Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Erstes Capitel. Von den Differenzen.

Erstes Capitel.

Von den Differenzen.

§. 1.

Aus dem, was ich in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Größen und ihren Funktionen gesagt habe, erhellet, daß alle Funktionen einer veränderlichen Größe eine Veränderung leiden, wenn diese Größe wirklich verändert wird. Wenn z. B. die veränderliche Größe x den Zuwachs ω bekommt, und also $x + \omega$ für x gesetzt wird: so erhalten alle Funktionen von x, dergleichen xx; x^3; $\frac{a+x}{xx+aa}$, sind, andere Werthe. Es geht nemlich xx in $xx + 2x\omega + \omega\omega$; x^3 in $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$; und $\frac{a+x}{aa+xx}$ in $\frac{a+x+\omega}{aa+xx+2x\omega+\omega\omega}$ über. Dergleichen Veränderung erfolgt also allezeit, wofern nicht etwa die Funktion bloß die Form einer Funktion hat, in der That aber eine beständige Größe ist, wie x^0: denn in diesem Falle bleibt die Funktion unverändert, man mag die Größe x verändern wie man will.

§. 2.

Da dieses hinlänglich aus einander gesetzt worden ist, so wollen wir uns zur Betrachtung derjenigen Eigenschaften der

Funktionen wenden, auf welchen die gesammte Analysis des Unendlichen beruht. Es sey also y irgend eine Funktion der veränderlichen Größe x, und für x setze man nach und nach die Werthe, x; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; etc. Ferner bedeute y^{I} den Werth, welchen die Funktion y bekommt, wenn darin $x + \omega$ für x gesetzt wird; auf eine ähnliche Art stelle y^{II} den Werth von y, wenn $x + 2\omega$ anstatt x, und eben so y^{III}; y^{IV}; y^{V}; etc. die Werthe von y vor, wenn $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; etc. an die Stelle von x gesetzt wird, so daß sich die verschiedenen Werthe von x und y auf folgende Art auf einander beziehen:

$$x;\ x + \omega;\ x + 2\omega;\ x + 3\omega;\ x + 4\omega;\ x + 5\omega;\ \text{etc.}$$
$$y;\ y^{I};\ \ y^{II};\ \ \ y^{III};\ \ \ y^{IV};\ \ \ y^{V};\ \text{etc.}$$

§. 3.

So wie die arithmetische Reihe x; $x + \omega$; $x + 2\omega$; etc. ohne Ende fortgesetzt werden kann, so läuft auch die aus y entspringende Reihe y; y^{I}; y^{II}; ohne Ende fort, und die Beschaffenheit derselben hängt von der Natur der Funktion y ab. Ist z. B. $y = x$; oder $y = ax + b$; so ist auch die Reihe y; y^{I}; y^{II}; etc. eine arithmetische Reihe: ist aber $y = \frac{a}{bx + c}$, so entsteht daher eine harmonische, so wie, wenn $y = a^{x}$ ist, eine geometrische Reihe. Ja es läßt sich keine Reihe gedenken, die nicht auf diese Art aus einer gewissen Funktion von x abgeleitet werden könnte. Man nennt aber eine solche Funktion von x, in Ansehung der Reihe, welche aus ihr entsteht, das allgemeine Glied dieser Reihe; und so wie eine jede nach einem bestimmten Gesetze formirte Reihe ein allgemeines Glied hat, so läßt sich dieselbe

selbe auch umgekehrt aus einer gewissen Funktion von x ableiten. Dieses pflegt in der Lehre von den Reihen ausführlich auseinander gesetzt zu werden.

§. 4.

Hier richten wir aber unsere Aufmerksamkeit vorzüglich auf die Differenzen, wodurch sich die Glieder der Reihe $y; y^{I}; y^{II}; y^{III};$ rc. von einander unterscheiden; und damit wir dieselben nach der Natur der Differenzialien einrichten, so wollen wir sie auf die Art bezeichnen, daß

$$y^{I} - y = \Delta y;\ y^{II} - y^{I} = \Delta y^{I};\ y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II};\ \text{rc.}$$

sey. Es zeigt also Δy den Zuwachs an, den die Funktion y bekommt, wenn man darin $x + \omega$ anstatt x setzt, und ω bedeutet hier jede nach Belieben angenommene Zahl. In der Lehre von den Reihen pflegt zwar $\omega = 1$ gesetzt zu werden; allein zu unserer gegenwärtigen Absicht ist es besser, demselben einen allgemeinen Werth beyzulegen, den man nach Gefallen vergrößern oder vermindern kann. Man pflegt auch diesen Zuwachs Δy der Funktion y die Differenz derselben zu nennen, um welche der folgende Werth y^{I} den ersten y übertrift, und man sieht denselben stets als einen Zuwachs an, ob er gleich oft eine wirkliche Verminderung hervorbringt. Dies erkennt man denn an dem negativen Werthe desselben.

§. 5.

Da y^{II} aus y entsteht, wenn man $x + 2\omega$ für x setzt, so ist offenbar, daß man eben denselben Werth erhält, wenn man erst $x + \omega$ anstatt x, und dann nochmals $x + \omega$ für x setzt. Es entsteht daher y^{II} aus y^{I}, wenn man darin $x + \omega$ für x setzt; so daß Δy^{I} der Zuwachs wird, den y^{I} bekommt, wenn man darin $x + \omega$ anstatt x setzt, und es heißt deswegen auch auf eine ähnliche Art $\triangle y^{I}$ die Differenz von y^{I}. Aus eben dem Grunde ist $\triangle y^{II}$ die Differenz von y^{II}, oder der Zuwachs, den y^{II} bekommt, wenn man darin $x + \omega$ für x setzt, und $\triangle y^{III}$ die Differenz oder der Zuwachs von y^{III}, und so ferner. Auf diese Art erhält man aus der Reihe der Werthe von y, welche y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; ꝛc. sind, die Reihe der Differenzen $\triangle y$; $\triangle y^{I}$; $\triangle y^{II}$; ꝛc. wenn man von jedem Gliede derselben das vorhergehende abzieht.

§. 6.

Hat man die Reihe der Differenzen gefunden, so erhält man, wenn man abermals die Differenzen sucht, indem man jede Differenz der Reihe von der folgenden abzieht, Differenzen von Differenzen. Diese pflegte man mit dem Namen, zweyte Differenzen, zu belegen, und auf die Art zu bezeichnen, daß

$$\begin{aligned}
\triangle\triangle y &= \triangle y^{I} - \triangle y \\
\triangle\triangle y^{I} &= \triangle y^{II} - \triangle y^{I} \\
\triangle\triangle y^{II} &= \triangle y^{III} - \triangle y^{II} \\
\triangle\triangle y^{III} &= \triangle y^{IV} - \triangle y^{III} \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

ist. Es wird also $\triangle\triangle y$ die zweyte Differenz von y; $\triangle\triangle y^{I}$ die zweyte Differenz von y^{I} u. s. f. genennt. Auf eine ähnliche Art findet man aus den zweyten Differenzen, wenn man aufs neue ihre Differenzen sucht, die dritten Differenzen, die man auf diese Art schreibt, $\triangle^{3} y$; $\triangle^{3} y^{I}$; ꝛc.; aus diesen

diesen ferner die vierten Differenzen $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^I$; ꝛc.; und so immer weiter, so weit man will.

§. 7.

Wir wollen diese verschiedenen Arten von Differenzen in eine Tabelle bringen, damit der Zusammenhang derselben desto deutlicher in die Augen falle.

Arithmetische Progression.

x; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; ꝛc.

Werthe der Funktion.

y; y^I; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; y^V; ꝛc.

Erste Differenzen.

Δy; Δy^I; Δy^{II}; Δy^{III}; Δy^{IV}; ꝛc.

Zweyte Differenzen.

$\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta y^I$; $\Delta\Delta y^{II}$; $\Delta\Delta y^{III}$; ꝛc.

Dritte Differenzen.

$\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^I$; $\Delta^3 y^{II}$; ꝛc.

Vierte Differenzen.

$\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^I$; ꝛc.

Fünfte Differenzen.

$\Delta^5 y$; ꝛc.

ꝛc.

Eine jede von diesen Differenzen entsteht aus den vorhergehenden, indem man jede derselben von der folgenden abzieht. Da man nun die Werthe y^I; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; ꝛc. jedesmal durch die bekannten Zusammensetzungs-Arten der Grössen leicht finden kann, so kann man auch allezeit, was auch für eine Funktion von x für y gesetzt werden mag, daraus ohne Mühe die einzelnen Reihen der Differenzen erhalten.

§. 8.

Es sey $y = x$; so wird $y^{I} = x^{I} = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$; u. s. f. Nimmt man also die Differenzen, so wird $\Delta x = \omega$; $\Delta x^{I} = \omega$; $\Delta x^{II} = \omega$; rc., und es sind daher die ersten Differenzen von x insgesammt beständige Größen, und die zweyten Differenzen so wie auch die dritten und alle folgende $= 0$. Da $\Delta x = \omega$ ist, so kann man das Zeichen Δx mit Vortheil für den Buchstaben ω setzen. Wenn also die auf einander folgenden Werthe x; x^{I}; x^{II}; x^{III}; rc. einer veränderlichen Größe x in einer arithmetischen Progression stehen; so sind ihre Differenzen Δx; Δx^{I}; Δx^{II}; rc. beständige Größen und einander gleich; und folglich $\Delta\Delta x = 0$; $\Delta^{3} x = 0$; $\Delta^{4} x = 0$; u. s. f.

§. 9.

Wir haben hier für die Werthe, die x nach und nach beygelegt werden, eine arithmetische Progression angenommen, so daß die ersten Differenzen dieser Werthe beständig sind, und die zweyten Differenzen, so wie auch alle folgenden, verschwinden. Dies hängt nun zwar von unserer Willkühr ab, indem wir eben so gut jede andere Progression hätten annehmen können; allein es hat gleichwohl der Gebrauch der arithmetischen Progression vor jeder andern einen sehr großen Vorzug. Denn außerdem, daß sie unter allen die einfachste und leichteste ist, so läßt sie auch, und darauf kommt es hier vorzüglich an, alle nur mögliche Werthe, die x erhalten kann, zu. Denn legt man ω sowohl die positiven als die negativen Werthe bey, so enthält die Reihe der

Werthe

Werthe von x alle reelle Werthe, die anstatt x gesetzt werden können; wollte man aber eine geometrische Reihe zum Grunde legen, so würde man auf keine Weise zu den negativen Werthen gelangen. Aus dieser Ursache läßt sich die Veränderlichkeit der Funktionen y aus solchen Werthen von x, die eine arithmetische Progression ausmachen, am besten beurtheilen.

§. 10.

So wie $\Delta y = y^{I} - y$ ist, so lassen sich auch die folgenden Differenzen aus den Gliedern der ersten Reihe y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; rc. bestimmen. Denn da

$$\Delta y^{I} = y^{II} - y^{I}$$

ist; so ist

$$\Delta\Delta y = y^{II} - 2y^{I} + y$$

und

$$\Delta\Delta y^{I} = y^{III} - 2y^{II} + y^{I}$$

und folglich

$$\Delta^{3}y = \Delta\Delta y^{I} - \Delta\Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y.$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$\Delta^{4}y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

und

$$\Delta^{5}y = y^{V} - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^{I} - y$$

u. s. f.

Die Zahl-Coefficienten dieser Formeln richten sich nach eben dem Gesetze, welches man bey den Potestäten des Binomiums wahrnimmt. So wie also die erste Differenz aus zwey Gliedern der Reihe y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; rc. bestimmt wird: so wird die zweyte aus drey, die dritte aus vier Gliedern, und eben so alle übrigen auf eine ähnliche Art gefunden. Kennt man aber die Differenzen von y von einer jeden Ordnung, so lassen sich auch die Differenzen jeder Ordnung von y^{I}; y^{II}; rc. finden.

§. 11.

Ist daher irgend eine Funktion y gegeben, so kann man alle ihre Differenzen, die erste sowohl als die folgenden, insofern sie sich auf die Differenz ω beziehen, um welche die Werthe von x unterschieden sind, finden. Auch hat man dazu nicht nöthig, die Reihe der Werthe von y weiter fortzusetzen. Denn so wie man die erste Differenz $\triangle y$ findet, wenn man in y für x den Werth $x + \omega$ setzt, und von dem gefundenen Werthe y^{I} die Funktion y abzieht: so erhält man die zweyte Differenz $\triangle\triangle y$ wenn man in der ersten Differenz $\triangle y$ den Werth $x + \omega$ für x setzt, um $\triangle y^{I}$ zu bekommen, und darauf $\triangle y$ von $\triangle y^{I}$ abzieht. Auf eine ähnliche Art gelangt man zur dritten Differenz $\triangle^{3} y$, wenn man die Differenz der zweyten Differenz $\triangle\triangle y$ sucht, indem man diese von dem Werthe abzieht, welchen sie bekommt, wenn man $x + \omega$ für x setzt; und eben so findet man ferner die vierte Differenz $\triangle^{4} y$ aus der dritten, u. s. f. Ist man daher nur im Stande die erste Differenz einer jeden Funktion zu erforschen, so kann man auch die zweyte, die dritte und alle folgende Differenzen finden; indem die zweyte Differenz nichts anders, als die erste Differenz von $\triangle y$, so wie die dritte nichts anders als die erste Differenz von $\triangle\triangle y$ ist; und die übrigen Differenzen sich insgesammt auf eine ähnliche Art bestimmen lassen.

§. 12.

Wenn die Funktion y aus zwey oder mehreren Theilen zusammengesetzt und z. B. $y = p + q + r +$ rc. ist: so wird, weil

weil $y^I = p^I + q^I + r^I +$ rc. ist, $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r +$ rc., und eben so $\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r +$ rc.; und hierdurch wird die Erfindung der Differenzen, wenn die Funktion aus Theilen besteht, nicht wenig erleichtert. Ist aber die Funktion y ein Produkt aus zweyen andern Funktionen p und q, oder $y = pq$; so wird $\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$, weil $y^I = p^I q^I$; $p^I = p + \Delta p$; $q^I = q + \Delta q$; und also $p^I q^I = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$ ist. Ist daher p eine beständige Größe $= a$, so ist, weil $\Delta a = 0$ ist, die erste Differenz der Funktion $y = aq$ diese, $\Delta y = a\Delta q$, und auf eine ähnliche Art wird die zweite Differenz $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$, die dritte $\Delta^3 y = a\Delta^3 q$, u. s. f.

§. 13.

Da eine jede ganze rationale Funktion ein Aggregat verschiedener Potestäten von x ist: so ist man im Stande, alle Differenzen der ganzen rationalen Funktionen zu finden, wofern man nur die Differenzen der Potestäten zu finden weiß. Aus dieser Ursach wollen wir die Differenzen der Potestäten einer veränderlichen Größe x in folgenden Exempeln zu erforschen suchen.

Da $x^0 = 1$ ist, so ist $\Delta x^0 = 0$; indem x^0 nicht verändert wird, wenn man gleich $x + \omega$ für x setzt.

Ferner haben wir gesehen, daß $\Delta x = \omega$ und $\Delta\Delta x = 0$ ist; und so verschwinden zugleich die Differenzen aller folgenden Ordnungen. Da dies bekannt ist, so wollen wir von der zweyten Potestät anfangen.

Erstes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät x^2 zu finden.

Da hier $y = x^2$ ist, so ist $y^I = (x + \omega)^2$; und folglich $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$, und dies ist die erste Differenz. Da ferner ω eine beständige Größe ist, so ist $\Delta\Delta y = 2\omega\omega$, und $\Delta^3 y = 0$; $\Delta^4 y = 0$; rc.

Zweytes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät x^3 zu finden.

Man setze $y = x^3$, so wird, weil alsdann $y^I = (x + \omega)^3$ ist,

$$\Delta y = 3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3$$

und dies ist die erste Differenz. Da ferner

$$\Delta xx = 2\omega x + \omega\omega$$

ist, so wird

$$\Delta \cdot 3\omega xx = 6\omega\omega x + 3\omega^3$$

und

$$\Delta \cdot 3\omega^2 x = 3\omega^3; \text{ und } \Delta \cdot \omega^3 = 0.$$

Zieht man nun das Gefundene zusammen, so wird

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3; \text{ und } \Delta^3 y = 6\omega^3;$$

die übrigen Differenzen aber verschwinden.

Drittes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät x^4 zu finden.

Setzt man $y = x^4$, so wird, weil alsdenn $y^I = (x + \omega)^4$ ist,

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4;$$

und

und dies ist die erste Differenz. Dann ist aber aus dem Vorhergehenden

$$\begin{array}{llll}
\triangle\,.\,4\omega x^3 & = 12\omega^2x^2 & + 12\omega^3x & + 4\omega^4 \\
\triangle\,.\,6\omega^2x^2 & = \;.\;.\;. & + 12\omega^3x & + 6\omega^4 \\
\triangle\,.\,4\omega^3x & = \;.\;.\;.\;.\;.\;. & & + 4\omega^4 \\
\triangle\,.\,\omega^3 & = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & & 0.
\end{array}$$

Vereiniget man dieses, so findet man die zweyte Differenz

$$\triangle\triangle y = 12\omega^2x^2 + 24\omega^3x + 14\omega^4.$$

Weil nun ferner

$$\begin{array}{lll}
\triangle\,.\,12\omega^2x^2 & = 24\omega^3x & + 12\omega^4 \\
\triangle\,.\,24\omega^3x & = \;.\;. & + 24\omega^4 \\
\triangle\,.\,14\omega^3 & = \;.\;.\;.\;. & 0
\end{array}$$

ist, so erhält man für die dritte Differenz

$$\triangle^3 y = 24\omega^3x + 36\omega^4$$

und endlich für die vierte

$$\triangle^4 y = 24\omega^4.$$

Da diese vierte Differenz beständig ist, so verschwinden alle folgende.

Viertes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät x^n zu finden.

Man setze $y = x^n$; und da dann $y^I = (x + \omega)^n$; $y^{II} = (x + 2\omega)^n$; $y^{III} = (x + 3\omega)^n$; ꝛc. ist, so erhält man durch die Entwickelung der Potestäten:

$$y = x^n$$

$$y^I = x^n + \frac{n}{1}\,\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\omega^3 x^{n-3} + \text{ꝛc.}$$

$$y^{II} = x^n + \frac{n}{1} 2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 8\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$y^{III} = x^n + \frac{n}{1} 3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 27\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$y^{IV} = x^n + \frac{n}{1} 4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 64\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

Nimmt man daher die Differenzen, so wird

$$\Delta y = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$\Delta y^{I} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 3\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 7\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$\Delta y^{II} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 5\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 19\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

$$\Delta y^{III} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 7\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 37\omega^3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

Nimmt man abermals die Differenzen, so wird

$$\Delta\Delta y = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} 14\omega^4 x^{n-4} + \text{etc.}$$

$$\Delta\Delta y^{I} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} 50\omega^4 x^{n-4} + \text{etc.}$$

$$\Delta\Delta y^{II} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 18\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} 110\omega^4 x^{n-4} + \text{etc.}$$

Setzt man die Subtraction weiter fort, so wird

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} 36\omega^4 x^{n-4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^3 y^{I} = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} 60\omega^4 x^{n-4} + \text{etc.}$$

und hieraus ferner

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \text{etc.}$$

§. 14.

Damit das Gesetz, nach welchem diese Differenzen der Potestät x^n fortgehen, desto deutlicher erkannt werden möge, so wollen wir der Kürze wegen

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

u. s. f.

setzen. Ferner wollen wir folgende Tabelle machen, die zur Erfindung der einzelnen Differenzen dienen soll.

y	1;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	rc.
Δy	0;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	rc.
$\Delta^2 y$	0;	0;	2;	6;	14;	30;	62;	126;	254;	rc.
$\Delta^3 y$	0;	0;	0;	6;	36;	150;	540;	1806;	5796;	rc.
$\Delta^4 y$	0;	0;	0;	0;	24;	240;	1560;	8400;	40824;	rc.
$\Delta^5 y$	0;	0;	0;	0;	0;	120;	1800;	16800;	126000;	rc.
$\Delta^6 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	720;	15120;	191520;	rc.
$\Delta^7 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	5040;	141120;	rc.

Man findet aber eine jede Zahl dieser Tabelle, wenn man die vorhergehende Zahl eben derselben Reihe zu der darüber stehenden Zahl addirt, und die Summe durch den Anzeiger des vorne stehenden Zeichens Δ multiplicirt. So findet man in der Reihe, welche zu der Differenz $\Delta^5 y$ gehört, das Glied 16800, wenn man das vorhergehende 1800 zu dem darüber stehenden 1560 addirt, und die Summe 3360 durch 5 multiplicirt.

§. 15.

Hat man diese Tabelle verfertiget, so verhalten sich die Differenzen der Potestät $x^n = y$ auf folgende Art:

$$\Delta y = A\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\omega^4 x^{n-4} + \text{rc.}$$

$$\Delta^2 y = 2B\omega^2 x^{n-2} + 6C\omega^3 x^{n-3} + 14D\omega^4 x^{n-4} + \text{rc.}$$

$$\Delta^3 y = 6C\omega^3 x^{n-3} + 36D\omega^4 x^{n-4} + 150E\omega^5 x^{n-5} + \text{rc.}$$

$$\Delta^4 y = 24D\omega^4 x^{n-4} + 240E\omega^5 x^{n-5} + 1560F\omega^6 x^{n-6} + \text{rc.}$$

Ueberhaupt aber wird die Differenz der Potestät x^n von der Ordnung m, oder $\Delta^m y$ auf folgende Art ausgedruckt.

Es sey

$$I = \frac{n(n-1)(n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m};$$

$$K = \frac{n-m}{m+1}I;$$

$$L = \frac{n-m-1}{m+2}K;$$

$$M = \frac{n-m-2}{m+3}L;$$

u. s. f.

Ferner sey

$$\alpha = (m+1)^m - \frac{m}{1}m^m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-2)^m + \text{ꝛc.}$$

$$\beta = (m+1)^{m+1} - \frac{m}{1}m^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-1)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-2)^{m+1} + \text{ꝛc.}$$

$$\gamma = (m+1)^{m+2} - \frac{m}{1}m^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-2)^{m+2} + \text{ꝛc.}$$

Hat man diese Werthe gefunden, so ist

$$\Delta^m y = \alpha I \omega^m x^{n-m} + \beta K \omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma L \omega^{m+2} x^{n-m-2} + \text{ꝛc.}$$

Der Grund von diesem Ausdrucke läßt sich aus der Art, wie die verschiedenen Differenzen aus den Werthen y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; ꝛc. gefunden werden, leicht herleiten.

§. 16.

Hieraus erhellet, daß man, wenn der Exponent n eine ganze positive Zahl ist, endlich auf beständige Differenzen kommen muß, und daß alle darauf folgende = o sind. So ist

$$\Delta\ .\ x\ = \omega$$
$$\Delta^2\ .\ x^2 = 2\omega^2$$
$$\Delta^3\ .\ x^3 = 6\omega^3$$
$$\Delta^4\ .\ x^4 = 24\omega^4, \text{ und endlich}$$
$$\Delta^n\ .\ x^n = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots n . \omega^n$$

Es kann daher eine jede ganze rationale Funktion endlich auf beständige Differenzen gebracht werden. Es hat nemlich jede Funktion von x vom ersten Grade, oder $ax + b$, schon die erste Differenz beständig. Bey einer Funktion vom zweyten Grade hingegen, oder $axx + bx + c$ ist die zweyte Differenz beständig; bey einer Funktion vom dritten Grade ist es die dritte; bey einer vom vierten Grade die vierte, u. s. f.

§. 17.

Es erstreckt sich aber die Art, wie wir die Differenzen der Potestät x^n gefunden haben, noch weiter, und läßt sich auch auf die Potestäten anwenden, bey welchen der Exponent n eine negative Zahl, oder ein Bruch, oder selbst eine Irrational-Zahl ist. Damit dieses deutlicher werde, wollen wir bloß die ersten Differenzen der vornehmsten von diesen Potestäten hersetzen, weil das Gesetz der zweyten und der folgenden Differenzen nicht so leicht in die Augen fällt. Es ist also

$$\Delta\ .\ x\ = \omega$$
$$\Delta\ .\ x^2 = 2\omega x + \omega$$
$$\Delta\ .\ x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$$
$$\Delta\ .\ x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4$$

Auf

Auf eine ähnliche Art aber ist auch

$$\triangle . x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$\triangle . x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \text{etc.}$$

$$\triangle . x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \text{etc.}$$

$$\triangle . x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \text{etc.}$$

etc.

Ferner ist auf gleiche Weise

$$\triangle . x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} + \text{etc.}$$

$$\triangle . x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} + \text{etc.}$$

$$\triangle . x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.}$$

$$\triangle . x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \text{etc.}$$

§. 18.

Es erhellet hieraus, daß diese Differenzen, wenn der Exponent von x keine ganze Zahl ist, ohne Ende fortlaufen, oder aus einer ganz unbegrenzten Anzahl von Gliedern bestehen. Es lassen sich aber dieselben gleichwohl auch durch endliche Ausdrücke darstellen. Denn da, wenn man $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ setzt, $y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{x+\omega}$ wird, so ist $\triangle . x^{-1} = \triangle . \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$. Wenn man daher den Bruch $\frac{1}{x+\omega}$

 in

in eine Reihe verwandelt, so bekommt man den obigen Ausdruck. Auf eine ähnliche Art ist

$$\Delta \,.\, x^{-2} = \Delta \,.\, \frac{1}{xx} = \frac{1}{(x + \omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

und für die Irrational-Größen

$$\Delta \,.\, \sqrt{x} = \sqrt{(x + \omega)} - \sqrt{x}, \text{ und } \Delta \,.\, \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\omega)}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Verwandelt man diese Ausdrücke auf die gewöhnliche Art in Reihen, so erhält man dadurch die vorhergehenden Bestimmungen.

§. 19.

Auf diese Art kann man aber auch die Differenzen der gebrochenen und irrationalen Funktionen finden. Soll z. B. die erste Differenz der gebrochenen Funktion $\frac{1}{aa + xx}$ gefunden werden, so setze man $y = \frac{1}{aa + xx}$; und weil nun $y^1 = \frac{1}{aa + xx + 2\omega x + \omega\omega}$ ist, so ist $\Delta y = \Delta \,.\, \frac{1}{aa + xx} = \frac{1}{aa + xx + 2\omega x + \omega\omega} - \frac{1}{aa + xx}$: ein Ausdruck, der ebenfalls in eine unendliche Reihe verwandelt werden kann.

Man setze nemlich

$$aa + xx = P; \text{ und } 2\omega x + \omega\omega = Q$$

so ist

$$\frac{1}{P + Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{etc.}$$

und

$$\Delta y = - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{etc.}$$

Setzt

Setzt man also für P und Q ihre Werthe, so ist:

$$\Delta y = \Delta . \frac{1}{aa + xx} = -\frac{2\omega x - \omega\omega}{(aa + xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx + 4\omega^3 x + \omega^4}{(aa + xx)^3}$$

$$- \frac{8\omega^3 x^3 - 12\omega^4 x^2 + 6\omega^5 x - \omega^6}{(aa + xx)^4} + \text{rc.}$$

und ordnet man die Glieder nach den Potestäten von ω, so wird

$$\Delta . \frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x}{(aa+xx)^2} + \frac{\omega^2(xx-aa)}{(aa+xx)^3} - \frac{4\omega^3(x^3-aax)}{(aa+xx)^4} + \text{rc.}$$

§. 20.

Durch ähnliche unendliche Reihen ist man auch im Stande, die Differenzen der irrationalen Funktionen auszudrucken.

Es sey die Funktion

$$y = \sqrt{(aa + xx)}$$

gegeben. Da nun

$$y^1 = \sqrt{(aa + xx + 2\omega x + \omega\omega)}$$

ist, so setze man auch hier

$$aa + xx = P; \text{ und } 2\omega x + \omega\omega = Q.$$

Alsdann ist

$$\Delta y = \sqrt{(P+Q)} - \sqrt{P} = \frac{Q}{2\sqrt{P}} - \frac{Q^2}{8P\sqrt{P}} + \frac{Q^3}{16P^2\sqrt{P}} - \text{rc.}$$

Hieraus wird

$$\Delta y = \Delta . \sqrt{(aa+xx)} = \frac{2\omega x + \omega\omega}{2\sqrt{(aa+xx)}} - \frac{4\omega^2 x^2 - 4\omega^3 x - \omega^4}{8(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}} + \text{rc.}$$

oder

$$\Delta y = \frac{\omega x}{\sqrt{(aa + xx)}} + \frac{aa\omega^2}{2(aa + xx)\sqrt{(aa + xx)}} -$$

$$\frac{aa\omega^3 x}{2(aa + xx)^2\sqrt{(aa + xx)}} + \text{rc.}$$

Hieraus ziehen wir daher den Schluß, daß die Differenz einer jeden Funktion von x, die wir y nennen wollen, auf folgende allgemeine Art ausgedruckt werden könne, daß

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

und P, Q, R, S ꝛc. gewisse Funktionen von x sind, die für einen jeden Fall aus der Funktion y hergeleitet werden können.

§. 21.

Es sind selbst von dieser Form die transcendenten Funktionen nicht ausgeschlossen, wie aus folgenden Exempeln erhellen wird.

Erstes Exempel.

Die erste Differenz des hyperbolischen Logarithmen von x zu finden.

Es sey $y = lx$, und da alsdann $y^{I} = l(x + \omega)$ ist, so wird

$$\Delta y = y_I - y = l(x + \omega) - lx = l\left(1 + \frac{\omega}{x}\right)$$

Von dergleichen Logarithmen aber wissen wir [aus dem 7ten Capitel des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen] wie dieselben in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Thun wir nun solches, so ist

$$\Delta y = \Delta . lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4\omega^4} + \text{ꝛc.}$$

Zweytes Exempel.

Die erste Differenz der Exponential-Größe a^x zu finden.

Setzt man $y = a^x$, so wird $y^I = a^{x+\omega} = a^x . a^\omega$. Nun ist aber oben [Einleit. in d. Anal. des Unendl. 1. B. §. 125.] gezeigt worden, daß

a^ω

$$a^{\omega} = 1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

ist, und gebraucht man diesen Werth, so wird

$$\Delta . a^x = y^I - y = \Delta y = \frac{a^x \omega la}{1} + \frac{a^x \omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{a^x \omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Drittes Exempel.

Die Differenz des Sinus eines Bogens x zu finden, wenn der Halbmesser des Kreises = 1 ist.

Es sey $\sin. x = y$, und folglich $y^I = \sin. (x + \omega)$; also

$$\Delta y = y^I - y = \sin. (x + \omega) - \sin. x.$$

Nun ist aber

$$\sin. (x + \omega) = \cos. \omega . \sin. x + \sin. \omega . \cos. x$$

und, durch unendliche Reihen bestimmt, [nach Einl. in die Anal. des Unendl. 1. B. §. 134.]

$$\cos. \omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

und

$$\sin. \omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Gebraucht man diese Reihen, so wird

$$\Delta . \sin. x = \omega . \cos. x - \frac{\omega^2}{2} \sin. x - \frac{\omega^3}{6} \cos. x + \frac{\omega^4}{24} \sin. x + \frac{\omega^5}{120} \cos. x - \text{etc.}$$

Viertes Exempel.

In einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 ist; die Differenz des Cosinus des Bogens x zu finden.

Es sey $y = \cos. x$, so ist, weil $y^I = \cos. (x + \omega)$ ist,

$$y^I = \cos. \omega . \cos. x - \sin. \omega . \sin. x$$

und

$$\Delta y = \cos. \omega . \cos. x - \sin. \omega . \sin. x - \cos. x.$$

Gebraucht man nun wieder die vorher angeführten Reihen, so wird

$$\Delta . \cos. x = -\omega . \sin. x - \frac{\omega^2}{2} . \cos. x + \frac{\omega^3}{6} . \sin. x + \frac{\omega^4}{24} . \cos. x -$$

$$\frac{\omega^5}{120} . \sin. x - \text{ꝛc.}$$

§. 22.

Da also die erste Differenz einer jeden Funktion y von x, es mag nun dieselbe zu den algebraischen oder zu den transcendenten Funktionen gehören, eine solche Form hat, daß

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

ist: so ist leicht einzusehen, daß, wenn man in der Aufsuchung der Differenzen fortgeht, die zweyte Differenz von y diese Form:

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + S\omega^5 + \text{ꝛc.}$$

die dritte folgende

$$\Delta^3 = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + S\omega^6 + \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

haben werde. Hierbey ist aber zu bemerken, daß die Buchstaben P, Q, R, S, ꝛc. keine bestimmte Werthe anzeigen, und daß überdies ein und derselbe Buchstabe bey verschiedenen Differenzen nicht gerade eben dieselbe Funktion von x bedeutet. Es sind bloß deswegen dieselben Buchstaben bey den verschiedenen Differenzen genommen worden, damit es nicht an einer hinlänglichen Anzahl verschiedener Buchstaben fehlen mögte.

Uebrigens sind diese Formen der Differenzen wohl zu merken, weil sie in der Analysis des Unendlichen den größten Nutzen gewähren.

§. 23.

Da ich also die Art und Weise erklärt habe, die erste Differenz einer jeden Funktion und aus derselben dann auch die Differenzen der folgenden Ordnungen zu finden, indem dieselben aus den auf einander folgenden Werthen der Funktion y, nemlich y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; ꝛc. erhalten werden können: so sind wir nunmehr auch im Stande, aus den Differenzen von y von jeder Ordnung jene verschiedenen Werthe von y zu finden. Es ist nemlich

$$y^{I} = y + \Delta y$$
$$y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$
$$y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y$$
$$y^{IV} = y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$

ꝛc.

wo die Zahl-Coefficienten wiederum [wie §. 10.] aus der Entwickelung eines Binomiums entspringen. So wie daher y^{I}; y^{II}; y^{III}; ꝛc. Werthe von y sind, die entstehen, wenn man anstatt x nach und nach die Werthe $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; ꝛc. setzt, so läßt sich der Werth von $y^{(n)}$, der hervorgebracht wird, wenn man $x+n\omega$ für x setzt, sogleich angeben. Es ist nemlich derselbe:

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \text{ꝛc.}$$

Hiernach lassen sich selbst die Werthe von y angeben, wenn n eine negative Zahl ist. Wird z. B. $x-\omega$ für x gesetzt, so geht y in diesen Ausdruck über:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \text{ꝛc.}$$

nimmt man aber $x-2\omega$ für x, so erhält man für die Funktion y:

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \text{ꝛc.}$$

§. 24.

Nun wollen wir kürzlich die umgekehrte Methode betrachten, wodurch man aus der gegebenen Differenz einer Funktion diese Funktion findet. Da dieses indeß viel schwerer ist, und öfters selbst den Gebrauch der Analysis des Unendlichen nothwendig macht: so wollen wir nur einige leichter Fälle erwägen. Zuvörderst also kann man, wenn man die Differenz einer Funktion gefunden hat, und nun wieder diese Differenz gegeben ist, dadurch, daß man rückwärts geht, aus dieser Differenz die Funktion, woraus sie entstanden ist, finden. So ist, wenn man die Funktion finden soll, deren Differenz $a\omega$ ist, da man weiß, daß die Funktion $ax + b$ die Differenz $a\omega$ hat, die Antwort leicht, nemlich, daß die gesuchte Funktion $ax + b$ sey. Hier findet man also eine beständige Größe, welche sich in der Differenz nicht befand, und welche also von unserer Willkühr abhängt. Wenn aber die Differenz einer Funktion $P = Q$ ist, so ist auch die Differenz der Funktion $P + A$, (wo A jede beständige Größe bedeutet) $= Q$. Wenn also die Differenz Q gegeben ist, so ist die Funktion, aus welcher sie gefunden wird, $P + A$, und es hat daher dieselbe keinen bestimmten Werth, da A willkührlich genommen werden kann.

§. 25.

Die gesuchte Funktion, deren Differenz gegeben ist, wollen wir Summe nennen; denn dieser Name ist sehr schicklich, theils, weil die Summe der Differenz entgegensteht, theils, weil die gesuchte Funktion in der That die Summe aller vor der Differenz vorhergehenden Werthe ist. So wie nemlich $y^{I} = y + \Delta y$, und $y^{II} = y + \Delta y + \Delta y^{I}$ ist: so ist auch, (wenn man die Werthe von y rückwärts fortsetzt, und denjenigen, der zu dem Werthe $x - \omega$ gehört, durch

durch y_I; so wie den vorhergehenden durch y_{II}; und die weiter vorhergehenden y_{III}; y_{IV}; y_V; ꝛc. bezeichnet, und darauf die rückwärts fortgehende Reihe mit ihren Differenzen,

$$y_V;\quad y_{IV};\quad y_{III};\quad y_{II};\quad y_I;\ y$$

und

$$\Delta y_V;\ \Delta y_{IV};\ \Delta y_{III};\ \Delta y_{II};\ \Delta y_I$$

formirt,) $y = \Delta y_I + y_I$; und da $y_I = \Delta y_{II} + y_{II}$; und $y_{II} = \Delta y_{III} + y_{III}$ ꝛc. ist, so ist ferner

$$y = \Delta y_I + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_V + \text{ꝛc.}$$

oder es ist die Funktion y, deren Differenz Δy ist, die Summe aller der Werthe, die vor der Differenz Δy vorhergehen, und welche entstehen, wenn man für x die vorhergehenden Werthe $x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; ꝛc. setzt.

§. 26.

So wie wir nun die Differenz zu bezeichnen das Zeichen Δ gebraucht haben: so wollen wir uns zur Bezeichnung der Summe des Zeichens Σ bedienen. Ist nemlich die Differenz einer Funktion $y = z$, so ist $z = \Delta y$; und wenn y gegeben ist, so wissen wir, wie z gefunden wird. Wenn aber die Differenz z gegeben ist, und ihre Summe y gefunden werden soll, so wird $y = \Sigma z$; und man findet $y = \Sigma z$ aus der Gleichung $z = \Delta y$, indem man den entgegenstehenden Weg nimmt. Wegen der angeführten Gründe muß man indeß eine beständige Größe dazu setzen, so daß die Gleichung $z = \Delta y$, wenn umgekehrt wird, $y = \Sigma z + C$ giebt. Da ferner die Größe ay die Differenz $a\Delta y = az$ hat, so ist $\Sigma az = ay$, wofern a eine beständige Größe ist. Da also $\Delta x = \omega$ ist, so ist $\Sigma\omega = x + C$, und $\Sigma ax = ax + C$; und weil

weil ω eine beständige Größe ist, $\Sigma\omega^2 = \omega x + C$; $\Sigma\omega^3 = \omega^2 x + C$; und so ferner.

§. 28.

Wenn wir daher die oben gefundenen Differenzen der Potestäten von x umkehren, so wird

$$\Sigma\omega = x;\ \text{und also}\ \Sigma 1 = \frac{x}{\omega}.$$

Ferner haben wir

$$\Sigma(2\omega x + \omega^2) = x^2$$

und daher

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma\frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Dann ist

$$\Sigma(3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

oder

$$3\omega\Sigma xx + 3\omega^2\Sigma x + \omega^3\Sigma 1 = x^3$$

folglich

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega\Sigma x - \frac{\omega^2}{3}\Sigma 1$$

oder

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}.$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2}\Sigma x^2 - \omega^2\Sigma x - \frac{\omega^3}{4}\Sigma 1$$

und setzt man darin für Σx^2, Σx und $\Sigma 1$ die dafür gefundenen Werthe, so wird

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega xx}{4}.$$

Da ferner

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega\Sigma x^3 - 2\omega^2\Sigma x^2 - \omega^3\Sigma x - \frac{\omega^4}{5}\Sigma 1$$

ist,

ist, so findet man, wenn man wieder die bereits gefundenen Werthe gebraucht,

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}\omega x^3 - \tfrac{1}{30}\omega^3 x$$

Auf eine ähnliche Art kann man weiter fortgehen, und dann findet man

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}\omega x^4 - \tfrac{1}{12}\omega^3 x^2$$

und

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}\omega x^5 - \tfrac{1}{6}\omega^3 x^3 + \tfrac{1}{42}\omega^5 x;$$

indeß wird weiter unten ein leichterer Weg, diese Ausdrücke zu finden, vorkommen.

§. 28.

Wenn also die gegebene Differenz eine ganze rationale Funktion von x ist, so kann man ihre Summe (oder die Funktion, wovon sie die Differenz ist) aus diesen Formeln ohne Mühe finden. Da nemlich die Differenz aus mehrern Potestäten von x bestehen wird, so suche man die Summe eines jeden Gliedes, und vereinige darauf das Gefundene zu einem Aggregate.

Erstes Exempel.

Man soll die Funktion finden, deren Differenz = $axx + bx + c$ ist.

Man suche die Summe der einzelnen Glieder nach den vorhin gefundenen Formeln. Dadurch findet man

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

$$\Sigma bx = \ldots\ldots \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

$$\Sigma c = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{cx}{\omega}$$

Dann vereinige man diese Summen, wodurch denn

$$\Sigma(axx + bx + c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{a\omega - b}{2\omega}x^2 + \frac{a\omega^2 - 3b\omega + 6c}{6\omega}x + C$$

wird, und dies ist die Funktion, deren Differenz $axx + bx + c$ ist

Zweytes Exempel.

Man soll die Funktion finden, deren Differenz $x^4 - 2\omega^2 xx + \omega^4$ ist.

Verfährt man hier auf eine ähnliche Art, so wird

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega x^3$$

$$-\Sigma 2\omega^2 x^2 = \;.\;.\; - \frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2 x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

$$+\Sigma \omega^4 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \omega^3 x$$

und die gesuchte Funktion ist daher

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2 x^2 + \frac{19}{30}\omega^3 x + C.$$

Denn setzt man darin $x + \omega$ für x und zieht man von dem dadurch gefundenen Ausdrucke jenen Ausdruck ab, so bleibt die gegebene Differenz $x^4 - 2\omega^2 x^2 + \omega^4$ übrig.

§. 29.

Wenn man die Summen, die wir für die Potestäten von x gefunden haben, mit Aufmerksamkeit betrachtet, so nimmt man zwar in den ersten, zweyten und dritten Gliedern derselben bald das Gesetz wahr, nach welchem sie fortschreiten: allein bey den folgenden Gliedern ist dieses Gesetz nicht so deutlich, daß man daraus die Summe der allgemeinen Potestät x^n sollte schließen können. In der Folge aber wird bewiesen werden, daß

$$\Sigma x^n =$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2\cdot 3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^{n-5}$$

$$- \frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-6)\omega^7}{2\cdot 3\ldots\ldots 8\cdot 9}x^{n-7}$$

$$+ \frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-8)\omega^9}{2\cdot 3\ldots\ldots 10\cdot 11}x^{n-9}$$

$$- \frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-10)\omega^{11}}{2\cdot 3\ldots\ldots 12\cdot 13}x^{n-11}$$

$$+ \frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-12)\omega^{13}}{2\cdot 3\ldots\ldots 14\cdot 15}x^{n-13}$$

$$- \frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-14)\omega^{15}}{2\cdot 3\ldots\ldots 16\cdot 17}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-16)\omega^{17}}{2\cdot 3\ldots\ldots 18\cdot 19}x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-18)\omega^{19}}{2\cdot 3\ldots\ldots 20\cdot 21}x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-20)\omega^{21}}{2\cdot 3\ldots\ldots 22\cdot 23}x^{n-21}$$

$$- \frac{1181820455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-22)\omega^{23}}{2\cdot 3\ldots\ldots 24\cdot 25}x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-24)\omega^{25}}{2\cdot 3\ldots\ldots 26\cdot 27}x^{n-25}$$

$$- \frac{23749461029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-26)\omega^{27}}{2\cdot 3\ldots\ldots 28\cdot 29}x^{n-27}$$

$$+ \frac{8615841276005}{462}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-28)\omega^{29}}{2\cdot 3\ldots\ldots 30\cdot 31}x^{n-29}$$

ꝛc. + C.

Bey dieser Progression sind die Coefficienten, die aus blossen Zahlen bestehen, das wichtigste; allein die Art, wie man sie findet, kann hier noch nicht gelehret werden.

§. 30.

Das aber fällt in die Augen, daß dieser Ausdruck der Summe, wenn n keine ganze positive Zahl ist, ohne Ende fortlaufen muß, und daß alsdann die Summe durch keine endliche Form dargestellt werden kann. Uebrigens bemerke man, daß nicht alle Potestäten von x, die niedriger sind als die gegebene x^n, vorkommen. Es fehlen nemlich die Glieder x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}, 2c. weil ihre Coefficienten $= 0$ sind, obgleich der Coefficient des zweyten Gliedes x^n diesem Gesetze nicht folgt, sondern $= -\frac{1}{2}$ ist. Es können also die Summen der Potestäten, deren Exponenten negative oder gebrochene Zahlen sind, vermittelst dieses Ausdrucks in der gewöhnlichen unendlichen Form dargestellt werden, den Fall ausgenommen, wenn $n = -1$ ist, weil alsdenn das Glied $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$, weil $n + 1 = 0$ wird, unendlich ist. Setzt man z. B. $n = -2$, so wird

$$\Sigma \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{3x^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^3}{5x^5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega}{7x^7}$$

$$+ \frac{3}{10} \cdot \frac{\omega^7}{9x^9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210} \cdot \frac{\omega^{11}}{13x^{13}} - \frac{35}{2} \cdot \frac{\omega^{13}}{15 \cdot x^{15}}$$

$$+ \frac{3617}{30} \cdot \frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \text{2c.}$$

§. 31.

Wenn also die gegebene Differenz irgend eine Potestät von x ist, so kann man hiernach beständig die Summe derselben

selben angeben, oder die Funktion, wovon sie eine Differenz ist, darstellen. Wenn aber die gegebene Differenz eine andere Form hat, so daß man sie nicht in Potestäten von x, als in Theile, zerfällen kann: so ist es häufig sehr schwer, und oft unmöglich, ihre Summe zu finden, es sey denn daß man wüßte, daß sie aus einer gewissen Funktion entstanden sey. Aus dieser Ursache ist es sehr nützlich, von so vielen Funktionen als möglich die Differenzen zu suchen und sich dieselben zu merken, um, wenn künftig eine solche Differenz vorkommen sollte, die Summe derselben, oder die Funktion, woraus sie entstanden, sogleich angeben zu können. Es wird indeß die Betrachtung des Unendlichen mehrere Regeln an die Hand geben, wodurch die Erfindung der Summen ungemein erleichtert wird.

§. 32.

Wenn aber die gegebene Differenz aus einfachen Faktoren besteht, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, so kann man die gesuchte Summe auf eine leichtere Art finden. Sollte z. B. die Differenz der Funktion $(x + \omega)(x + 2\omega)$ gefunden werden: so würde diese Funktion, wenn man darin $x + \omega$ für x setzte, in diese $(x + 2\omega)(x + 3\omega)$ übergehen, und ihre Differenz also $2\omega(x + 2\omega)$ seyn. Wird also umgekehrt die Differenz $2\omega(x + 2\omega)$ gegeben, so ist ihre Summe $(x + \omega)(x + 2\omega)$ und daraus

$$\Sigma(x + 2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + \omega)(x + 2\omega).$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn die Funktion $(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)$ gegeben ist, da dieselbe die Differenz $2\omega(x + (n + 1)\omega)$ hat,

$$\Sigma(x + (n + 1)\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)$$

und

$$\Sigma(x + n\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + (n-1)\omega)(x + n\omega).$$

§. 33.

Wenn die Funktion aus mehrern Faktoren besteht, so daß

$$y = (x + (n-1)\omega)(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$$

ist, so wird, da alsdenn

$$y^{I} = (x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)$$

ist, die Differenz

$$\triangle y = 3\omega(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$$

und also

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega) = \frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega).$$

Auf eben die Art findet man

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega) = \frac{1}{4\omega}(x+(n-1)\omega) + (x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega);$$

und hieraus fällt die Regel zur Erfindung der Summen, wenn die Differenz aus mehrern Faktoren von dieser Art besteht, von selbst in die Augen. Ob nun gleich diese Differenzen ganze rationale Funktionen sind, so werden doch ihre Summen auf dem jetzt beschriebenen Wege leichter als nach der vorhergehenden Methode gefunden.

§. 34.

Hierdurch ist nun auch der Weg zur Erfindung der Summen der gebrochenen Differenzen gebahnt. Denn ist der Bruch

$$y = \frac{1}{x+n\omega}$$

gege-

gegeben, so wird, weil

$$y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{x+(n+1)\omega}$$

ist, die Differenz

$$\Delta y = \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega} = \frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

und folglich

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x+n\omega}.$$

Es sey ferner

$$y = \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

so wird, weil

$$y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$$

ist, die Differenz

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$$

und folglich

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)} = \frac{-1}{2\omega} \cdot \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}.$$

Auf eine ähnliche Art ist ferner

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)(x+(n+3)\omega)} = \frac{-1}{3\omega} \cdot \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}.$$

§. 35.

Diese Art die Summe zu finden ist deswegen wohl zu merken, weil man die Summen von dergleichen Differenzen auf dem vorhin beschriebenen Wege nicht erhält. Hat aber die Differenz außerdem auch einen Zähler, oder stehen die Faktoren des Nenners nicht in einer arithmetischen Progression, so ist der sicherste Weg die Summen zu erforschen der, daß man die gegebene Differenz in ihre einfachen Brüche auflöset. Denn ob man gleich nicht jeden für sich summiren kann, so kann man doch, wenn man immer zwey und zwey mit einander verbindet, die Summe so ofte finden, als solches möglich ist. Es kommt dabey nemlich nur darauf an, ob man die Summe vermittelst dieser Formel

$$\Sigma \frac{1}{(x+(n+1)\omega)} - \Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+n\omega}$$

zu finden im Stande ist. Denn ist man gleich von diesen beyden Summen keine für sich zu finden im Stande, so kann man doch ihre Differenz angeben.

§. 36.

In diesen Fällen kommt es also vorzüglich auf die Auflösung eines jeden Bruchs in seine einfachen Brüche an, wozu in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen eine ausführliche Anweisung gegeben worden ist. Jetzt wollen wir an einigen Beyspielen zeigen, wie man vermittelst derselben die Summen findet.

Erstes Exempel.

Man soll die Summe finden, deren Differenz

$$\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)} \text{ ist.}$$

Man löse diese Differenz in ihre einfachen Brüche auf, welche sind

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{x+2\omega}.$$

Da

Da nun nach der vorhergehenden Formel

$$\Sigma \frac{1}{x + n\omega} = \Sigma \frac{1}{x + (n + 1)\omega} - \frac{1}{x + n\omega}$$

ist, so wird

$$\Sigma \frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{x + \omega} - \frac{1}{x}.$$

Es ist daher die gesuchte Summe

$$\frac{1}{\omega} \Sigma \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \Sigma \frac{1}{x + \omega} - \frac{2}{\omega} \Sigma \frac{1}{x + 2\omega} = \frac{2}{\omega} \Sigma \frac{1}{x + \omega} -$$

$$\frac{2}{\omega} \Sigma \frac{1}{x + 2\omega} - \frac{1}{\omega x}.$$

Da aber

$$\Sigma \frac{1}{x + \omega} = \Sigma \frac{1}{x + 2\omega} - \frac{1}{x + \omega}$$

ist, so wird die gesuchte Summe

$$- \frac{1}{\omega x} - \frac{2}{\omega(x + \omega)} = \frac{-3x - \omega}{\omega x (x + \omega)}.$$

Zweytes Exempel.

Man soll die Summe finden, deren Differenz

$$\frac{3\omega}{x(x + 3\omega)} \text{ ist.}$$

Setzt man diese Differenz $= z$, so ist $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 3\omega}$, und folglich

$$\Sigma z = \Sigma \frac{1}{x} - \Sigma \frac{1}{x + 3\omega} = \Sigma \frac{1}{x + \omega} - \Sigma \frac{1}{x + 3\omega} - \frac{1}{x}$$

$$= \Sigma \frac{1}{x + 2\omega} - \Sigma \frac{1}{x + 3\omega} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \omega}$$

$$= - \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \omega} - \frac{1}{x + 2\omega}$$

und dies ist die gesuchte Summe. So oft sich also auf diese Art die summirenden Zeichen Σ endlich einander aufheben, so oft lassen sich die Summen der gegebenen Differenzen finden; wenn aber diese Vernichtung nicht erhalten werden kann, so ist dies ein Zeichen, daß man die Summe nicht zu finden im Stande ist.