Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Zweytes Capitel. Von dem Nutzen der Differenzen und der Lehre von den Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52886

Zweytes Capitel.

Von dem Nutzen der Differenzen in der Lehre von den Reihen.

§. 37.

Daß die Natur der Reihen durch die Differenzen am deutlichsten vor Augen gelegt werden könne, ist selbst aus den ersten Anfangs-Gründen bekannt. Die vornehmste Eigenschaft der arithmetischen Progression, welche unter allen Reihen zuerst betrachtet zu werden pflegt, ist die, daß ihre ersten Differenzen einander gleich, und folglich die zweyten Differenzen, so wie auch alle übrigen Nullen sind. Dann giebt es Reihen, deren zweyte Differenzen erst einander gleich werden, und die man deswegen sehr bequem mit dem Namen der Reihen der zweyten Ordnung belegt, so wie man die arithmetischen Reihen Reihen der ersten Ordnung nennt. Reihen der dritten Ordnung sind demnach solche, deren dritte Differenzen beständig sind, und zu der vierten und den folgenden Ordnungen rechnet man diejenigen, die erst die vierte oder eine von den folgenden Differenzen beständig haben.

§. 38.

In dieser Eintheilung sind unendlich viele Arten von Reihen begriffen, und gleichwohl gehören nicht alle Arten der Reihen darunter. Es giebt nemlich unendlich viel Reihen, bey denen man, wenn man die Differenzen aufsucht, nie auf beständige Differenzen kommt. Hieher gehören ausser unzähligen andern die geometrischen Progressionen, die nie beständige Differenzen geben, wie man an folgendem Beyspiele sehen kann:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ꝛc.
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ꝛc.
1, 2, 4, 8, 16, 32, ꝛc.

Denn da die Reihen der Differenzen jeder Ordnung der gegebenen Reihe gleich werden, so läßt sich gar keine Gleichheit der Differenzen gedenken. Man muß daher mehrere Classen von Reihen annehmen, und eine davon enthält die Reihen, die endlich auf beständige Differenzen reducirt werden, als Gattungen unter sich. Diese Classe nun ist die, welche wir in dem gegenwärtigen Capitel genauer untersuchen wollen.

§. 39.

Es werden aber zur Erkennung der Natur der Reihen vorzüglich zwey Stücke erfordert, das allgemeine Glied und die Summe oder das summirende Glied. Das allgemeine Glied ist ein unbestimmter Ausdruck, welcher jedes Glied der Reihe unter sich begreift, und folglich eine solche Funktion der veränderlichen Größe x, daß man daraus, wenn man $x = 1$ setzt, das erste Glied der Reihe, wenn man $x = 2$ setzt, das zweyte Glied der Reihe, wenn man $x = 3$ setzt, das dritte Glied der Reihe, wenn man $x = 4$ setzt, das vierte Glied der Reihe u. s. w. erhält. Kennt man also das allgemeine Glied, so kann man jedes Glied der Reihe finden, ohne dabey auf das Gesetz, nach welchem die Glieder der Reihe auf einander folgen, zu sehen. Setzt man

z. B.

z. B. $x = 1000$, so findet man sogleich das tausendste Glied. So ist von dieser Reihe

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, rc.

das allgemeine Glied $= 2xx - x$. Denn setzt man darin $x = 1$, so erhält man daraus das erste Glied 1; setzt man $x = 2$, so bekommt man das zweyte Glied 6; setzt man $x = 3$, so gelangt man zu dem dritten Gliede 15; u. s. f. Hieraus erhellet, daß das hundertste Glied dieser Reihe, wo man also $x = 100$ nehmen muß $= 2 . 10000 - 100 = 19900$ seyn werde.

§. 40.

Anzeiger oder Exponenten heißen bey jeder Reihe die Zahlen, welche anzeigen, das wievielste Glied ein jedes Glied in der Ordnung ist. So ist der Anzeiger des ersten Gliedes 1, des zweyten 2, des dritten 3, u. s. f. Daher pflegt man die Anzeiger über die einzelnen Glieder der Reihe zu schreiben, wie hier

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, rc.

Glieder.

A, B, C, D, E, F, G, H, I, rc.

So sieht man gleich, daß G das siebente Glied der Reihe ist, weil es den Anzeiger 7 hat. Hiernach ist das allgemeine Glied nichts anders als dasjenige Glied der Reihe, dessen Anzeiger oder Exponent die unbestimmte Zahl x ist. Zuvörderst wollen wir nun zeigen, wie man von jeder Reihe, deren erste oder zweyte oder irgend welche von den folgenden Differenzen beständig sind, das allgemeine Glied finden könne; und dann zur Erforschung der Summe fortgehen.

§. 41.

Wir wollen von der ersten Ordnung anfangen, welche die arithmetischen Progressionen enthält, deren erste Differenzen beständig sind. Es sey also a das erste Glied der Reihe, und b das erste Glied der Reihe der Differenzen, welchem alle folgende Glieder gleich sind. Hiernach wird die Reihe also beschaffen seyn

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

Glieder.

a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, $a + 4b$, $a + 5b$, ꝛc.

Differenzen.

b, b, b, b, b, ꝛc.

Man sieht hier beym ersten Anblicke, daß das Glied, dessen Anzeiger $= x$ ist, $a + (x - 1)\,b$, und also das allgemeine Glied $= bx + a - b$ seyn wird; und es ist daher das allgemeine Glied aus den ersten Gliedern theils der Reihe selbst, theils der Reihe der Differenzen zusammengesetzt. Wenn man aber das zweyte Glied der Reihe $a + b = a^{I}$ setzt, so wird, weil alsdenn $b = a^{I} - a$ ist, das allgemeine Glied $= (a^{I} - a)\,x + 2a - a^{I} = a^{I}\,(x - 1) - a\,(x - 2)$. Kennt man daher das erste und zweyte Glied einer arithmetischen Progression, so kann man daraus das allgemeine Glied formiren.

§. 42.

Es sey nunmehr das erste Glied der Reihe der zweyten Ordnung $= a$; das erste Glied der Reihe der ersten Differenzen $= b$, und das erste Glied der Reihe der zweyten Differenzen $= c$. Bey diesen Annahmen wird die Reihe nebst ihren Differenzen folgende Gestalt haben:

Anzei-

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

Glieder.

a; $a+b$; $a+2b+c$; $a+3b+3c$; $a+4b+6c$; $a+5b+10c$; ꝛc.

Erste Differenzen.

b; $b+c$; $b+2c$; $b+3c$; $b+4c$; ꝛc.

Zweyte Differenzen.

c, c, c, c, ꝛc.

Hier lehrt der Anblick, daß das Glied, welches den Anzeiger x hat, $= a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c$ ist, und dieses ist das allgemeine Glied der gegebenen Reihe. Setzt man aber das zweyte Glied dieser Reihe $= a^{I}$, und das dritte $= a^{II}$; so wird, (weil $b = a^{I} - a$; und $c = a^{II} - 2a^{I} + a$ ist, wie aus der Natur der Differenzen [§. 10.] erhellet,) das allgemeine Glied:

$$a + (x-1)(a^{I}-a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(a^{II} - 2a^{I} + a)$$

und dieses läßt sich auf diese Form

$$\frac{a^{II}(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} - \frac{2a^{I}(x-1)(x-3)}{1 \cdot 2} + \frac{a(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$$

oder auf diese

$$\frac{a^{II}}{2}(x-1)(x-2) - \frac{2a^{I}}{2}(x-1)(x-3) + \frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

oder endlich auf diese bringen

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{II}}{x-3} - \frac{2a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right)$$

und es wird also das allgemeine Glied aus dreyen Gliedern der Reihe bestimmt.

§. 43.

Es sey $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$, ꝛc. eine Reihe der dritten Ordnung; ihre ersten Differenzen, $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}$, ꝛc. ihre zweyten Differenzen $c, c^{I}, c^{II}, c^{III}$, ꝛc. und ihre vierten Differenzen d, d, d, ꝛc. weil diese beständig sind.

Anzeiger.

$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6$, ꝛc.

Glieder.

$a, \quad a^{I}, \quad a^{II}, \quad a^{III}, \quad a^{IV}, \quad a^{V}$, ꝛc.

Erste Differenzen.

$b, \quad b^{I}, \quad b^{II}, \quad b^{III}, \quad b^{IV}$, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

$c, \quad c^{I}, \quad c^{II}, \quad c^{III}$, ꝛc.

Dritte Differenzen.

$d, \quad d, \quad d$, ꝛc.

Da $a^{I} = a + b$; $a^{II} = a + 2b + c$; $a^{III} = a + 3b + 3c + d$; $a^{IV} = a + 4b + 6c + 4d$; ꝛc. ist: so ist das allgemeine Glied, oder dasjenige, dessen Anzeiger x ist

$$a + \frac{(x-1)}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d$$

und auf diese Art wird das allgemeine Glied aus den Differenzen formirt. Da aber

$b = a^{I} - a$; $c = a^{II} - 2a^{I} + a$; $d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$

ist: so erhält man durch die Substitution dieser Werthe für das allgemeine Glied den Ausdruck

$$a^{III}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3a^{II}\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ 3a^{I}\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - a\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

welcher auch auf folgende Form reducirt werden kann:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{a^{III}}{x-4} - \frac{3a^{II}}{x-3} + \frac{3a^{I}}{x-2} - \frac{a}{x-1}\right)$$

§. 44.

§. 44.

Es seyen endlich allgemein für die Reihen aller Ordnungen

die Anzeiger

1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

die Glieder

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, ꝛc.

die ersten Differenzen

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, ꝛc.

die zweyten Differenzen

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, ꝛc.

die dritten Differenzen

d, d^{I}, d^{II}, ꝛc.

die vierten Differenzen

e, e_{I}, ꝛc.

die fünften Differenzen

f, ꝛc.

so wird das allgemeine Glied aus dem ersten Gliede der Reihe, und aus den ersten Gliedern der Reihen der Differenzen b, c, d, e, f, ꝛc. auf diese Art ausgedruckt

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \text{ꝛc.}$$

bis man auf beständige Differenzen kommt. Wenn man also nie auf beständige Differenzen kommt, so ist dieses ein Kennzeichen, daß das allgemeine Glied nicht anders als durch einen unendlichen Ausdruck dargestellt werden kann.

§. 45.

§. 45.

Da die Differenzen aus den Gliedern der gegebenen Reihe formirt werden, so erhält man, wenn man die Werthe derselben substituirt, das allgemeine Glied auf eine solche Art ausgedruckt, als wir es bey den Reihen der ersten, zweyten und dritten Ordnung gehabt haben. Es ist nemlich das allgemeine Glied für die Reihen der vierten Ordnung

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$+ \left(\frac{a^{IV}}{x-5} - \frac{4a^{III}}{x-4} + \frac{6a^{II}}{x-3} - \frac{4a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1} \right)$$

und hieraus läßt sich das Gesetz, nach welchem die allgemeinen Glieder der Reihen der folgenden Ordnungen zusammengesetzt werden müssen, leicht abnehmen. Es erhellet aber hieraus, daß das allgemeine Glied für jede Ordnung eine ganze rationale Funktion von x ist, worin die höchste Dimension von x mit der Ordnung, zu welcher die Reihe gehört, übereinstimmt. So ist das allgemeine Glied einer Reihe der ersten Ordnung eine Funktion vom ersten Grade, das allgemeine Glied einer Reihe der zweyten Ordnung eine Funktion vom zweyten Grade und so ferner.

§. 46.

Die Differenzen aber entspringen, wie wir vorhin gesehen haben, aus den Gliedern der Reihe auf die Art, daß

$$b = a^{I} - a$$
$$b_{I} = a^{II} - a_{I}$$
$$b^{II} = a^{III} - a^{II}$$
$$\text{rc.}$$
$$c = a^{II} - 2a^{I} + a$$
$$c_{I} = a^{III} - 2a^{II} + a_{I}$$
$$c^{II} = a_{I}^{V} - 2a^{III} + a^{II}$$
$$\text{rc.}$$

$$d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$
$$d^{I} = a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^{I}$$
$$d^{II} = a^{V} - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II}$$
ꝛc.

ist. Da also in den Reihen der ersten Ordnung alle Werthe von $c = 0$ sind, so ist

$a^{II} = 2a^{I} - a$; $a^{III} = 2a^{II} - a^{I}$; $a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}$; ꝛc.

woraus erhellet, daß diese Reihen auch zu den wiederkehrenden Reihen gehören, deren Beziehungs-Scale $2, -1$ ist. Da ferner in den Reihen der zweyten Ordnung alle Werthe von $d = 0$ sind, so ist

$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$; $a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$; ꝛc.

und es sind daher auch diese Reihen wiederkehrende Reihen, deren Beziehungs-Scale $3, -3, +1$ ist. Auf eine ähnliche Art erhellet, daß alle Reihen dieser Classe, sie mögen zu einer Ordnung gehören, zu welcher sie wollen, zugleich wiederkehrende Reihen sind, und zwar auf die Art, daß ihre Beziehungs-Scale aus den Coefficienten der Potestät des Binomiums besteht, welche um einen Grad höher ist, als die Ordnung, zu welcher die Reihe gehört.

§. 47.

Da aber für die Reihen der ersten Ordnung auch alle Werthe von d und e, so wie auch aller folgenden Differenzen $= 0$ sind, so ist auch in diesen Reihen

$$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$$
$$a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$$
ꝛc.

und

$$a^{IV} = 4a^{III} - 6a^{II} + 4a^{I} - a$$
$$a^{V} = 4a^{IV} - 6a^{III} + 4a^{II} - a^{I}$$
+ ꝛc.

Es

Es gehören daher auch in dieser Rücksicht diese Reihen zu den wiederkehrenden, und zwar auf unendlich viele Arten, da die Beziehungs-Scale

$$3, -3, +1;\ 4, -6, +4, -1;\ 5, -10, +10, -5, +1;$$
 ꝛc.

seyn kann. Auf eine ähnliche Art überzeugt man sich, daß eine jede Reihe der Classe, mit deren Untersuchung wir uns jetzt beschäftigen, auf unzählige Arten eine wiederkehrende Reihe ist; indem die Beziehungs-Scale

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1.2}, +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4},$$
+ ꝛc.

ist, wenn nur n eine ganze und eine größere Zahl bedeutet, als diejenige, welche die Ordnung der Reihe anzeigt. Es kann daher diese Reihe auch aus der Entwickelung eines Bruchs erhalten werden, dessen Nenner $(1-y)^n$ ist, wie wir solches in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen bey der Betrachtung der wiederkehrenden Reihen ausführlich gezeigt haben.

§. 48.

So wie wir gesehen haben, daß die allgemeinen Glieder aller Reihen dieser Classe ganze rationale Funktionen von x sind: so läßt sich auch umgekehrt zeigen, daß alle Reihen, deren allgemeine Glieder dergleichen Funktionen von x sind, zu dieser Classe gehören, und endlich auf beständige Differenzen gebracht werden. Ist das allgemeine Glied eine Funktion vom ersten Grade, $ax+b$ so hat die daraus entspringende Reihe, weil sie eine Reihe der ersten Ordnung oder eine arithmetische Progression ist, die ersten Differenzen beständig. Ist hingegen das allgemeine Glied eine Funktion vom zweyten Grade, $axx+bx+c$; so gehört die

Reihe,

Reihe, die daraus entspringt, wenn man darin nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, 2c. für x setzt, zu den Reihen der zweyten Ordnung, deren zweyte Differenzen beständig sind. Auf eine ähnliche Art giebt das allgemeine Glied vom dritten Grade $ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine Reihe der dritten Ordnung und so ferner.

§. 49.

Man kann nemlich aus dem allgemeinen Gliede nicht bloß alle Glieder der Reihe selbst, sondern auch die Reihen der Differenzen, der ersten sowohl als der folgenden finden. Denn so wie man das erste Glied der Reihe der Differenzen erhält, wenn man das erste Glied der Reihe von dem zweyten abzieht, und das zweyte, wenn man das zweyte Glied der Reihe von dem dritten subtrahirt: so findet man auch das Glied in der Reihe der Differenzen, dessen Anzeiger x ist, wenn man das Glied der Reihe, welches den Anzeiger x hat, von dem folgenden, dessen Anzeiger $x + 1$ ist, abzieht. Wenn man also in dem allgemeinen Gliede $x + 1$ anstatt x setzt, und das allgemeine Glied von diesem Werthe subtrahirt: so bleibt das allgemeine Glied der Reihe der Differenzen übrig. Ist daher X das allgemeine Glied der Reihe, so ist seine Differenz $\triangle X$ (welche man auf die im vorhergehenden Capitel beschriebene Art findet, wenn man $\omega = 1$ setzt,) das allgemeine Glied der Reihe der ersten Differenzen; und auf eine ähnliche Art wird $\triangle\triangle X$ das allgemeine Glied der Reihe der zweyten Differenzen, $\triangle^3 X$ das allgemeine Glied der Reihe der dritten Differenzen, und so weiter.

§. 50.

Wenn aber das allgemeine Glied X eine ganze rationale Funktion von x ist, so daß darin die höchste Potestät von x den Exponenten n hat: so ist nach dem vorhergehenden Capitel die Differenz $\triangle X$ eine Funktion von einem um 1 niedrigern Grade, oder vom Grade $n-1$. Ferner ist $\triangle\triangle X$ eine Funktion vom Grade $n-2$; $\triangle^3 X$ eine Funktion vom Grade $n-3$; u. s. f. Wenn daher X eine Funktion vom ersten Grade, wie $ax + b$ ist: so ist seine Differenz $\triangle X$ eine beständige Größe $= b$; und da dieselbe das allgemeine Glied der Reihe der ersten Differenzen ist, so erhellet, daß die Reihe, deren allgemeines Glied X eine Funktion vom ersten Grade ist, zu den arithmetischen Reihen oder zur ersten Ordnung gehört. Auf eine ähnliche Art gehört die Reihe, deren allgemeines Glied X eine Funktion vom zweyten Grade ist, weil $\triangle\triangle X$ eine beständige Größe wird, und also die zweyten Differenzen beständig sind, zu den Reihen der zweyten Ordnung; und überhaupt jede Reihe, die aus einem allgemeinen Gliede X entspringt, zu der Ordnung, deren Exponent dem höchsten Exponenten des allgemeinen Gliedes gleich ist.

§. 51.

Aus diesem Grunde haben die Reihen der Potestäten der natürlichen Zahlen beständige Differenzen, wie aus folgender Tabelle erhellet.

Erste Potestäten.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc.

Erste Differenzen.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ꝛc.

Zweyte Potestäten.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ꝛc.

Erste Differenzen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

2, 2, 2, 2, 2, 2, ꝛc.

Dritte

Dritte Potestäten.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, ꝛc.

Erste Differenzen.

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

12, 18, 24, 30, 36, 42, ꝛc.

Dritte Differenzen.

6, 6, 6, 6, 6, ꝛc.

Vierte Potestäten.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, ꝛc.

Erste Differenzen.

15, 65, 175, 369, 671, 1105, 1695, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

50, 110, 194, 302, 434, 590, ꝛc.

Dritte Differenzen.

60, 84, 108, 132, 158, ꝛc.

Vierte Differenzen.

24, 24, 24, 24, ꝛc.

Was wir also in dem vorhergehenden Capitel von der Erfindung der Differenzen einer jeden Ordnung gesagt haben, das dient hier zur Erfindung der allgemeinen Glieder für alle Differenzen, die aus den Reihen entspringen.

§. 52.

Wenn das allgemeine Glied irgend einer Reihe bekannt ist, so kann man vermittelst desselben nicht bloß alle Glieder dieser Reihe finden, sondern auch die Reihe rückwärts fortsetzen, und die Glieder, deren Exponenten negative Zahlen sind, darstellen, indem man für x negative Zahlen setzt. Ist

z. B. das allgemeine Glied $\frac{xx + 3x}{2}$, so erhält man, wenn man für x sowohl die negativen als die positiven Anzeiger setzt, folgende Reihe:

Anzeiger.

| ꝛc. —5, —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

Reihe.

| ꝛc. +5, +2, 0, —1, —1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, ꝛc.

Erste Differenzen.

—3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ꝛc.

Da also das allgemeine Glied aus den Differenzen formirt wird, so kann auch jede Reihe aus den Differenzen rückwärts fortgesetzt werden; und wenn die Differenzen endlich beständige Größen werden, so kann solches in bestimmten Gliedern, ist dieses aber nicht, durch unendliche Ausdrücke geschehen. Ja man kann aus dem allgemeinen Gliede selbst die Glieder finden, deren Anzeiger gebrochene Zahlen sind, worin die Interpolation der Reihen besteht.

§. 53.

Nach diesen Betrachtungen über das allgemeine Glied der Reihen wollen wir zur Untersuchung der Summe oder des summirenden Gliedes der Reihen aller Ordnungen fortgehen. Es ist aber das summirende Glied einer Reihe, eine Funktion von x, welche der Summe so vieler Glieder gleich ist, als die Zahl x Einheiten enthält. Demnach besteht die Natur des summirenden Gliedes darin, daß man daraus, wenn man x = 1 setzt, das erste Glied der Reihe, wenn man x = 2 setzt, die Summe der beyden ersten Glieder der

Reihe,

Reihe, wenn man $x = 3$ setzt, die Summe der drey ersten Glieder der Reihe u. s. f. erhält. Wenn man daher aus der gegebenen Reihe auf die Art eine neue Reihe formirt, daß das erste Glied von dieser dem ersten Gliede von jener, das zweyte Glied von dieser der Summe der beyden ersten Glieder von jener, das dritte Glied von dieser der Summe der drey ersten Glieder von jener gleich ist, u. s. f.: so wird diese neue Reihe die summirende Reihe von jener genannt, und das allgemeine Glied dieser summirenden Reihe ist das summirende Glied der gegebenen Reihe. Es kommt also bey der Erfindung des summirenden Gliedes auf die Erfindung eines allgemeinen Gliedes an.

§. 54.

Es sey also die Reihe

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \text{ꝛc.}$$

gegeben, und die summirende Reihe derselben sey

$$A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III}\ A^{IV},\ A^{V},\ \text{ꝛc.}$$

Alsdenn ist nach der eben erklärten Beschaffenheit dieser Reihe

$$\begin{aligned}
A &= a \\
A^{I} &= a + a^{I} \\
A^{II} &= a + a^{I} + a^{II} \\
A^{III} &= a + a^{I} + a^{II} + a^{III} \\
A^{IV} &= a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV} \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Folglich sind die Differenzen der summirenden Reihe

$$A^{I} - A = a^{I};\quad A^{II} - A^{I} = a^{II};\quad A^{III} - A^{II} = a^{III};\ \text{ꝛc.}$$

und also die gegebene Reihe, nachdem man das erste Glied davon weggenommen hat, die Reihe der ersten Differenzen der summirenden Reihe. Setzt man daher der summirenden Reihe das Glied $= 0$ vor, so daß man

$$0,\ A,\ A_{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},\ \text{rc.}$$

erhält, so ist die Reihe der ersten Differenzen von dieser Reihe die gegebene Reihe

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \text{rc.}$$

selbst.

§. 55.

Es sind daher die ersten Differenzen der gegebenen Reihe die zweyten Differenzen der summirenden Reihe, die zweyten Differenzen der gegebenen Reihe die dritten Differenzen der summirenden Reihe, die dritten Differenzen der gegebenen Reihe die vierten Differenzen der summirenden Reihe u. s. f. Wenn daher die gegebene Reihe endlich beständige Differenzen hat, so wird die summirende Reihe ebenfalls dergleichen haben, und also eine Reihe von eben der Art, aber um eine Ordnung höher seyn. Von dergleichen Reihen kann daher auch das summirende Glied allezeit durch einen endlichen Ausdruck dargestellt werden. Denn das allgemeine Glied der Reihe

$$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},\ \text{rc.}$$

oder dasjenige, dessen Anzeiger x ist, giebt die Summe von $x-1$ Gliedern der Reihe $a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV}$, rc. und wenn man darin $x+1$ für x setzt, so bekommt man die Summe von x Gliedern, und der gefundene Ausdruck ist daher das summirende Glied.

§. 56.

Es sey also von der gegebenen Reihe

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ a^{VI},\ \text{rc.}$$

die Reihe der ersten Differenzen

$$b,\ b^{I},\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV},\ b^{V},\ b^{VI},\ \text{rc.}$$

die Reihe der zweyten Differenzen

$$c,\ c^{I},\ c^{II},\ c^{III},\ c^{IV},\ c^{V},\ c^{VI}\ \text{rc.}$$

die

die Reihe der dritten Differenzen

$d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^{V}, d^{VI}$, ꝛc.

und so ferner, bis man auf beständige Differenzen kommt. Dann formire man die summirende Reihe, welche sich, da sie das Glied o anstatt des ersten Gliedes hat, mit ihren Differenzen auf folgende Art verhalten wird:

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ꝛc.

Summirende Reihe.

$0, A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}$, ꝛc.

Gegebene Reihe.

$a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, a^{VI}$, ꝛc.

Erste Differenzen.

$b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^{V}, b^{VI}$, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

$c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^{V}, c^{VI}$, ꝛc.

Dritte Differenzen.

$d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^{V}, d^{VI}$, ꝛc.

Dieses vorausgeschickt, so ist das allgemeine Glied der summirenden Reihe, oder dasjenige Glied, dessen Anzeiger x ist,

$$0 + (x-1)a + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}b + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}c + \text{ꝛc.}$$

und dasselbe giebt zugleich die Summe von $x-1$ Gliedern der gegebenen Reihe, $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$, ꝛc.

§. 57.

Wenn man also in dieser Summe $x+1$ für x setzt, so bekommt man das summirende Glied der gegebenen Reihe, welches die Summe von x Gliedern in sich begreift,

$$= xa + \frac{x(x-1)}{1.2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} d + \text{rc.}$$

Wenn man daher den Buchstaben b, c, d, e, die ihnen beygelegten Werthe läßt, so hat

die Reihe

$$a, \; a^{I}, \; a^{II}, \; a^{III}, \; a^{IV}, \; a^{V}, \; \text{rc.}$$

das allgemeine Glied

$$a + (x-1) b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 . 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 . 2 . 3} d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 . 2 . 3 . 4} e + \text{rc.}$$

und das summirende Glied

$$xa + \frac{x(x-1)}{1.2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} d + \text{rc.}$$

Hat man also auf die beschriebene Art von einer Reihe irgend einer Ordnung das allgemeine Glied gefunden, so läßt sich daraus das summirende Glied mit leichter Mühe ableiten, indem dasselbe aus eben den Differenzen besteht.

§. 58.

Diese Art, das summirende Glied aus den Differenzen der Reihe zu finden, ist vorzüglich bey den Reihen brauchbar, wobey man endlich zu beständigen Differenzen gelangt; denn in den übrigen Fällen läßt sich kein endlicher Ausdruck finden. Wenn man aber das, was wir von der Natur des summirenden Gliedes gesagt haben, genauer erwägt, so bietet sich ein anderer Weg dar, das summirende Glied unmittelbar aus dem allgemeinen Gliede zu erhalten, der sich viel weiter erstreckt, und in vielen Fällen zu endlichen

chen Ausdrücken führt, wo man auf dem vorhergehenden Wege zu unendlichen gelangt. Es sey nemlich die allgemeine Reihe

$$a, \; b, \; c, \; d, \; e, \; f, \; \text{ꝛc.}$$

gegeben, und das allgemeine Glied derselben, oder dasjenige, dessen Anzeiger x ist, sey $= X$, das summirende Glied hingegen $= S$. Da also S die Summe so vieler Glieder vom Anfang an bedeutet, als x Einheiten hat, so wird die Summe von $x - 1$ Gliedern $= S - X$, und also X die Differenz des Ausdrucks $S - X$, weil es übrig bleibt, wenn man den Ausdruck $S - X$ von dem folgenden S abzieht.

§. 59.

Da also $X = \Delta\,(S - X)$, auf die Art genommen, ist, wie wir in dem vorhergehenden Capitel gezeigt haben, bloß mit dem Unterschiede, daß die dort vorkommende beständige Größe ω hier $= 1$ sey; so ist, wenn wir rückwärts die Summe nehmen, $\Sigma X = S - X$, und also das gesuchte summirende Glied

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Es muß folglich die Summe der Funktion X auf die vorhin erklärte Art gesucht, und zu derselben das allgemeine Glied X addirt werden, wo denn das Aggregat das summirende Glied giebt. Da aber die zu nehmenden Summen eine beständige Größe in sich schließen, so muß man dieselbe nach dem gegenwärtigen Falle einrichten. Es ist aber offenbar, daß die Summe, so oft man $x = 0$ setzt, in welchem Falle also gar keine Glieder zu summiren sind, allezeit auch selbst $= 0$ werden muß, und man muß daher die beständige Größe daraus zu bestimmen suchen, daß für $x = 0$ auch $S = 0$ wird. Setzt man daher in der Gleichung $S = \Sigma X + X + C$ sowohl $S = 0$, als $x = 0$, so findet man den Werth von C.

§. 60.

Da also das ganze gegenwärtige Geschäfte auf die oben erklärte Summirung der Funktionen ankommt: so wollen wir dadurch, daß wir $\omega = 1$ setzen, von daher die nöthigen Summen entlehnen. Zuvörderst ist also für die Potestäten von x

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$\Sigma x^6 = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x.$$

und dazu setze man noch die Summe der allgemeinen Potestät x^n §. 29, indem man darin allenthalben 1 für ω schreibt. Vermittelst dieser Formeln lassen sich also die summirenden Glieder aller Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind, sehr leicht finden.

§. 61.

Es bedeute S. X das summirende Glied der Reihe, deren allgemeines Glied $= X$ ist, so ist, wie wir gesehen haben,

$$S.X = \Sigma X + X + C$$

wofern C auf die Art angenommen wird, daß das summirende Glied S. X verschwindet, wenn man $x = 0$ setzt.

Hieraus

Hieraus wollen wir nun die summirenden Glieder der Reihen der Potestäten, oder der Reihen, die in dieser Form x^n begriffen sind, ausdrucken. Setzt man also

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots\ldots + x^n$$

so wird

$$S.x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + \tfrac{1}{2}.\frac{n}{2.3}x^{n-1} - \tfrac{1}{6}\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4.5}x^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{6}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5.6.7}x^{n-5}$$

$$- \frac{3}{10}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-6)}{2.3\ldots\ldots8.9}x^{n-7}$$

$$+ \frac{5}{6}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-8)}{2.3\ldots\ldots10.11}x^{n-9}$$

$$- \frac{691}{210}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-10)}{2.3\ldots\ldots12.13}x^{n-11}$$

$$+ \frac{35}{2}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-12)}{2.3\ldots\ldots14.15}x^{n-13}$$

$$- \frac{3617}{30}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-14)}{2.3\ldots\ldots16.17}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-16)}{2.3\ldots\ldots18.19}x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-18)}{2.3\ldots\ldots20.21}x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{6}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-20)}{2.3\ldots\ldots22.23}x^{n-21}$$

$$- \frac{1181820455}{546}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-22)}{2.3\ldots\ldots24.25}x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-24)}{2.3\ldots\ldots26.27}x^{n-25}$$

ꝛc.

§. 62.

§. 62.

Hieraus ergeben sich die Summen für die verschiedenen Werthe von n auf folgende Art:

$$S.x^0 = x$$

$$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$$

$$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$$

$$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3$$
$$- \frac{1}{30}x$$

$$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4$$
$$- \frac{3}{20}x^2$$

$$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - \quad x^7 + \quad x^5$$
$$- \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$$

$$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^2$$

$$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{691}{2730}x$$

$$S.x^{13} = \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{1}x^{13} + \frac{13}{12}x^{12} - \frac{143}{160}x^{10} + \frac{143}{28}x^8 - \frac{143}{20}x^6 + \frac{65}{12}x^4 - \frac{691}{420}x^2$$

$$S.x^{14} = \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{91}{30}x^{11} + \frac{143}{18}x^9 - \frac{143}{10}x^7 + \frac{91}{9}x^5 - \frac{691}{9}x^3 + \frac{7}{6}x$$

$$S.x^{15} = \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{5}{4}x^{14} - \frac{91}{24}x^{12} + \frac{143}{12}x^{10} - \frac{429}{16}x^8 + \frac{455}{12}x^6 - \frac{691}{24}x^4 + \frac{35}{4}x^2$$

$$S.x^{16} = \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{14}{3}x^{13} + \frac{52}{3}x^{11} - \frac{143}{3}x^9 + \frac{260}{3}x^7 - \frac{1382}{15}x^5 + \frac{140}{3}x^3 - \frac{3617}{510}x$$

ꝛc.

Man kann diese Formeln aus der allgemeinen Formel bis zur neun und zwanzigsten Potestät fortsetzen, und man könnte noch weiter fortgehen, wenn die Zahl-Coefficienten weiter bekannt wären.

§. 63.

Uebrigens läßt sich bey diesen Formeln ein gewisses Gesetz bemerken, vermittelst dessen man jede derselben aus der vorher-

vorhergehenden leicht finden kann, das letzte Glied allein ausgenommen, wenn es die erste Potestät von x enthält; denn alsdenn kommt in der folgenden Summe ein neues Glied hinzu. Dies aber bey Seite gelassen, so ist, wenn

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \text{etc.}$$

ist, die folgende Summe

$$S.x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2}$$
$$+ \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4} - \frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8} - \text{etc.}$$

Wenn also n eine gerade Zahl ist, so erhält man hiernach das folgende Glied; wenn n aber eine ungerade Zahl ist, so fehlt in der folgenden Summe das letzte Glied, dessen Form $\pm \varphi x$ ist. Indeß kann man dasselbe ohne andere Hülfsmittel auf folgende Art finden. Da sich, wenn man $x = 1$ setzt, die Summe eines einzigen Gliedes, (d. h. das erste Glied selbst, welches $= 1$ ist) ergeben muß: so setze man in allen schon gefundenen Gliedern $x = 1$, und die Summe selbst auch $= 1$. Ist dies geschehen, so kann man den Werth von φ entwickeln, und alsdenn weiter fortgehen. Auf diese Art hätten alle jene Summen gefunden werden können. Da z. B.

$$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

ist, so ist

$$S.x^6 = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}x^7 + \frac{6}{6}\cdot\frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3}\cdot\frac{1}{12}x^3 + \varphi x$$

oder

$$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \varphi x.$$

Nun

Nun setzte man $x = 1$ so wird

$$1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \varphi$$

und also

$$\varphi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

wie wir es aus der allgemeinen Formel gefunden haben.

§. 64.

Vermittelst dieser summirenden Formeln lassen sich nun die summirenden Glieder aller Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind, finden, und zwar viel leichter und schneller als nach der vorhergehenden Methode durch die Differenzen.

Erstes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, ꝛc.

deren allgemeines Glied

$$\frac{3xx + x}{2}$$

ist, zu finden.

Da das allgemeine Glied aus zwey Theilen besteht, so suche man das summirende Glied für einen jeden Theil aus den obigen Formeln,

$$S \,.\, \tfrac{3}{2}xx = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

$$S \,.\, \tfrac{1}{2}x \;= \;.\;.\;.\;.\; \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

Hierdurch erhält man

$$S \,.\, \frac{3xx + x}{2} = \tfrac{1}{2}x^3 + xx + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x(x+1)^2$$

welches das gesuchte summirende Glied ist. Setzt man z. B. $x = 5$, so wird $\frac{5}{2}.6^2 = 90$ die Summe der fünf ersten Glieder

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

Zwey-

Zweytes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe

1, 27, 125, 343, 729, 1331, ꝛc.

welche die Würfel der ungeraden Zahlen enthält, zu finden.

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$= (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1,$$

und man erhält demnach das summirende Glied aus folgenden Theilen

$$\begin{aligned} + \ 8.S\,x^3 &= 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 \\ - 12.S.x^2 &= \ldots - 4x^3 - 6x^2 - 2x \\ + \ 6.S.x &= \ldots\ldots + 3x^2 + 3x \\ - \ 1.S.x^0 &= \ldots\ldots\ldots\ldots - x \end{aligned}$$

Es ist also das gesuchte summirende Glied

$$= 2x^4 - x^2 = xx(2xx - 1).$$

Setzt man z. B. $x = 6$, so wird $36.71 = 2556$ die Summe von sechs Gliedern der gegebenen Reihe $= 1 + 27 + 125 + 343 + 1331 = 2556$.

§. 65.

Wenn das allgemeine Glied ein Produkt aus einfachen Faktoren ist, so kann man das summirende Glied leichter durch das finden, was § 32 u. f. gelehret worden ist. Denn da, wenn man $\omega = 1$ setzt,

$$\Sigma(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$$

und

$$\Sigma(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$$

und

$$\Sigma(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

ꝛc.

ist: so erhält man, wenn man zu diesen Summen die allgemeinen Glieder selbst addirt, und außerdem eine beständige

Größe

Größe dazu setzt, die für $x = 0$ das summirende Glied ebenfalls in Null verwandelt, folgende summirende Glieder:

$$S.(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n)(x+n+1) - \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

und

$$S.(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

und

$$S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

und so ferner.

Ist also $n = 0$, oder $n = -1$, so ist in diesen Summen auch die beständige Größe $= 0$.

§. 66.

Das summirende Glied der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc., deren allgemeines Glied x ist, ist also $= \frac{1}{2}x(x+1)$, und die summirende Reihe folglich diese: 1, 3, 6, 10, 15, ꝛc. Von dieser Reihe hingegen ist das summirende Glied $= \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, und die summirende Reihe folgende: 1, 4, 10, 20, 35, ꝛc. Diese Reihe hat wieder das summirende Glied $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, und dieses ist das allgemeine Glied der Reihe, 1, 5, 15, 35, 70, ꝛc., deren summirendes Glied $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ ist. Da man von diesen Reihen allenthalben den wichtigsten Gebrauch machen kann, so sind sie vor andern wohl zu merken. Man nimmt nemlich aus ihnen die Coefficienten des zu einer Potestät erhobenen Binomiums, und wie weit sich der Gebrauch von diesen erstrecke, weiß jeder, der sich damit nur einigermaßen abgegeben hat.

§. 67.

Hieraus findet man auch die summirenden Glieder, die wir vorhin aus den Differenzen ableiteten, leicht. Denn da wir daselbst für das allgemeine Glied folgende Form gefunden haben:

$$a + \frac{(x-1)}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1\,.\,2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d + \text{ꝛc.}$$

so erhalten wir, wenn wir die summirenden Glieder aller Theile einzeln suchen, und sie darauf zu einem Aggregate vereinigen, das summirende Glied, welches zu diesem allgemeinen Gliede gehört. Da also

$$S.1 = x$$
$$S.(x-1) = \tfrac{1}{2}x(x-1)$$
$$S.(x-1)(x-2) = \tfrac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$
$$S.(x-1)(x-2)(x-3) = \tfrac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

ꝛc.

ist, so ist das gesuchte summirende Glied

$$xa + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}d + \text{ꝛc.}$$

und diese Form stimmt ganz mit der überein, welche wir oben [§. 37.] aus den Differenzen erhielten.

§. 68.

Ferner kann diese Art die summirenden Glieder zu finden auch auf Brüche angewandt werden. Da wir nemlich oben §. 34. gesehen haben, daß für $n = 1$

$$\Sigma\,\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1\,.\,\frac{1}{x+n}$$

ist, so wird

$$S.\,\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1\,.\,\frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Au

Auf eine ähnliche Art erhalten wir, wenn wir zu den oben gefundenen Summen die allgemeinen Glieder selbst addiren, oder, welches einerley ist, in diesen Ausdrücken $x+1$ für x setzen

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\tfrac{1}{2}.\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}$$
$$+\tfrac{1}{2}.\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

und

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = -\tfrac{1}{3}.\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}$$
$$+\tfrac{1}{3}.\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

und diese Formeln lassen sich nach Belieben leicht fortsetzen.

§. 69.

Da $S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$ ist, so ist auch

$$S.\frac{1}{x+n} - S.\frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}.$$

Ob also gleich keines von diesen beyden summirenden Gliedern besonders dargestellt werden kann, so ist doch ihr Unterschied bekannt, und man kann darnach in vielen Fällen die Summen der Reihen mit hinlänglicher Leichtigkeit finden. Dies geschiehet nemlich alsdann, wenn das allgemeine Glied ein Bruch ist, dessen Nenner in einfache Faktoren aufgelöset werden kann. Wenn dieses statt findet, so löse man den ganzen Bruch in seine Partial-Brüche auf, und dann wird man nach dem gegenwärtigen Satze leicht beurtheilen, ob das summirende Glied dargestellt werden könne, oder nicht?

Erstes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \text{ꝛc.}$$

deren allgemeines Glied $= \frac{2}{xx+x}$ ist, zu finden.

Durch die Auflösung erhält man aus dem gegebenen allgemeinen Gliede die Partial-Brüche $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$. Demnach ist das summirende Glied $= 2S.\frac{1}{x} - 2S.\frac{1}{x+1}$, und folglich nach dem vorhergehenden Satze $= 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$.

Ist z. B. $x=4$, so ist $\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$.

Zweytes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe:

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{21},\ \frac{1}{45},\ \frac{1}{77},\ \frac{1}{117},\ \text{ꝛc.}$$

deren allgemeines Glied $= \frac{1}{4xx+4x-3}$ ist, zu finden.

Da der Nenner des allgemeinen Gliedes die Faktoren $2x-1$, und $2x+3$ hat, so läßt er sich in folgende Theile auflösen:

$$\frac{1}{4}.\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{4}.\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{8}.\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

Nun ist aber

$$S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}} = S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}} + 2 - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

und

$$S.\,\frac{1}{x+\frac{1}{2}} = S.\,\frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

folglich

$$S.\,\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - S.\,\frac{1}{x+\frac{3}{2}} = 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

und hiervon giebt der achte Theil das gesuchte summirende Glied, nemlich

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8x+4} - \frac{1}{8x+12} = \frac{x}{4x+2} + \frac{x}{3(4x+6)} = \frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}.$$

§. 70.

Da die figurirten Zahlen, welche die Coefficienten des zu einer Potestät erhobenen Binomiums geben, vorzüglich gemerkt zu werden verdienen: so wollen wir die Summen der Reihen aufsuchen, deren Zähler $= 1$, die Nenner aber die figurirten Zahlen sind, und solches ist nach §. 68 leicht. Es haben also die Reihen

deren allgemeines Glied ist	das summirende Glied
$\frac{1\,.\,2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$
$\frac{1\,.\,2\,.\,3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1\,.\,3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3} - \frac{1\,.\,2\,.\,3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4} - \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
rc.	rc.

und hieraus fällt das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortgehen, sehr bald in die Augen. Das summirende Glied, welches zu dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{x}$ gehört, kann aber hieraus nicht geschlossen werden, weil man nicht im Stande ist, solches durch einen endlichen Ausdruck darzustellen.

§ 71.

Da das summirende Glied die Summe so vieler Glieder giebt, als der Anzeiger x Einheiten enthält: so ist offenbar, daß man die Summen dieser Reihen, ohne Ende fortgesetzt, erhalten wird, wenn man den Anzeiger x unendlich groß annimmt. In diesem Falle verschwinden aber die letzten Glieder der gefundenen Ausdrücke, weil die Nenner unendlich groß werden, und es haben also die betrachteten Reihen endliche Summen. Diese sind:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \text{ꝛc.} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \text{ꝛc.} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \text{ꝛc.} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \text{ꝛc.} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \text{ꝛc.} = \frac{6}{5}$$

ꝛc.

Es können also alle ohne Ende fortlaufende Reihen, deren summirende Glieder bekannt sind, wenn man $x = \infty$ setzt, summirt werden, vorausgesetzt, daß die Summen endlich sind; und dies findet statt, wenn x in dem summirenden Gliede eben so viel Dimensionen im Nenner als im Zähler hat.
