Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Achtes Capitel. Von dem Gebrauch und dem Nutzen der Differenzial-Rechnung bey Formirung der Reihen.

Achtes Capitel.

Von dem Gebrauch und dem Nutzen der Differenzial-Rechnung bey Formirung der Reihen.

§. 198.

Nun ist noch eine Anwendung der Differenzial-Rechnung in der Lehre von den Reihen übrig. Diese findet bey der Formirung der Reihen statt, und sie war es, welche oben gemeint wurde, als von der Entwickelung der Brüche, die eine Potestät irgend einer Funktion zum Nenner haben, in Reihen, die Rede war. Man verfährt dabey auf ähnliche Art als bey der Verwandlung der Funktionen in Reihen, wenn die zu verwandelnde Funktion einer Reihe gleich gesetzt wird, die in jedem ihrer Glieder unbestimmte Coefficienten hat, welche darauf aus gemachten Gleichungen entwickelt werden. Diese Entwickelung oder Bestimmung wird aber öfters in einem bewundernswürdigen Grade erleichtert und verkürzt, wenn man zuvor die Gleichung auf Differenzialien, erste sowohl als zweyte bisweilen, bringt; und da diese Methode in der Integral-Rechnung außerordentlichen Nutzen gewährt, so wollen wir sie im gegenwärtigen Capitel ausführlich kennen zu lernen suchen.

§. 199.

Zuvörderst will ich kürzlich dasjenige wiederholen, was ich oben über die Entwickelung der Brüche in Reihen, in so fern dieselbe ohne Differenzial-Rechnung zu Stande gebracht wird, gesagt habe. Es sey also irgend ein Bruch:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.}} = s$$

nach den Potestäten von x in eine Reihe zu verwandeln. Man setze s einer unbestimmten Reihe gleich, oder

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \text{ꝛc.}$$

Da, wenn man den Bruch durch die Multiplication wegschafft,

$$\begin{gathered} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \text{ꝛc.} \\ = \\ s(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \text{ꝛc.}) \end{gathered}$$

wird: so bekommt man, wenn man für s die vorhin dafür angenommene Reihe setzt,

$$\begin{gathered} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ꝛc.} \\ = \end{gathered}$$

$$\begin{array}{lllllll} \mathfrak{A}\alpha & + \mathfrak{B}\alpha x & + \mathfrak{C}\alpha x^2 & + \mathfrak{D}\alpha x^3 & + \mathfrak{E}\alpha x^4 & + \mathfrak{F}\alpha x^5 & + \text{ꝛc.} \\ & + \mathfrak{A}\beta & + \mathfrak{B}\beta & + \mathfrak{C}\beta & + \mathfrak{D}\beta & + \mathfrak{E}\beta & + \text{ꝛc.} \\ & & + \mathfrak{A}\gamma & + \mathfrak{B}\gamma & + \mathfrak{C}\gamma & + \mathfrak{D}\gamma & + \text{ꝛc.} \\ & & & + \mathfrak{A}\delta & + \mathfrak{B}\delta & + \mathfrak{C}\delta & + \text{ꝛc.} \\ & & & & + \mathfrak{A}\varepsilon & + \mathfrak{B}\varepsilon & + \text{ꝛc.} \\ & & & & & + \mathfrak{A}\zeta & + \text{ꝛc.} \end{array}$$

Setzt man daher die einzelnen Glieder, welchen einerley Potestät von x zugehört, einander gleich: so findet man

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}\alpha - A = 0 \\ &\mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{A}\beta - B = 0 \\ &\mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{A}\gamma - C = 0 \\ &\mathfrak{D}\alpha + \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{A}\delta - D = 0 \\ &\mathfrak{E}\alpha + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{B}\delta + \mathfrak{A}\varepsilon - E = 0 \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die angenommenen Coeffizienten A, B, C, D, ꝛc. bestimmen, und dadurch wird denn auch die Reihe

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ꝛc.}$$

gefunden, welche dem gegebenen Bruche s gleich ist. Wenn sowohl der Zähler als der Nenner des Bruchs s aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, so sind unter dieser Form alle wiederkehrende Reihen enthalten, von welchen die Einleitung eine vollständige Auseinandersetzung enthält.

§. 200.

Wenn aber entweder der Zähler oder der Nenner oder beyde zu irgend einer Dignität erhoben sind, so findet man auf diesem Wege die Reihe nicht anders als mit vieler Mühe, weil die Erhebung zu Dignitäten, den Fall ausgenommen, daß ein Binomium da ist, weitläuftige Arbeit erfordert. Durch die Differenzial-Rechnung kann man sich dieser Arbeit überheben. Es sey zuvörderst bloß der Zähler da, oder

$$s = (A + Bx + Cxx)^n$$

und eine nach den Potestäten von x fortschreitende Reihe zu suchen, welche der Dignität dieser dreytheiligen Größe gleich sey. Ist n eine ganze positive Zahl, so ist bekannt, daß diese Reihe nur eine endliche Zahl von Gliedern enthalte. Man nehme also wieder für s eine unbestimmte Reihe an, oder setze

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \text{ꝛc.}$$

Daß das erste Glied dieser Reihe $\mathfrak{A} = A^n$ sey, ist bekannt. Denn setzt man $x = 0$, so wird aus der ersten Formel $s = A^n$, und aus der andern $s = \mathfrak{A}$. Man muß aber die Bestimmung dieses ersten Gliedes auf diese Art ohne Differenzialien suchen, weil die Differenzialien dasselbe unbestimmt lassen, wie sogleich erhellen wird.

§. 201.

Da $s = (A + Bx + Cx^2)^n$: so wird, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$ls = nl(A + Bx + Cx^2)$$

und hieraus, wenn man differenziirt,

$$\frac{ds}{s} = \frac{nBdx + 2nCxdx}{A + Bx + Cx^2}, \text{ oder}$$

$$(A + Bx + Cx^2)\frac{ds}{dx} = ns(B + 2Cx)$$

Aus der angenommenen Reihe aber erhält man

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \text{ꝛc.}$$

und wenn man daher für $\frac{ds}{dx}$ diese Reihe, und für s die angenommene Reihe setzt, so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\begin{array}{llllll}
A\mathfrak{B} & + 2A\mathfrak{C}x & + 3A\mathfrak{D}x^2 & + 4A\mathfrak{E}x^3 & + 5A\mathfrak{F}x^4 & + \text{ꝛc.} \\
 & + B\mathfrak{B} & + 2B\mathfrak{C} & + 3B\mathfrak{D} & + 4B\mathfrak{E} & + \text{ꝛc.} \\
 & & + C\mathfrak{B} & + 2C\mathfrak{C} & + 3C\mathfrak{D} & + \text{ꝛc.} \\
 & & = & & & \\
nB\mathfrak{A} & + nB\mathfrak{B} & + nB\mathfrak{C} & + nB\mathfrak{D} & + nB\mathfrak{E} & + \text{ꝛc.} \\
 & + 2nC\mathfrak{A} & + 2nC\mathfrak{B} & + 2nC\mathfrak{C} & + 2nC\mathfrak{D} & + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

Setzt man also die Glieder gleich, in welchen sich einerley Potestät von x findet: so wird,

$$\mathfrak{B} = \frac{nB\mathfrak{A}}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A}}{2A}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{(n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B}}{3A}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{(n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C}}{4A}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{(n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D}}{5A}$$

ꝛc.

Da also, wie wir vorhin gesehen haben $\mathfrak{A} = A^n$ ist, so wird $\mathfrak{B} = nA^{n-1}B$, und hieraus lassen sich die übrigen Coefficienten insgesammt nach und nach bestimmen. Das Fortschreitungsgesetz derselben fällt aus diesen Formeln ganz leicht in die Augen, aber es würde sehr schwer zu entdecken gewesen seyn, wenn man das Trinomium unmittelbar zu den Potestäten hätte erheben wollen.

§. 202.

Eben diese Methode läßt sich anwenden, wenn überhaupt eine vieltheilige Größe zu einer Potestät erhoben werden soll. Denn es sey

$$s = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.})^n$$

und

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ꝛc.}$$

angenommen werden: so ist $\mathfrak{A} = A^n$, und diesen Werth findet man, wenn man $x = 0$ setzt. Nimmt man nun wie vorhin die Logarithmen und ihre Differenzialien: so wird

$$\frac{ds}{s} = \frac{nBdx + 2nCxdx + 3nDx^2dx + 4nEx^3dx + \text{ꝛc.}}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.}}$$

oder

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.})\frac{ds}{dx}$$

$$=$$

$$s(nB + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \text{ꝛc.})$$

Da ferner

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \text{ꝛc.}$$

ist,

ist, so bekömmt man, wenn man diese Reihen für s und $\frac{ds}{dx}$ substituirt,

$$\begin{array}{llllll}
A\mathfrak{B} + 2A\mathfrak{C}x & + 3A\mathfrak{D}x^2 & + 4A\mathfrak{E}x^3 & + 5A\mathfrak{F}x^4 & + \text{ꝛc.} \\
+ B\mathfrak{B} & + 2B\mathfrak{C} & + 3B\mathfrak{D} & + 4B\mathfrak{E} & + \text{ꝛc.} \\
 & + C\mathfrak{B} & + 2C\mathfrak{C} & + 3C\mathfrak{D} & + \text{ꝛc.} \\
 & & + D\mathfrak{B} & + 2D\mathfrak{C} & + \text{ꝛc.} \\
 & & & + E\mathfrak{B} & + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{llllll}
nB\mathfrak{A} & + nB\mathfrak{B} & + nB\mathfrak{C} & + nB\mathfrak{D} & + nB\mathfrak{E} & + \text{ꝛc.} \\
 & + 2nC\mathfrak{A} & + 2nC\mathfrak{B} & + 2nC\mathfrak{C} & + 2nC\mathfrak{D} & + \text{ꝛc.} \\
 & & + 3nD\mathfrak{A} & + 3nD\mathfrak{B} & + 3nD\mathfrak{C} & + \text{ꝛc.} \\
 & & & + 4nE\mathfrak{A} & + 4nE\mathfrak{B} & + \text{ꝛc.} \\
 & & & & + 5nF\mathfrak{A} & + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

Hieraus lassen sich folgende Bestimmungen herleiten:

$$A\mathfrak{B} = n \,.\, B\mathfrak{A}$$
$$2A\mathfrak{C} = (n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A}$$
$$3A\mathfrak{D} = (n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A}$$
$$4A\mathfrak{E} = (n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C} + (3n-1)D\mathfrak{B} + 4nE\mathfrak{A}$$
$$5A\mathfrak{F} = (n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D} + (3n-2)D\mathfrak{C} + (4n-1)E\mathfrak{B} + 5nF\mathfrak{A}$$
$$\text{ꝛc.}$$

und wie man aus diesen Formeln die angenommenen Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. selbst bestimme, und wie sie von einander abhangen, bedarf, da $\mathfrak{A} = A^n$ ist, keiner weitern Erörterung.

§. 203.

Da jede Potestät von $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ ꝛc. wenn diese Größe aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, und n eine ganze positive Zahl ist, ebenfalls aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen muß: so ist klar, daß in diesem Falle die gefundenen Formeln endlich verschwinden.

Und da, sobald ein Glied verschwindet, bereits alle Glieder da seyn müssen, so erhellet auch, daß mit einem Gliede sogleich alle folgende Null werden. Es sey die gegebene Formel ein Trinomium $A + Bx + Cx^2$, und der Cubus davon zu suchen; also $n = 3$. Alsdann ist

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} = & A^3 \text{ und also}; & \mathfrak{A} = A^3 \\
A\mathfrak{B} = & 3B\mathfrak{A} \quad ; & \mathfrak{B} = 3A^2B \\
2A\mathfrak{C} = & 2B\mathfrak{B} + 6C\mathfrak{A}; & \mathfrak{C} = 3AB^2 + 3A^2C \\
3A\mathfrak{D} = & 1B\mathfrak{C} + 5C\mathfrak{B}; & \mathfrak{D} = B^3 + 6ABC \\
4A\mathfrak{E} = & 0 + 4C\mathfrak{C}; & \mathfrak{E} = 3B^2C + 3AC^2 \\
5A\mathfrak{F} = & -B\mathfrak{E} + 3C\mathfrak{D}; & \mathfrak{F} = 3BC^2 \\
6A\mathfrak{G} = & -2B\mathfrak{F} + 2C\mathfrak{E}; & \mathfrak{G} = C^3 \\
7A\mathfrak{H} = & -3B\mathfrak{G} + 1C\mathfrak{F}; & \mathfrak{H} = 0 \\
8A\mathfrak{J} = & -4B\mathfrak{H} + 0 \quad ; & \mathfrak{J} = 0.
\end{array}$$

Da also schon zwey Glieder $= 0$ sind, und jedes von den folgenden von den beyden vorhergehenden abhängt, so fällt in die Augen, daß auch alle diese folgende Glieder $= 0$ seyn müssen. Um so merkwürdiger ist das Gesetz, nach welchem, wie wir gefunden haben, diese Coefficienten von einander abhangen.

§. 204.

Wenn n eine negative Zahl und also s einem Bruche gleich ist: so läuft die Reihe ohne Ende fort. Es sey also,

$$s = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^n}$$

und für den Werth dieses Bruchs folgende Reihe angenommen:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \text{etc.}$$

Setzt man in den obigen Formeln statt der Buchstaben A, B, C, D, etc. diese: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. und nimmt dabey zugleich n

nega-

negativ: so bekommt man folgende Bestimmungen der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc.:

$$\mathfrak{A} = a^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

$$\alpha\mathfrak{B} + n\beta\mathfrak{A} = 0$$

$$2\alpha\mathfrak{C} + (n+1)\beta\mathfrak{B} + 2n\gamma\mathfrak{A} = 0$$

$$3\alpha\mathfrak{D} + (n+2)\beta\mathfrak{C} + (2n+1)\gamma\mathfrak{B} + 3n\delta\mathfrak{A} = 0$$

$$4\alpha\mathfrak{E} + (n+3)\beta\mathfrak{D} + (2n+2)\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)\delta\mathfrak{B} + 4n\varepsilon\mathfrak{A} = 0$$

$$5\alpha\mathfrak{F} + (n+4)\beta\mathfrak{E} + (2n+3)\gamma\mathfrak{D} + (3n+2)\delta\mathfrak{C} + (4n+1)\varepsilon\mathfrak{B} + 5n\zeta\mathfrak{A} = 0$$

ꝛc.

In diesen Formeln nimmt man eben das Gesetz wahr, welches wir bereits in der Einleitung kennen gelernt haben, dessen Richtigkeit aber erst hier streng dargethan werden konnte.

§. 205.

Auf diese Art verhält es sich, wenn der Zähler des Bruchs $= 1$, oder auch irgend eine Potestät von x, oder $= x^m$ ist, denn in diesem letzten Falle darf man nur die gefundene Reihe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 +$ ꝛc. durch x^m multipliciren. Wenn aber der Zähler aus zwey und mehrern Gliedern besteht, so haben wir dafür oben das Fortschreitungsgesetz noch nicht bemerkt, und wollen es daher jetzt auf dem Wege der Differenzialien kennen zu lernen suchen. Es sey also

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})^n}$$

und für den Werth dieses Bruchs die Reihe angenommen:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \text{ꝛc.}$$

Um das erste Glied $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, setze man $x = 0$, wobey man aus den ersten Ausdrücken $s = \frac{A}{\alpha^n}$, und aus der angenommenen Reihe $s = \mathfrak{A}$ erhält. Folglich ist nothwendiger

Weise

Weise $A = \frac{A}{\alpha^n}$; und hat man dieses Glied, so lassen sich die übrigen durch die Differenziation finden.

§. 206.

Nimmt man die Logarithmen, so wird

$$ls = l(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.})$$
$$- nl(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})$$

und differenziirt man, so ergiebt sich

$$\frac{ds}{s} = \frac{Bdx + 2Cdx + 3Dx^2dx + \text{etc.}}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}$$
$$- \frac{n\beta dx - 2n\gamma xdx - 3n\delta x^2dx - \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}$$

Schafft man ferner die Brüche vermittelst der Multiplication weg, so bekommt man:

$$\left(\begin{array}{lllll} A\alpha & + A\beta x & + A\gamma x^2 & + A\delta x^3 & + \text{etc.} \\ & + B\alpha & + B\beta & + B\gamma & + \text{etc.} \\ & & + C\alpha & + C\beta & + \text{etc.} \\ & & & + D\alpha & + \text{etc.} \end{array}\right\} \frac{ds}{dx} =$$

$$\left(\begin{array}{llllll} B\alpha & + B\beta x & + B\gamma x^2 & + B\delta x^3 & + B\varepsilon x^4 & + \text{etc.} \\ & + 2C\alpha & + 2C\beta & + 2C\gamma & + 2C\delta & + \text{etc.} \\ & & + 3D\alpha & + 3D\beta & + 3D\gamma & + \text{etc.} \\ & & & + 4E\alpha & + 4E\beta & + \text{etc.} \\ & & & & + 5F\alpha & + \text{etc.} \end{array}\right\} s$$

$$-\left(\begin{array}{llllll} A\beta & + 2A\gamma x & + 3A\delta x^2 & + 4A\varepsilon x^3 & + 5A\zeta x^4 & + \text{etc.} \\ & + B\beta & + 2B\gamma & + 3B\delta & + 4B\varepsilon & + \text{etc.} \\ & & + C\beta & + 2C\gamma & + 3C\delta & + \text{etc.} \\ & & & + D\beta & + 2D\gamma & + \text{etc.} \\ & & & & + E\beta & + \text{etc.} \end{array}\right\} ns$$

Da nun $\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + \text{etc.}$ ist: so wird, wenn man substituirt:

$$A\alpha\mathfrak{B} + nA\beta\mathfrak{A} - B\alpha\mathfrak{A} = 0$$

$$2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\beta\mathfrak{B} + 2nA\gamma\mathfrak{A} + (n-1)B\beta\mathfrak{A} - 2C\alpha\mathfrak{A} = 0$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} 3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\beta\mathfrak{C} + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} + & & & 3nA\delta\mathfrak{A} \\ + & B\alpha\mathfrak{C} + & nB\beta\mathfrak{B} + (2n-1)B\gamma\mathfrak{A} & \\ & - & C\alpha\mathfrak{B} + (n-2)C\beta\mathfrak{A} & \\ & & - & 3D\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\beta\mathfrak{D} + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} + & & & & 4nA\varepsilon\mathfrak{A} \\ + & 2B\alpha\mathfrak{D} + (n+1)B\beta\mathfrak{C} + & & 2nB\gamma\mathfrak{B} + (3n-1)B\delta\mathfrak{A} & \\ & + & 0C\alpha\mathfrak{C} + (n-1)C\beta\mathfrak{B} + (2n-2)C\gamma\mathfrak{A} & & \\ & & - & 2D\alpha\mathfrak{B} + (n-3)D\beta\mathfrak{A} & \\ & & & - & 4E\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

Hieraus läßt sich das Gesetz, nach welchem sich diese Formeln richten, leicht erkennen. Denn zuvörderst findet in der ersten Zeile einer jeden Gleichung eben das Gesetz statt, welches wir §. 284. gehabt haben. Ferner entstehen die Coefficienten in den zweyten Zeilen, wenn man von den Coefficienten der obern Zeilen $n + 1$ abzieht, und auf eben diese Art entstehen die Coefficienten jeder folgenden Reihe aus den der zunächst vorhergehenden. Was endlich die Buchstaben betrifft, die in einem jeden Gliede vorkommen, so lehrt der Anblick selbst die Art, wie sie mit einander verbunden werden müssen.

§. 207.

Wenn aber auch der Zähler des Bruchs eine Potestät, oder

$$s = \frac{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{2c.})^m}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{2c.})^n}$$

und die für den Werth dieses Bruchs angenommene Reihe

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{2c.}$$

ist: so wird $\mathfrak{A} = \frac{A^m}{\alpha^n}$, und die übrigen Coefficienten werden aus folgenden Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha\mathfrak{B} + nA\beta\mathfrak{A} \\ \quad - mB\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\beta\mathfrak{B} + \quad 2nA\gamma\mathfrak{A} \\ \quad -(m-1)B\alpha\mathfrak{B} + (n-m)B\beta\mathfrak{A} \\ \qquad\qquad - \quad 2mC\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\beta\mathfrak{C} + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} + \quad 3nA\delta\mathfrak{A} \\ \quad -(m-2)B\alpha\mathfrak{C} + (n-m+1)B\beta\mathfrak{B} + (2n-m)B\gamma\mathfrak{A} \\ \qquad -(2m-1)C\alpha\mathfrak{B} + (n-2m)C\beta\mathfrak{A} \\ \qquad\qquad - \quad 3mD\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\beta\mathfrak{D} + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} + \quad 4nA\varepsilon\mathfrak{A} \\ \quad -(m-3)B\alpha\mathfrak{D} + (n-m+2)B\beta\mathfrak{C} + (2n-m+1)B\gamma\mathfrak{B} + (3n-m)B\delta\mathfrak{A} \\ \qquad -(2m-2)C\alpha\mathfrak{C} + (n-2m+1)C\beta\mathfrak{B} + (2n-2m)C\gamma\mathfrak{A} \\ \qquad\quad -(3m-1)D\alpha\mathfrak{B} + (n-3m)D\beta\mathfrak{A} \\ \qquad\qquad - \quad 4mE\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\}$$

$$= 0$$

rc.

Das Gesetz, nach welchem diese Formeln weiter fortgesetzt werden können, läßt sich leichter aus dem Anblicke selbst erkennen als durch Worte beschreiben. Steigt man aber herab, so werden die Coefficienten um $n + m$ vermindert, dagegen, wenn man horizontal fortgeht, um $n - 1$ vermehrt.

§. 208.

Hierdurch erhält die Lehre von den wiederkehrenden Reihen einen Zuwachs, indem wir den bisherigen Mangel ersetzt, und das Gesetz der Coefficienten nicht nur für den Fall bestimmt haben, wenn der Nenner des Bruchs itzend eine Potestät ist, sondern auch für den, wenn der Zähler aus mehrern

mehrern Theilen besteht. Für diesen Fall das gedachte Gesetz zu finden, war der Weg der Induction nicht hinreichend. Außer den mannigfaltigen schon beschriebenen Vortheilen, welche man von den wiederkehrenden Reihen haben kann, gewähren dieselben auch bey der Erfindung der Summen der Reihen durch die Näherung sehr großen Nutzen; wovon wir bereits im ersten Capitel ein Beyspiel gehabt haben, indem wir daselbst eine Reihe vermittelst der Substitution $x = \frac{y}{1 + ny}$ in eine andere verwandelten, deren Gliederzahl öfters endlich ist. Diese Methode hätte sich dadurch noch weiter ausdehnen lassen, daß man für x andere Funktionen gesetzt hätte. Allein weil damals das Fortschreitungs-Gesetz der Reihen noch nicht bekannt war, welche man für die Potestäten der Funktionen von x würde haben setzen müssen: so hat es mir besser geschienen, diese Erweiterung für den gegenwärtigen Ort aufzubehalten, wo jenes Gesetz seinem ganzen Umfange nach bekannt ist. Bey genauerer Ueberlegung findet man indeß, daß dieses Geschäft auch ohne das erwähnte Fortschreitungs-Gesetz von statten gehe, wenn man nemlich die Methode zu Hülfe nimmt, wodurch wir dieses Gesetz selbst gefunden haben.

§. 209.

Es sey also die Reihe

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{rc.}$$

in eine andere zu verwandeln, deren Glieder Brüche sind, wovon die Nenner nach den Potestäten dieser Formel $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{rc.}$ fortschreiten. Um von den einfachern Fällen anzufangen, wollen wir

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \text{rc.}$$

 anneh-

annehmen. Man setze diese Reihe der vorhergehenden gleich, und multiplicire auf beyden Seiten durch $\alpha + \beta x$: so wird:

$$\begin{matrix} A\alpha + B\alpha x + C\alpha x^2 + D\alpha x^3 + \text{ꝛc.} \\ + A\beta \;\; + B\beta \;\;\; + C\beta \;\;\; + \text{ꝛc.} \end{matrix} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\beta x)^2} + \text{ꝛc.}$$

Man setze $\mathfrak{A} = A\alpha$, und mache

$$\begin{aligned} A\beta + B\alpha &= A^{I} \\ B\beta + C\alpha &= B^{I} \\ C\beta + D\alpha &= C^{I} \\ D\beta + E\alpha &= D^{I} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Alsdann findet man nach der Division durch x,

$$A^{I} + B^{I}x + C^{I}x^2 + D^{I}x^3 + \text{ꝛc.} = \frac{\mathfrak{B}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \text{ꝛc.}$$

Nun multiplicire man abermals durch $\alpha + \beta x$, und setze

$$\begin{aligned} A^{I}\beta + B^{I}\alpha &= A^{II} \\ B^{I}\beta + C^{I}\alpha &= B^{II} \\ C^{I}\beta + D^{I}\alpha &= C^{II} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so wird

$$A^{I}\alpha + A^{II}x + B^{II}x^2 + C^{II}x^3 + \text{ꝛc.} = \mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{C}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \text{ꝛc.}$$

Hat man auf diese Art $\mathfrak{B} = A^{I}\alpha$ gefunden, so wird, wenn man auf ähnliche Art fortfährt, und dabey

$$\begin{aligned} A^{II}\beta + B^{II}\alpha &= A^{III} \\ B^{II}\beta + C^{II}\alpha &= B^{III} \\ C^{II}\beta + D^{II}\alpha &= C^{III} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A^{III}\beta + B^{III}\alpha &= A^{IV} \\ B^{III}\beta + C^{III}\alpha &= B^{IV} \\ C^{III}\beta + D^{III}\alpha &= C^{IV} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

setzt,

$$\mathfrak{C} = A^{II}\alpha; \quad \mathfrak{D} = A^{III}\alpha; \quad \mathfrak{E} = A^{IV}\alpha; \quad \text{ꝛc.}$$

und die Summe der gegebenen Reihe läßt sich daher auf folgende Art ausdrucken:

$s =$

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A^{I}\alpha x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{A^{II}\alpha x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{A^{III}\alpha x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \text{rc.}$$

Eben diese Reihe würde man erhalten haben, wenn man die Substitution $\frac{x}{\alpha + \beta x} = y$ oder $x = \frac{\alpha y}{1 - \beta y}$ gebraucht hätte.

§. 210.

Diese Verwandlung wird mit dem besten Erfolge vorgenommen, wenn die gegebene Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ rc. so beschaffen ist, daß sie endlich mit der wiederkehrenden oder vielmehr geometrischen Reihe zusammenstimmt, welche aus dem Bruche $\frac{P}{\alpha + \beta x}$ entsteht. Denn alsdann verschwinden endlich die Werthe A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I}, rc. und es müssen daher die Buchstaben A^{II}, A^{III}, A^{IV}, rc. noch weit mehr eine sehr convergirende Reihe bilden. Wir können aber auf ähnliche Art auch bey drey und mehrtheiligen Nennern verfahren, und der Nutzen davon ist insbesondere alsdenn sehr groß, wenn die gegebene Reihe endlich mit einer wiederkehrenden Reihe zusammenstimmt. Ist also z. B. die Reihe

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{rc.}$$

gegeben: so setze man

$$s = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}^{I}x^2 + \mathfrak{B}^{I}x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} +$$
$$\frac{\mathfrak{A}^{II}x^4 + \mathfrak{B}^{II}x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}^{III}x^6 + \mathfrak{B}^{III}x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^4} + \text{rc.}$$

Ferner multiplicire man allenthalben durch $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, und setze

$$A\gamma + B\beta + C\alpha = A^{I}$$
$$B\gamma + C\beta + D\alpha = B^{I} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = A\alpha$$

$$C\gamma + D\beta + E\alpha = C^{I} \qquad \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha$$

$$\text{rc.}$$

so entsteht eine der vorigen ähnliche Gleichung, wenn man durch xx dividirt:

$$A^{I} + B^{I}x + C^{I}x^2 + D^{I}x^3 + E^{I}x^4 + \text{rc.} =$$

$$\frac{\mathfrak{A}^{I} + \mathfrak{B}^{I}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}^{II}x^2 + \mathfrak{B}^{II}x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} + \frac{\mathfrak{A}^{III}x^4 + \mathfrak{B}^{III}x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \text{rc.}$$

Wenn man also wie vorhin verfährt, und

$$A^{I}\gamma + B^{I}\beta + C^{I}\alpha = A^{II}$$

$$B^{I}\gamma + C^{I}\beta + D^{I}\alpha = B^{II} \qquad \mathfrak{A}^{I} = A^{I}\alpha$$

$$C^{I}\gamma + D^{I}\beta + C^{I}\alpha = C^{II} \qquad \mathfrak{B}^{I} = A^{I}\beta + B^{I}\alpha$$

$$\text{rc.} \qquad \text{ferner}$$

$$A^{II}\gamma + B^{II}\beta + C^{II}\alpha = A^{III}$$

$$B^{II}\gamma + C^{II}\beta + D^{II}\alpha = B^{III} \qquad \mathfrak{A}^{II} = A^{II}\alpha$$

$$C^{II}\gamma + D^{II}\beta + E^{II}\alpha = C^{III} \qquad \mathfrak{B}^{II} = A^{II}\beta + B^{II}\alpha$$

$$\text{rc.}$$

setzt, und so ferner die ähnlichen Werthe aufsucht: so wird

$$s = \frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{(A^{I}\alpha + (A^{I}\beta + B^{I}\alpha)x)x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2}$$

$$+ \frac{(A^{II}\alpha + (A^{II}\beta + B^{II}\alpha)x)x^4}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^3} + \text{rc.}$$

§. 211.

Wenn $x = 1$ gesetzt wird, und der Umfang der gefundenen Formeln leidet durch diese Substitution nicht, da α, β, γ, nach Gefallen angenommen werden können; folglich

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \text{rc.}$$

ist: so erhält man, wenn man nach und nach

$A\gamma + B\beta + C\alpha = A'$	$A'\gamma + B'\beta + C'\alpha = A''$ und
$B\gamma + C\beta + D\alpha = B'$	$B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = B''$ so
$C\gamma + D\beta + E\alpha = C'$	$C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = C''$ ferner
rc.	rc.

außer-

außerdem aber noch der Kürze wegen

$$\alpha + \beta + \gamma = m$$

gesetzt wird, die Summe

$$s = \begin{array}{l} (\alpha+\beta)(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \text{ꝛc.}) \\ + \alpha(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \text{ꝛc.}) \end{array}$$

§. 212.

Auf eben die Art kann man auch noch mehrtheilige Nenner nehmen. Da indeß die Verfahrungsart aus dem Vorhergehenden schon hinlänglich abgenommen werden kann, so wollen wir uns bloß auf einen viertheiligen einschränken. Es sey also

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \text{ꝛc.}$$

Man suche folgende Werthe:

$$A\delta + B\gamma + C\beta + D\alpha = A'$$
$$B\delta + C\gamma + D\beta + E\alpha = B'$$
$$C\delta + D\gamma + E\beta + F\alpha = C'$$
ꝛc.

$$A'\delta + B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = A''$$
$$B'\delta + C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = B''$$
$$C'\delta + D'\gamma + E'\beta + F'\alpha = C''$$
ꝛc.

$$A''\delta + B''\gamma + C''\beta + D''\alpha = A'''$$
$$B''\delta + C'\gamma + D''\beta + E''\alpha = B'''$$
$$C''\delta + D''\gamma + E''\beta + F''\alpha = C'''$$
ꝛc.

Ferner sey

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = m.$$

Alsdann ist

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{A}{m}+\frac{A'}{m^2}+\frac{A''}{m^3}+\frac{A'''}{m^4}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$s=(\alpha+\beta)\left(\frac{B}{m}+\frac{B'}{m^2}+\frac{B''}{m^3}+\frac{B'''}{m^4}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\,\alpha\left(\frac{C}{m}+\frac{C'}{m^2}+\frac{C''}{m^3}+\frac{C'''}{m^4}+\text{ꝛc.}\right)$$

Hieraus ist klar wie die Reihe fortschreitet, wenn dem Nenner m mehr Theile gegeben werden.

§. 213.

Es ist aber nicht nothwendig, daß die Nenner der Brüche, auf welche wir die Summe der Reihe bringen, gerade Potestäten derselben Formel, $\alpha+\beta x+\gamma x^2+$ ꝛc. sind, sondern es kann in jedem Gliede eine andere Formel statt finden. Damit dieses deutlich werde, wollen wir zuvörderst nur zwey Glieder nehmen, und setzen, daß die Reihe

$$s=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\text{ꝛc.}$$

in folgende Bruch-Reihe verwandelt werden solle:

$$s=\frac{\mathfrak{A}}{\alpha+\beta x}+\frac{\mathfrak{A}'x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta'x)}+\frac{\mathfrak{A}''x^2}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta'x)(\alpha''+\beta''x)}$$
$$+\text{ꝛc.}$$

Man multiplicire auf beyden Seiten durch $\alpha+\beta x$, und setze

$$\begin{aligned} A\beta+B\alpha&=A' \\ B\beta+C\alpha&=B' \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}=A\alpha, \\ C\beta+D\alpha&=C' \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so wird nach der Division durch x

$$A'+B'x+C'x^2+D'x^3+\text{ꝛc.}=\frac{\mathfrak{A}'}{\alpha'+\beta'x}+\frac{\mathfrak{A}''x}{(\alpha'+\beta'x)(\alpha''+\beta''x)}$$
$$+\text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man auf ähnliche Art durch $\alpha'+\beta'x$, dann durch $\alpha''+\beta''x$ und so ferner, und setzt man

$A\beta'$

$$\begin{array}{l|l} A'\beta' + B'\alpha' = A'' & A''\beta'' + B''\alpha'' = A''' \\ B'\beta' + C'\alpha' = B'' & B''\beta'' + C''\alpha'' = B''' \\ C'\beta' + D'\alpha' = C'' & C''\beta'' + D''\alpha'' = C''' \\ \quad\text{2c.} & \quad\text{2c.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A'''\beta''' + B'''\alpha''' = A'''' \\ B'''\beta''' + C'''\alpha''' = B'''' \quad \text{2c.} \\ C'''\beta''' + D'''\alpha''' = C'''' \\ \quad\text{2c.} \end{array}$$

so wird $\mathfrak{A}' = A'\alpha'$; $\mathfrak{A}'' = A''\alpha''$; $\mathfrak{A}''' = A'''\alpha'''$; 2c. und daher die gegebene Reihe in folgende verwandelt:

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A'\alpha' x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)} + \frac{A''\alpha'' x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)}$$
$$+ \text{ 2c.}$$

Die Werthe α, β, α', β', α'', β'', α''', β''', 2c. sind willkührlich, und können jedesmal so angenommen werden, daß die neue Reihe stark convergirt.

§. 214.

Nun wollen wir die Factoren dreytheilig annehmen, und indem die Reihe

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \text{ 2c.}$$

zum Grunde gelegt wird,

$$\begin{array}{l|l} A\gamma + B\beta + C\alpha = A' & A'\gamma' + B'\beta' + C'\alpha' = A'' \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B' & B'\gamma' + C'\beta' + D'\alpha' = B'' \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C' & C'\gamma' + D'\beta' + E'\alpha' = C'' \\ \quad\text{2c.} & \quad\text{2c.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} A''\gamma'' + B''\beta'' + C''\alpha'' = A''' & A'''\gamma''' + B'''\beta''' + C'''\alpha''' = A'''' \\ B''\gamma'' + C''\beta'' + D''\alpha'' = B''' & B'''\gamma''' + C'''\beta''' + D'''\alpha''' = B'''' \\ C''\gamma'' + D''\beta'' + E''\alpha'' = C''' & C'''\gamma''' + D'''\beta''' + E'''\alpha''' = C'''' \\ \quad\text{2c.} & \quad\text{2c.} \end{array}$$

 Ferner

Ferner, der Kürze wegen,

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= m \\
\alpha' + \beta' + \gamma' &= m' \\
\alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= m'' \\
\alpha''' + \beta''' + \gamma''' &= m''' \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

setzen: so ist die Summe der angenommenen Reihe:

$$s = \frac{\alpha(A+B)}{m} + \frac{\alpha'(A'+B')}{mm'} + \frac{\alpha''(A''+B'')}{mm'm''} + \frac{\alpha'''(A'''+B''')}{mm'm''m'''} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{\beta A}{m} + \frac{\beta' A'}{mm'} + \frac{\beta'' A''}{mm'm''} + \frac{\beta''' A'''}{mm'm''m'''} + \text{ꝛc.}$$

§. 215.

Da diese Formeln einen solchen Umfang haben, daß ihr Gebrauch nicht sogleich klar seyn kann, so wollen wir die Verwandelung § 213. auf einen besondern Fall einschränken, und $x = -1$ setzen. Hiedurch bekommt man die Reihe:

$$s = A - B + C - D + E - F + G - \text{ꝛc.}$$

Setzt man also

$$\begin{array}{c|c}
B - A = A' & B' - 2A' = A'' \\
C - B = B' & C' - 2B' = B'' \\
D - C = C' & D' - 2C' = C'' \\
E - D = D' & E' - 2D' = D'' \\
\text{ꝛc.} & \text{ꝛc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
B'' - 3A'' = A''' & B''' - 4A''' = A'''' \\
C'' - 3B'' = B''' & C''' - 4B''' = B'''' \\
D'' - 3C'' = C''' & D''' - 4C''' = C'''' \\
E'' - 3D'' = D''' & E''' - 4D''' = D'''' \\
\text{ꝛc.} & \text{ꝛc.}
\end{array}$$

so ist, nachdem man diese Werthe gefunden hat, die Summe der gegebenen Reihe gleich folgender Reihe:

s =

$$s = \frac{A}{2} - \frac{A'}{2.3} + \frac{A''}{2.3.4} - \frac{A'''}{2.3.4.5} + \frac{A''''}{2.3.4.5.6} - \text{rc.}$$

Auf ähnliche Art kann jede gegebene Reihe in unzählige andere ihr gleiche verwandelt werden, und unter diesen müssen natürlich auch convergirende seyn, durch welche man die Summe der gegebenen Reihe näherungsweise finden könne.

§. 216.

Ich kehre zur Erfindung der Reihen zurück, deren Fortschreitungsgesetz durch die Differenzial-Rechnung dargelegt wird. Da ich in dieser Rücksicht bereits die algebraischen Größen untersucht habe, so wende ich mich zu den transcendenten, und nehme an, daß eine folgendem Logarithmen gleiche Reihe zu suchen sey.

$$s = l(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{rc})$$

Es sey die Hülfsreihe, welche wir zu dieser Absicht annehmen:

$$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \mathfrak{F}x^6 + \text{rc.}$$

Da also aus der Differenziation jener Gleichung

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{rc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{rc.}}$$

gefunden wird: so hat man

$$(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{rc.})\frac{ds}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + \text{rc.}$$

Da ferner aus der angenommenen Gleichung auf eben dem Wege

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{rc.}$$

wird: so bekommt man, nach vorgenommener Substitution die Gleichung

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x & + 3\mathfrak{C}x^2 & + 4\mathfrak{D}x^3 & + 5\mathfrak{E}x^4 & + \text{ꝛc.} \\
+ \mathfrak{A}\alpha & + 2\mathfrak{B}\alpha & + 3\mathfrak{C}\alpha & + 4\mathfrak{D}\alpha & + \text{ꝛc.} \\
 & + \mathfrak{A}\beta & + 2\mathfrak{B}\beta & + 3\mathfrak{C}\beta & + \text{ꝛc.} \\
 & & + \mathfrak{A}\gamma & + 2\mathfrak{B}\gamma & + \text{ꝛc.} \\
 & & & + \mathfrak{A}\delta & + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

$$=$$

$$\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{ꝛc.}$$

und hieraus fließen folgende Bestimmungen:

$$\mathfrak{A} = \alpha$$
$$\mathfrak{B} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha + \beta$$
$$\mathfrak{C} = -\tfrac{2}{3}\mathfrak{B}\alpha - \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\beta - \tfrac{1}{3}\mathfrak{A}\beta + \gamma$$
$$\mathfrak{D} = -\tfrac{3}{4}\mathfrak{C}\alpha - \tfrac{2}{4}\mathfrak{B}\beta - \tfrac{1}{4}\mathfrak{A}\gamma + \delta$$
$$\mathfrak{E} = -\tfrac{4}{5}\mathfrak{D}\alpha - \tfrac{3}{5}\mathfrak{C}\beta - \tfrac{2}{5}\mathfrak{B}\gamma - \tfrac{1}{5}\mathfrak{A}\delta + \varepsilon$$
$$\text{ꝛc.}$$

§. 217.

Nun sey die Exponential-Größe

$$s = e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{ꝛc.}}$$

gegeben, so daß e die Zahl bedeute, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist; und die angenommene Hülfsreihe sey

$$s = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{ꝛc.}$$

denn wenn man $x = 0$ setzt, so erhellet schon, daß das erste Glied $= 1$ seyn müsse. Da also, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$ls = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird, wenn man differenziirt,

$$\frac{ds}{dx} = s(\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})$$

Nun

Nun ist aber aus der angenommenen Gleichung,

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{ꝛc.} =$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\alpha & + & \mathfrak{A}\alpha x & + & \mathfrak{B}\alpha x^2 & + & \mathfrak{C}\alpha x^3 & + & \mathfrak{D}\alpha x^4 & + & \text{ꝛc.} \\
 & + & 2\beta & + & 2\mathfrak{A}\beta & + & 2\mathfrak{B}\beta & + & 2\mathfrak{C}\beta & + & \text{ꝛc.} \\
 & & & + & 3\gamma & + & 3\mathfrak{A}\gamma & + & 3\mathfrak{B}\gamma & + & \text{ꝛc.} \\
 & & & & & + & 4\delta & + & 4\mathfrak{A}\delta & + & \text{ꝛc.} \\
 & & & & & & & + & 5\varepsilon & + & \text{ꝛc.}
\end{array}$$

und hieraus findet man für die Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, ꝛc. folgende Bestimmungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \alpha \\
\mathfrak{B} &= \beta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha \\
\mathfrak{C} &= \gamma + \tfrac{2}{3}\mathfrak{A}\beta + \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\alpha \\
\mathfrak{D} &= \delta + \tfrac{3}{4}\mathfrak{A}\gamma + \tfrac{2}{4}\mathfrak{B}\beta + \tfrac{1}{4}\mathfrak{C}\alpha \\
\mathfrak{E} &= \varepsilon + \tfrac{4}{5}\mathfrak{A}\delta + \tfrac{3}{5}\mathfrak{B}\gamma + \tfrac{2}{5}\mathfrak{C}\beta + \tfrac{1}{5}\mathfrak{D}\alpha \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

§. 218.

Auch läßt sich, wenn ein Bogen, dessen Sinus oder Cosinus gesucht wird, durch eine zwey- drey- oder mehrtheilige Größe, ja selbst durch eine ohne Ende fortlaufende Reihe ausgedruckt ist, dieser Sinus und Cosinus ebenfalls nach der gegenwärtigen Methode durch eine unendliche Reihe darstellen. Um dies aber auf die bequemste Art zu thun, reichen die ersten Differenzialien nicht hin, sondern man muß dabey zu den zweyten Differenzialien seine Zuflucht zu nehmen. Es sey also

$$s = \sin.(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{ꝛc.})$$

und die dafür gesuchte Reihe

$$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{ꝛc.}$$

denn daß das erste Glied verschwinde, ist bekannt. Da wir hier aber zu den zweyten Differenzialien herabsteigen müssen,

so

so muß auch der Coefficient $\mathfrak{A}$ anderswoher bestimmt werden, und dies kann geschehen, wenn man x unendlich klein nimmt. Denn alsdann ist der Bogen $= \alpha x$ seinem Sinus gleich, und es wird daher $\mathfrak{A} = \alpha$. Nun sey der Kürze wegen

$$z = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{ꝛc.}$$

damit $s = \sin. z$ werde; so findet man durch die Differenziation

$$ds = dz.\cos. z; \quad dds = ddz.\cos. z - dz^2 \sin. z$$

Da also $\sin. z = s$, und $\cos. z = \frac{ds}{dz}$ ist, so wird

$$dds = \frac{dsddz}{dz} - sdz^2; \text{ oder } dzdds + sdz^3 + dsddz.$$

§. 219.

Wir wollen annehmen, daß der Bogen z bloß durch ein Binomium ausgedruckt werde, und $z = \alpha x + \beta x^2$ setzen. Alsdann ist

$$dz = (\alpha + 2\beta x)dx$$

und wenn man dx als beständig betrachtet

$$ddz = 2\beta dx^2; \text{ und}$$

$$dz^3 = (\alpha^3 + 6\alpha^2\beta x + 12\alpha\beta^2 x^2 + 8\beta^3 x^3)dx^3$$

Da ferner $s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \text{ꝛc.}$ ist, so wird

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + \text{ꝛc.}$$

$$\text{und } \frac{dds}{dx^2} = 2\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C}x + 12\mathfrak{D}x^2 + \text{ꝛc.}$$

Braucht man diese Werthe in der Differenzial-Gleichung: so wird:

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{dzdds}{dx^3} = & 1.2\mathfrak{B}\alpha + 2.3\mathfrak{C}\alpha x + 3.4\mathfrak{D}\alpha x^2 + 4.5\mathfrak{E}\alpha x^3 + \text{ꝛc.} \\
 & + 2.1.2\mathfrak{B}\beta + 2.2.3\mathfrak{C}\beta + 2.3.4\mathfrak{D}\beta + \text{ꝛc.} \\
\dfrac{sdz^3}{dx^3} & + \mathfrak{A}\alpha^3 + \mathfrak{B}\alpha^3 + \mathfrak{C}\alpha^3 + \text{ꝛc.} \\
 & + 6\mathfrak{A}\alpha^2\beta + 6\mathfrak{B}\alpha^2\beta + \text{ꝛc.} \\
 & + 12\mathfrak{A}\alpha\beta^2 + \text{ꝛc.} \\
\hline
\dfrac{dsddz}{dx^3} = & 2\mathfrak{A}\beta + 4\mathfrak{B}\beta + 6\mathfrak{C}\beta + 8\mathfrak{D}\beta + \text{ꝛc.}
\end{array}
$$

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen:

$$\mathfrak{B} = \frac{2\mathfrak{A}\beta}{2\alpha}$$

$$\mathfrak{C} = 0 - \frac{\mathfrak{A}\alpha^2}{2.3}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{2\mathfrak{C}\beta}{4\alpha} - \frac{6\mathfrak{A}\alpha\beta}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}\alpha^2}{3.4}$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{4\mathfrak{D}\beta}{8\alpha} - \frac{12\mathfrak{A}\beta^2}{4.5} - \frac{6\mathfrak{B}\alpha\beta}{4.5} - \frac{\mathfrak{C}\alpha^2}{4.5}$$

$$\mathfrak{F} = -\frac{6\mathfrak{E}\beta}{6\alpha} - \frac{8\mathfrak{A}\beta^3}{5.6\alpha} - \frac{12\mathfrak{B}\beta^2}{5.6} - \frac{6\mathfrak{C}\alpha\beta}{5.6} - \frac{\mathfrak{D}\alpha^2}{5.6}$$

$$\mathfrak{G} = -\frac{8\mathfrak{F}\beta}{7\alpha} - \frac{8\mathfrak{B}\beta^3}{6.7\alpha} - \frac{12\mathfrak{C}\beta^2}{6.7} - \frac{6\mathfrak{D}\alpha\beta}{6.7} - \frac{\mathfrak{E}\alpha^2}{6.7}$$

ꝛc.

und hat man diese Werthe gefunden, so ist

$$\sin.(\alpha x + \beta x^2) = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \text{ꝛc.}$$

und $\mathfrak{A} = \alpha$.

§. 220.

Auf ähnliche Art läßt sich der Cosinus eines jeden Winkels in eine Reihe verwandeln. Da aber Bogen sehr selten durch mehrtheilige Größen gegeben werden: so wollen wir den Gebrauch der zweyten Differenzialien bey der Erfindung

der

der Reihe für den Cosinus des Bogens x kennen zu lernen suchen. Es sey also $s = \cos. x$, und

$$s = 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \mathfrak{D}x^8 - \text{ꝛc.}$$

gesetzt worden. Da $ds = - dx \sin. x$, und $dds = - dx^2 \cos. x = - s dx^2$ ist, so ist $dds + s dx^2 = 0$, und man erhält also durch Substitution

$$\frac{dds}{dx^2} = - 1.2\mathfrak{A} + 3.4\mathfrak{B}x^2 - 5.6\mathfrak{C}x^4 + 7.8\mathfrak{D}x^6 - \text{ꝛc.}$$

$$s = \quad 1 \quad - \quad \mathfrak{A}x^2 + \quad \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \text{ꝛc.}$$

und dadurch, daß man die gleichnamigen Glieder gleich setzt,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{1 \,.\, 2}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{3 \,.\, 4} = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{5 \,.\, 6} = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 6}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}}{7 \,.\, 8} = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 8}$$

ꝛc.

Auf diese Art erhellet, was wir auch schon oben ausführlich bewiesen haben, daß

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{x^8}{1.2.3\ldots8} - \text{ꝛc.}$$

ist, und die vorhergehende Reihe giebt, wenn man für den Sinus $\beta = 0$ und $\alpha = 1$ setzt,

$$\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{x^9}{1.2.3\ldots9} - \text{ꝛc.}$$

§. 221.

Aus diesen bekannten Reihen für den Sinus und Cosinus findet man die Reihen für die Tangente, die Cotangente, die

die Secante und Cosecante eines jeden Winkels. Denn die Tangente ergiebt sich, wenn man den Sinus durch den Cosinus, die Cotangente, wenn man den Cosinus durch den Sinus, die Secante, wenn man den Radius 1 durch den Cosinus, und die Cosecante, wenn man den Radius durch den Sinus dividirt. Es scheinen aber die durch diese Division gefundene Reihen sehr irregulär, ob sie gleich, die für die Secante ausgenommen, durch die oben gefundenen Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. auf ein leichtes Progressions-Gesetz zurückgebracht werden können. Denn da wir oben §. 127. gefunden haben,

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2.3..6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2.3..8} + \text{ꝛc.} = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u$$

so wird, wenn man $\frac{1}{2}u = x$ setzt,

$$\cot.x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2.3..6} - \frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2.3...8} - \text{ꝛc.}$$

und wenn man $\frac{1}{2}x$ für x schreibt,

$$\cot.\tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2.3..6} - \frac{2\mathfrak{D}x^7}{1.2.3...8} - \text{ꝛc.}$$

§. 222.

Hieraus aber läßt sich die Tangente eines jeden Bogens auf folgende Art ausdrucken. Da

$$\text{tang.}\,2x = \frac{2\,\text{tang.}\,x}{1 - \text{tang.}\,x^2} \text{ ist, so wird}$$

$$\cot.2x = \frac{1}{2\,\text{tang.}\,x} - \frac{\text{tang.}\,x}{2} = \tfrac{1}{2}\cot.x - \tfrac{1}{2}\text{tang.}\,x$$

und also

$$\text{tang.}\,x = \cot.x - 2\cot.2x$$

Da nun

$$\cot.x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8}$$
$$-\ \text{rc.}$$

$$2\cot.2x = \frac{1}{x} - \frac{2^4\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^8\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^{12}\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \frac{2^{16}\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8}$$
$$-\ \text{rc.}$$

ist, so bekommt man durch die Subtraction dieser Reihe von jener

$$\tan g.x = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{A}x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6}$$
$$+ \frac{2^8(2^8-1)\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} + \text{rc.}$$

Braucht man daher die Buchstaben A, B, C, D, rc. §. 182. so wird

$$\tan g.x = \frac{2Ax}{1.2} + \frac{2^3Bx^3}{1.2.3.4} + \frac{2^5Cx^5}{1.2\ldots6} + \frac{2^7Dx^7}{1.2\ldots8} + \text{rc.}$$

§. 223.

Die Cosecante aber wird auf folgende Art gefunden. Da $\cot.x = \tan g.x + 2\cot.2x = \frac{1}{\cot.x} + 2\cot.2x$ ist, so wird $\cot.x^2 = 2\cot.x.\cot.2x + 1$, und wenn man die Wurzel auszieht,

$$\cot.x = \cot.2x + \operatorname{cosec}.2x$$

daher denn

$$\operatorname{cosec}.2x = \cot.x - \cot.2x,$$

und, wenn man x für 2x setzt,

$$\operatorname{cosec}.x = \cot.\tfrac{1}{2}x - \cot.x.$$

Da wir nun die Cotangenten haben, nemlich

$$\cot.\tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \text{rc.}$$

$$\cot.x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 \mathfrak{A} x}{1.2} - \frac{2^4 \mathfrak{B} x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 \mathfrak{C} x^5}{1.2\ldots6} - \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn man diese Reihe von jener abzieht

$$\text{cosec}.x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A} x}{1.2} + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B} x^3}{1.2.3.4} + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C} x^5}{1.2\ldots6}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

§. 224.

Die Secante aber kann durch diese Bernoullischen Zahlen nicht ausgedruckt werden, sondern erfordert andere Zahlen, welche in den Summen der ungeraden reciproken Potestäten vorkommen. Denn wenn man setzt

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc.} = \alpha \quad . \frac{\pi}{2^2}$$
$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{ꝛc.} = \frac{\beta}{1.2} . \frac{\pi^3}{2^4}$$
$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{ꝛc.} = \frac{\gamma}{1.2.3.4} . \frac{\pi^5}{2^6}$$
$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{ꝛc.} = \frac{\delta}{1.2\ldots6} . \frac{\pi^7}{2^8}$$
$$1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \text{ꝛc.} = \frac{\varepsilon}{1.2\ldots8} . \frac{\pi^9}{2^{10}}$$
$$1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{7^{11}} + \frac{1}{9^{11}} - \text{ꝛc.} = \frac{\zeta}{1.2\ldots10} . \frac{\pi^{11}}{2^{12}}$$
$$\text{ꝛc.}$$

so wird

$$\alpha = 1$$
$$\beta = 1$$
$$\gamma = 5$$
$$\delta = 61$$
$$\varepsilon = 1385$$
$$\zeta = 50521$$

$$\eta = 2702765$$
$$\vartheta = 199360981$$
$$\iota = 19391512145$$
$$\kappa = 2404879661671$$
$$\text{etc.}$$

und durch diese Werthe bekommt man:

$$\text{sec.}\,x = \alpha + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots6}x^6 + \frac{\iota}{1.2\ldots8}x^8 + \text{etc.}$$

§. 225.

Um den Zusammenhang dieser Reihe mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. kennen zu lernen, wollen wir die oben behandelte Reihe betrachten, nemlich:

$$\frac{\pi}{n\,\text{sin.}\,\frac{m}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \text{etc.}$$

Man setze $m = \frac{1}{2}n - k$, so wird

$$\frac{\pi}{2n\,\text{cos.}\,\frac{k}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n+2k} - \frac{1}{3n-2k} - \frac{1}{3n+2k} + \frac{1}{5n-2k} + \text{etc.}$$

Es sey $\frac{k\pi}{n} = x$, oder $k\pi = nx$, so wird

$$\frac{\pi}{2n}\text{sec.}\,x = \frac{\pi}{n\pi - 2nx} + \frac{\pi}{n\pi + 2nx} - \frac{\pi}{3n\pi - 2nx} - \text{etc.}$$

oder

$$\text{sec.}\,x = \frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x} - \frac{2}{3\pi - 2x} - \frac{2}{3\pi + 2x} + \frac{2}{5\pi - 2x} + \text{etc.}$$

sec. x

$$\mathrm{sec.}x = \frac{4\pi}{\pi^2-4x^2} - \frac{4.3\pi}{9\pi^2-4x^2} + \frac{4.5\pi}{25\pi^2-4x^2} - \frac{4.7\pi}{4\surd\pi^2-4x^2}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Verwandelt man nun die einzeln Glieder in Reihen, so wird

$$\mathrm{sec.}x = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{2^4x^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{2^6x^4}{\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

und wenn für diese Reihen die oben dafür gegebenen Werthe gesetzt werden, so erhält man eben die Reihe für die Secante, welche wir herausgebracht haben.

§. 226.

Hieraus erhellet zugleich das Gesetz, nach welchem die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ ꝛc. wodurch die Summen der ungeraden Potestäten ausgedruckt werden, fortschreiten. Denn da

$$\mathrm{sec.}x = \frac{1}{\mathrm{cos.}x} = \alpha + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots6}x^6$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

ist, so muß die Reihe nothwendig dem Bruche

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \frac{x^8}{1.2\ldots8} - \text{ꝛc.}}$$

gleich seyn. Setzt man daher diese Gleichheit voraus, so bekommt man

$$1 =$$

$$\begin{array}{rrrrrl}
\alpha + \dfrac{\beta}{1.2}x^2 & + \dfrac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 & + \dfrac{\delta}{1.2\ldots6}x^6 & + \dfrac{\varepsilon}{1.2\ldots8}x^8 & + \text{ꝛc.} \\
- \dfrac{\alpha}{1.2} & - \dfrac{\beta}{1.2.1.2} & - \dfrac{\gamma}{1.2.1..4} & - \dfrac{\delta}{1.2.1\ldots6} & - \text{ꝛc.} \\
 & + \dfrac{\alpha}{1.2.3.4} & + \dfrac{\beta}{1..4.1.2} & + \dfrac{\gamma}{1..4.1..4} & + \text{ꝛc.} \\
 & & - \dfrac{\alpha}{1\ldots6} & - \dfrac{\beta}{1..6.1.2} & - \text{ꝛc.} \\
 & & & + \dfrac{\alpha}{1\ldots\ldots8} & + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

Hieraus aber fließen folgende Gleichungen:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{2.1}{1.2}\alpha$$

$$\gamma = \frac{4.3}{1.2}\beta - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\alpha$$

$$\delta = \frac{6.5}{1.2}\gamma - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\beta + \frac{6\ldots.1}{1\ldots.6}\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{8.7}{1.2}\delta - \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\gamma + \frac{8\ldots.3}{1\ldots.6}\beta - \frac{8\ldots.1}{1\ldots.8}\alpha$$

ꝛc.

Und aus diesen Formeln sind die Werthe jener Buchstaben gefunden worden, welche wir §. 224. gegeben haben, und vermittelst welcher die Summen der Reihen ausgedruckt werden können, die unter den Ausdruck

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \text{ꝛc.}$$

gehören, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Neun-