Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Anmerkungen und Zusätze zum ersten Theile.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52909

Anmerkungen und Zusätze

zum

erſten Theile.

Vorerinnerung.

Ich weiß es aus eigener und aus fremden Erfahrungen, daß man die Differenzial-Rechnung am leichteſten und gründlichſten erlernt, wenn man dabey ein Buch zum Grunde legt, welches dieſelbe ſo vollſtändig, ſo ausführlich, und in einer ſo ſchönen Ordnung abhandelt, als dasjenige, deſſen zweyten Theil ich hier der erſten Hälfte nach überſetzt habe. Dies iſt daher auch der vorzüglichſte Bewegungsgrund geweſen, der mich angetrieben, das vortrefliche Euleriſche Werk durch eine Ueberſetzung gemeiner zu machen, und ſeinen Gebrauch zu befördern. Um noch mehr für diejenigen zu ſorgen, welche daſſelbe zur Erlernung der Differenzial-Rechnung brauchen wollen, will ich hier den Anfang machen, ſolche Anmerkungen und Zuſätze zu liefern, als mir bey einer zweyten Durchleſung nützlich ſcheinen; denn zweymal muß man wohl ein ſolches Werk leſen, weil man das erſte Mal, wenigſtens die volle und leichte Ueberſicht des Ganzen ſelten bekommt, und kann es auch thun, weil die zweyte Durchlesung bey weitem nicht so viel Zeit und Mühe erfordert als die erste. Ueberhaupt also sind die Anmerkungen und Zusätze zu jedem Theile, die unmittelbar hinter der Uebersetzung desselben folgen, für die erste, diejenigen aber, welche ich bey dem folgenden Theile nachliefere, für die zweyte Durchlesung bestimmt. Denjenigen, für welche ich diese Arbeit hauptsächlich übernommen habe, ist, wie ich aus Erfahrungen und Versuchen weiß, eine solche Vertheilung vortheilhaft, und dies wird mich bey denen entschuldigen, die sich durch das bereits erworbene größere Maß von Fertigkeit mehr auf einmal zu fassen im Stande sind.

I.

Von der allgemeinen Mathematik überhaupt.

Ich habe bereits in den der Uebersetzung des ersten Theils beygefügten Anmerkungen und Zusätzen von der allgemeinen Mathematik und ihren Theilen geredet; hier will ich es auf eine andere und leichtere Art thun.

So vortreflich Hrn. Kants Definition der Mathematik ist, wenn man sie an den Elementen des Euclides prüft, so ist sie doch nicht von allen Unbequemlichkeiten frey, wenn man aus dem Gebiete der Elementar-Mathematik hinausgeht. Ich verweise dieserwegen auf das dritte Stück meiner Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik, und insbesondere auf die S. 207-211. stehende Anmerkung, desgleichen auf meine Abhandlung über den Begriff der Mathematik und ihre Theile im zweyten und fünften Stücke. Bewogen durch die daselbst angeführten Gründe, habe ich es gewagt, die Mathematik die Wissen-

schaft

schaft zu nennen, in so fern Anschauungen den Gegenstand derselben ausmachen, oder sie als die Wissenschaft der sinnlichen Formen zu beschreiben.

Legt man die letztere Beschreibung zum Grunde, so lassen sich die darin gedachten Formen theils einzeln untersuchen, theils überhaupt und im Allgemeinen betrachten. Das erste geschieht in der Elementar-Mathematik, das andere aber in der allgemeinen, die deswegen nothwendig von einem deutlichen Begriffe der ihr unterworfenen Formen ausgehen muß.

Soll ich daher Hrn. Kants Ausdrücke gebrauchen, so muß ich mir die Elementar-Mathematik als die Wissenschaft aus Constructionen vermittelst der Begriffe, die allgemeine hingegen als die Wissenschaft aus Begriffen vermittelst Constructionen gedenken. Angenommen ferner, daß die sinnlichen Formen, allgemein betrachtet, den Begriff der Größe geben, und daß also die allgemeine Mathematik die Größe, unabhängig von der Erfahrung und in deutlichen Begriffen gedacht, zum Gegenstande habe: so wird es so viel Theile der allgemeinen Mathematik geben, als sich verschiedene Arten, die Größe in Begriffen zu untersuchen, annehmen lassen.

Da also zu einem deutlichen Begriffe der Größe Vorstellung von den Bestandtheilen derselben und von der Menge dieser Bestandtheile in ihr gehört: so sind folgende Fälle möglich.

Einmal können die Bestandtheile, aus welchen man die Größen bestehen läßt, entweder ebenfalls Größen, oder Größen-Einheiten, Elemente im strengen Sinne seyn.

Ferner

Ferner können dieselben im ersten Falle entweder in jeder aus ihnen bestehenden Größe alle einander gleich angenommen werden, oder es kann diese Bedingung wegfallen.

Endlich kann, wenn die Bestandtheile in jeder aus ihnen bestehenden Größe lauter einander gleiche Größen sind, das Gesuchte, nach der Natur und Menge des Gegebenen, entweder bestimmt, oder nur unbestimmt zu finden seyn.

Hiernach begreift die allgemeine Mathematik

1. die niedere allgemeine Mathematik, welche die Größen aus einander gleichen Bestandtheilen bestehen läßt, und sich
   a. in die bestimmte, und
   b. in die unbestimmte niedere allgemeine Mathematik theilet.
2. die höhere allgemeine Mathematik, worin die Größen zum Theil als aus gleichen, zum Theil als aus ungleichen Bestandtheilen zusammengesetzt gedacht werden. Sie theilet sich in zwey Theile,
   a. in die Lehre von den Differenzen, welche, wenn die Größen gegeben sind, die Bestandtheile derselben, und
   b. in die Lehre von den Summen, welche aus gegebenen Differenzen die Größen finden lehrt, wozu diese Differenzen gehören.
3. die transcendente Mathematik, in welcher die Bestandtheile, woraus man die untersuchten Größen bestehen läßt, Größen-Einheiten oder Elemente im strengen Sinne sind. Auch diese hat zwey Theile,
   a. die Differenzial-Rechnung, und
   b. die Integral-Rechnung.

Weil

Weil aber die Sätze, welche man in der allgemeinen Mathematik findet, auf keine Weise bloß dazu dienen, die Sätze der Elementar-Mathematik auf eine andere Art zu ordnen, und sie etwa einer leichten Uebersicht näher zu bringen; sondern dadurch die Kenntniß von den Elementar-Gegenständen auf eine bewundernswürdige Art erweitert, und die bekannten größtentheils auf viel kürzern und leichtern Wegen gefunden werden können: so ist es natürlich, die Lehren der allgemeinen Mathematik nach ihrer Erfindung, zu diesen Vortheilen zu benutzen; und deswegen kann und muß jeder Haupttheil der allgemeinen Mathematik aus einem reinen und einem angewandten Theile bestehen, so daß der letztere die in dem ersten enthaltenen Sätze theils auf die discreten, theils auf die continuirlichen Größen anwende. So viel hier nochmals über die allgemeine Mathematik und ihren Theilen überhaupt; ich wende mich zu einigen Anmerkungen über die Differenzial- und Integral-Rechnung insbesondere.

II.

Von der Differenzial- und Integral-Rechnung insbesondere.

Man rühmt die Differenzial- und Integral-Rechnung wegen ihrer Erhabenheit und Wichtigkeit; sollte ihr Werth nicht noch erhöhet werden, wenn man dazu auch den Vorzug der Leichtigkeit setzen könnte? Schon das macht diesen Vorzug wahrscheinlich, daß die Differenzial- und Integral-Rechnung den Gegenstand der Mathematik in der größten Allgemeinheit untersuchen; so wie sichs daher ebenfalls erklären läßt, warum demungeachtet mehrere bey der Erlernung derselben

selben so viele Schwierigkeiten finden. Hat man nemlich die nöthigen Vorübungen gehabt, so ist die Beschäftigung mit dem Allgemeinsten deswegen nothwendiger Weise leichter, als jede speciellere Untersuchung, weil das Allgemeinste die wenigsten Merkmale enthält: allein hat es an den Vorübungen gefehlt, so erwirbt man sich dadurch meistens nur leere Begriffe; und diese sind allemal eine ergiebige Quelle von Schwierigkeiten, wenn sie nicht bloß durch Worte oder andere Zeichen ausgedruckt, sondern auch wirklich gebraucht werden sollen. Doch es wird der Mühe nicht unwerth seyn, hier zuvörderst die Differenzial-Rechnung, deren System vom Verfasser im ersten Theile vollständig mitgetheilt ist, aus diesem Gesichtspunkte genau und ausführlich zu betrachten.

Das Geschäft der Differenzial-Rechnung besteht, wie ich solches aus dem ersten Theile voraussetzen kann, lediglich in der Erfindung der Differenzialien der Funktionen der veränderlichen Größen, und es kann daher dieselbe füglich eben so viel Abtheilungen bekommen, als sich Hauptarten von Funktionen denken lassen. Nun sind die Funktionen

1. entweder gemeine oder höhere, d. h. entweder Funktionen veränderlicher Größen im eingeschränkten Verstande (Anmerk. und Zus. zum 1sten Th. S. 292.) oder Funktionen solcher veränderlicher Größen, die wieder Funktionen von andern veränderlichen Größen sind.
2. entweder Funktionen Einer oder Funktionen mehrerer veränderlicher Größen.
3. entweder entwickelte oder verwickelte Funktionen.

Hiernach ergeben sich folgende Capitel.

1. Von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten Funktionen Einer veränderlichen Größe. Dieses Capitel theilet sich aber, wegen seiner

ner Weitläuftigkeit nach den beyden Hauptarten der ihm unterworfenen Funktionen in zwey andere.

a. Von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten algebraischen Funktionen.

b. Von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten transcendenten Funktionen.

2. Von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten Funktionen zweyer und mehrerer veränderlicher Größen.

3. Von der Erfindung der Differenzialien der höheren entwickelten Funktionen.

4. Von der Erfindung der Differenzialien der verwickelten Funktionen.

Vergleicht man diese Titel mit den Rubriquen des fünften bis neunten Capitels des ersten Theils, so wird man die vollkommenste Uebereinstimmung wahrnehmen.

Da aber die Differenzial-Rechnung ein Theil der allgemeinen Mathematik ist, und die allgemeine Mathematik die Größe in Begriffen vermittelst Constructionen, (willkührlicher nemlich) untersucht: so darf man hierbey noch nicht stehen bleiben, sondern muß die Zergliederung so weit fortsetzen, bis man die Arten der Funktionen in einer natürlichen Stufenfolge so speciell gefunden hat, daß sie Constructionen zulassen. Dieses soll nun zuvörderst mit den gemeinen und entwickelten algebraischen Funktionen geschehen. Es sey x die veränderliche Größe, deren gemeine und entwickelte algebraische Funktionen gesucht werden sollen: so sind nach dem Begriffe der algebraischen Funktion (Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Th. 1. Cap. 1. §. 7.)

1. die

1. die einfachen

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x^n \\ 2)\ x^{-n} \\ 3)\ x^{\frac{n}{m}} \\ 4)\ x^{-\frac{n}{m}} \end{array}\right\}\ \text{oder allgemein } x^m$$

wenn n jede Zahl bedeutet.

2. die aus diesen zusammengesetzten,
   1) auf dem Wege der Addition und Subtraction,
   2) auf dem Wege der Erhebung zu Dignitäten nach dem der Addition und Subtraction,
   3) auf dem Wege der Multiplication und Division.

Bloß dieses und die Methode der allgemeinen Mathematik, überhaupt nemlich nur, vorausgesetzt, so läßt sich zum voraus bestimmen, was man in einem Systeme der Differenzial-Rechnung in dem Capitel von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten algebraischen Funktionen antreffen werde. Nemlich, wenn die allgemeine aus der Definition der Differenzial-Rechnung selbst hergeleitete Regel zur Erfindung der Differenzialien jeder Funktion, wie es eigentlich seyn muß, in den Prolegomenen schon vorausgeschickt worden wäre,

1. die Anwendung dieser Regel auf die angeführten Fälle.
2. eine Untersuchung über die Natur der gefundenen Differenzialen.
3. für die Fälle. wo es dergleichen giebt, bequemere Methoden zur Erfindung der Differenzialien, als sich nach der allgemeinen Regel sogleich darbieten.

Nun sey es mir erlaubt, die gedachte allgemeine Regel als bekannt vorauszusetzen, oder mich deswegen auf die Ent-

wickelung

wickelung derselben, welche ich in den Anmerkungen und Zusätzen bey der Uebersetzung des ersten Theils S. 312 f. gegeben habe, zu berufen. Sobald man eine allgemeine Regel hat, und außerdem den Binomischen Lehrsatz brauchen kann, weil man seinen Beweis ohne Differenzial-Rechnung zu führen im Stande ist: so kann man die angeführten einfachen Fälle auf einmal vornehmen, indem man n in x^n jede Zahl bedeuten läßt, und die angeführten zusammengesetzten Fälle, wenn man die einfachsten von der ersten und dritten Classe nach der allgemeinen Regel behandelt hat, ohne Mühe auf das Dagewesene zurückführen. Auf diese Art erhellet, wie mich dünkt, hinlänglich, daß die Erfindnng der Differenzialien bis hierher mit ganz und gar keinen Schwierigkeiten verbunden sey, da das, was zur Natur dieser Differenzialien gehört, ebenfalls nur geringe Aufmerksamkeit erfordert.

Will man den Binomischen Lehrsatz nicht voraussetzen, so kann man den Satz, daß für jeden Werth von n allemal

$$d . x^n = n x^{n-1} dx$$

sey, durch ein Inductions-mäßiges Verfahren auf folgende Art finden.

Nach der allgemeinen Regel findet man

$$d . x^2 = 2 x dx$$

$$d . x^3 = 3 x^2 dx.$$

Nun läßt sich aber zeigen, daß wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, und das Differenzial

$$d . x^n = n x^{n-1} dx \text{ ist, allemal}$$

$$d . x^{n+1} = (n + 1) x^n dx$$

sey. Denn da

$$x^{n+1} = x^n . x, \text{ und } d . x^n = n x^{n-1} dx$$

ist, so wird

$$d.x^{n+1} = (x^n + nx^{n-1}dx)(x + dx) - x^{n+1}$$
$$= nx^n dx + x^n dx + nx^{n-1}dx^2$$
$$= (n+1)x^n dx.$$

Nun ist aber die Formel $d.x^n = nx^{n-1}dx$ wahr für $n = 2$ und $n = 3$, also auch für 4, 5, 6, u. s. w. ohne Ende.

Dies vorausgesetzt bleibe hier, so wie auch nachher, n eine ganze Zahl, und dabey sey $z = x^{-n}$ und $d.z = d.x^{-n}$ zu finden. Da $z = x^{-n}$ seyn soll, so ist $zx^n = 1$, und also

$$(z + dz)(x^n + nx^{n-1}dx) - zx^n = 0, \text{ d. i.}$$
$$x^n dz + nzx^{n-1}dx = 0, \text{ oder}$$
$$x^n dz = -nzx^{n-1}dx. \text{ Hieraus aber folgt}$$
$$dz = -\frac{nzx^{n-1}dx}{x^n} = -\frac{nx^{-1}dx}{x^n} = -nx^{-n-1}dx$$

Ferner sey $z = x^{\frac{n}{m}}$, so ist $z^m = x^n$ und

$$mz^{m-1}dz = nx^{n-1}dx, \text{ also}$$
$$dz = \frac{nx^{n-1}dx}{mz^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}dx}{m \times \frac{x^n}{x^{\frac{n}{m}}}}$$
$$= \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx.$$

Endlich sey $z = x^{-\frac{n}{m}}$, also $z^m = x^{-n}$: so ist

$$mz^{m-1}dz = -nx^{-n-1}dx, \text{ folglich}$$
$$dz = \frac{-nx^{-n-1}dx}{mz^{m-1}dx} = -\frac{nx^{-n-1}dx}{m \times \frac{x^{-n}}{x^{-\frac{n}{m}}}}$$
$$= -\frac{n}{m}x^{-\frac{n}{m}-1}dx.$$

Ver-

Vergleicht man also die gefundenen Ausdrücke unter einander, so fällt in die Augen, daß sie unter die allgemeine Form

$$d.x^n = n x^{n-1} dx$$

gehören, wenn man darin n als ein allgemeines Zeichen aller Zahlen betrachtet. Auf diese Art hat man das, was ich in den Anmerkungen und Zusätzen beym ersten Theile, S. 390, meiner damaligen Absicht nach, nur kurz zu berühren brauchte, vollständig.

Um Gelegenheit zur Vergleichung zu geben, und zugleich um mir den Weg zu verschiedenen, bey der Erlernung der Differenzial Rechnung, nützlichen Anmerkungen zu bahnen, will ich, ehe ich weiter gehe, den ersten Abschnitt aus des Marquis de l'Hopital Analyse des infiniment petits nebst den in der Edition vom la Caille dazu gefügten Noten, übersetzt mittheilen. Es enthält derselbe die allgemeinen Regeln der Differenzial-Rechnung, und ist folgender:

Erste Erklärung.

Veränderliche Größen sind solche, die einer stetigen Vermehrung oder Verminderung fähig sind, und beständige dagegen diejenigen, die unverändert dieselben bleiben, während andere mit ihnen verbundene sich verändern. So sind z. B. bey der Parabel die Applicaten und Abscissen veränderliche, der Parameter aber eine beständige Größe.

Zweyte Erklärung.

Der unendlich kleine Theil, um welchen die veränderlichen Größen bey ihrer stetigen Veränderung vermehrt oder vermindert werden, heißt das Differenzial dieser Größe. Es stelle z. B. die Linie AMB, Fig. 1, irgend eine Curve vor; ihre Axe oder Durchmesser sey die gerade Linie AC; PM eine ihrer Applicaten, und pm eine andere dieser unendlich nahe Applicate. Zieht man nun MR der AC parallel, desgleichen die Sehnen AM, Am; und beschreibt außerdem aus A mit AM den Kreisbogen MS: so ist Pp das Differenzial von AP; Rm das Differenzial von PM; Sm das Differenzial von AM und Mm das Differenzial von dem Bogen AM. Eben so ist das kleine Dreyeck MAm, welches den Bogen Mm zur Grundlinie hat, das Differenzial des Abschnitts AM, und der kleine Raum MPpm das Differenzial der zwischen den geraden Linien AP, PM und dem Bogen AM enthaltenen Fläche.

Zusatz.

1. Es fällt in die Augen, daß das Differenzial einer beständigen Größe = 0 ist, oder, denn dieses sagt dasselbe, daß die beständigen Größen kein Differenzial haben.

Willkührlicher Satz.

Um das Differenzial einer veränderlichen Größe, welche durch einen einzigen Buchstaben ausgedruckt wird, auf eine bequeme Art andeuten zu können, wollen wir dazu den Buchstaben d bestimmen, und, die Verwirrung zu vermeiden, denselben in der Folge bloß zu dieser Absicht brauchen. Setzt man z. B. die veränderlichen Größen AP = x; PM = y; AM = z; den Bogen AM = u; die vermischtlinige Figur AMP = s; den Abschnitt AM = t: so soll dx den Werth von Pp; dy den von Rm; dz den von Sm; du den von dem Bogen Mm; ds den von dem kleinen Raume MPpm und dt den von dem kleinen vermischtlinigen Dreyecke MAm anzeigen.

Erste

Erste Forderung oder Voraussetzung.

2. Es wird vorausgesetzt, daß man zwey Größen, welche bloß um einen unendlich kleinen Theil von einander verschieden sind, mit einander verwechseln könne, oder, welches eben darauf hinausläuft, daß eine Größe durch Hinzusetzung oder Wegnehmung eines unendlich kleinen Theils nicht verändert werde. So soll es z. B. gleich seyn, ob man Ap oder AP, pm oder PM, den kleinen Raum MPpm, oder das kleine Rechteck MPpR, den kleinen Abschnitt AMm oder das kleine Dreyeck AMS, den Winkel pAm oder PAM nimmt, u. s. f.

Hiezu gehört folgende Anmerkung.

„Diese Forderung oder vielmehr Voraussetzung, welche „Anfängern Schwierigkeit zu machen pflegt, enthält nichts, „was gegründete Einwendungen zuließe. Beschuldigt man „doch die Geometer und Astronomen des Mangels an Ge„nauigkeit nicht, und wie viel beträchtlicher sind ihre so häu„figen Auslassungen als die des Algebraisten! Nimmt z.B. der „Geometer, wenn er die Höhe eines Berges messen will, auf „ein Sandkorn Rücksicht, welches der Wind vom Gipfel des„selben wegführt? Setzen nicht die Astronomen, wenn sie „von den Fixsternen reden, den Durchmesser der Erde bey „Seite, dessen Größe fast 3000 (französische) Meilen beträgt? „Betrachten sie nicht bey der Berechnung der Mondfinster„nisse die Erde als eine Kugel, und vergessen also der Häuser, „der Thürme, der Berge auf derselben? Dergleichen darf „denn doch weit weniger aus der Acht gelassen werden als „dx, weil man eine unendliche Menge von dx braucht, um „Ein x zu bekommen. Es ist daher die Differenzial-Rech„nung die sicherste und genaueste unter allen Rechnungen, „und man würde Unrecht thun, wenn man wider die ge-

„dachte Voraussetzung Einwendungen machen wollte. Uebri„gens sind alle jene Vergleichungen aus Wolfs Elementen „der Mathematik, B. 1. S. 418. genommen."

Zweyte Forderung oder Voraussetzung.

3. Ferner wird vorausgesetzt, daß man eine krumme Linie als aus unendlich vielen, unendlich kleinen geraden Linien zusammengesetzt, oder als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten dürfe, davon jede unendlich klein sey, und welche durch die eingeschlossenen Winkel die Krümmung der Linie bestimmen. So sollen z. B. der Theil der Curve Mm und der Kreisbogen MS wegen ihrer unendlichen Kleinheit als gerade Linien und also das kleine Dreyeck mSM als ein geradliniges Dreyeck angesehen werden können.

Willkührlicher Satz.

In der Folge werden die letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x, ꝛc. zur Bezeichnung der veränderlichen, die ersten a, b, c, ꝛc. aber zur Bezeichnung der beständigen Größen gebraucht werden, so daß, indem x in $x + dx$ übergeht, y, z, ꝛc. in $y + dy$; $z + dz$ verwandelt werden, (nach 1) a, b, c aber unverändert bleiben.

Erster Satz. Aufgabe.

4. Das Differenzial eines Aggregats zu finden.

Es sey das Differenzial von $a + x + y - z$ zu suchen. Nimmt man an, daß x um einen unendlich kleinen Theil vermehrt werde, d. h. daß x in $x + dx$ übergehe, so geht auch y in $d + dy$ und z in $z + dz$ über, die beständige Größe a aber bleibt dieselbe. Man erhält also in dem gedachten Falle $a + x + dx + y + dy - z - dz$ statt $a + x + y - z$,

und

und das Differenzial dieses Aggregats, welches man durch die Subtraction desselben von jenem Ausdrucke findet, ist daher: $dx + dy - dz$. Eben so verhält es sich in den übrigen Fällen, und so hat man die

Erste Regel

für die durch Addition und Subtraction entstehenden Aggregate.

Man nimmt das Differenzial eines jeden Gliedes der gegebenen Größe, macht daraus mit Beybehaltung der Zeichen eine andere Größe. Auf diese Art bekommt man das gesuchte Differenzial.

Zweyter Satz. Aufgabe.

5. Das Differenzial eines Produkts zu finden.

1) Das Differenzial von xy ist $ydx + xdy$. Denn y geht in $y + dy$ über, wenn x in $x + dx$ verwandelt wird, und xy wird also alsdann $xy + ydx + xdy + dxdy$, weil dieses das Produkt aus $x + dx$ in $y + dy$ ist. Es ist demnach das Differenzial dieses Produkts $= ydx + xdy + dxdy$ oder $ydx + xdy$ (nach 2) weil $dxdy$ unendlich klein in Vergleichung mit ydx und xdy ist. Denn dividiret man ydx und $dxdy$ durch dx, so findet man y und dy; und da dy das Differenzial von y ist, so ist es auch unendlichmal kleiner als y. Folglich ist das Differenzial eines Produkts aus zweyen Größen gleich dem Produkte aus dem Differenziale der ersten Größe in die andere, nebst dem Produkte aus dem Differenziale der zweyten Größe in die erste.

2) Das Differenzial von xyz ist $yzdx + xzdy + xydz$. Denn betrachtet man das Produkt xy als eine einfache

Größe: so muß man nach dem so eben Bewiesenen das Produkt aus seinem Differenziale $ydx + xdy$ in die andere Größe z (welches $yzdx + xzdy$ ist) zu dem Produkte des Differenzials dz der zweyten Größe z in die erste xy (oder $xydz$) setzen; und es ist folglich das Differenzial von $xyz = yzdx + xzdy + xydz$.

3) Das Differenzial von $xyzu$ ist $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Dieses beweiset man auf ähnliche Art, indem man das Produkt xyz als eine einfache Größe beobachtet. Eben so verhält sichs mit den folgenden Produkten ohne Ende, und daher ergiebt sich die

Zweyte Regel
für die in einander multiplicirten Größen.

Das Differenzial eines Produkts ist gleich der Summe der Produkte aus dem Differenziale einer jeden Größe in alle übrige.

Also ist das Differenzial von $ax = xo + adx$ d. h. adx; das Differenzial von $(a+x) \times (b-y) = bdx - ydx - ady - xdy$.

Hiezu gehört folgende Anmerkung.

„Dieser Artikel bedarf einer ausführlichen Erläuterung. Man giebt zu, daß das Differenzial von xy gleich sey $ydx + xdy + dxdy$; allein man behauptet dabey, daß die Weglassung von $dxdy$ in der Praktik nicht ohne nachtheilige Folgen bleibe. Hier ist der Beweis des Gegentheils, in möglich größter Strenge, allein der allgemeinen Verständlichkeit wegen auch etwas weit hergeholt.

1) Jede

1) Jede unendliche Größe wird durch eines der folgenden Zeichen angedeutet, ∞, ∞^2, ∞^3, rc.

2) Das erste dieser Zeichen bezeichnet ein Unendliches vom ersten Grade, das andere ein Unendliches vom zweyten Grade, das dritte ein Unendliches vom dritten Grade, u. s. f.

3) Ein Unendliches vom zweyten Grade ist unendlichmal größer als ein Unendliches vom ersten Grade, und eben so das Unendliche vom dritten Grade in Vergleichung mit dem vom zweyten.

4) Eine Unendliche Größe kann durch Hinzusetzung einer endlichen keinen Zuwachs, und durch die Wegnehmung derselben keine Verminderung leiden. Also ist $\infty + 1 = \infty$; so wie auch $\infty - 1 = \infty$. Was man von dem Unendlichen im Vergleichung mit dem Endlichen behauptet, das gilt auch von dem Unendlichen jedes höheren Grades in Vergleichung mit dem von einem niedrigern Grade. So ist z. B. $\infty^2 + \infty = \infty^2$, und $\infty^3 - \infty^2 = \infty^3$. Der Beweis hiervon ist in der vorhergehenden Anmerkung enthalten.

5) Jede unendlich kleine Größe läßt sich durch einen Bruch anzeigen, dessen Zähler ein Endliches, der Nenner aber ein Unendliches ist. So sind $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$, rc. Ausdrücke des unendlich Kleinen vom ersten, zweyten, dritten Grade, u. s. f. Auch giebt ein Bruch, dessen Zähler ein Unendliches von einem niedern, der Nenner aber ein Unendliches von einem höhern Grade ist, ein unendlich Kleines, z. B. $\frac{\infty}{\infty^2}$; weil $\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$ ist.

6) Ein unendlich Kleines vom zweyten Grade ist unendlichmal kleiner als ein unendlich Kleines vom ersten Grade, und eben so verhält es sich mit den übrigen ohne Ende.

7) Eine unendlich kleine Größe ist nichts gegen eine endliche. So ist $1 + \frac{1}{\infty} = 1$; $1 - \frac{1}{\infty} = 1$. Eben so ist ein unendlich Kleines vom zweyten Grade nichts gegen ein unendlich Kleines vom ersten Grade, und also z. B. $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Den Beweis findet man ebenfalls in der vorhergehenden Anmerkung.

8) xy ist das Produkt aus x in y.

9) $xy + ydx + xdy + dxdy$ ist das Produkt aus $x + dx$ in $y + dy$, d. h. das Produkt aus x nachdem es durch unendliche kleine Größen vermehrt worden ist, in y, nachdem mit demselben eben dasselbe geschehen. Daher ist $ydx + xdy + dxdy$ das Differenzial von xy.

10) $dxdy$ ist eine unendlich kleine Größe vom zweyten Grade in Vergleichung mit $ydx + xdy$, welche man als unendlich kleine Größen vom ersten Grade betrachten muß. Wir wollen zur Erläuterung das Rechteck ABCD oder xy, Fig. 2, betrachten. Vergrößern wir seine Grundlinie CD oder y um die unendlich kleine Größe Dn oder dy, und seine Höhe BD oder x um die ebenfalls unendlich kleine Größe Dp oder dx: so ist klar, daß das unendlich kleine Rechteck BmDn oder xdy, und das unendlich kleine Rechteck CDop oder ydx, unendlichmal größere Rechtecke sind, als das Rechteck Dnpr oder $dxdy$, weil jedes der ersten ein Produkt aus einer end-

endlichen Größe in eine unendlich kleine, das letzte hingegen ein Produkt aus zwey unendlich kleinen Größen ist. Es ist demnach $dxdy$ eine unendlichmal kleinere unendlich kleine Größe als ydx oder xdy, und man kann dasselbe aus der Acht lassen, ohne in der Anwendung den geringsten Fehler befürchten zu dürfen. Wenn also $ydx + xdy + dxdy$ das Differenzial von xy ist, so ist $ydx + xdy$ ebenfalls das Differenzial davon.

11) Es ist daher ausgemacht, daß das Differenzial eines Produkts zweyer Größen das Differenzial der ersten mit der andern, und das Differenzial der andern mit der ersten Größe multiplicirt enthalte; und nicht weniger, daß das Differenzial eines Produkts dreyer Größen gefunden werde, wenn man das Differenzial einer jeden dieser Größen mit dem Produkte der beyden andern multiplicirt. Das Differenzial von xyz z. B. ist $yzdx + xzdy + xydz$. Hier ist der Beweis:

Ich setze $xy = u$. Folglich ist das Differenzial von u mit dem Differenziale von xy einerley. Also ist $ydx + xdy = du$.

Ferner ist $xyz = uz$, wenn $xy = u$ ist. Also ist das Differenzial von xyz mit dem Differenzial von uz einerley, und dieses ist $zdu + udz$. Nun ist aber $zdu = yzdx + xzdy$, weil $du = ydx + xdy$ ist, und $udz = xydz$ weil $xy = u$ ist. Demnach ist $zdu + udz = yzdx + xzdy + xydz$; und wenn daher $zdu + udz$ das Differenzial von xyz ist, so ist auch $yzdx + xzdy + xydz$ dieses Differenzial. Man findet also das Differenzial eines Produkts dreyer Größen, wenn man das Produkt aus je zweyen mit dem Differenziale der dritten multiplicirt. Auf ähnliche Art erhält man

man das Differenzial eines Produkts aus vier Größen, indem man nemlich das Produkt aus je dreyen von ihnen mit dem Differenziale der vierten multiplicirt. Das Differenzial des Produkts $uxyz$ ist daher $xyzdu + uyzdx + uxzdy + uxydz$. Ueberhaupt ist das Differenzial eines Produkts aus mehreren Faktoren gleich der Summe der Produkte aus der Differenz jedes derselben in das Produkt aller übrigen. Der V. behauptet z. B. das Differenzial von $(a + x)(b - y)$ sey $bdx - ady - ydx - xdy$, und mit Recht. Denn es ist $(a + x)(b - y) = ab + bx - ay - xy$. Aber ab hat kein Differenzial; das Differenzial des übrigen aber ist offenbar $bdx - ady - ydx - xdy$."

Dritter Satz. Aufgabe.

6. Das Differenzial eines Bruchs zu finden.

Es ist das Differenzial von $\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$. Denn setzt man $\frac{x}{y} = z$, so ist $x = yz$; und da diese beyde veränderliche Größen stets einander gleich bleiben müssen, sie mögen vergrößert oder vermindert werden; so folgt, daß ihr Differenzial, das heißt, ihr Zuwachs oder ihre Verminderung ebenfalls gleich sey. Man hat demnach $dx = ydz + zdy$, und $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$, wenn man für z den Werth $\frac{x}{y}$ setzt. Hierdurch bekommt man die

Dritte Regel
für die Quotienten oder Brüche.

Das Differenzial eines Bruchs ist gleich dem Produkte aus dem Differenziale des Zählers in den Nenner, weniger dem

dem Produkte aus dem Differenziale des Nenners in den Zähler, nachdem das Ganze durch das Quadrat des Nenners dividirt worden.

So ist das Differenzial von $\frac{a}{x} = \frac{-adx}{xx}$; das Differenzial von $\frac{x}{a+x} = \frac{adx}{aa+2ax+xx}$. (Die hierzu gehörige Anmerkung ist von ganz und gar keiner Bedeutung.)

Vierter Satz. Aufgabe.

7. Das Differenzial einer jeden Potestät einer veränderlichen Größe zu finden.

Um eine allgemeine Regel für alle Potestäten, sowohl für die mit ganzen als für die mit gebrochenen und mit negativen Exponenten zu geben, müssen wir zuvörderst die Aehnlichkeit zwischen diesen verschiedenen Arten von Exponenten darthun.

Wenn man eine geometrische Reihe nimmt, deren erstes Glied 1, das zweyte aber irgend eine Größe x ist, und unter die Glieder ihre Exponenten schreibt: so bilden diese eine arithmetische Reihe.

Geometr. Progr. $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, 2c.
Arithmet. Progr. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, 2c.

Setzt man die geometrische Reihe jenseit 1, und die arithmetische jenseit 0 fort: so werden die Glieder der arithmetischen Reihe die Exponenten der Glieder der geometrischen. Also ist -1 der Exponent von $\frac{1}{x}$; -2 der Exponent von $\frac{1}{x^2}$, 2c.

Geometr. Progr. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, 2c.

Arithmet. Progr. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, 2c.

Führt

Führt man aber ein neues Glied in die geometrische Progression ein, so muß man, um seinen Exponenten zu haben, ein ähnliches in die arithmetische Reihe bringen.

Also hat $\sqrt[2]{x}$ zum Exponenten $\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$; $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$; rc. dergestalt, daß diese Ausdrücke $\sqrt{x}$ und $x^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{x}$ und $x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{x^4}$ und $x^{\frac{4}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ und $x^{-\frac{3}{2}}$, rc. einander ganz gleichbedeutend sind.

Geometrische Progressionen.

$$1,\ \sqrt{x},\ x;\quad 1,\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[3]{x^2},\ x;\quad 1,\ \sqrt[5]{x},\ \sqrt[5]{x^2},\ \sqrt[5]{x^3},\ \sqrt[5]{x^4}.$$

Arithmetische Progressionen.

$$0,\ \tfrac{1}{2},\ 1;\quad 0,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ 1;\quad 0,\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5}.$$

Geometrische Progressionen.

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt{x^3}},\ \frac{1}{x^2};\quad \frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}},\ \frac{1}{x^2};\quad \frac{1}{x^3},\ \frac{1}{\sqrt{x^7}},\ \frac{1}{x^4}$$

$$-1,\ -\tfrac{3}{2},\ -2;\quad -1,\ -\tfrac{4}{3},\ -\tfrac{5}{3},\ 2;\quad -3,\ -\tfrac{7}{2},\ -4$$

Es erhellet hieraus, daß man eben so, als $\sqrt{x}$ das mittlere geometrische Proportional-Glied zwischen 1 und x ist, auch in $\frac{1}{2}$ das mittlere arithmetische Proportional-Glied zwischen 0 und 1 hat; und auf ähnliche Art sind $\sqrt[3]{x}$ und $\frac{1}{3}$ mittlere Proportional-Glieder, jenes ein geometrisches, dieses ein arithmetisches, und die ersten von den beyden, die zwischen 1 und x und 0 und 1 liegen; u. s. w. Es folgt demnach aus der Natur dieser beyden Progressionen:

1. Daß

1. Daß die Summe der Exponenten jeder zweyer Glieder der geometrischen Progression der Exponent des Produkts aus diesen beyden Gliedern ist. Also ist x^{4+3} oder x^7 das Produkt aus x^3 in x^4, und $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ oder $x^{\frac{5}{6}}$ das Produkt aus $x^{\frac{1}{2}}$ in $x^{\frac{1}{3}}$, und $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ oder $x^{-\frac{2}{15}}$ das Produkt aus $x^{-\frac{1}{3}}$ in $x^{\frac{1}{5}}$ ꝛc. Eben so ist $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ oder $x^{\frac{2}{3}}$ das Produkt aus $x^{\frac{1}{3}}$ in sich selbst, oder das Quadrat von $x^{\frac{1}{3}}$; x^{2+2+2} oder x^6 das Produkt aus x^2 in x^2 in x^2, oder der Cubus von x^2, und $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ oder $x^{-\frac{4}{3}}$ die vierte Potestät von $x^{-\frac{1}{3}}$ u. s. f. Auf diese Art erhellet, daß das Doppelte, das Dreyfache, das Vierfache u. s. f. eines Gliedes der geometrischen Reihe der Exponent des Quadrats, der Cubus u. s. w. dieses Gliedes ist; und es ist folglich auch die Hälfte, das Drittel u. s. f. eines jeden Gliedes der geometrischen Reihe der Exponent der Quadrat- der Cubikwurzel u. s. f. von diesem Gliede.

2. Daß die Differenz der Exponenten jeder zweyer Glieder der geometrischen Progressionen der Exponent des Quotienten dieser Glieder ist. Also ist $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ der Exponent des Quotienten $x^{\frac{1}{2}}$ durch $x^{\frac{1}{3}}$, und $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ der Exponent des Quotienten $x^{-\frac{1}{3}}$ durch $x^{\frac{1}{4}}$. Man sieht daraus, daß es gleichviel ist, ob man $x^{-\frac{1}{3}}$ durch $x^{-\frac{1}{4}}$ multiplicirt, oder durch $x^{\frac{1}{4}}$ dividirt. Eben so verhält es sich in den übrigen Fällen. Dies vorausgesetzt kann der Exponent entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn. Ist das erste und der Exponent außerdem positiv, so ist das Differenzial von $x^2 = 2x\,dx$, das von $x^3 = 3x^2dx$, das von $x^4 = 4x^3dx$, ꝛc. Denn da das Quadrat von x nicht anders als

das

das Produkt von x in x ist: so ist sein Differenzial $xdx + xdx = 2xdx$. Eben so ist der Cubus von x ein Produkt x in x in x, und also sein Differenzial $xxdx + xxdx + xxdx$. Da es sich auf eben die Art mit allen übrigen Potestäten verhält, so folgt, daß für den Fall, wenn m eine ganze Zahl bedeutet, das Differenzial von $x^m = mx^{m-1}dx$ sey.

Wenn der Exponent eine negative Zahl ist: so findet man das Differenzial von x^{-m} oder $\frac{1}{x^m} = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Ist hingegen der Exponent ein Bruch, oder die Potestät von der Form $\sqrt[n]{x^m}$, oder $x^{\frac{m}{n}}$, wo $\frac{m}{n}$ jeden Bruch bedeutet: so setze man $x^{\frac{m}{n}} = z$, wodurch man $x^m = z^n$ erhält. Nach der Regel des ersten Falls ist hier $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, und also $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$ oder $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, indem man für nz^{n-1} seinen Werth $nx^{m-\frac{m}{n}}$ setzt. Wenn der Exponent negativ ist: so findet man das Differenzial von $x^{-\frac{m}{n}}$ oder $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$. Hieraus fließt

Die

Die vierte Regel
für alle Arten der Potestäten.

Das Differenzial einer jeden Potestät einer veränderlichen Größe wird gefunden, wenn man den Exponenten der Potestät um 1 vermindert, und dieselbe darauf durch den unverminderten Exponenten und das Differenzial der Wurzel multiplicirt.

Läßt man daher m jede Zahl, sie mag ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn, und x jede veränderliche Größe bedeuten: so ist das Differenzial von x^m allemal $= mx^{m-1}dx$.

Exempel.

Das Differenzial des Cubus von $ay - xx$ oder von $(ay - xx)^3$ ist $3(ay - xx)^2(ady - 2xdx) = 3a^3y^2dy - 6a^2x^2ydy + 3ax^4dy - 6a^2y^2xdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

Das Differenzial von $\sqrt{(xy + yy)}$ oder von $(xy + yy)^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2}(xy + yy)^{-\frac{1}{2}} \times (ydx + xdy + 2ydy)$ oder $\frac{ydx + xdy + ydy}{2\sqrt{(xx + yy)}}$.

Das Differenzial von $\sqrt{(a^4 + axyy)}$ oder von $(a^4 + axyy)^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2}(a^4 + axyy)^{-\frac{1}{2}}(ayydx + 2axydy)$ oder $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{(a^4 + axyy)}}$.

Das Differenzial von $\sqrt[3]{(ax + xx)}$ oder von $(ax + xx)^{\frac{1}{3}}$ ist $\frac{1}{3}(ax + xx)^{-\frac{2}{3}}(adx + 2xdx)$ oder $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{(ax + xx)^2}}$.

Das Differenzial von $\sqrt{(ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})}$ oder von $(ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})^{\frac{1}{2}}$, ist $\frac{1}{2}(ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})^{-\frac{1}{2}}$ $\left(adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{(a^4 + axyy)}}\right)$ oder $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{(ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})}}$

$$+ \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{(a^4 + axyy)}\,2\sqrt{(\sqrt{ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)}})}}.$$

Das Differenzial von $\frac{\sqrt[3]{(ax + xx)}}{\sqrt{(xy + yy)}}$ ist nach dieser Regel und nach der Regel von den Brüchen $= \frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{(ax + xx)^2}} \times$

$$\sqrt{(xy + yy)} \times \frac{-ydx - xdy - 2ydy}{2\sqrt{(xy + yy)}} \times \sqrt[3]{(ax + xx)}.$$

Die hierzu gehörige Anmerkung ist folgende:

Dieser Artikel hat eine Menge von Erläuterungen nöthig, welche sich auf nachstehende Fragen zurückführen lassen.

Erste Frage: Wie kann man sagen, daß -1 der Exponent von $\frac{1}{x}$ sey?

Antwort. $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Denn es ist $x^{-1}.x^2 = x^{2-1} = x$; folglich x das Produkt aus x^2 in x^{-1}; folglich $\frac{x}{x^2} = x^{-1}$, weil die Division des Produkts durch den Multiplicandus zum Quotienten den Multiplicator giebt. Nun ist aber $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; folglich $x^{-1} = \frac{1}{x}$, und überhaupt jede Potestät mit einem ganzen negativen Exponenten nichts anders als die Einheit durch dieselbe Dignität mit einem positiven Exponenten dividirt. Demnach ist $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, 2c.

Zweyte Frage. Hat man Recht zu behaupten, daß der Exponent von $\sqrt[2]{x}$, $\frac{1}{2}$ sey?

Antwort. Ja; hier ist der Beweis davon. $\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}$; aber $x^{\frac{1}{2}}$ hat zum Exponenten $\frac{1}{2}$, also ist auch der Exponent von $\sqrt[2]{x}$, $\frac{1}{2}$. Es kommt demnach darauf an, daß gezeigt werde, $\sqrt[2]{x}$ sey $=x^{\frac{1}{2}}$, welches aber nicht schwer ist. Man kann es auf folgende Art thun.

$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$; folglich ist $x^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus x. Aber $\sqrt[2]{x}$ ist auch die Quadratwurzel aus x, folglich $\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}$, und überhaupt jede Potestät mit einem gebrochenen Exponenten nichts anders als die Wurzel einer Potestät, deren Exponent der Zähler des Bruchs, der Nenner aber der Exponent der Wurzel ist. Es ist daher $\sqrt[3]{x^1}=x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{x^4}=x^{\frac{4}{5}}$.

Dritte Frage. Wie kann man $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$ ausdrucken?

Antwort. $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}=x^{-\frac{3}{2}}$. Hier ist der Beweis. $\sqrt[2]{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$ (2te Fr.) also $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Aber $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{-\frac{3}{2}}$ (nach der ersten Frage). Folglich ist $\frac{1}{\sqrt{x^3}}=x^{-\frac{3}{2}}$; und $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}=x^{-\frac{5}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[2]{x^7}}=x^{-\frac{7}{2}}$.

Vierte Frage. Ist es wahr, daß $1, \sqrt{x}, x$ in einer geometrischen Reihe stehen?

Anwort. Es ist offenbar $1 : \sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{x} : x$. Denn $1 \times x = x$, und $\sqrt[2]{x} . \sqrt[2]{x} = x$. Also sind $1, \sqrt[2]{x}, x$ in einer geometrischen Progression.

Zusatz. 1. $1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x$ sind in einer geometrischen Progression. Denn es ist $1 : x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}}$; weil $1 \times x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$, und $x^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$. Ferner ist auch $x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} : x^{1}$; denn es ist $x^{\frac{1}{3}} . x = x^{1 + \frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$, und $x^{\frac{2}{3}} . x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$: folglich stehen $1, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}, x$, oder $1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x$ in einer geometrischen Progression.

Was ihre Exponenten betrifft, nemlich $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$: so stehen dieselben in einer arithmetischen Progression; weil die Summe der beyden äußern der Summe der beyden mittlern gleich ist. Aus eben dem Grunde machen auch $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1$ eine arithmetische Progression.

Zusatz. 2. Eben das gilt von $1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{x^2}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x$, oder $1, x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{2}{5}}, x^{\frac{3}{5}}, x^{\frac{4}{5}}, x$, und den Exponenten $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$.

Fünfte Frage. Sind $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}, \frac{1}{x^2}$ in einer geometrischen Progression?

Antwort. $x^{-1}, x^{-\frac{3}{2}}, x^{-2}$ sind in einer geometrischen Progression. Denn es ist $x^{-1} . x^{-2} = x^{-3}$; und $x^{-\frac{3}{2}} . x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{6}{2}} = x^{-3}$.

Daß

Daß $-1, -\frac{3}{2}, -2$ in einer arithmetischen Progression stehen, fällt in die Augen. Eben so verhält es sich nun aber auch mit den übrigen vom V. angeführten Beyspielen.

Sechste Frage. Wie läßt sichs beweisen, daß $2xdx$ das Differenzial von x^2 sey?

Antwort. xx ist das Produkt von x in x. Das Differenzial eines Produkts zweyer Größen ist aber das Differenzial der ersten Größe mit der andern, nebst dem Differenziale der andern Größe mit der ersten Größe multiplicirt. Also ist das Differenzial von $x^2 = xdx + xdx = 2xdx$. (2te Anmerk.)

Durch eben diese Anmerkung beweiset man, daß das Differenzial von $x^3 = 3x^2dx$, das von $x^4 = 4x^3dx$, und überhaupt das Differenzial von x^m, m mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will, $mx^{m-1}dx$ sey.

Siebente Frage. Wie beweiset man, daß $-mx^{-m-1}dx = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$ sey.

Antwort. Man multiplicire Zähler und Nenner des letzten Bruchs durch x^{2m}. Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß

$$\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx \text{ ist.}$$

Achte Frage. Welches ist das Differenzial des Cubus von $ay - xx$?

Antwort. Das verlangte Differenzial ist $3a^3y^2dy - 6a^2x^2ydy + 3ax^4dy - 6a^2y^2xdx + 12ayx^3dx -$

$6x^5dx$, weil der Cubus von $ay - xx = a^3y^3 - 3a^2y^2x^2 + 3ayx^4 - x^6$ ist. Denn das Differenzial von a^3y^3 ist $3a^3yydy$, das von $-3a^2y^2x^2$ aber $-6a^2x^2ydy - 6a^2y^2xdx$, das von $3ayx^4$ ist $3ax^4dy + 12ayx^3dx$, und das von $-x^6$ endlich $-6x^5dx$. Folglich ist das angeführte Differenzial auch das wahre Differenzial von dem Cubus von $ay - xx$. (Auf ähnliche Art werden in dem Reste der Anmerkung die übrigen vom M. de l'Hopital erklärten Beyspiele erläutert.)

Anmerkung.

8. Es ist hierbey zu bemerken, daß bey der Aufsuchung der Differenzialien, sobald eine Größe x wachsend angenommen wurde, eben das mit den übrigen y, z, 2c. geschah, d. h. daß wenn x in $x + dx$ verwandelt wurde, auch y und z, jenes in $y + dy$, dieses in $z + dz$ übergieng. Wenn daher von den daseyenden veränderlichen Größen einige abnehmen, indem die andern zunehmen: so muß man ihre Differenzialien in Vergleichung mit denen der wachsenden Größen als negativ betrachten, und folglich die Zeichen derselben verändern. Läßt man daher y und z abnehmen, wenn x wächst, d. h. läßt man y in $y - dy$, und z in $z - dz$ übergehen, wenn man $x + dx$ für x setzt; und will man dabey das Differenzial des Produkts xyz haben: so muß man in dem Differenzial-Ausdrucke $xydz + xzdy + yzdx$ (5) die Zeichen der Glieder verändern, worinn sich dy und dz befinden. Dies giebt für das gesuchte Differenzial $yzdx - xydz - xzdy$.

Zergliedert man nun zum andern (S. 303. Z. 6. von unten) die transcendenten Funktionen, so hat man an dem gegenwärtigen Orte, wo noch nichts weiter als die beyden ersten Theile der allgemeinen Mathematik und die Einleitung

in

in die Analysis des Unendlichen vorausgesetzt werden kann, keine transcendenten Größen als

1. die logarithmischen Größen,
2. die Exponential-Größen,
3. die transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen, und
4. diejenigen, welche sich aus diesen durch die Umkehrung ergeben.

Was besonders

1. die logarithmischen Größen betrifft, so sind dieselben entweder
   - a. einfache logarithmische Größen, nemlich
     - α. Logarithmen veränderlicher Größen im eingeschränkten Sinne,
     - β. Logarithmen von Funktionen veränderlicher Größen: oder
   - b. zusammengesetzte, d. h.
     - α. Logarithmen von Produkten und Quotienten veränderlicher Größen
     - β. Funktionen, welche aus algebraischen und logarithmischen Größen bestehen.
2. Die Exponential-Größen sind entweder,
   - a. solche, bey denen bloß der Exponent, oder
   - b. solche, bey denen auch die Größe veränderlich, oder endlich
   - c. solche, bey denen der Exponent eine Exponential-Größe ist.
3. Die Formen der transcendenten Größen, welche aus dem Kreise entspringen, sind
   - a. A. sin. x
   - b. A. cos. x
   - c. A. tang. x

d. A.cot.x
e. A.sec.x
f. A.cosec.x
g. A.sin.vers.x

4. Die transcendenten Größen endlich, welche sich aus diesem durch die Umkehrung ergeben, sind
a sin.x
b cos.x
c. tang.x
d. cot.x
e. sec x
f. cosec.x
g. sin.vers.x

Man vergleiche hiermit den Abriß des sechsten Capitels im ersten Theile, S. 393 — 395.

Auch bis hierher ist also die Ordnung, in welcher die Elemente der Differenzial Rechnung gefunden und gestellt werden müssen, so leicht und natürlich, daß sie ganz und gar nicht verfehlt werden kann. Gleichwohl ist diese Ordnung in den übrigen Theilen der Mathematik oft dasjenige, was die meiste Mühe verursacht, wie unter andern Hr. Schultz in seinen Anfangsgründen der reinen Mathesis, Königsberg, 1790 in der Vorrede, S. 3, bezeuget. Aber vielleicht ist die Erfindung der Differenzialien dafür mit desto größeren Schwierigkeiten verbunden? Wir wollen sehen.

Um von den algebraischen Funktionen anzufangen, so hat die Erfindung der Differenzialien der einfachen algebraischen Funktionen für denjenigen sicher keine Schwierigkeit, der in der Verwandlung der Ausdrücke dieser Funktionen die erforderliche Fertigkeit besitzt. Was die zusammengesetzten betrifft, so darf man nur, wenn man die einfachen Größen, welche die Funktion ausmachen, die Theile der

Funk-

Funktionen nennt, jedesmal das Differenzial eines jeden Theils der gegebenen Funktion auf die Art suchen, als wenn nur dieser Theil veränderlich und die übrigen alle beständige Größen wären, und darauf alle gefundenen Differenzialien zu einer Summe vereinigen. Da ferner diese Regel auch bey den transcendenten Funktionen anwendbar ist, so kommt es bey den transcendenten Funktionen ebenfals vorzüglich auf die einfachen Fälle an. Wer sich aber in Ansehung der Art wie die Differenzialien davon gefunden werden, an dasjenige erinnert, was im ersten Theile im sechsten Capitel steht, wird dadurch überzeugt werden, daß das Wichtigste in einem geschickten Gebrauche der Elementar- oder der niedern allgemeinen Mathematik bestehe.

Hieraus erhellen einige Mittel, sich die Erlernung der Differenzial Rechnung zu erleichtern. Das erste besteht darin, daß man sich so früh als möglich, und gleich nach der S. 304. gedachten allgemeinen Regel, von der Richtigkeit der vorhin angeführten, nicht durch Abstraction, sondern aus der Natur der Differenzial-Rechnung selbst überzeuge. Dies Mittel steht in eines jeden Gewalt, zu dem folgenden wäre Uebereinstimmung unter den Mathematikern erforderlich. Es würde nemlich die Erlernung und der Gebrauch der Differenzial-Rechnung dadurch viel bequemer werden, wenn man durchaus statt der Wurzelzeichen die gebrochenen Exponenten, und statt der Divisor-Dignitäten die Potestäten mit negativen Exponenten brauchen wollte. Außerdem läßt sich auch manche von den gewöhnlichen Auflösungen sehr abkürzen. Soll z. B. das Differenzial des Logarithmen von x gefunden werden: so ist die ganze Auflösung dieser Aufgabe folgende.

$$d.lx = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x}) = \frac{dx}{x};$$

denn es fließt ja aus der Definition des Logarithmen, daß $l(1 + \frac{dx}{x}) = \frac{dx}{x}$ sey. Um ferner das Differenzial des sinus von x zu finden, darf man nur

$$d.\sin.x = \sin.(x+dx) - \sin x = \sin.x.\cos.dx + \cos.x.\sin.dx - \sin.x$$

setzen, und sich daran erinnern, daß $\cos dx = 1$, und $\sin.dx = dx$ sey, um hieraus sogleich $d.\sin.x = \cos.x.dx$ zu finden. Den Umstand, daß man hier $\cos.dx = 1$, aber $\sin.dx = dx$, und nicht $= 0$, setzt, werde ich nachher benutzen.

Bey Aufgaben von solcher Wichtigkeit und Brauchbarkeit, als den Aufgaben von der Erfindung der Differenzialien zukommt, ist sehr viel daran gelegen, daß man sich die Resultate derselben leicht und geläufig einpräge. Bleibt man bey den einfachen Funktionen stehen, so sind die Resultate der Aufgaben des ersten Hauptabschnitts der Differenzial-Rechnung folgende.

1. Von den algebraischen Funktionen.

$$d.x^n = nx^{n-1}dx \begin{cases} d.x^n = nx^{n-1}dx = nx^{n-1}dx \\ d.x^{-n} = -nx^{-n-1}dx = \frac{-ndx}{x^{n+1}} \\ d.x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx = \frac{n}{m}\sqrt[m]{x^{n-m}}dx \\ d.x^{-\frac{n}{m}} = -\frac{n}{m}x^{\frac{-n-m}{m}}dx = -\frac{-ndx}{mx\sqrt[m]{x^n}} \end{cases}$$

$$d.yz = zdy + ydz;\ d.\frac{y}{z} = \frac{zdy - ydz}{zz}.$$

2. Von

2. Von den transcendenten Funktionen.

1) den logarithmischen Größen: $d.lx = \frac{dx}{x}$,

2) den Exponential-Größen,

$$d.a^x = a^x dx la; \quad d.y^x = y^x dx ly + xy^{x-1}dy;$$

$$d.e^{e^x} = e^{e^x} e^x dx$$

3) den transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen,

$$d.A.\sin x = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}; \quad d.A.\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}};$$

$$d.A.\tan x = \frac{dx}{1+xx}; \quad d.A.\cot x = \frac{-dx}{1+xx};$$

$$d.A.\sec x = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}; \quad d.A.\operatorname{cosec} x = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}};$$

$$d.A.\sin.\operatorname{vers} x = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}.$$

4) den transcendenten Größen, die sich aus der Umkehrung der vorhergehenden ergeben,

$$d.\sin x = dx.\cos x; \quad d.\cos x = -dx.\sin x$$

$$d.\tan x = \frac{dx}{\cos x^2}; \quad d.\cot x = \frac{-dx}{\sin x^2}$$

$$d.\sec x = \frac{dx.\sin x}{\cos x^2} = dx \tan x.\sec x$$

$$d.\operatorname{cosec} x = \frac{-dx.\cos x}{\sin x^2} = dx \cot x.\operatorname{cosec} x$$

$$d.\sin.v.x = dx \sin x$$

Will man sich die Differenzialien, die unter die Form $nx^{n-1}dx$ gehören, durch Wurzelzeichen ausgedruckt, geläufig machen, so setze man zu den obigen noch

d. x

$$d.x^{\frac{1}{n}} = d.\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}dx = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$d.x^{-\frac{1}{n}} = d.\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = -\frac{1}{n}x^{\frac{-1-n}{n}}dx = \frac{-dx}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}} = \frac{-dx}{nx\sqrt[n]{x}}.$$

Dann unterscheide man Potestäten-Exponenten und Wurzel-Exponenten; desgleichen Multiplicator- und Divisor-Dignitäten, wovon jene einen positiven, diese einen negativen Exponenten haben, und setze den Wurzel-Exponenten der Dignitäten, woraus keine Wurzel gezogen, sondern die selbst genommen werden sollen, so wie er es in der That ist, = 1. Dieses vorausgesetzt, besteht das Differenzial einer jeden Potestät aus drey Faktoren,

1. aus dem Differenziale der Wurzel,
2. aus einer veränderlichen Größe, und
3. aus einer beständigen Größe.

Nr. 1. bietet sich in jedem Falle von selbst dar; Nr. 3. ist ein Bruch, dessen Zähler der Potestäten-Exponent, der Nenner aber der Wurzel-Exponent ist; außerdem aber ist dieser Bruch positiv bey den Multiplicator- und negativ bey den Divisor-Dignitäten. Da dieses sehr leicht gemerkt werden kann, so kommt es vorzüglich auf die in dem Differenziale enthaltene veränderliche Größe an. Den Fall, wenn die gegebene Potestät die Form $x^{\frac{1}{n}}$ hat, ausgenommen, so gehört die veränderliche Größe in dem Differenziale zu eben der Art, zu welcher die gegebene Potestät gehört, d. h. sie ist mit dieser entweder eine Multiplicator- oder eine Divisor-Potestät. Außerdem darf man nur bemerken, daß das Wurzelzeichen beybehalten, und der Exponent der gegebenen Dignität im ersten Falle um den Wurzel-Exponenten vermindert,

im

im andern um denselben vermehrt werde. Die Veränderung, welche der Fall $d.x^{-\frac{1}{n}} = d.\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \frac{-dx}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}} = \frac{-dx}{nx\sqrt[n]{x}}$ enthält, bietet sich dabey von selbst dar, und eben so fällt der Grund in die Augen, warum man $\frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ statt $\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}dx$ schreibt.

Vorausgesetzt also, daß nicht etwa der Beweis der allgemeinen Regeln, nach welchen man bey der Erfindung der Differenzialien zu verfahren angewiesen wird, Anstoß verursache; in welchem Falle ich auf dasjenige verweise, was ich beym ersten Theile in den Anmerkungen und Zusätzen und in der Vorrede gesagt habe: so ist bisher noch alles so leicht, daß man sehr unrecht thut, wenn man die Differenzial-Rechnung als schwer betrachtet. Selbst wenn man die zweyten und folgenden Differenzialien aufsuchen will, hat man außer dem Bisherigen nichts weiter nöthig, indem bey den gemeinen Funktionen die Differenzialien der Grundgröße als beständige Größen betrachtet werden müssen.

Ich lasse es hierbey bewenden, weil derjenige, der die Erfindung der Differenzialien der gemeinen entwickelten, algebraischen sowohl als transcendenten, Funktionen nicht mehr schwer findet, bey den übrigen Capiteln der Differenzial-Rechnung, wenn er sie nach einer Eulerischen Anleitung studirt, gewiß eben so wenig Schwierigkeit antreffen wird. Gern entwickelte ich freylich die Regeln zur Erfindung der Differenzialien aus dem S. 300. mitgetheilten Begriffe der transcendenten Mathematik und der daraus fließenden Erklärung der Differenzial-Rechnung; allein da über diese Regeln beym ersten Theile schon so viel gesagt worden ist, daß eine strengere Entwickelung nicht schlechthin nothwendig ist: so wende ich mich zu dem gegenwärtigen zweyten Theile der Eulerischen Anleitung zur Differenzial⸗Rechnung. Ich will zuvörderst den Inhalt tabellarisch hersetzen, so wie ich solches auch bey dem ersten Theile gethan habe, und darauf, wo es nöthig ist Erläuterungen, und zuletzt die vornehmsten Anwendungen der Differenzial⸗Rechnung auf die Geometrie hinzufügen.

Inhalt des zweyten Theils.

Inhalt des ersten Capitels.

Von der Umformung der Reihen.

αα. ohne

Inhalt des zweyten Capitels.

Von der Erfindung summirbarer Reihen.

β. durch eben diese Mittel, wenn die gegebene Reihe zuvor durch irgend eine Potestät von x multiplicirt worden, §. 21.

γ. Anwendung dieser Methode auf Reihen von einer bestimmten Anzahl von Gliedern, §. 22.

b. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus gegebenen wiederkehrenden Reihen, §. 23.

c. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus $S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 +$ rc., §. 24. und zwar solcher

α. wo die Glieder dieser Reihe durch die Glieder einer arithmetischen Reihe multiplicirt werden, §. 24.

β. wo diese Glieder durch die Glieder einer Reihe der zweyten Ordnung multiplicirt werden, §. 25.

γ. wo dieselben durch die Glieder einer Reihe von irgend einer Ordnung multiplicirt werden, §. 26 : 28.

d. Von der Erfindung stärker convergirender Reihen, §. 28 : 31.

e. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus $S = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} + \frac{1}{d+x} +$ rc., §. 32 : 39.

f. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus einigen andern in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen gefundenen Reihen, §. 40 : 43.

Inhalt des dritten Capitels.

Von der Erfindung der Differenzen.

1. Von der Erfindung der Differenzen, §. 44 : 53.

a. die ersten Differenzen, §. 44 : 51.

α. allge-

Inhalt des vierten Capitels.

Von der Verwandlung der Funktionen in Reihen.

Inhalt des 5ten bis 7ten Capitels.

Von der Erfindung der Summen der Reihen aus dem allgemeinen Gliede.

1. Vorerinnerung, §. 103.
2. Von der Erfindung der Summen der Reihen aus dem allgemeinen Gliede, §. 104 = .
   a. Von der Erfindung der Summen der Reihen, deren allgemeines Glied $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma +$ 2c. ist, wenn α, β, γ, 2c. ganze positive Zahlen bedeuten, §. 104.
   b. Von der Erfindung der Summen der Reihen, deren allgemeines Glied irgend einer Funktion von dem Anzeiger x ist, §. 105.
      α. Vermittelst der Formel: $S\frac{dy}{dx} = y - A + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} -$ 2c., §. 105 = 108.
         aa. Beweis dieser Formel, und Bestimmung der Fälle, wo sie gebraucht werden kann, §. 105. 106.
         bb. Anwendung derselben auf einige einzelne Fälle, §. 107. 108.
      β. Vermittelst der Formel: $Sz = \int zdx + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}.\frac{dz}{1.2dx} - \frac{1}{30}.\frac{d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{1}{42}.\frac{d^5z}{1.2.3..5dx^5} -$ 2c. §. 130, wo z irgend eine Funktion des Anzeigers x vorstellt, §. 109.
         aa. Beweis dieser Formel, §. 109 = 130.
         bb. Gebrauch derselben, wenn z eine ganze rationale Funktion von x ist, nebst anderweitigen Bemerkungen darüber, §. 131 = 139.

cc. Ge=

cc. Gebrauch derselben, wenn z irgend eine andere Funktion von x ist, im sechsten und siebenten Capitel.

αα. Wenn das Integral $\int z\,dx$ gefunden und die Differenzialien $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, 2c. bequem genug ausgedruckt werden können, im sechsten Capitel.

ββ. Wenn dieser Fall nicht statt findet, im siebenten Capitel.

So viel zur allgemeinen Uebersicht, die genauere Darstellung des vom Verfasser genommenen Ganges soll, da dieselbe nicht füglich tabellarisch gegeben werden kann, nachher folgen.

Inhalt des achten Capitels.

Von dem Nutzen der Differenzial-Rechnung bey Formirung der Reihen.

c. Bey der Entwickelung der Formel:

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})^n},\ \text{§. 205. 206.}$$

d. Bey der Entwickelung der Formel:

$$s = \frac{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.})^m}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})^n},\ \text{§. 207.}$$

3. Erweiterung der Lehre von der Umformung der Reihen, §. 209.

a. Verwandlung der Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.}$

α. in $\frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \text{ꝛc.}$ §. 209. 210.

β. in $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^3} + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \text{ꝛc.}$, §. 210-212.

γ. in $\frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{A}'x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)} + \frac{\mathfrak{A}''x^2}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)} + \text{ꝛc.}$, §. 213.

δ. Anwendung dieser Verwandlung auf dreytheilige Faktoren, §. 214. 215.

aa. allgemein, §. 214.

bb. wenn $x = -1$ ist, §. 215.

b. Verwandlung der Reihe: $l(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{ꝛc.})$ in $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \text{ꝛc.}$, §. 216.

c. Verwandlung der Reihe: $e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{ꝛc.}}$ in $1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{ꝛc.}$, §. 217.

d. Verwandlung der Reihe: $\sin.(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{ꝛc.})$ in $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \text{ꝛc.}$, §. 218. 218.

e. Verwandlung von $s = \cos. x$, nebst den daraus fliessenden Ausdrücken für andere trigonometrische Linien, §. 220-226.

Inhalt

Inhalt des neunten Capitels.

Vom Nutzen der Differenzial-Rechnung bey der Auflösung der Gleichungen.

4. Vom

4. Vom Nutzen der Differenzial-Rechnung bey der Auflösung solcher Gleichungen, von deren Wurzeln ein gewisses Verhältniß bekannt ist, §. 244-249.

   a. Wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung um eine gewisse Größe unterschieden sind, §. 244.

   b. Wenn die gegebene Gleichung mehrere gleiche Wurzeln hat, §. 245.

      α. Wenn sie deren zwey hat, §. 245. 246.

      β. Wenn sie deren drey hat, §. 274. 248.

      γ. Wenn sie deren vier hat, §. 249.