Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Sechstes Capitel. Von der Summation der Progressionen durch ohne Ende fortlaufende Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52909

Sechstes Capitel.

Von der Summation der Progressionen durch ohne Ende fortlaufende Reihen.

§. 140.

Der allgemeine Ausdruck, welchen wir im vorhergehenden Capitel für das summirende Glied der Reihen, deren allgemeines oder zu dem Anzeiger x gehöriges Glied z ist, gefunden haben, nemlich

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}\,dz}{1 \cdot 2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5z}{1 \cdot 2 \ldots 6\,dx^3} - \text{rc.}$$

dient eigentlich zur Erfindung der Summen der Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind, weil man in diesen Fällen endlich zu verschwindenden Differenzialien gelangt. Wenn hingegen z keine solche Funktion von x ist, so gehen die Differenzialien ohne Ende fort, und man erhält alsdenn eine unendliche Reihe, die die Summe der gegebenen Reihe bis und mit zu dem Gliede ausdruckt, dessen Anzeiger $= x$ ist. Die Summe der Reihe, wenn sie ohne Ende fortgesetzt wird, ergiebt sich also, wenn man $x = \infty$ annimmt, und man findet auf diese Art eine andere der vorigen gleiche ohne Ende fortlaufende Reihe.

§. 141.

Wenn man $x = 0$ setzt, so muß auch der Ausdruck, welcher die Summe darstellt, verschwinden, wie wir bereits angemerkt

gemerkt haben; und geschieht dieses nicht, so muß man eine solche beständige Größe zu der Summe hinzusetzen, oder von ihr wegnehmen, daß diese Bedingung erfüllt wird. Ist dieses geschehen, so bekommt man

wenn man setzt		
$x = 1$	das erste	Glied der Reihe.
$x = 2$	das 1ste und 2te	
$x = 3$	das 1ste, 2te und 3te	
ꝛc.	ꝛc.	

Weil also in diesen Fällen die Summe des ersten, der beyden ersten, der drey ersten Glieder u. s. w. bekannt sind, so ist solches auch der Werth der unendlichen Reihe, durch welche jene Summe ausgedruckt wird; und man sieht sich dadurch in den Stand gesetzt, eine unzählige Menge von Reihen zu summiren.

§. 142. a.

Da bey der Hinzufügung einer solchen beständigen Größe zu der Summe, daß diese verschwindet, wenn $x = 0$ wird, die wahre Summe auch allemal gefunden werden muß, wenn man für x andere Zahlen setzt: so ist klar, daß sich die wahre Summe ebenfalls allemal ergeben müsse, sobald eine solche beständige Größe hinzugesetzt worden ist, daß in irgend einem Falle die wahre Summe hervorgebracht wird. Fällt daher, wenn man $x = 0$ setzt, nicht in die Augen, was die Summe für einen Werth bekomme und was also dazu für eine beständige Größe gesetzt werden müsse: so kann man auch für x andere Zahlen setzen, und durch Hinzufügung einer beständigen Größe einen vollständigen Ausdruck für die Summe erhalten. Wie? wird durch das Folgende deutlich werden.

§. 142.

§. 142. b.

Wir wollen von folgender harmonischen Progression anfangen:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \frac{1}{x} = s.$$

Da das allgemeine Glied derselben $= \frac{1}{x}$ ist, so wird $z = \frac{1}{x}$, und das summirende Glied s wird auf folgende Art gefunden. Zuvörderst ist

$$\int z\,dx = \int \frac{dx}{x} = lx. \text{ Dann ferner}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2};\quad \frac{ddz}{2dx^2} = \frac{1}{x^3};$$

$$\frac{d^3z}{6dx^3} = -\frac{1}{x^4};\quad \frac{d^4z}{24dx^4} = \frac{1}{x^5};$$

$$\frac{d^5z}{120dx^6} = -\frac{1}{x^6};\ \text{ꝛc.}$$

Hiernach ist also

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \text{ꝛc.}$$
$$+ C.$$

Diese hinzuzufügende beständige Größe C läßt sich aber aus dem Falle, wenn $x = 0$ ist, nicht bestimmen. Man setze also $x = 1$. Da alsdann $s = 1$ wird, so hat man

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{4} - \frac{\mathfrak{C}}{6} + \frac{\mathfrak{D}}{8} + C, \text{ und also}$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \text{ꝛc.}$$

Folglich ist das gesuchte summirende Glied

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \text{ꝛc.}$$

§. 143.

Da die Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. eine divergirende Reihe bilden, so läßt sich hier der Werth der beständigen Größe nicht wirklich angeben. Wenn aber für x eine größere Zahl gesetzt, und die Summe eben so vieler Glieder wirklich gesucht wird, so findet man denselben auf eine leichte Art. Man setze zu dem Ende $x = 10$: so ist die Summe der zehn ersten Glieder =

$$2{,}928968253968253968$$

und ihr muß der Ausdruck der Summe gleich seyn, wenn man darin $x = 10$ setzt. Dadurch bekommt man

$$l10 + \frac{1}{20} - \frac{\mathfrak{A}}{200} + \frac{\mathfrak{B}}{40000} - \frac{\mathfrak{C}}{6000000} + \frac{\mathfrak{D}}{800000000} - \text{ꝛc.}$$
$$+ \; C.$$

Setzt man also für $l10$ den hyperbolischen Logarithmen der Zahl 10, und statt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ꝛc. die oben dafür gefundenen Werthe: so erhält man für die beständige Größe

$$C = 0{,}5772156649015325$$

und diese Zahl druckt daher die Summe der Reihe aus:

$$\frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \frac{\mathfrak{E}}{10} - \text{ꝛc.}$$

§. 144.

Wenn für x keine sehr große Zahlen gesetzt werden, so findet man, weil alsdann die Summe der Reihe leicht unmittelbar gefunden werden kann, die Summe folgender Reihe:

$$\frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \text{ꝛc.} = s - lx - C$$

Bedeutet aber x eine sehr große Zahl, so läßt sich die Summe dieser Reihe ebenfalls leicht finden, weil alsdann der Werth dieses Ausdrucks in Decimal-Brüchen gefunden wird. Nun ist zuvörderst klar, daß die Summe, wenn man die Reihe

ohne

ohne Ende fortlaufen läßt, unendlich groß seyn muß, indem wenn $x = \infty$ wird, auch lx ins Unendliche wächst. Um aber die Summe jeder Anzahl von Gliedern desto bequemer angeben zu können, wollen wir die Werthe der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, 2c. in Decimal-Brüchen ausdrücken.

$$\mathfrak{A} = 0,1666666666666$$
$$\mathfrak{B} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{C} = 0,0238095238095$$
$$\mathfrak{D} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{E} = 0,0757575757575$$
$$\mathfrak{F} = 0,2531135531135$$
$$\mathfrak{G} = 1,1666666666666$$
$$\mathfrak{H} = 7,0921568627451$$

2c.

Es ist also

$$\frac{\mathfrak{A}}{2} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{4} = 0,0083333333333$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{6} = 0,0039682539682$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{8} = 0,0041666666666$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{10} = 0,0075757575757$$
$$\frac{\mathfrak{F}}{12} = 0,0210927960928$$
$$\frac{\mathfrak{G}}{14} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{H}}{16} = 0,4432598039216$$

2c.

Erstes Exempel.

Die Summe von tausend Gliedern der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{rc.}$$

zu finden.

Man setze $x = 1000$. Da

$l10 = 2{,}302585092994045684$ ist, so wird

$$lx = 6{,}9077552789821$$
$$C = 0{,}5772156649015$$
$$\frac{1}{2x} = 0{,}0005000000000$$
$$7{,}4849709438836$$
$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{A}}{2xx} = 0{,}0000000833333$$
$$7{,}4849708605503$$
$$\text{add. } \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} = 0{,}0000000000000$$

so ist $7{,}4849708605503$ die gesuchte Summe, welche also noch nicht einmal $7\frac{1}{2}$ ausmacht.

Zweytes Exempel.

Die Summe von tausendmaltausend Gliedern der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{rc.}$$

zu finden.

Da $x = 1000000$ ist, so wird $lx = 6.l10$; folglich

$$lx = 13{,}8155105579642$$
$$C = 0{,}5772156649015$$
$$\frac{1}{2x} = 0{,}0000005000000$$

und $14{,}3927262228657$ = der gesuchten Summe.

§. 145.

§. 145.

Nimmt man also x groß genug an, so findet man die Summe schon in dem Logarithmen von x, wenn man dazu die beständige Größe C setzt, hinlänglich genau. Hieraus lassen sich vortrefliche Folgerungen ziehen. Bedeutet z. B. x eine sehr große Zahl, und setzt man

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots \frac{1}{x} = s$$

und

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{x} + \ldots\ldots \frac{1}{x+y} = t,$$

so wird, weil näherungsweise $s = lx + C$; und $t = l(x+y) + C$ ist

$$t - s = l(x+y) - lx = l\frac{x+y}{x}$$

und es läßt sich also dieser Logarithme näherungsweise durch eine aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehende harmonische Reihe ausdrucken, und zwar auf folgende Art:

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x+y}.$$

Genauer findet man diesen Logarithmen, wenn man die obigen Summen s und t genauer nimmt. Da z. B.

$$s = lx + C + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12xx}, \text{ und}$$

$$t = l(x+y) + C + \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{12(x+y)^2} \text{ ist:}$$

so wird

$$t - s = l\frac{x+y}{x} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+y)} + \frac{1}{12xx} - \frac{1}{12(x+y)^2},$$

und also

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \cdots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+y)}$$
$$- \frac{1}{12xx} + \frac{1}{12(x+y)^2}.$$

Wenn aber x eine so große Zahl ist, daß die beyden letzten Glieder weggelassen werden können: so ist näherungsweise

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \cdots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}\right)$$

§. 126 b.

Aus dieser harmonischen Reihe läßt sich auch die Summe folgender Reihe herleiten, in welcher bloß die ungeraden Zahlen vorkommen:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2x+1}.$$

Denn da, wenn man alle Glieder nimmt,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+1}$$
$$=$$
$$l(2x+1) + C + \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6(2x+1)^6}$$
$$+ \text{2c.}$$

die Summe aber aller die geraden Zahlen enthaltenden Glieder

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2x}$$

die Hälfte der obigen, oder

$$\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}lx + \frac{1}{4x} - \frac{\mathfrak{A}}{4x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{8x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{12x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{16x^8} - \text{2c.}$$

ist so bekommt man, wenn man diese Reihe von jener abzieht,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2x+1}$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}C + l\frac{2x+1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4} - \text{2c.}$$
$$- \frac{1}{4x} + \frac{\mathfrak{A}}{4x^2} - \frac{\mathfrak{B}}{8x^4} + \text{2c.}$$

§. 146.

Man kann aber auch vermittelst eben desselben Ausdrucks die Summe einer jeden harmonischen Reihe finden. Es sey nemlich

$$\frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \ldots + \frac{1}{mx+n} = s.$$

Da das allgemeine Glied $z = \frac{1}{mx+n}$ ist, so wird

$$\int z\,dx = \frac{1}{m}l(mx+n); \quad \frac{dz}{dx} = \frac{m}{(mx+n)^2};$$
$$\frac{ddz}{2dx^2} = \frac{mm}{(mx+n)^2}; \quad \frac{d^3z}{6dx^3} = \frac{m^3}{(mx+n)^4};$$
$$\frac{d^4z}{24dx^4} = \frac{m^4}{(mx+n)^5}; \quad \frac{d^5z}{120dx^5} = \frac{m^5}{(mx+n)^6}; \text{ 2c.}$$

Also wird

$$s = D + \frac{1}{m}l(mx+n) + \frac{1}{2(mx+n)} - \frac{\mathfrak{A}m}{2(mx+n)^2} + \frac{\mathfrak{B}m^3}{2(mx+n)^4}$$
$$- \frac{\mathfrak{C}m^5}{6(mx+n)^6} + \frac{\mathfrak{D}m^7}{8(mx+n)^8} - \text{2c.}$$

Setzt man demnach $x = 0$, so wird die hinzuzusetzende beständige Größe

$$D = -\frac{1}{m}ln - \frac{1}{2n} + \frac{\mathfrak{A}m}{2n^2} - \frac{\mathfrak{B}m^3}{4n^4} + \frac{\mathfrak{C}m^5}{6n^6} - \text{2c.}$$

§. 147.

Wird hingegen $n = 0$, so bekommt man, da

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{4m} + \ldots\ldots + \frac{1}{mx}$$
$$=$$
$$\frac{1}{m}C + \frac{1}{m}lx + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2mx^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4mx^4} - \text{rc.}$$

hingegen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{mx}$$
$$=$$
$$C + lmx + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4} - \text{rc.}$$

ist, wenn man von dieser Reihe jene m mal genommen abzieht, so daß diese Reihe sich ergiebt,

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{3m} + \ldots + \frac{1}{mx}$$
$$- \frac{m}{m} \qquad - \frac{m}{2m} \qquad - \frac{m}{3m} \qquad - \frac{m}{mx}$$

die Summe

$$lm + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4} - \text{rc.}$$
$$- \frac{1}{2x} \quad + \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} \quad - \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} + \text{rc.}$$

und setzt man $x = \infty$, so wird dieselbe $= lm$. Schreibt man also für m nach und nach die Zahlen 2, 3, 4, rc. so wird

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \text{rc.}$$
$$l3 = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9}\ \text{rc.}$$
$$l4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} - \text{rc.}$$
$$l5 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{10}\ \text{rc.}$$

rc.

§. 148.

§. 148.

Nach der Betrachtung dieser harmonischen Reihe wollen wir uns zur Untersuchung der reciproken Reihe der Quadrate wenden, und

$$s = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{xx}$$

setzen. Da das allgemeine Glied dieser Reihe $z = \frac{1}{xx}$ ist, so ist $\int z\,dx = -\frac{1}{x}$, und die Differenzialien von z

$$\frac{dz}{2dx} = -\frac{1}{x^3};\ \frac{ddz}{2.3dx^2} = \frac{1}{x^4};\ \frac{d^3z}{2.3.4dx^3} = -\frac{1}{x^5};\ \text{ꝛc.}$$

und also die Summe

$$s = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{\mathfrak{A}}{x^3} + \frac{\mathfrak{B}}{x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{x^7} + \frac{\mathfrak{D}}{x^9} - \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} + \text{ꝛc.}$$

wo die beständige Größe C aus einem Falle, in welchem die Summe bekannt ist, bestimmt werden muß. Wir wollen also $x = 1$ setzen. Da alsdenn $s = 1$ wird, so ist

$$C = 1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \text{ꝛc.}$$

allein diese Reihe zeigt den Werth von C nicht, weil sie in einem hohen Grade divergirt. Setzt man indeß dieselbe ohne Ende fort, so ist aus dem Obigen bekannt, daß ihre Summe $= \frac{\pi\pi}{6}$ ist, und macht man also $x = \infty$, und setzt $s = \frac{\pi\pi}{6}$, so wird $C = \frac{\pi\pi}{6}$, weil alsdenn alle übrige Glieder verschwinden. Hiernach wird folglich

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \text{ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{6}.$$

§. 149.

Wenn die Summe dieser Reihe nicht bekannt gewesen wäre, so würde man den Werth der beständigen Größe C

aus irgend einem andern Falle, in welchem die Summe wirklich gefunden worden wäre, bestimmen müssen. In dieser Absicht wollen wir $x = 10$ setzen und zehn Glieder wirklich addiren. Dann findet man

$$s = 1{,}549767731166540690, \text{ ferner ist}$$

$$\text{add. } \frac{1}{x} = 0{,}1$$

$$\text{subtr. } \frac{1}{2xx} = 0{,}005$$

$$\overline{\quad 1{,}644767731166540690 \quad}$$

$$\text{add. } \frac{\mathfrak{A}}{x^3} = 0{,}000166666666666666$$

$$\overline{\quad 1{,}644934397833207356 \quad}$$

$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{B}}{x^5} = 0{,}000000333333333333$$

$$\overline{\quad 1{,}644934064499874023 \quad}$$

$$\text{add. } \frac{\mathfrak{C}}{x^7} = 0{,}000000002380952381$$

$$\overline{\quad 1{,}644934066880826404 \quad}$$

$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{D}}{x^9} = 0{,}000000000033333333$$

$$\overline{\quad 1{,}644934066847493071 \quad}$$

$$\text{add. } \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} = 0{,}000000000000757575$$

$$\overline{\quad 1{,}644934066848250646 \quad}$$

$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{F}}{x^{13}} = 0{,}000000000000025311$$

$$\overline{\quad 1{,}644934066848225335 \quad}$$

$$\text{add. } \frac{\mathfrak{G}}{x^{15}} = 0{,}000000000000001166$$

$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{H}}{x^{17}} = \qquad\qquad 71$$

$$\overline{\quad 1{,}644934066848226430 \quad} = C.$$

Diese

Diese Zahl ist zugleich der Werth des Ausdrucks $\frac{\pi\pi}{6}$, wie man aus dem bekannten Werthe von π durch die Rechnung finden kann. Hieraus erhellet auch, daß die Reihe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ꝛc., ob sie gleich eine divergirende Reihe ist, gleichwohl eine wahre Summe habe.

§. 150.

Nun sey $z = \frac{1}{x^3}$, und

$$s = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{x^3}$$

Da

$$\int z dx = -\frac{1}{2xx};\ \frac{dz}{1.2.3dx} = -\frac{1}{2x^4};\ \frac{ddz}{1.2.3.4dx^2} = -\frac{1}{2x^5};$$

$$\frac{d^3z}{1.2\ldots5dx^5} = -\frac{1}{2x^6};\ \frac{d^5z}{1.2\ldots7dx^5} = -\frac{1}{2x^8};\ \text{ꝛc.}$$

ist: so wird

$$s = C - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} + \frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} - \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} + \text{ꝛc.}$$

und, da $s = 1$ wird, wenn man $x = 1$ setzt

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mathfrak{A} - \tfrac{5}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{7}{2}\mathfrak{C} - \tfrac{9}{2}\mathfrak{D} + \text{ꝛc.}$$

welcher Werth von C zugleich den Werth der gegebenen Reihe ausdruckt, wenn man sie ohne Ende fortlaufen läßt. Da aber die Summen der ungeraden Potestäten nicht so bekannt sind, als die der geraden, so muß jener Werth von C aus der gefundenen Summe einiger Glieder bestimmt werden. Es sey also $x = 10$, so hat man

$$C = s + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} - \frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} + \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} - \text{ꝛc.}$$

Um

Um die Rechnung zu erleichtern, mache man

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2} = 0,2500000000000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2} = 0,0833333333333$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2} = 0,0833333333333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2} = 0,1500000000000$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2} = 0,4166666666666$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2} = 1,6452380952380$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2} = 8,7500000000000$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2} = 60,2833333333333$$

2c.

Hiernach werden die zu s zu addirenden Glieder:

$$\frac{1}{2xx} = 0,005000000000000000$$

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} = 0,000025000000000000$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} = 0,000000000833333333$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2x^{12}} = 0,000000000000416666$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2x^{16}} = 0,000000000000000875$$

$$0,005025000833750875$$

Die

Die davon zu subtrahirenden Glieder hingegen

$$\frac{1}{2x^3} = 0{,}00050000000000000000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} = 0{,}00000000833333333333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2x^{10}} = 0{,}00000000000015000000$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2x^{14}} = 0{,}00000000000000016452$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2x^{18}} = 0{,}00000000000000000060$$

$$\begin{array}{rl} & 0{,}00050000833483349845 \\ \text{von} & 0{,}0050250008333750875 \\ \hline & 0{,}004524917485401030 \\ s = & 1{,}197531985674193251 \\ \hline C = & 1{,}202056903159594281 \end{array}$$

§. 132.

Wenn man auf diese Art weiter fortgeht, so findet man die Summe aller reciproken Potestäten-Reihen in Decimal-Brüchen ausgedruckt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.} = 1{,}6449340668482264 = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{ꝛc.} = 1{,}2020569031595942$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.} = 1{,}0823232337111381 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{rc.} = 1{,}0369277551068632$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{rc.} = 1{,}0173430619844491 = \frac{2^5 \mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{rc.} = 1{,}0083492773866018$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{rc.} = 1{,}0040773561979443 = \frac{2^7 \mathfrak{D}}{1.2\ldots8}\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \text{rc.} = 1{,}0020083928260822$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \text{rc.} = 1{,}0009945751278180 = \frac{2^9 \mathfrak{E}}{1.2\ldots10}\pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{4^{11}} + \text{rc.} = 1{,}0004941886041094$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \text{rc.} = 1{,}0002460865533080 = \frac{2^{11} \mathfrak{F}}{1.2\ldots12}\pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{4^{13}} + \text{rc.} = 1{,}0001227133475857$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \text{rc.} = 1{,}0000612481350587 = \frac{2^{13} \mathfrak{G}}{1.2\ldots14}\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \frac{1}{4^{15}} + \text{rc.} = 1{,}0000305882363070$$

1 +

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \text{ꝛc.} = 1{,}0000152822594086 = \frac{2^{15}\mathfrak{H}}{1.2\ldots16}\pi^{16}$$

ꝛc.

§. 152.

Umgekehrt lassen sich hieraus die Summen der unendlichen Reihen, welche aus den Bernoullischen Zahlen bestehen, darstellen. Denn es ist

$$1+0-\tfrac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\text{ꝛc.}=0{,}5772\text{ꝛc.}$$

$$1+1-\tfrac{1}{2}+\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-\mathfrak{D}+\text{ꝛc.}=\frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\pi^2$$

$$1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\frac{3\mathfrak{A}}{2}-\frac{5\mathfrak{B}}{2}+\frac{7\mathfrak{C}}{2}-\frac{9\mathfrak{D}}{2}+\text{ꝛc.}=1{,}2020\text{ꝛc.}$$

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4\mathfrak{A}}{2.3}-\frac{5.6\mathfrak{B}}{2.3}+\frac{9.10\mathfrak{D}}{2.3}-\text{ꝛc.}=\frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4.5.\mathfrak{A}}{2.3.4}-\frac{5.6.7.\mathfrak{B}}{2.3.4}+\frac{7.8.9.\mathfrak{C}}{2.3.4}-\text{ꝛc.}=1{,}0369\text{ꝛc.}$$

$$1+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4.5.6.\mathfrak{A}}{2.3.4.5}-\frac{5.6.7.8.\mathfrak{B}}{2.3.4.5}+\frac{7.8.9.10.\mathfrak{C}}{2.3.4.5}-\text{ꝛc.}=\frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2..6}\pi^6$$

ꝛc.

Es lassen sich also diese Reihen abwechselnd vermittelst der Quadratur des Kreises summiren; aber von was für einer transcendenten Größe die übrigen abhangen, ist noch unbekannt, denn sie lassen sich nicht auf Potestäten von π mit ungeraden Exponenten bringen, so daß die Coefficienten rationale Zahlen wären. Damit indeß näherungsweise erkannt werden möge, wie die Coefficienten der ungeraden Potestäten von π beschaffen seyn werden, setze ich folgende Tabelle her:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{rc. ohne Ende} = \frac{\pi}{0{,}0000} = \infty$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{6{,}000} \text{ genau}$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^3}{25{,}79436} \text{ näherungsw.}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^4}{90{,}0000} \text{ genau}$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^5}{295{,}1215} \text{ näherungsw.}$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^6}{945{,}000} \text{ genau}$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^7}{2995{,}286} \text{ näherungsw.}$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^8}{9450{,}000} \text{ genau}$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^9}{29749{,}35} \text{ näherungsw.}$$

rc.

§. 153.

Hieraus läßt sich eine Methode herleiten, die Reihe der Bernoullischen Zahlen

1 2 3 4 5 6 7 8 9
A, B, C, D, E, F, G, H, J, rc.

ihrer anscheinenden großen Irregularität ungeachtet, zu interpoliren, oder zwischen jeden zweyen Gliedern das mittlere zu finden. Denn setzt man das zwischen dem ersten A und dem zweyten B liegende oder zu dem Anzeiger $1\frac{1}{2}$ gehörige Glied $= p$: so ist

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{rc.} = \frac{2^2 p}{1 . 2 . 3} \pi^3$$

und

und also

$$p = \frac{3}{2\pi^3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.}\right) = 0{,}05815227.$$

Auf ähnliche Art wird, wenn man das zwischen B und C liegende oder zu dem Anzeiger $2\frac{1}{2}$ gehörige Glied q setzt, da

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \text{etc.} = \frac{24q}{1.2.3.4.5}\pi^5$$

ist,

$$q = \frac{15}{2\pi^5}\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \text{etc.}\right) = 0{,}02541327.$$

Wenn daher die Summen der Reihen, in welchen die Exponenten der Potestäten ungerade Zahlen sind, gefunden werden könnten: so ließe sich die Reihe der Bernoullischen Zahlen ebenfalls interpoliren.

§. 154.

Nunmehr sey $z = \dfrac{1}{nn + xx}$, und die Summe folgender Reihe zu suchen:

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+9} + \ldots\ldots + \frac{1}{nn+xx}.$$

Da $\int z\,dx = \int \dfrac{dx}{nn+xx}$ ist, so wird $\int z\,dx = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Atang.}\dfrac{x}{n}$.

Man setze $\mathrm{A\,cot.}\dfrac{x}{n} = u$; so wird $\int z\,dx = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)$;

$\dfrac{x}{n} = \cot.u = \dfrac{\mathrm{cos.}u}{\mathrm{sin.}u}$; $\dfrac{nn+xx}{nn} = \dfrac{1}{\mathrm{sin.}u^2}$; $z = \dfrac{\mathrm{sin.}u^2}{nn}$;

und $\dfrac{dx}{n} = -\dfrac{du}{\mathrm{sin.}u^2}$ woher denn $du = -\dfrac{dx.\,\mathrm{sin.}u^2}{n}$.

Hiernach findet man die Differenzialien von z folgendermaßen:

$$dz = \frac{2du\,\sin.u.\cos.u}{nn} = -\frac{dx\,\sin.u^2.\sin.2u}{n^3}$$

und

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sin.u^2.\sin.2u}{n^3}$$

$$\frac{ddz}{2dx} = -\frac{du(\sin.u.\cos.u.\sin.2u + \sin.u^2.\cos.2u)}{n^3} = \frac{dx\,\sin.u^3.\sin.3u}{n^4}$$

und

$$\frac{ddz}{2dx^2} = \frac{\sin.u^3.\sin.3u}{n^4}.$$

Auf ähnliche Art ist, wie wir bereits oben für eben den Fall gefunden haben,

$$\frac{d^3z}{2.3dx^3} = -\frac{\sin.u^4.\sin.4u}{n^5};\quad \frac{d^4z}{2.3.4dx^4} = \frac{\sin.u^5.\sin.5u}{n^6} \text{ rc.}$$

und daraus findet man die gesuchte Summe

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} + \frac{\sin.u.\sin.u}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2}.\frac{\sin.u^2.\sin.2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4}.\frac{\sin.u^4.\sin 4u}{n^5} - \frac{\mathfrak{C}}{6}.\frac{\sin.u^6.\sin.6u}{n^7} + \frac{\mathfrak{D}}{8}.\frac{\sin u^8.\sin 8u}{n^9} - \text{rc.} + C.$$

Wenn man, um diese Constante zu bestimmen $x = 0$ setzt, damit $s = 0$ werde, so wird $\cot.u = 0$, und also $u = 90°$; folglich $\sin.u = 1$; $\sin.2u = 0$; $\sin.4u = 0$; $\sin.6u = 0$, rc., und es scheint also $0 = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2nn} + C$, folglich $C = -\frac{1}{2nn}$ zu seyn. Allein es ist hier zu bemerken, daß des Verschwindens der übrigen Glieder ohnerachtet die Summe derselben, da die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, rc. ohne Ende wachsen, eine endliche Größe seyn kann.

§. 155.

§. 155.

Wir wollen daher, um diese beständige Größe gehörig zu bestimmen, $x = \infty$ setzen, weil wir die Summe jener Reihe, wenn sie ohne Ende fortläuft, bereits in der Einleitung bestimmt und gezeigt haben, daß sie $= -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$ sey. Setzt man aber $x = \infty$, so wird $u = 0$, also $\sin. u = 0$ und zugleich verschwinden die Sinus der vielfachen Bogen. Weil aber die Potestäten des Sinus u in dieser Reihe wachsen, so kann die Divergenz derselben das Verschwinden ihres Werthes nicht verhindern. Es wird demnach $s = \frac{\pi}{2n} + C$, und also

$$\frac{\pi}{2n} + C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}, \text{ und}$$

$$C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}.$$

Folglich ist die gesuchte Summe

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} - \frac{\sin. u^2}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2} \cdot \frac{\sin. u^2 \,.\, \sin. 2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4} \cdot \frac{\sin. u^4 \,.\, \sin. 4u}{n^5} - \frac{\mathfrak{C}}{6} \cdot \frac{\sin. u^6 \,.\, \sin. 6u}{n^7} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}.$$

Ist n eine nur einigermaßen große Zahl, so wird das letzte Glied $\frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$ so klein, daß man dasselbe aus der Acht lassen kann.

§. 156.

Setzt man $x = n$, so daß

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+9} + \ldots\ldots + \frac{1}{nn+nn}$$

wird: so ist $\cot.u = 1$, und $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Hieraus er-

giebt sich $\sin.u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.2u = 1$; $\sin.4u = 0$; $\sin.6u =$

-1; $\sin.8u = 0$; $\sin.10u = 1$; rc.

Daher ist

$$s = \frac{\pi}{4n} - \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2.2n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{6.2^3n^7} - \frac{\mathfrak{E}}{10.2^5n^{11}}$$

$$+ \frac{\mathfrak{G}}{14.2^7n^{15}} - \text{rc.} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$$

und in dieser Reihe kommen die Bernoullischen Zahlen nur eine um die andere vor. Wenn also der Werth von s schon durch wirklich angestellte Rechnung gefunden worden ist: so läßt sich daraus π bestimmen, indem

$$\pi = 4ns + \frac{1}{n} + \frac{\mathfrak{A}}{1.n^2} - \frac{\mathfrak{C}}{3.2^2n^6} + \frac{\mathfrak{E}}{5.2^4n^{10}} -$$

$$\frac{\mathfrak{G}}{7.2^6n^{14}} + \text{rc.} - \frac{\pi}{e^{2n\pi}-1}.$$

Denn ob sich gleich π in dem letzten Gliede befindet, so ist dieses Glied doch so klein, daß es die Bestimmung von π durch die Näherung nicht verhindert.

Exempel.

Es sey $n = 5$; so ist

$$s = \frac{1}{26} + \frac{1}{29} + \frac{1}{34} + \frac{1}{41} + \frac{1}{50}$$

und addirt man diese Glieder wirklich, so bekommt man

s =

$$s = 0,1467463056905494\,94$$

Daher werden jene Glieder

$$\begin{array}{rl}
4ns & = 2,9349261138109898\,8 \\
\frac{1}{n} & = 0,2 \\
\frac{\mathfrak{A}}{nn} & = 0,0066666666666666\,6 \\
\hline
 & \ 3,1415927804776565\,4 \\
\frac{\mathfrak{C}}{3 \cdot 2^2 n^6} & = 0,0000001269841269\,8 \\
\hline
 & \ 3,1415926534935295\,6 \\
\frac{\mathfrak{E}}{5 \cdot 2^4 n^{10}} & = 0,0000000000969696\,9 \\
\hline
 & \ 3,1415926535904992\,5 \\
\frac{\mathfrak{G}}{7 \cdot 2^6 n^{14}} & = 0,0000000000000426\,66 \\
\hline
 & \ 3,1415926535900725\,9 \\
\frac{\mathfrak{I}}{9 \cdot 2^8 n^{18}} & = \qquad\qquad\qquad\qquad 625 \\
\hline
 & \ 3,1415926535900788\,4
\end{array}$$

Dieser Werth kommt der Wahrheit schon so nahe, daß es zu bewundern ist, wie man ihn durch eine so leichte Rechnung hat finden können. Es ist indeß derselbe etwas zu groß, weil davon $\frac{4\pi}{e^{2n\pi} - 1}$ abgezogen werden muß. Man kann aber den Werth von $\frac{4\pi}{e^{2n\pi} - 1}$, sobald π näherungsweise gefunden worden, ebenfalls bestimmen, und zwar vermittelst der Logarithmen auf folgende Art:

$$\text{Da } \pi l e = 1,3643763538 \text{ ist}$$

$$\text{so wird } l e^{2n\pi} = 10 \pi l e = 13,6437635$$

Da nun $\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1} = \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} + \frac{4\pi}{e^{4n\pi}} +$ ꝛc. ist, so fällt in die Augen, daß wir zu unserer Rechnung bloß das erste Glied brauchen. Vermehren wir also die Characteristik um die Zahl 17, weil wir so viel Decimalziffern haben, so wird

$$\begin{array}{rl} l\pi = & 17,4971498 \\ l4 = & 0,6020600 \\ \hline & 18,0992098 \\ \text{subtr. } le^{2n\pi} = & 13,6437635 \\ \hline & 4,4554463 \end{array}$$

$$\text{Also } \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} = \qquad 28539 \text{ subtr.}$$

$$\begin{array}{rl} \text{von} & 3,14159265359007884 \text{ so ist} \\ \hline \pi = & 3,14159265358979345 \end{array}$$

Dieser Ausdruck weicht erst in der vorletzten Ziffer von der Wahrheit ab, und dies deswegen, weil noch das Glied $\frac{\mathfrak{L}}{12.2^{10}n^{22}} = 22$ hätte müssen abgezogen werden. Geschieht dies, so bleibt selbst in der letzten Ziffer kein Fehler. Uebrigens erhellet, daß man, wenn n größer als 10 angenommen worden wäre, die Peripherie π sehr leicht bis auf 25 und mehr Ziffern hätte finden können.

§. 157.

Nun wollen wir für z transcendente Funktionen setzen, und $z = lx$ nehmen, so daß l hyperbolische Logarithmen anzeige, indem die gemeinen leicht darauf zurückgeführt werden. Es sey also

$$s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots + lx.$$

Da $z = lx$ ist, so wird $\int z\,dx = x\,lx - x$, weil das Differenzial hiervon $dx\,lx$ ist. Dann ist

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x};\ \frac{ddz}{dx^2}=-\frac{1}{x^2};\ \frac{d^3z}{1.2dx^3}=\frac{1}{x^3};\ \frac{d^5z}{1.2.3.4dx^5}=\frac{1}{x^5};$$
ꝛc.

und folglich

$$s=xlx-x+\tfrac{1}{2}x+\frac{\mathfrak{A}}{1.2x}-\frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3}+\frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5}-\frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7}+\text{ꝛc.}$$
$$+\,C.$$

Für diese beständige Größe C aber findet man, wenn man $x=1$ setzt, weil dann $s=l1=0$ wird,

$$C=1-\frac{\mathfrak{A}}{1.2}+\frac{\mathfrak{B}}{3.4}-\frac{\mathfrak{C}}{5.6}+\frac{\mathfrak{D}}{7.8}-\text{ꝛc.}$$

eine Reihe, die wegen ihrer großen Divergenz ganz untauglich ist, den Werth von C auch nur näherungsweise zu bestimmen.

§. 158.

Es läßt sich indeß derselbe nicht bloß näherungsweise, sondern selbst genau erhalten, wenn man den für π von Wallis erfundenen, und in der Einleitung (Th. 1. Cap. 5. §. 286. mitgetheilten Ausdruck braucht. Dieser Ausdruck ist:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12\ \text{ꝛc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11}$$

Denn nimmt man die Logarithmen, so bekommt man daraus

$$l\pi-l2=2l2+2l4+2l6+2l8+2l10+\text{ꝛc.}$$
$$-l1-2l3-2l5-2l7-2l9-2l11-\text{ꝛc.}$$

und setzt man in der angenommenen Reihe $x=\infty$, so wird, da

$$l1+l2+l3+l4+\ldots+lx=C+(x+\tfrac{1}{2})lx-x \text{ ist,}$$
$$l1+l2+l3+l4+\ldots+l2x=C+(2x+\tfrac{1}{2})l2x-2x, \text{ und}$$
$$l2+l4+l6+l8+\ldots+l2x=C+(x+\tfrac{1}{2})lx+xl2-x$$

und daher

$$l1+l3+l5+l7+\ldots+l(2x-1)=xlx+(x+\tfrac{1}{2})l2-x.$$

 Da

Da also

$$l\frac{\pi}{2} = 2l2 + 2l4 + 2l6 + \ldots + 2l2x - l2x$$
$$- 2l1 - 2l3 - 2l5 - \ldots - 2l(2x-1)$$

ist, so wird, wenn man $x = \infty$ setzt,

$$l\frac{\pi}{2} = 2C + (2x+1)lx + 2xl2 - 2x - l2 - lx$$
$$- 2xlx - (2x+1)l2 + 2x$$

und also

$$l\frac{\pi}{2} = 2C - 2l2;\ \text{folglich}\ 2C = l2\pi,\ \text{und}$$

$$C = \tfrac{1}{2}l2\pi.$$

Auf diese Art findet man in Decimal-Brüchen

$$C = 0{,}9189385332046727417803297$$

und zugleich die Summe folgender Reihe

$$1 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6} + \frac{\mathfrak{D}}{7.8} - \frac{\mathfrak{E}}{9.10} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}l2\pi.$$

§. 159.

Nachdem man so die beständige Größe $C = \frac{1}{2}l2\pi$ kennen gelernt hat, kann man auch die Summe jeder Menge von Logarithmen aus der Reihe $l1 + l2 + l3 +$ etc. angeben. Denn setzt man

$$s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots + lx$$

so wird

$$s = \tfrac{1}{2}l2\pi + (x+\tfrac{1}{2})lx - x + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7}$$
$$+ \text{etc.}$$

wenn nemlich die Logarithmen hyperbolische sind. Ist aber von gemeinen Logarithmen die Rede, so muß man auch in den Gliedern $\frac{1}{2}l2\pi + (x+\frac{1}{2})lx$ für $l2\pi$ und lx die gemeinen Logarithmen nehmen, und die übrigen Glieder der Reihe

— x

$- x + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} +$ rc. mit $0,4342944819032518 27 = n$ multipliciren. In diesem Falle hat man für die gemeinen Logarithmen

$$l\pi = 0,4971498726941338543512 68$$
$$l2 = 0,3010299956639811952137 38$$
$$l2\pi = 0,7981798683581150495650 06$$
$$\tfrac{1}{2}l2\pi = 0,3990899341790575247825 03$$

Exempel.

Die Summe der ersten tausend gemeinen Logarithmen zu finden.

$$s = l1 + l2 + l3 + \ldots\ldots + l1000.$$

Es ist also $x = 1000$, und $lx = 3,0000000000000$

und daher wird $xlx = 3000,0000000000000$

$\tfrac{1}{2}lx = 1,5000000000000$

$\tfrac{1}{2}l2\pi = 0,3990899341790$

$3001,8990899341790$

subtr. $nx = 434,2944819032518$

$2567,6046080309272$

Dann ist $\frac{n\mathfrak{A}}{1.2x} = 0,0000361912068$

subtr. $\frac{n\mathfrak{B}}{3.4x^3} = 0,0000000000012$

$0,0000361912056$

add. $2567,6046080309272$

die gesuchte Summe $s = 2567,6046442221328$

Da also s der Logarithme eines Produkts von tausend Zahlen $1.2.3\ldots1000$ ist, so erhellet hieraus, daß dieses Produkt, wenn man es wirklich suchte, aus 2568 Zifern bestehen, und zu den Anfangs-Zifern diese 4023872 haben würde.

§. 160.

Vermittelst dieser Summation der Logarithmen lassen sich daher die Produkte aus jeder Anzahl von Faktoren, die in der Ordnung der natürlichen Zahlen fortschreiten, näherungsweise angeben. Hieher gehört vorzüglich die Aufgabe: den mittelsten oder größten Coefficienten jeder Potestät des Binomiums $(a + b)^m$ zu finden; wo zu bemerken ist, daß es, wenn m eine ungerade Zahl bedeutet, allemal zwey mittlere einander gleiche Coefficienten giebt, die zusammengenommen den mittelsten Coefficienten der nächsten geraden Potestät erzeugen. Da also der größte Coefficient jeder geraden Potestät doppelt so groß ist, als der mittelste Coefficient der vorhergehenden ungeraden Potestät, so ist es hinlänglich, wenn diese Aufgabe für den größten Coefficienten der geraden Potestäten aufgelöset wird. Es sey demnach $m = 2n$, wo der mittelste Coefficient

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots\ldots n}$$

ist. Man setze denselben $= u$, so hat man

$$u = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots\ldots 2n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n)^2}$$

und wenn man die Logarithmen nimmt,

$$lu = l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \ldots + l2n$$
$$- 2l1 - 2l2 - 2l3 - 2l4 - 2l5 \ldots - 2ln.$$

§. 161.

Braucht man die hyperbolischen Logarithmen, so wird

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots\ldots + l2n$$
$$=$$
$$\tfrac{1}{2}l2\pi + (2n + \tfrac{1}{2})ln + (2n + \tfrac{1}{2})l2 - 2n$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} - \text{rc.}$$

und

und

$$2l1 + 2l2 + 2l3 + 2l4 + \ldots\ldots\ldots + 2ln$$
$$=$$
$$l2\pi + (2n+1)ln - 2n + \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} - \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} + \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} - \text{ꝛc.}$$

Zieht man diesen Ausdruck von jenem ab, so bleibt

$$lu = -\tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}ln + 2nl2 + \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} - \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} + \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} - \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} + \text{ꝛc.}$$

und nimmt man je zwey und zwey Glieder zusammen, so wird

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^7n^7} - \text{ꝛc.}$$

Es sey

$$\frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2^2n^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^4n^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^6n^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^8n^8} + \text{ꝛc.}$$
$$=$$
$$l\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \frac{D}{2^8n^8} + \text{ꝛc.}\right)$$

so wird

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - 2nl\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \text{ꝛc.}\right)$$

und also

$$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \text{ꝛc.}\right)^{2n}\sqrt{n\pi}}$$

Setzt man aber $2n = m$, so ist

l(1 +

$$l\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \frac{D}{2^8n^8} + \text{etc.}\right) =$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
\dfrac{A}{m^2} + & \dfrac{B}{m^4} + & \dfrac{C}{m^6} + & \dfrac{D}{m^8} + & \dfrac{E}{m^{10}} & + \text{etc.} \\
& -\dfrac{A^2}{2m^4} - & \dfrac{AB}{m^6} - & \dfrac{AC}{m^8} - & \dfrac{AD}{m^{10}} & - \text{etc.} \\
& & & -\dfrac{BB}{2m^8} - & \dfrac{BC}{m^{10}} & - \text{etc.} \\
& & +\dfrac{A^3}{3m^6} + & \dfrac{A^2B}{m^8} + & \dfrac{A^2C}{m^{10}} & + \text{etc.} \\
& & & & +\dfrac{AB^2}{m^{10}} & + \text{etc.} \\
& & & -\dfrac{A^4}{4m^8} - & \dfrac{A^3B}{m^{10}} & - \text{etc.} \\
& & & & +\dfrac{A^5}{5m^{10}} & + \text{etc.}
\end{array}$$

und da dieser Ausdruck diesem folgenden gleich seyn muß:

$$\frac{3\mathfrak{A}}{1.2m^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4m^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6m^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8m^8} + \text{etc.}$$

so wird

$$A = \frac{3\mathfrak{A}}{1.2}$$

$$B = \frac{A^2}{2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4}$$

$$C = AB - \tfrac{1}{3}A^3 + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6}$$

$$D = AC + \tfrac{1}{2}B^2 - A^2B + \tfrac{1}{4}A^4 - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8}$$

$$E = AD + BC - A^2C - AB^2 + A^3B - \tfrac{1}{5}A^5 + \frac{1023\mathfrak{E}}{9.10}$$

etc.

Da

§. 148.

Da also $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{E} = \frac{5}{66}$; ꝛc. ist, so wird

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{1}{96}$$

$$C = \frac{27}{640}$$

$$D = \frac{90031}{2^{11}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}$$

ꝛc.

folglich

$$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{1}{2^4.n^2} - \frac{1}{2^9.3n^4} + \frac{27}{2^{15}.5n^6} - \frac{90031}{2^{19}.3^2.5.7n^8} + \text{ꝛc.}\right)^{2n}\sqrt{n\pi}}$$

oder

$$u = \frac{2^{2n}\left(1 - \frac{1}{2^4.n^2} + \frac{7}{2^9.3n^4} - \frac{121}{2^{13}.3.5n^6} + \frac{104969}{2^{19}.3^2.5.7n^8} - \text{ꝛc.}\right)^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

oder, wenn man jene Erhebung der Reihe wirklich vornimmt, näherungsweise,

$$u = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16.128n^4}\ \text{ꝛc.}\right)}$$

Demnach verhält sich das mittelste Glied in $(1+1)^{2n}$ zur Summe aller Glieder 2^{2n} wie

$$1 \text{ zu } \sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16.128n^4}\ \text{ꝛc.}\right)$$

oder, wenn man der Kürze wegen $4n = \nu$ setzt, wie

1 zu

$$1 \text{ zu } \sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\nu^2} - \frac{1}{2\nu^3} - \frac{5}{8\nu^4} + \frac{23}{8\nu^5} + \frac{53}{16\nu^6} - \text{ꝛc.}\right)$$

Erstes Exempel.

Man soll den mittelsten Coefficienten des entwickelten Binomiums $(a + b)^{10}$ finden, wovon bekannt ist, daß er $\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$ ausmacht.

Wenn man die letzte von den für u gefundenen Formeln braucht, so ist

$$\begin{array}{rrr}
 & \frac{1}{4n} = & 0{,}0500000 \\
 & \frac{1}{32n^2} = & 0{,}0012500 \\
\hline
 & & 0{,}0512500 \\
\text{subtr.} & \frac{1}{128n^3} = & 625 \\
\hline
 & & 0{,}0511875 \\
\text{subtr.} & \frac{1}{16.128n^4} = & 39 \\
\hline
 & & 0{,}0511836
\end{array}$$

Also ist $1 + \frac{1}{4n} + \text{ꝛc.} = 1{,}0511836$. Davon ist

$$\begin{array}{rl}
\text{der Logar.} & = 0{,}0216784 \\
ln & = 0{,}6989700 \\
l\pi & = 0{,}4971498 \\
\hline
 & 1{,}2177982 \\
l\sqrt{n\pi(1 + \text{ꝛc.})} & = 0{,}6088991 \\
\text{von } l2^{2n} & = 3{,}0102999 \\
\hline
ln & = 2{,}4014008, \text{ folglich} \\
n & = 252.
\end{array}$$

Zwey=

Zweytes Exempel.

Man soll das Verhältniß finden, welches das mittelste Glied des Binomiums $(1 + 1)^{100}$ zur Summe aller Glieder 2^{100} hat.

Wir wollen dazu die zuerst gefundene Formel

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \text{ꝛc.}$$

brauchen, aus welcher sich, wenn $2n = m$ gesetzt wird, um die Potestät $(1 + 1)^m$ zu bekommen, und nach der Substitution der Werthe der Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, ꝛc. folgende Bestimmung ergiebt:

$$lu = l\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{1}{4m} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{20m^5} + \frac{17}{112m^7} - \frac{31}{36m^9} + \frac{691}{88m^{11}} - \text{ꝛc.}$$

Da die hier vorkommenden Logarithmen hyperbolische Logarithmen sind, so multiplicire man sie durch

$$k = 0{,}434294481903251$$

um an ihrer Statt gemeine Logarithmen zu erhalten. Auf diese Art wird

$$lu = l\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{k}{4m} + \frac{k}{24m^3} - \frac{k}{20m^5} + \frac{17k}{112m^7} - \frac{31k}{36m^9} + \text{ꝛc.}$$

Da also u der mittelste Coefficient ist, so ist das gesuchte Verhältniß $2^m : u$, und folglich

$$l\frac{2^m}{u} = l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} + \frac{k}{4m} - \frac{k}{20m^5} - \frac{17k}{112m^7} + \frac{31k}{36m^9} - \frac{691k}{88m^{11}} + \text{ꝛc.}$$

Nun ist, weil der Exponent $m = 100$ ist,

$$\frac{k}{m} = 0{,}0043429448;\quad \frac{k}{m^3} = 0{,}0000004343;$$

k

$$\frac{k}{m^5} = 0,0000000000$$

folglich

$$\frac{k}{4m} = 0,0010857362$$

$$\frac{k}{24m^3} = 0,0000000181$$

$$0,0010857181.$$

Ferner ist $l\pi = 0,4971498726$

$$l\tfrac{1}{2}m = 1,6989700043$$

$$l\tfrac{1}{2}m\pi = 2,1961198769$$

$$l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} = 1,0980599384$$

$$\frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \text{rc.} = 0,0010857181$$

$$1,0991456565 = l\frac{2^{100}}{u}$$

Folglich ist $\frac{2^{100}}{u} = 12,56451$, und es verhält sich daher in der Potestät $(1+1)^{100}$, wenn man dieselbe entwickelt, das mittelste Glied zur Summe aller Glieder wie 1 zu 12,56451.

§. 163.

Es bedeute nunmehr das allgemeine Glied z die Exponential-Funktion a^x, oder es sey die geometrische Reihe zu summiren:

$$s = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots + a^x.$$

Da dies eine geometrische Reihe ist, so weiß man schon, daß die Summe $s = \frac{(a^x - 1)a}{a - 1}$ ist, wir wollen aber dieselbe nach der hier erklärten Methode suchen. Da also $z = a^x$ ist,

ist, so ist $\int z dx = \frac{a^x}{la}$, denn dessen Differenzial ist $a^x dx$. Ferner ist nunmehr

$$\frac{dz}{dx} = a^x la; \quad \frac{ddz}{dx^2} = a^x (la)^2; \quad \frac{d^3z}{dx^3} = a^x (la)^3; \text{ ꝛc.}$$

also

$$s = a^x \left(\frac{1}{la} + \tfrac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3..6}(la)^5 - \text{ꝛc.}\right) + C.$$

Um die Constante C zu bestimmen, setze man $x = 0$, und da alsdann $s = 0$ wird, so ergiebt sich

$$C = -\frac{1}{la} - \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la + \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 - \text{ꝛc.}$$

und es wird demnach

$$s = (a^x - 1)\frac{1}{la} + \tfrac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3...6}(la)^5 - \text{ꝛc.}$$

Da also $s = \frac{(a^x - 1)a}{a - 1}$ ist, so wird

$$\frac{a}{a-1} = \frac{1}{la} + \tfrac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3...6}(la)^5 - \text{ꝛc.}$$

wo la den hyperbolischen Logarithmen von a bedeutet. Hieraus fließt

$$\frac{(a + 1\, la}{2(a-1)} = 1 + \frac{\mathfrak{A}(la)^2}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}(la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}\, la)^6}{1.2...6} - \text{ꝛc.}$$

und so läßt sich also die Summe dieser Reihe angeben

§. 164.

Es sey das allgemeine Glied $z = \sin. ax$, und

$$s = \sin. a + \sin. 2a + \sin. 3a + \ldots\ldots + \sin. ax.$$

Da dieses eine wiederkehrende Reihe ist, so läßt sie sich ebenfalls summiren. Es ist nemlich

 $s =$

$$s = \frac{\sin.a + \sin.ax - \sin.(ax + a)}{1 - 2\cos.a + 1} = \frac{\sin.a + (1 - \cos.a)\sin.ax - \sin.a\cos.ax}{2(1 - \cos.a)}$$

Nun ist aber

$$\int z\,dx = \int dx \sin.ax = -\frac{1}{a}\cos.ax$$

$$\frac{dz}{dx} = a\cos.ax; \quad \frac{ddz}{dx^2} = -aa\sin.ax$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = a^3\cos.ax; \quad \frac{d^5z}{dx^5} = a^5\cos.ax$$

ꝛc.

$$s = C - \frac{1}{a}\cos.ax + \frac{1}{2}\sin.ax + \frac{\mathfrak{A}a\cos.ax}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}a^3\cos.ax}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}a^5\cos.ax}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\mathfrak{D}a^7\cos.ax}{1.2\ldots.8} + \text{ꝛc.}$$

Man setze $x = 0$, damit $s = 0$ werde, so bekommt man

$$C = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6} - \text{ꝛc.}$$

folglich

$$s = \frac{1}{2}\sin.ax + (1 - \cos.ax)\left(\frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6} - \text{ꝛc.}\right)$$

Da aber $s = \frac{1}{2}\sin.ax + \frac{(1 - \cos.ax)\sin.a}{2(1 - \cos.a)}$ ist, so wird

$$\frac{\sin.a}{2(1 - \cos.a)} = \frac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6} - \text{ꝛc.}$$

und eben diese Reihe haben wir bereits oben §. 127. gehabt.

§. 144.

Nun sey $z = \cos.ax$, und die zu summirende Reihe $s = \cos.a + \cos.2a + \cos.3a + \ldots\ldots + \cos.ax$; wovon,

wovon, da es eine wiederkehrende Reihe ist, die Summe

$$s = \frac{\cos a - 1 + \cos ax - \cos(ax + a)}{1 - 2\cos a + 1} =$$

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos ax + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a \,.\, \sin ax$$

wird. Um aber dieselbe nach unserer gegenwärtigen Methode auszudrucken, so ist

$$\int z\,dx = \int dx \cos ax = \frac{1}{a}\sin ax; \quad \frac{dz}{dx} = -a\sin ax;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = a^3\sin ax; \quad \frac{d^5z}{dx^5} = -a^5\sin ax; \text{ ꝛc.}$$ Folglich

$$s = C + \frac{1}{a}\sin ax + \tfrac{1}{2}\cos ax - \frac{\mathfrak{A}\,a\sin ax}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}\,a^3\sin ax}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

Es sey $x = 0$, so wird $s = 0$, und $C = -\frac{1}{2}$; folglich

$$s = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos ax + \frac{1}{a}\sin ax - \frac{\mathfrak{A}\,a\sin ax}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}\,a^3\sin ax}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

Da also $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos ax + \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a\sin ax$ ist, so wird wieder, wie wir bereits gefunden haben

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}\,a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}\,a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}\,a^5}{1.2.3\ldots6} - \text{ꝛc.}$$

§. 166.

Da, wenn a irgend einen Bogen bedeutet,

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}a + \sin a + \tfrac{1}{2}\sin 2a + \tfrac{1}{3}\sin 3a + \tfrac{1}{4}\sin 4a + \text{ꝛc.}$$

ist: so wollen wir diese Reihe betrachten, und $z = \frac{1}{x}\sin ax$ setzen, so daß

$$s = \sin a + \tfrac{1}{2}\sin 2a + \tfrac{1}{3}\sin 3a + \ldots + \frac{1}{x}\sin ax$$

sey. In diesem Falle wird $\int z\,dx = \int\frac{dx}{x}\sin ax$, ein Integral, welches sich nicht darstellen läßt. Es ist aber

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a}{x}\cos.ax - \frac{1}{x^2}\sin.ax;$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = -\frac{a^2}{x}\sin.ax - \frac{2a}{x^2}\cos.ax + \frac{2}{x^3}\sin.ax;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{a^3}{x}\cos.ax + \frac{3a^2}{x^2}\sin.ax + \frac{6a}{x^3}\cos.ax - \frac{6}{x^4}\sin.ax;$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{a^4}{x}\sin.ax + \frac{4a^3}{x^2}\cos.ax - \frac{12a^2}{x^3}\sin.ax - \frac{24a}{x^4}\cos.ax + \frac{24}{x^5}\sin.ax.$$

Da wir aber weder die Integral Formel $\int z dx$ entwickelt darstellen, noch diese Differenzialien bequem genug ausdrucken können, so sind wir auch nach der bisher erklärten Methode nicht im Stande die Summe dieser Reihe so zu bestimmen, daß sich daraus etwas schließen ließe. Eben diese Unbequemlichkeit stellt sich bey sehr vielen andern Reihen ein, so oft nemlich das allgemeine Glied nicht einfach genug ist, um zum Ausdrucke bequeme und nach einem leichten Gesetze fortgehende Differenzialien zu geben. Aus diesem Grunde wollen wir in dem folgenden Capitel andere allgemeine Ausdrücke für die Summen solcher Reihen aufsuchen, deren allgemeine Glieder entweder zu zusammengesetzt sind, oder gar nicht gegeben werden können. Insbesondere aber fällt die Unzulänglichkeit der bisher erklärten Methode in die Augen, wenn die Zeichen der gegebenen Reihe abwechseln. Denn so einfach alsdann auch die allgemeinen Glieder seyn mögen, so lassen sich doch die summirenden Glieder dieser Reihen nach jener Methode nicht bequem darstellen.

Sie-