen zu wachsen fortfahren, nachdem sie bereits eine sehr beträchtliche Größe erreicht haben. Es sey also φ irgend eine vom Anfange sehr weit entfernte Zahl aus der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. und ψ die unmittelbar darauf folgende. Da durch diese Zahlen die Summen der reciproken Potestäten bestimmt werden, so sey $2n$ der Exponent der Potestät, in dessen Summe sich φ befindet, also $2n + 2$ der Exponent derjenigen Potestät, wozu ψ gehört, und n schon eine sehr große Zahl. Dann hat man aus §. 125.

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{2n-1}\varphi}{1.2.3\ldots(2n+1)}\pi^{2n}$$

$$1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{2n+1}\psi}{1.2.3\ldots(2n+3)}\pi^{2n+2}$$

Dividirt man also diese Reihe durch jene, so findet man

$$\frac{1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \text{ꝛc.}}{1 + \frac{2}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \text{ꝛc.}} = \frac{4\psi}{(2n+2)(2n+3)}\,\frac{\pi^2}{\varphi}$$

Da aber n eine sehr große Zahl und beyde Reihen sehr nahe $= 1$ sind, so wird

$$\frac{\psi}{\phi} = \frac{(2n + 2)(2n + 3)}{4\pi^2} \doteq \frac{nn}{\pi\pi}.$$

Nun zeigt n an, das wievielste Glied die Zahl ϕ von der ersten α angerechnet sey, und es wird sich daher die Zahl ϕ zu der folgenden ψ verhalten wie π^2 zu n^2, und dieses Verhältniß würde, wenn n eine unendlich große Zahl wäre, der Wahrheit vollkommen gemäß seyn. Da also $\pi\pi$ beynahe $= 10$ ist, so wird, wenn man $n = 100$ setzt, das hundertste Glied ohngefähr 1000mal kleiner als das folgende. Es bilden also die Zahlen α, β, γ, δ, ꝛc. so wie auch die Bernoullischen A, B, C, D, ꝛc. eine sehr divergirende Reihe, die selbst noch stärker anwächst als jede geometrische Reihe, die wachsend fortschreitet.

§. 130.

Hat man also die Werthe der Zahlen α, β, γ, δ, ꝛc. oder von A, B, C, D, ꝛc. gefunden: so läßt sich, wenn eine Reihe vorkommt, deren allgemeines Glied z eine Funktion seines Anzeigers x ist, das summirende Glied Sz auf folgende Art ausdrucken:

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2} z + \frac{1}{6} \cdot \frac{dz}{1.2 dx} - \frac{1}{30} \cdot \frac{d^3 z}{1.2.3.4 dx^3}$$

$$+ \frac{1}{42} \cdot \frac{d^5 z}{1.2.3 \ldots 6 dx^5} - \frac{1}{30} \cdot \frac{d^7 z}{1.2.3 \ldots 8 dx^7}$$

$$+ \frac{5}{66} \cdot \frac{d^9 z}{1.2.3 \ldots 10 dx^9} - \frac{691}{2730} \cdot \frac{d^{11} z}{1.2.3 \ldots 12 dx^{11}}$$

$$+ \frac{7}{6} \cdot \frac{d^{13} z}{1.2.3 \ldots 14 dx^{13}} - \frac{3617}{510} \cdot \frac{d^{15} z}{1.2.3 \ldots 16 dx^{15}}$$

$$+ \frac{43867}{798} \cdot \frac{d^{17} z}{1.2.3 \ldots 18 dx^{17}} - \frac{174611}{330} \cdot \frac{d^{19} z}{1.2.3 \ldots 20 dx^{19}}$$

+

$$+ \frac{854513}{138} \cdot \frac{d^{21}z}{1.2.3\ldots22dx^{21}} - \frac{236364091}{2730} \cdot \frac{d^{23}z}{1.2.3\ldots24dx^{23}}$$

$$+ \frac{8553103}{6} \cdot \frac{d^{25}z}{1.2.3\ldots26dx^{25}} - \frac{23749461029}{870} \cdot \frac{d^{27}z}{1.2.3\ldots28\,dx^{27}}$$

$$+ \frac{8615841276005}{14322} \cdot \frac{d^{29}z}{1.2.3\ldots30dx^{29}} - \text{ꝛc.}$$

Kennt man daher das Integral $\int zdx$ oder die Größe, deren Differenzial $= zdx$ ist, so findet man das summirende Glied vermittelst einer fortgesetzten Differenziation. Es muß aber dabey nicht aus der Acht gelassen werden, daß zu diesem Ausdrucke allemal eine beständige Größe von der Beschaffenheit kommen müsse, wobey die Summe $= 0$ wird, wenn x in Nichts übergeht.

§. 131.

Wenn also z eine ganze rationale Funktion von x ist, so läßt sich das summirende Glied, weil alsdann die Differenzialien endlich verschwinden, durch einen endlichen Ausdruck darstellen. Dies wollen wir durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Das summirende Glied folgender Reihe zu finden.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & x \\ 1 & + 9 & + 25 & + 49 & + 81 & + & \ldots\ldots & + (2x-1)^2 \end{array}$$

Da hier $z = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ ist, so wird

$$\int zdx = \tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x$$

denn hieraus erhält man durch die Differenziation

$$4xxdx - 4xdx + dx = zdx$$

Nun ist ferner

$$\frac{dz}{dx} = 8x - 4$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 8$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 0; \text{ ꝛc.}$$

also das gesuchte summirende Glied =

$$\tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3} \pm C;$$

und da die beständige Größe C so beschaffen seyn muß, daß dadurch die Glieder $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ verschwinden, so ist

$$S(2x-1)^2 = \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x = \frac{x}{3}(2x-1)(2x+1)$$

Auf diese Art ist, wenn man $x = 4$ setzt, die Summe der 4 ersten Glieder

$$1 + 9 + 25 + 49 = \tfrac{4}{3} \cdot 7 \cdot 9 = 84.$$

Zweytes Exempel.

Das summirende Glied folgender Reihe zu finden.

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ 1 + & 27 + & 125 + & 343 + & \ldots\ldots & (2x-1)^3. \end{array}$$

Da

$$z = (2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

ist, so wird

$$\int z\,dx = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x;$$

$$\frac{dz}{dx} = 24x^2 - 24x + 6;$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 48x - 24;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 48;$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = 0; \text{ ꝛc.}$$

Demnach

Demnach ist

$$
\begin{aligned}
S(2x-1)^3 = 2x^4 - 4x^3 &+ 3x^2 - x \\
+ 4x^3 &- 6x^2 + 3x - \tfrac{1}{2} \\
&- 2x^2 - 2x + \tfrac{1}{2} \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{15}
\end{aligned}
$$

das ist

$$S(2x-1)^3 = 2x^4 - x^2 = x^2(2xx-1).$$

So ist z. B., wenn man $x = 4$ setzt,

$$1 + 27 + 125 + 343 = 16 \cdot 31 = 496.$$

§. 132.

Aus diesem allgemeinen Ausdrucke des summirenden Gliedes folgt sehr leicht dasjenige, welches wir im ersten Theile (im ersten Capitel, §. 29.) mitgetheilt haben, damals aber noch nicht beweisen konnten. Denn setzen wir

$z = x^n$; so ist

$$\int z\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \text{ und}$$

$$\frac{dz}{dx} = n x^{n-1}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$$

$$\frac{d^7z}{dx^7} = n(n-1) \ldots \ldots (n-6)x^{n-7}$$

ꝛc.

und hieraus ergiebt sich folgendes summirende zu dem allgemeinen Gliede x^n gehörige Glied:

$$Sx^n =$$

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{6}\cdot\frac{n}{2}x^{n-1}$$

$$- \frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{42}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^{n-5}$$

$$- \frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-6)}{2\cdot 3\ \ldots\ 8}x^{n-7}$$

$$+ \frac{5}{66}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-8)}{2\cdot 3\ \ldots\ 10}x^{n-9}$$

$$- \frac{691}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-10)}{2\cdot 3\ \ldots\ 12}x^{n-11}$$

$$+ \frac{7}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-12)}{2\cdot 3\ \ldots\ 14}x^{n-13}$$

$$- \frac{3617}{510}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-14)}{2\cdot 3\ \ldots\ 16}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{798}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-16)}{2\cdot 3\ \ldots\ 18}x^{n-17}$$

$$- \frac{174611}{330}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-18)}{2\cdot 3\ \ldots\ 20}x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{138}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-20)}{2\cdot 3\ \ldots\ 22}x^{n-21}$$

$$- \frac{236364091}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-22)}{2\cdot 3\ \ldots\ 24}x^{n-23}$$

$$+ \frac{8553103}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-24)}{2\cdot 3\ \ldots\ 26}x^{n-25}$$

$$- \frac{23749461029}{870}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-26)}{2\cdot 3\ \ldots\ 28}x^{n-27}$$

$$+ \frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-28)}{2\cdot 3\ \ldots\ 30}x^{n-29}$$

U.

Diese

Dieser Ausdruck unterscheidet sich nicht weiter von dem obigen, als daß wir hier die Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. gebraucht haben, dagegen wir uns oben der Zahlen α, β, γ, δ, ꝛc. bedienten, und die Uebereinstimmung ist offenbar. Hier haben wir also die summirenden Glieder aller Potestäten bis auf die dreyßigste, und zwar diese eingeschlossen, geben können, welches, wenn wir es auf eine andere Art hätten thun wollen, die weitläuftigsten und verdrießlichsten Rechnungen nöthig gemacht haben würde.

§. 133.

Wir haben schon oben §. 59. einen ähnlichen Ausdruck für das summirende Glied mitgetheilt, welcher ebenfalls nach den Differenzialien des allgemeinen Gliedes fortschreitet. Der Unterschied, wodurch es sich auszeichnet, bestand darin, daß dazu das Integral $\int z\,dx$ nicht nöthig war, und die Differenzialien des allgemeinen Gliedes durch gewisse Funktionen von x multiplicirt werden mußten. Wir wollen daher eben denselben Ausdruck noch auf eine andere Art suchen, welche der Natur der Reihen mehr angemessen ist, und woraus zugleich das Gesetz deutlicher erhellet, nach welchem die Coefficienten jener Differenzialien fortgehen. Es sey also das allgemeine Glied jener Reihe z irgend eine Funktion des Anzeigers x, das gesuchte summirende Glied $= s$. Da dieses eine solche Funktion von x ist, wie wir gesehen haben, daß es verschwindet wenn $x = 0$ gesetzt wird, so ist nach den von den Funktionen dieser Art oben erwiesenen Sätzen

$$s - \frac{x\,ds}{1\,dx} + \frac{x^2\,dds}{1.2\,dx^2} - \frac{x^3\,d^3s}{1.2.3\,dx^3} + \frac{x^4\,d^4s}{1.2.3\,dx^4} - \text{ꝛc.} = 0.$$

§. 134.

Da s die Summe aller Glieder der Reihe, vom ersten bis zum letzten z, in sich begreift: so ist klar, daß, wenn man in s anstatt x den um eins kleinern Ausdruck x — 1 setzt, die vorige Summe ihres letzten Gliedes beraubet werde. Es ist nemlich

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

und also

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Diese Gleichung giebt ein Mittel an die Hand, aus dem gegebenen summirenden Gliede s das allgemeine Glied zu finden, wobey wir uns nicht aufzuhalten brauchen. Verbindet man aber die gegenwärtige Gleichung auf eine geschickte Art mit derjenigen, welche wir im vorhergehenden §. gefunden haben: so lassen sich die Werthe von s durch x und z bestimmen. Wir wollen zu diesem Endzwecke

$$s - Az + \frac{Bdz}{dx} - \frac{Cddz}{dx^2} + \frac{Dd^3z}{dx^3} - \frac{Ed^4z}{dx^4} + \text{ꝛc.} = 0$$

setzen, so daß A, B, C, D, ꝛc. die erforderlichen Coefficienten bedeuten, ohne zu bestimmen, ob sie beständige oder veränderliche Größen seyen. Denn da

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

ist, so bekommt man, wenn man daraus die Werthe von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, ꝛc. in die obige Gleichung bringt,

s =

$$
\begin{aligned}
s &= s \\
-Az &= -\frac{Ads}{dx} + \frac{Adds}{2dx^2} - \frac{Ad^3s}{6dx^3} + \frac{Ad^4s}{24dx^4} - \frac{Ad^5s}{120dx^5} + \text{ꝛc.} \\
+\frac{Bdz}{dx} &= +\frac{Bdds}{dx^2} - \frac{Bd^3s}{2dx^3} + \frac{Bd^4s}{6dx^4} - \frac{Bd^5s}{24dx^4} + \text{ꝛc.} \\
-\frac{Cddz}{dx^2} &= -\frac{Cd^3s}{dx} + \frac{Cd^4s}{2dx^4} - \frac{Cd^5s}{6dx^5} + \text{ꝛc.} \\
+\frac{Dd^3z}{dx^3} &= +\frac{Dd^4s}{dx^4} - \frac{Dd^5s}{2dx^5} + \text{ꝛc.} \\
-\frac{Ed^4z}{dx^4} &= -\frac{Ed^5s}{dx^5} + \text{ꝛc.} \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

und diese Reihen zusammen genommen geben daher Null.

§. 135.

Da also nach §. 133.

$$0 = s - \frac{xds}{dx} + \frac{x^2dds}{2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{6dx^3} + \frac{x^4d^4s}{24dx^4} - \frac{x^5d^5s}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

ist, so ergeben sich aus der Vergleichung dieser Reihe mit der vorhergehenden folgende Ausdrücke für die Buchstaben A, B, C, D, ꝛc.

$$
\begin{aligned}
A &= x \\
B &= \frac{x^2}{2} - \frac{A}{2} \\
C &= \frac{x^3}{6} - \frac{B}{2} - \frac{A}{6} \\
D &= \frac{x^4}{24} - \frac{C}{2} - \frac{B}{6} - \frac{A}{24} \\
E &= \frac{x^5}{120} - \frac{D}{2} - \frac{C}{6} - \frac{B}{24} - \frac{A}{120} \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

Hat man daher die Werthe der Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. gefunden, so läßt sich das summirende Glied $s = Sz$ aus dem allgemeinen Gliede z auf folgende Art bestimmen,

$$Sz = Az - \frac{Bdz}{dx} + \frac{Cddz}{dx^2} - \frac{Dd^3z}{dx^3} + \frac{Ed^4z}{dx^4} - \frac{Fd^5z}{dx^5} + \text{ꝛc.}$$

§. 136.

Da aber

$$A = x$$
$$B = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x$$
$$C = \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x$$
$$D = \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{24}x^2$$

ꝛc.

wird: so fällt in die Augen, daß diese Coefficienten dieselben sind, die wir oben §. 59. gehabt haben, und es ist daher auch jene Bestimmung des summirenden Gliedes mit der oben gefundenen einerley. Demnach ist

$$A = Sx^0 - S.1$$
$$B = \tfrac{1}{1}Sx^1 - \tfrac{1}{1}x$$
$$C = \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$D = \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{6}x^3$$
$$E = \tfrac{1}{24}Sx^4 - \tfrac{1}{24}x^4$$

ꝛc.

Folglich ist

$$Sz = xz - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{xdz}{dx} - \frac{x^2ddz}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4d^4z}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man aber in z, dem allgemeinen Gliede, $x = 0$, so bekommt man das zu dem Anzeiger 0 gehörige Glied; und setzt man dasselbe $= a$, so wird

$$a = z - \frac{xdz}{dx} + \frac{x^2ddz}{2dx^2} - \frac{x^3d^3z}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

und also

$$\frac{xdz}{dx} - \frac{x^2ddz}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4d^4z}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = z - a.$$

Su-

Substituirt man diesen Werth, so bekommt man

$$Sz = (x + 1)z - a - \frac{dz}{dx} Sx + \frac{ddz}{2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3} Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4} Sx^4 - \text{ꝛc.}$$

Kennt man also die Summen der Potestäten, so läßt sich hieraus aus jedem allgemeinen Gliede das ihm zukommende summirende Glied finden.

§. 137.

Da wir aber einen doppelten Ausdruck für das summirende Glied Sz, wenn z das allgemeine Glied ist, gefunden haben, und der eine das Integral $\int z dx$ enthält: so kann man nun durch die Vergleichung beyder Ausdrücke, wenn man sie einander gleich setzt, den Werth von $\int z dx$ durch eine Reihe darstellen. Denn da

$$\int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}dz}{1.2dx} - \frac{\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$(x + 1)z - a - \frac{dz}{1dx} Sx + \frac{ddz}{1.2dx} Sx^2 - \frac{d^3z}{1.2.3dx^3} Sx^3 + \text{ꝛc.}$$

ist: so wird

$$\int z dx =$$

$$(x + \tfrac{1}{2})z - a - \frac{dz}{dx}(Sx + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}) + \frac{ddz}{2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}(Sx^3 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B})$$

$$+ \frac{d^4z}{24dx^4} Sx^4 - \frac{d^5z}{120dx^5}(Sx^5 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}) + \frac{d^6z}{720dx^6} Sx^6$$

$$- \frac{d^7z}{5040dx^7}(Sx^7 - \tfrac{1}{8}\mathfrak{D}) + \text{ꝛc.}$$

wo die Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. die §. 122. stehenden Bernoullischen Zahlen bedeuten.

Es sey z. B. $z = xx$, so wird

$$a = 0;\quad \frac{dz}{dx} = 2x;\quad \text{und}\ \frac{ddz}{2dx^2} = 1.$$

Folglich ist

$$\int xxdx = (x + \tfrac{1}{2})xx - 2x(\tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}) + 1(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x)$$

oder

$$\int xxdx = \tfrac{1}{3}x^3.$$

Es giebt aber $\frac{1}{3}x^3$, wenn man differenziirt, $xxdx$.

§. 138.

Hier zeigt sich ein neuer Weg, die summirenden Glieder der Reihen der Potestäten zu finden. Denn da sich diese summirenden Glieder sehr leicht aus den vorhin angenommenen Coefficienten A, B, C, D, rc. zusammensetzen lassen, und jeder dieser Coefficienten aus den vorhergehenden entsteht: so wird, wenn man in den Formeln des 35sten §. anstatt jener Buchstaben die §. 136. gefundenen Werthe setzt,

$$Sx^1 - x = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x$$

$$Sx^2 - x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{2}(Sx - x)$$

$$Sx^3 - x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{2}(Sx^2 - x^2) - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3}(Sx^1 - x^1)$$

$$Sx^4 - x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{4}{2}(Sx^3 - x^3) - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3}(Sx^2 - x^2)$$

$$- \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4}(Sx - x)$$

rc.

Hiernach lassen sich die Summen der höhern Potestäten aus den Summen der niedrigern finden.

§. 139.

Betrachtet man aber das Fortschreitungs-Gesetz der Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. welches §. 135 gefunden worden ist, genauer: so bemerkt man, daß dieselben eine wiederkehrende Reihe bilden. Denn entwickelt man den Bruch

$$\frac{x + \frac{1}{2}xxu + \frac{1}{6}x^3u^2 + \frac{1}{24}x^4u^3 + \frac{1}{120}x^5u^4 + \text{ꝛc.}}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 + \text{ꝛc.}}$$

nach den Potestäten von u, und setzt die daraus entspringende Reihe =

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + Fu^5 + \text{ꝛc.}$$

so wird, wie wir vorhin gefunden haben,

$$A = x;\ B = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}A;\ \text{ꝛc.}$$

und hat man diese Reihe gefunden, so bekommt man daraus die summirenden Glieder der Potestäten-Reihen. Es geht aber der Bruch, aus dessen Entwickelung jene Reihe entspringt, in die Form $\frac{e^{xu} - 1}{e^u - 1}$ und wenn x eine ganze positive Zahl ist, in folgende über.

$$1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \ldots\ldots + e^{(x-1)u}.$$

Da also

$$1 = 1$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

$$e^{2u} = 1 + \frac{2u}{1} + \frac{4u^2}{1.2} + \frac{8u^3}{1.2.3} + \frac{16u^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

$$e^{3u} = 1 + \frac{3u}{1} + \frac{9u^2}{1.2} + \frac{27u^3}{1.2.3} + \frac{81u^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

$$e^{(x-1)u} = 1 + \frac{(x-1)u}{1} + \frac{(x-1)^2u^2}{1.2} + \frac{(x-1)^3u^3}{1.2.3} + \frac{(x-1)^4u^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

A = x

$$A = x$$
$$B = S(x-1) = Sx - x$$
$$C = \tfrac{1}{2}S(x-1)^2 = \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$D = \tfrac{1}{6}S(x-1)^3 = \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{6}x^3$$

ꝛc.

Und hierdurch wird der Zusammenhang dieser Coefficienten mit den Summen der Potestäten aufs vollkommenste bestätiget und außer allem Zweifel gesetzt.