Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Drittes Capitel. Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52886

Drittes Capitel.

Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen.

§. 72.

Da eine jede Größe, so groß sie auch immer seyn mag, doch noch weiter vermehrt werden kann, und nichts uns verhindert, zu einer jeden gegebenen Größe eine andere von eben der Art hinzu zu setzen: so läßt sich auch eine jede Größe ohne Ende vermehren, und kann nie so groß werden, daß sie weiter keines Zuwachses fähig wäre. Es giebt daher auch keine so große Größe, daß man nicht eine noch größere sollte denken können, und es ist daher eine außer allem Zweifel gesetzte Behauptung, daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden könne. Denn wollte jemand solches leugnen, so müßte er eine Grenze annehmen, über welche hinaus die Größe nicht kommen könnte, und also eine Größe zugeben, zu welcher nichts weiter hinzugefügt werden könnte. Allein dies ist ungereimt und dem Begriffe der Größe zuwider, und man muß daher eingestehen, daß eine jede Größe immer fort ohne Ende, das heißt, ins Unendliche vermehrt werden könne.

§. 73.

Bey den einzelnen Arten der Größen fällt dies noch deutlicher in die Augen. So wird wohl Niemand behaupten, daß die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

 irgendwo

irgendwo so begrenzt sey, daß man sie nicht weiter fortsetzen könne. Denn es giebt keine Zahl, zu der sich nicht noch die Einheit setzen, und aus welcher sich also nicht eine folgende größere Zahl machen ließe; es geht daher die Reihe der natürlichen Zahlen ohne Ende fort, und man kommt nie zu einer größten Zahl in dem Verstande, daß eine größere unmöglich wäre. Auf eine ähnliche Art kann eine gerade Linie nie so weit fortgezogen werden, daß man außer Stande seyn sollte, sie noch weiter zu verlängern. Es erhellet hieraus, daß man sowohl die Zahlen ins Unendliche vermehren, als die Linien ins Unendliche verlängern kann. Und da dies Arten der Größen sind, so ist daraus zugleich klar, daß es, so groß man auch eine Größe annehmen mag, doch immer eine noch größere Größe gebe, daß sich, wenn man diese annimmt, vom neuen eine größere Größe gedenken lasse, und daß man auf diese Art ohne Ende immer weiter fortgehen, und also jede Größe ins Unendliche vermehren könne.

§. 74.

So offenbar dieses ist, und es ist es in einem so hohen Grade, daß man es ohne Widerspruch mit sich selbst nicht leugnen kann: so haben doch viele von denen, welche die Theorie des Unendlichen vorzutragen unternommen haben, dieselbe so verdunkelt, und mit so vielen Schwierigkeiten und selbst Widersprüchen überhäuft, daß ihnen gar kein Weg übrig blieb, um aus diesem Labyrinthe zu kommen. Daraus, daß die Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, haben einige geschlossen, daß es in der That eine unendliche Größe gebe, und dieselbe so beschrieben, daß sie gar keines Zuwachses weiter fähig sey. Dadurch aber stoßen sie den Begriff der Größe über den Haufen, weil sie eine solche Größe annehmen, die nicht weiter soll vermehrt werden können.

können. Außerdem sind aber die, die unendliche Größen annehmen, auch mit sich selbst im Widerspruche; denn dadurch, daß sie dem Wachsen der Größe eine gewisse Grenze sen, leugnen sie zugleich, daß eine Größe ohne Ende vermehrt werden könne. Sie leugnen also auch, daß eine Größe ins Unendliche vermehrt werden könne; denn beyde Redensarten bedeuten einerley; und sie heben daher, indem sie eine unendliche Größe annehmen, dieselbe zugleich wieder auf. Denn wenn eine Größe nicht ohne Ende oder ins Unendliche vermehrt werden kann, so ist es unmöglich, daß es eine unendliche Größe gebe.

§. 75.

Daraus also, daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, fließet selbst, daß es keine unendliche Größe giebt. Denn eine Größe, die immer fort vermehrt wird, wird nicht eher unendlich, ehe sie nicht ohne Ende gewachsen ist; was aber ohne Ende geschehen muß, das kann man nicht als schon geschehen betrachten. Indeß kann man gleichwohl eine solche Größe, zu welcher man durch ohne Ende fortgesetzte Hinzufügung eines Zuwachses gelangt, nicht nur durch ein gewisses Zeichen bezeichnen, und sie auf diese Art auf die gehörige Weise in die Rechnung einführen, wie bald ausführlicher gezeigt werden soll; sondern es lassen sich auch aus der Welt Fälle anführen, wo eine unendliche Zahl statt zu finden scheint. Denn wenn die Materie unendlich theilbar ist, wie mehrere Philosophen behauptet haben, so ist ja die Anzahl der Theile, woraus eine jede gegebene Quantität von Materie besteht, in der That eine unendliche Zahl; weil die Materie, wenn man diese Zahl endlich annehmen wollte, nicht unendlich theilbar wäre. Auf eine ähnliche Art könnte die Zahl der Körper, die das Universum ausmachen, wenn das Universum selbst unendlich wäre, wie verschiedene behauptet haben, ebenfalls keine endliche Zahl seyn, und wir würden also auch darin eine unendliche Zahl haben.

§. 76.

So sehr dies auch mit einander zu streiten scheint, so fallen doch bey genauer Erwägung desselben alle Schwierigkeiten weg. Wenn nemlich jemand behauptet, daß die Materie ins Unendliche theilbar sey, so leugnet er, daß man bey einer fortgesetzten Theilung der Materie endlich auf so kleine Theile komme, daß man dieselben nicht weiter sollte theilen können; es hat daher die Materie keine untheilbare Theile, da sich jeder von den Theilen, auf welche man durch eine fortgesetzte Theilung kommt, noch immer weiter theilen läßt. Wer also in diesem Falle sagt, daß die Anzahl der Theile unendlich sey, der gedenkt sich dabey die letzten Theile, die nicht weiter theilbar sind: und da man zu dergleichen nie gelangt, und es also dergleichen gar nicht giebt, so unternimmt er diese Theile, die gar nicht sind, zu zählen. Denn kann die Materie immer fort ohne Ende weiter getheilt werden, so hat sie gar keine untheilbare oder einfache Theile, und es ist daher nichts da, was man zählen könnte. Wer daher die unendliche Theilbarkeit der Materie behauptet, der leugnet dadurch zugleich, daß die Materie aus einfachen Theilen bestehe.

§. 77.

Wenn man aber, indem man von den Theilen eines Körpers oder der Materie spricht, nicht die letzten oder einfachen Theile, dergleichen es gar nicht giebt, sondern diejenigen versteht, welche durch eine wirkliche Theilung hervorgebracht worden sind: dann kann bey der Annehmung der

Hypo-

Hypothese von der unendlichen Theilbarkeit der Materie, ein jedes noch so kleines Stück der Materie nicht nur in mehrere Theile getheilt, sondern es kann selbst keine so große Zahl angegeben werden, daß man nicht aus diesem Stücke eine noch größere Anzahl von Theilen sollte erhalten können. Die Zahl der Theile, die ein jeder Körper enthält, und zwar nicht die Zahl der letzten, sondern solcher Theile, die selbst noch weiter theilbar sind, ist daher alsdenn größer als jede Zahl, die sich angeben läßt. Auf eine ähnliche Art ist die Zahl der Körper, welche das Universum ausmachen, wenn das Universum unendlich ist, eine größere Zahl als jede, die sich angeben läßt, und da eine solche Zahl keine endliche Zahl seyn kann, so folgt, daß eine unendliche Zahl und eine Zahl die größer ist als jede die sich angeben läßt, gleichbedeutende Benennungen sind.

§. 78.

Wer daher auf diese Art die unendliche Theilbarkeit der Materie betrachtet, der verwickelt sich in keine von den Schwierigkeiten, die man gewöhnlich bey dieser Meynung findet, und ist nichts zu behaupten gezwungen, was einen Widerspruch enthielte. Dagegen verfallen die, welche die unendliche Theilbarkeit der Materien leugnen, in so große Schwierigkeiten, daß es ihnen unmöglich wird, sich aus denselben herauszuwickeln. Sie sind nemlich gezwungen zu behaupten, daß ein jeder Körper nicht weiter als bis auf eine gewisse Anzahl in Theile zerlegt werden könne, und daß, sobald man bis zu dieser Anzahl gekommen ist, alle weitere Theilung aufhöre. Die Theile, bey welchen dieses statt findet, nennen einige Atomen, andere Monaden, und noch andere einfache Dinge. Der Grund ferner, warum die letzten Theile nicht weiter theilbar seyn sollen, kann zwiefach

seyn;

seyn; es können nemlich diese Theile entweder gar keine Ausdehnung haben, oder sie können zwar ausgedehnt, aber dabey so hart und so beschaffen seyn, daß keine Kraft hinreicht, sie zu zertheilen. Was nun aber auch die Vertheidiger jener Meinung für einen Grund gebrauchen mögen, so sehen sie sich gleichwohl mit den größten Schwierigkeiten umgeben.

§. 79.

Denn sollen die letzten Theile der Körper gar keine Ausdehnung, und folglich auch gar keine Theile haben, so ist das zwar ein Begriff, bey welchem sie mit dem vollkommensten Rechte zu den einfachen Dingen gerechnet werden: allein dagegen läßt sich auf keine Art und Weise gedenken, wie die Körper aus dergleichen Theilen sollen bestehen können. Denn wir wollen einmal annehmen, daß ein Cubik-Fuß von Materie aus tausend solchen einfachen Dinge bestehe, und daß derselbe wirklich in tausend Theile getheilt sey. Wären nun die Theile einander gleich, so würde jeder ein Cubik-Zoll, wären sie aber ungleich, so würden einige größer und andere kleiner seyn. Es würde also ein Cubik-Zoll ein einfaches Ding seyn, und so entstünde der offenbarste Widerspruch; oder man müßte sagen wollen, daß in einem Cubik-Zolle nicht mehr als ein einfaches Ding sich befinde, und daß der übrige Raum leer sey; allein auf diese Art fiele die Stetigkeit der Körper weg, zu geschweigen, daß jene Philosophen den leeren Raum ganz aus der Welt verbannen. Wollte man hiergegen einwenden, daß die Zahl der einfachen Dinge, die einen Cubik-Fuß von Materie ausmachten, viel größer als tausend sey; so würde man dadurch nicht das Geringste gewinnen: denn die Schwierigkeit, welche man bey der Zahl tausend antrifft, findet sich auch bey jeder andern

dern noch so großen Zahl. Dies konnte dem Scharfsinne Leibnitzens, des Erfinders der Monaden, nicht verborgen bleiben, als er die Materie an und für sich genommen unendlich theilbar annahm. Er behauptet daher auch, daß man nicht eher zu den Monaden komme, als bis der Körper wirklich unendlich getheilt worden sey. Dadurch aber hebt er die Existenz der einfachen Dinge, woraus die Körper bestehen sollen, gänzlich auf. Denn diejenigen, die die Zusammensetzung der Körper aus einfachen Dingen leugnen, und diejenigen, welche die unendliche Theilbarkeit der Körper annehmen, sind in ihren Meinungen durchaus nicht von einander verschieden.

§. 80.

Eben so sehr ist man auch mit sich selbst im Widerspruche, wenn man zwar die Ausdehnung der letzten Theile der Körper zugiebt, aber dabey behauptet, daß sie wegen ihrer vollkommenen Härte nicht in Theile getheilt werden können. Denn sobald man den letzten Theilen der Körper Ausdehnung zugesteht, so behauptet man auch, daß sie aus Theilen zusammengesetzt sind; denn ob diese Theile wirklich von einander getrennt werden können oder nicht? daran ist wenig gelegen; ob man gleich keinen Grund anzugeben im Stande ist, woher jene vollkommene Härte komme. Es scheinen indeß diejenigen, die die unendliche Theilbarkeit der Materie leugen, diese letztere Schwierigkeit hinlänglich empfunden zu haben, weil sie sich vorzüglich an den vorhergehenden Begriff der letzten Theile halten: und sie wissen sich nicht zu helfen, als durch einige unbedeutende metaphysische Distinktionen, die denn meistentheils darauf hinauslaufen, daß man den auf mathematische Grundsätze gebauten Folgerungen nicht zu viel einräumen, und bey einfachen Dingen nicht

messen

messen wollen müsse. Aber sie sollten nur erst beweisen, daß diese ihre letzten Theile, davon jeder Körper eine bestimmte Anzahl enthalten soll, keine Ausdehnung haben.

§. 81.

Weil sie also keinen Ausgang aus diesem Labyrinthe finden, und die ihnen gemachten Einwürfe nicht auf die erforderliche Art widerlegen können, so nehmen sie ihre Zuflucht zu Distinktionen, und sagen, daß diese Einwürfe ihren Grund in der sinnlichen Vorstellung und in der Einbildungskraft haben, daß aber bey dergleichen Gegenständen bloß der reine Verstand urtheilen müsse, und daß die Sinnen und alle auf sinnliche Vorstellungen gebaute Schlüsse nicht selten trügen. Also soll der reine Verstand die Möglichkeit davon erkennen können, daß der tausendste Theil eines Cubik-Fußes von Materie gar keine Ausdehnung habe, und eben dies der Einbildungskraft unmöglich scheinen? Daß die Sinne trügen, ist zwar oft der Fall; allein den Mathematikern sollte man diesen Vorwurf am allerwenigsten machen. Denn die Mathematik ist es ja vorzüglich, die uns vor den Täuschungen der Sinne verwahrt, und uns lehrt, daß die sinnlichen Gegenstände ganz anders beschaffen sind, als sie uns erscheinen; ihr danken wir ja die sichersten Vorschriften, deren Befolgung uns wider alle Täuschung der Sinne schützt. Anstatt also durch dergleichen Antworten ihre Behauptungen zu befestigen, machen sie sie nur noch mehr verdächtig.

§. 82.

Doch um zu unserm Endzwecke zurück zu kommen, so sind, wenn auch jemand das Daseyn einer unendlichen Zahl in der Welt leugnen wollte, doch in der theoretischen Mathematik solche Fragen sehr häufig, auf welche nicht anders als

mit

mit Annehmung einer unendlichen Zahl geantwortet werden kann. Würde z. B. die Summe aller Zahlen, die diese Reihe, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ꝛc. ausmachen, verlangt, so kann denn doch diese Summe, da jene Zahlen ohne Ende fortgehen, und beständig wachsen, auf keine Wese eine endliche Zahl seyn, und daraus folgt ihre unendliche Größe nothwendig. Wenn daher eine Größe so groß ist, daß sie größer ist als jede gegebene endliche Größe, so kann sie keine andere als eine unendliche Größe seyn. Um dergleichen Größen anzudeuten bedienen sich die Mathematiker des Zeichens ∞, und zeigen also dadurch eine Größe an, die größer ist als jede endliche Größe, oder größer als jede Größe, die sich angeben läßt. So kann man z. B., da man die Parabel durch eine unendlich lange Ellipse erklären kann, mit Recht behaupten, daß die Axe der Parabel eine unendliche gerade Linie sey.

§. 83.

Es wird aber die Lehre vom Unendlichen durch die Auseinandersetzung des unendlich Kleinen in der Mathematik deutlicher werden. Das leidet keinen Zweifel, daß eine jede Größe so weit vermindert werden kann, daß sie gänzlich verschwindet und zu nichts wird. Eine unendlich kleine Größe aber ist nichts anders als eine verschwindende Größe, und folglich in der That = 0. Diese Erklärung des unendlich Kleinen stimmt auch mit der überein, wenn man darunter Größen versteht, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt. Denn wenn eine Größe kleiner ist als jede Größe, die sich angeben läßt, so muß sie nothwendig = 0 seyn; weil sich, wenn sie es nicht wäre, eine andere ihr gleiche Größe angeben ließe, welches wider die Voraussetzung streitet. Wir beantworten daher die Frage, was eine unendlich

kleine

kleine Größe in der Mathematik sey, auf die Art, daß wir sagen, sie sey in der That = 0; und dieser Begriff enthält keins von den großen Geheimnissen, welche man gemeiniglich in ihm findet, und wodurch man sich verleiten läßt, wider die ganze Rechnung des unendlich Kleinen einen Verdacht zu fassen. Sollten indeß einige Zweifel statt finden, so werden solche in der Folge, wenn wir diese Rechnung vortragen werden, gänzlich gehoben werden.

§. 84.

Da wir also gezeigt haben, daß eine unendlich kleine Größe wirklich Null ist, so müssen wir vor allen Dingen dem Einwurfe begegnen, warum wir die unendlich kleinen Größen nicht beständig mit dem Zeichen 0 bezeichnen, sondern dazu besondere Zeichen gebrauchen. Denn da alle Nullen einander gleich sind, so scheint es überflüssig, daß man sich zu ihrer Bezeichnung verschiedener Zeichen bedient. Allein obgleich jede zwey Nullen einander gleich sind, so daß sich zwischen ihnen gar keine Differenz findet: so giebt es doch zwey Arten der Vergleichung der Größen, wovon die eine die arithmetische und die andere die geometrische ist. Bey jener sehen wir auf die Differenz, bey dieser auf den Quotienten, der aus der Vergleichung der Größen entspringt; und obgleich das arithmetische Verhältniß zwischen jeden zweyen Nullen gleich ist, so ist es deswegen doch das geometrische nicht. Man sieht dies sehr deutlich an dieser geometrischen Proportion, $2:1 = 0:0$, worin das vierte Glied eben sowohl 0 ist als das dritte. Aber wegen der Natur der Proportion muß, da das erste Glied doppelt so groß ist als das zweyte, das dritte Glied auch doppelt so groß seyn als das vierte.

§. 85.

Dies ist auch selbst aus der gemeinen Arithmetik einleuchtend. Denn da, wie jeder weiß, die Null, mit irgend einer Zahl multiplicirt, wieder Null giebt, oder $n.0 = 0$, und also $n:1 = 0:0$ ist: so fällt daraus in die Augen, daß zwey Nullen, ob sie gleich, arithmetisch betrachtet, in dem Verhältnisse der Gleichheit stehen, dennoch jedes geometrische Verhältniß gegen einander haben. Da also die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können, so bedient man sich, um diese Verschiedenheit anzuzeigen, mit Recht verschiedener Zeichen, zumal, wenn man das geometrische Verhältniß, welches zwischen ihnen statt findet, untersuchen soll. In der Infinitesimal-Rechnung aber thut man nichts anders, als daß man sich mit der Untersuchung des geometrischen Verhältnisses zwischen verschiedenen unendlich kleinen Größen beschäftiget, und dabey würde man in die größte Verwirrung gerathen, wofern man nicht diese unendlich kleinen Größen mit verschiedenen Zeichen bezeichnete.

§. 86.

Wenn man also, so wie solches in der Analysis des Unendlichen üblich ist, durch dx eine unendlich kleine Größe bezeichnet, so ist allerdings sowohl $dx = 0$, als $adx = 0$, wo a jede endliche Größe bedeutet. Das ungeachtet aber ist das geomeerische Verhältniß $adx : dx$ ein endliches Verhältniß, nemlich $a : 1$, und es dürfen daher die beyden unendlich kleinen Größen dx und adx, obgleich beyde $= 0$ sind, nicht mit einander verwechselt werden, wenn es auf die Untersuchung ihres Verhältnisses ankommt. Auf eine ähnliche Art verhält es sich, wenn verschiedene unendlich Kleine dx und dy vorkommen. Denn wenn gleich beyde $= 0$ sind, so ist doch ihr Verhältniß nicht bekannt; und in der Bestimmung des Verhältnisses zwischen jeden zweyen solchen unendlich kleinen Größen besteht das ganze Geschäfte der Differenzial-Rechnung. So gering übrigens der Nutzen von dergleichen Vergleichungen beym ersten Anblick zu seyn scheint, so groß ist er gleichwohl, und man lernt ihn von Tage zu Tage noch immer mehr einsehen.

§. 87.

Da also das unendlich Kleine in der That Nichts ist, so fällt in die Augen, daß eine endliche Größe durch die Hinzufügung oder Wegnehmung einer unendlich kleinen Größe zu oder von ihr weder vermehrt noch vermindert werde. Ist also a eine endliche, und dx eine unendlich kleine Größe, so ist sowohl $a + dx$ als $a - dx$, und überhaupt $a \pm ndx = a$; denn das Verhältniß zwischen $a \pm ndx$ und a ist ein Verhältniß der Gleichheit, man mag dasselbe arithmetisch oder geometrisch untersuchen. Von dem arithmetischen Verhältnisse ist solches offenbar; denn da $ndx = 0$ ist, so ist $a \pm ndx - a = 0$: was aber das geometrische Verhältniß betrift, so erhellet solches daher, weil $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$ ist. Hieraus folgt die durchgängig angenommene Regel, daß die unendlich kleinen Größen gegen die endlichen Größen verschwinden, und also in Ansehung dieser weggelassen werden können. Hierdurch fällt der Vorwurf, als ob sich die Analysis des Unendlichen von der geometrischen Schärfe entferne, von selbst über den Haufen, da man nichts wegläßt, als was in der That Nichts ist. Man kann daher mit Recht behaupten, daß in diesem Theile der höhern Mathematik die größte geometrische Schärfe, so wie man sie in den Schriften der Alten findet, beobachtet werde.

§. 88.

Da die unendlich kleine Größe dx in der That $= 0$ ist, so muß auch ihr Quadrat dx^2, ihr Cubus dx^3, und jede andere Potestät mit einem positiven Exponenten $= 0$ seyn, und also auch ebenfalls gegen eine endliche Größe verschwinden. Aber es verschwindet auch die unendlich kleine Größe dx^2 selbst gegen dx, denn es stehen $dx \pm dx^2$ und dx in einem Verhältnisse der Gleichheit, man mag sie arithmetisch oder geometrisch mit einander vergleichen. Wegen des Ersten findet kein Zweifel statt; was aber das letztere anbetrift, so ist $dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$. Auf eine ähnliche Art ist $dx \pm dx^3 = dx$, und überhaupt $dx \pm dx^{n+1} = dx$, wofern n eine positive Zahl ist; denn es ist das geometrische Verhältniß $dx \pm dx^{n+1} : dx = 1 \pm dx^n$, und also, weil $dx^n = 0$ ist, ein Verhältniß der Gleichheit. Wenn man daher, wie solches bey den Potestäten geschiehet, dx ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung, dx^2 ein unendlich Kleines von der zweyten Ordnung, dx^3 ein unendlich Kleines von der dritten Ordnung, u. s. w. nennt, so fällt in die Augen, daß die unendlich kleinen Größen von den höhern Ordnungen gegen die unendlich kleinen Größen von der ersten Ordnung verschwinden.

§. 89.

Auf eine ähnliche Art zeigt man, daß die unendlich kleinen Größen der dritten und der höhern Ordnungen gegen die unendlich kleinen Größen der zweyten Ordnung, und überhaupt die unendlich kleinen Größen jeder höhern Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen einer niedern Ordnung verschwinden. Ist z. B. m eine kleinere Zahl als n, so ist $a\,dx^m + b\,dx^n = a\,dx^m$, weil dx^n gegen dx^m, wie wir gezeigt haben, verschwindet. Dies findet auch bey den gebrochenen Exponenten statt; es verschwindet z. B. dx gegen $\sqrt{dx}$ oder $dx^{\frac{1}{2}}$, und es ist $a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}$. Wenn aber der Exponent von dx eine 0 ist, so wird $dx^0 = 1$, obgleich $dx = 0$ ist; und es wird folglich dx^n, da es $= 1$ wird, wenn $n = 0$ ist, aus einer endlichen Größe auf einmal eine unendlich kleine Größe, sobald sein Exponent n größer als nichts wird. Es giebt daher eine unendliche Menge von Ordnungen der unendlich kleinen Größen, und man muß dieselben, ungeachtet jede $= 0$ ist, doch wohl von einander unterscheiden, wenn man die wechselseitige Beziehung derselben unter einander, welche man durch das geometrische Verhältniß ausdruckt, untersuchen will.

§. 90.

Nachdem wir den Begriff des unendlich Kleinen festgesetzt haben, so ist es nunmehr leichter, die Natur des Unendlichen oder des unendlich Großen zu bestimmen. Es ist bekannt, daß der Werth des Bruchs $\frac{1}{z}$ desto größer wird, je mehr der Nenner z vermindert wird; und daher muß der Werth des Bruchs $\frac{1}{z}$, wenn z unendlich klein oder kleiner wird als jede Größe, die sich angeben läßt, nothwendiger Weise unendlich groß, oder größer als jede Größe werden, die man anzugeben im Stande ist. Wenn also die Einheit oder irgend eine andere endliche Größe durch eine unendlich kleine Größe oder 0 dividirt wird, so ist der Quotient unendlich groß oder eine unendliche Größe. Da also das Zeichen ∞ eine unendlich große Größe bedeutet, so hat man daher die Gleichung, $\frac{a}{dx} = \infty$, deren Richtigkeit auch daraus

aus

aus erhellt, weil man durch die Umkehrung $\frac{a}{\infty} = dx = 0$ erhält. Denn je größer man den Nenner z des Bruchs $\frac{a}{z}$ annimmt, desto kleiner wird der Werth des Bruchs, und wenn daher z eine unendlich große Größe oder $z = \infty$ wird, so muß nothwendig der Werth des Bruchs $\frac{a}{\infty}$ unendlich klein werden.

§. 91.

Wer diese Schlüsse nicht gelten lassen wollte, der würde sich in die größten Schwierigkeiten verwickeln, und alle noch so festen Gründe der Analyse über den Haufen stoßen. Denn wollte man dem Bruche $\frac{a}{0}$ einen endlichen Werth, z. B. b beylegen, so würde man, durch die Multiplication beyder Größen durch 0, $a = 0 \cdot b$ erhalten, und es würde also eine endliche Größe b mit 0 multiplicirt, eine endliche Größe a geben, welches unmöglich ist. Noch weniger kann b als der Werth des Bruchs $\frac{a}{0}$, $= 0$ seyn, denn wie wäre es möglich, daß 0 mit 0 multiplicirt, eine endliche Größe a gäbe? Auf ähnliche Ungereimtheiten verfällt man, wenn man behauptet, daß $\frac{a}{\infty}$ nicht $= 0$ sey; denn alsdenn muß man auch zugeben, daß $\frac{a}{\infty}$ einer endlichen Größe b gleich sey. Da aber aus der Gleichung $\frac{a}{\infty} = b$ ganz richtig diese folgt: $\infty = \frac{a}{b}$; so müßte der Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$, dessen

Zähler und Nenner endliche Größen sind, unendlich groß seyn, und dies ist eben so ungereimt. Auch kann man die Werthe der Brüche $\frac{a}{0}$ und $\frac{a}{\infty}$ nicht als imaginäre Größen annehmen, weil der Werth eines Bruchs dessen Zähler eine endliche, der Nenner aber eine imaginäre Größe ist, weder unendlich groß noch unendlich klein seyn kann.

§. 92.

Es läßt sich also die unendlich große Größe, worauf wir durch diese Betrachtung gekommen sind, und welche allein in der Analysis des Unendlichen statt findet, am allerbequemsten auf die Art erklären, daß man sagt, die unendlich große Größe sey der Quotient, der aus der Division einer endlichen Größe durch eine unendlich kleine Größe entspringt. Umgekehrt wird daher auch eine unendlich kleine Größe ein Quotient aus endlichen Größen durch eine unendlich große Größe dividirt. Da sich also geometrisch die unendlich kleine Größe zur endlichen verhält, wie die endliche Größe zur unendlich großen: so muß die endliche Größe eben so unendlichmal größer seyn als die unendlich kleine, wie die unendliche Größe unendlichmal größer ist als die endliche. An dergleichen Redensarten muß man sich nicht stoßen, wie viele thun, denn sie beruhen auf den festesten Gründen. Ja es scheint aus der Gleichung $\frac{a}{0} = \infty$ selbst möglich, daß Nichts durch eine unendlich große Größe multiplicirt, ein endliches Produkt gebe, welches allerdings auffallend seyn müßte, wenn man nicht durch eine ganz richtige Folgerung darauf käme.

§. 93.

Da die unendlich kleinen Größen, nach dem geometrischen Verhältnisse verschieden sind, so muß auch unter

ter den unendlich großen Größen ein ähnlicher Unterschied statt finden, und es ist derselbe hier noch größer, da die unendlich großen Größen nicht bloß geometrisch, sondern auch arithmetisch betrachtet, sich von einander unterscheiden. Denn setzt man die unendliche Größe, die aus der Division der endlichen Größe a durch die unendlich kleine Größe dx entspringt, $= A$; so daß $\frac{a}{dx} = A$ ist: so wird auch $\frac{2a}{dx} = 2A$, und $\frac{na}{dx} = nA$: und da nun auch nA eine unendliche Größe ist, so folgt, daß zwischen den unendlichen Größen ein jedes Verhältniß statt finden kann. Wenn also eine unendliche Größe durch eine endliche Größe multiplicirt oder dividirt wird, so ist auch das Produkt oder der Quotient eine unendliche Größe. Auch läßt sich von den unendlichen Größen nicht leugnen, daß sie noch weiter vermehrt werden können. Wenn aber das geometrische Verhältniß, welches zwischen zwey unendlichen Größen statt findet, kein Verhältniß der Gleichheit ist, so fällt in die Augen, daß das arithmetische Verhältniß derselben noch weniger ein Verhältniß der Gleichheit seyn wird, es ist vielmehr ihre Differenz allezeit unendlich groß.

§. 94.

Ob aber gleich der Begriff des Unendlichen, so wie man ihn in der Mathematik gebraucht, vielen verdächtig scheint, so daß sie denselben aus dieser Ursach auch aus der Analysis des Unendlichen verbannt wissen wollen: so kann man denselben doch selbst in der gemeinen Mathematik nicht einmal entbehren. In der Arithmetik, in der Lehre von den Logarithmen, nimmt man den Logarithmen von der Null negativ und unendlich groß an, und es wird sicher niemanden ein-

 fallen,

fallen, diesen Logarithmen einer endlichen Größe oder gar der Null gleich zu setzen. In der Geometrie und Trigonometrie giebt es noch auffallendere Beyspiele. Wer könnte z. B. leugnen wollen, daß die Tangente und die Secante eines rechten Winkels unendlich groß sind? und da das Rechteck zwischen der Tangente und Cotangente dem Quadrate des Halbmessers gleich, die Cotangente des rechten Winkels aber $= 0$ ist: so muß man in der Geometrie sogar zugeben, daß das Produkt aus einer unendlichen Größe in Null eine endliche Größe seyn könne.

§. 95.

Da $\frac{a}{dx}$ eine unendliche Größe A ist, so ist offenbar, daß diese Größe $\frac{A}{dx}$ eine unendlichmal größere Größe seyn werde als A, denn es ist $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, d. h. wie eine endliche Größe zu einer unendlichen. Es giebt also unter den unendlich großen Größen solche Verhältnisse, daß einige unendlichmal größer seyn können als andere. So wird $\frac{a}{dx^2}$ eine unendlichmal größere Größe als $\frac{a}{dx}$; denn setzt man $\frac{a}{dx} = A$, so wird $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Auf eine ähnliche Art ist $\frac{a}{dx^3}$ eine unendlichmal größere unendliche Größe als $\frac{a}{dx^2}$, und folglich unendlichmal unendlichmal größer als $\frac{a}{dx}$. Es giebt also Grade unter den unendlichen Größen, und jede unendliche Größe von einem folgenden Grade ist unendlichmal größer als

als eine von den vorhergehenden; ja wenn die Zahl m nur größer ist als die Zahl n, es sey übrigens um so wenig als es wolle, so ist $\frac{a}{dx^m}$ eine unendlichmal größere Größe als $\frac{a}{dx^n}$.

§. 96.

So wie es bey den unendlich kleinen Größen ungleiche geometrische Verhältnisse giebt, obgleich die arithmetischen Verhältnisse insgesammt gleich sind: so können bey den unendlich großen Größen die geometrischen Verhältnisse gleich seyn, obschon die arithmetischen eine noch so große Ungleichheit haben. Wenn nemlich a und b endliche Größen bedeuten, so stehen diese beyden unendliche Größen $\frac{a}{dx} + b$ und $\frac{a}{dx}$ in einem geometrischen Verhältnisse der Gleichheit, indem der Quotient, den man durch ihre Division erhält, $= 1 + \frac{b\,dx}{a} = 1$ wird, weil $dx = 0$ ist. Vergleicht man aber eben diese Größen arithmetisch mit einander, so ist, wegen der Differenz b, ihr Verhältniß ein Verhältniß der Ungleichheit. Eben so stehet $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}$ zu $\frac{a}{dx^2}$ in einem geometrischen Verhältnisse der Gleichheit, weil der Exponent des Verhältnisses $= 1 + dx = 1$ ist; allein die Differenz dieser Größen ist $\frac{a}{dx}$ und folglich eine unendliche Größe. Wenn man also auf das geometrische Verhältniß sieht, so verschwinden die unendlich großen Größen der niedrigern Grade gegen die unendlich großen Größen der höhern Grade.

§. 97.

Dies von den Graden der unendlich großen Größen vorausgesetzt, so läßt sich leicht zeigen, daß das Produkt aus einer unendlich großen und einer unendlich kleinen Größe nicht bloß eine endliche Größe, wie schon vorhin angemerkt worden ist, sondern auch eine unendlich große und eine unendlich kleine Größe seyn kann. Wenn z. B. die unendliche Größe $\frac{a}{dx}$ durch die unendlich kleine Größe dx multiplicirt wird, so ist das Produkt eine endliche Größe $= a$; wenn aber $\frac{a}{dx}$ durch dx^2 oder dx^3 oder ein anderes unendlich Kleines von einer höhern Ordnung multiplicirt wird, so ist das Produkt entweder adx, oder adx^2, oder adx^3, ꝛc. und also unendlich klein. Auf eben die Art erhellt, daß das Produkt aus der unendlichen Größe $\frac{a}{dx^2}$ und der unendlich kleinen Größe dx unendlich groß ist; und überhaupt wird, wenn man $\frac{a}{dx^n}$ und bdx^m mit einander multiplicirt, das Produkt $abdx^{m-n}$ unendlich klein seyn, wenn m größer ist als n, und wenn $m = n$ ist, eine endliche, so wie, wenn m kleiner als n ist, eine unendliche Größe werden.

§. 98.

Die unendlich kleinen Größen sowohl als die unendlich großen kommen in den Reihen der Zahlen sehr häufig vor; und da sie darin mit endlichen Zahlen vermischt sind, so läßt sich daraus mit voller Deutlichkeit erkennen, wie man nach dem Gesetze der Stetigkeit von den endlichen Größen zu den unendlich großen und unendlich kleinen Größen übergehen muß. Wir wollen zuvörderst die Reihe der natürlichen

chen Zahlen betrachten, die, wenn man sie zu gleicher Zeit rückwärts fortsetzt, folgende ist:

ꝛc. $-4-3-2-1, +0+1+2+3+4+$ ꝛc.

Es geben also die Zahlen, indem sie beständig abnehmen, endlich 0 oder das unendlich Kleine, und werden, wenn man sie weiter fortsetzt, negativ. Man sieht daher hieraus, daß man von den abnehmenden positiven Zahlen durch 0 zu den negativen übergehet. Wenn man aber die Quadrate dieser Zahlen nimmt, so erhält man, weil diese insgesammt positiv werden,

ꝛc. $+16+9+4+1+0+1+4+9+16+$ ꝛc.

Es ist folglich hier 0 der Uebergang von den abnehmenden positiven Zahlen zu den wachsenden positiven Zahlen; und wenn man die Zeichen verändert, so wird 0 der Uebergang von den abnehmenden negativen Zahlen zu den wachsenden negativen Zahlen.

§. 99.

Betrachtet man die Reihe, deren allgemeines Glied $\sqrt{x}$ ist, und welche, auch rückwärts fortgesetzt, folgende ist:

ꝛc. $+\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+$ ꝛc.

so fällt daraus in die Augen, daß 0 gleichsam als die Grenze angesehen werden könne, durch welche man von den reellen Größen zu den imaginären kommt. Stellt man sich unter jenen Gliedern die Applicaten krummer Linien vor, so erhellet, daß dieselben, wenn sie positiv gewesen sind und so weit abnehmen, daß sie endlich verschwinden, bey nunmehriger weiterer Fortsetzung entweder negativ oder wieder positiv oder auch imaginär werden. Eben das geschiehet, wenn die Applicaten zuerst negativ gewesen sind. Denn setzt man sie nach dem Verschwinden weiter fort, so werden sie ebenfalls entweder positiv oder negativ oder imaginär. Hiervon enthält die Lehre

von

von den krummen Linien, welche wir im zweyten Buche der Einleitung in die Analysis des Unendlichen abgehandelt haben, mehrere Beyspiele.

§. 100.

Auf eben die Art trifft man in den Reihen öfters unendlich große Glieder an, z. B. in der harmonischen Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{x}$ ist, wo zu dem Anzeiger $x = 0$ das unendlich große Glied $\frac{1}{0}$ gehört, und die ganze Reihe folgende ist:

$$\text{rc.} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{rc.}$$

Geht man daher von der Rechten gegen die Linke zu, so wachsen die Glieder, so daß $\frac{1}{0}$ unendlich groß ist, aber so bald die Glieder über diese Grenze kommen, so werden sie negativ und nehmen ab. Hiernach kann man also die unendlich große Größe als eine Grenze betrachten, jenseits welcher die positiven Zahlen negativ werden, und umgekehrt. Dies hat einige verleitet, zu behaupten, daß die negativen Zahlen als Zahlen, die größer seyn als das Unendliche, betrachtet werden könnten, weil die beständig wachsenden Glieder dieser Reihe, nachdem sie das Unendliche erreicht haben, negativ werden. Aber wenn man die Reihe nimmt, deren allgemeines Glied $\frac{1}{xx}$ ist, so werden die Glieder derselben nach dem Uebergange durchs Unendliche wieder positiv

$$\text{rc.} \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{rc.}$$

und davon wird doch wohl Niemand behaupten wollen, daß sie größer sind als das Unendliche.

§. 101.

§. 101.

Oft macht auch das Unendliche in den Reihen die Grenze zwischen den reellen und imaginären Gliedern, wie in der, deren allgemeines Glied $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist:

$$\text{ꝛc.} + \frac{1}{\sqrt{-3}} + \frac{1}{\sqrt{-2}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{0} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \text{ꝛc.}$$

indeß folgt hieraus nicht, daß die imaginären Größen größer seyen als das Unendliche, denn aus der vorhin angeführten Reihe

$$\text{ꝛc.} + \sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \text{ꝛc.}$$

würde eben so gut folgen, daß sie kleiner wären. Dann läßt sich auch ein Uebergang von reellen Größen zu imaginären zeigen, wo die Grenze zwischen beyden weder 0 noch ∞ ist; z. B. in der Reihe, deren allgemeines Glied $1 + \sqrt{x}$ ist. Da aber in diesen Fällen jedes Glied wegen der Irrationalität einen doppelten Werth hat, so sind diese beyden Werthe in der Grenze zwischen den reellen und imaginären Gliedern vereiniget und beyde einander gleich. So oft hingegen die Glieder, die vorhin positiv waren, in negative übergehen, so oft geschieht der Uebergang entweder durch das unendlich Große oder durch das unendlich Kleine. Alles dieses erhellet aufs deutlichste aus dem Gesetze der Stetigkeit, welches wir bey den krummen Linien wahrnehmen.

§. 102.

Auch aus der Summirung der ins Unendliche fortlaufenden Reihen läßt sich hier mehreres beybringen, wodurch theils die Lehre von dem Unendlichen noch mehr Erläuterung erhält, theils verschiedene Zweifel, die dabey zu entstehen pflegen, gänzlich aus dem Wege geräumt werden können. Besteht zuvörderst die Reihe aus gleichen Gliedern, wie

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.}$$

und

und laufen dieselben ohne Ende, das heißt ins Unendliche fort, so ists außer allem Zwelfel, daß die Summe aller dieser Glieder größer als jede Zahl, die sich angeben läßt, und eben deswegen unendlich seyn muß. Dies bestätiget auch der Ursprung dieser Reihe, indem sie aus der Entwickelung dieses Bruchs

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}$$

entsteht, wenn man $x = 1$ setzt. Es ist demnach

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$$

und die Summe $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ dem Unendlichen.

§. 103.

Ob indeß gleich hier kein Zweifel entstehen kann, da eine und dieselbe endliche Zahl unendlichmal genommen, nothwendig in eine unendliche übergehen muß: so scheint doch der Ursprung aus der allgemeinen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{etc.}$$

auf sehr wichtige Schwierigkeiten zu führen. Denn setzt man für x nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 etc. so erhält man folgende Reihen

A . . $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.} = \frac{1}{1-1} =$ dem Unendl.

B . . $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \text{etc.} = \frac{1}{1-2} = -1$

C . . $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \text{etc.} = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

D . . $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + \text{etc.} = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

etc.

Da

Da nun in der Reihe B außer dem ersten Gliede alle Glieder größer sind als in der Reihe A, so sollte auch die Summe der Reihe B nothwendig größer seyn als die Summe der Reihe A; allein die Rechnung giebt die Summe der Reihe A unendlich groß, und die Summe der Reihe B negativ, d. h. kleiner als nichts an, und das läßt sich nicht zusammen denken. Noch viel weniger läßt es sich mit den gewöhnlichen Vorstellungen vereinigen, daß die Summe dieser und aller folgenden Reihen negativ seyn soll, da doch alle Glieder positiv sind.

§. 104.

Aus diesem Grunde hat vielen die schon angeführte Meinung wahrscheinlich geschienen, daß man die negativen Größen bisweilen als Größen betrachten könne, die gleichsam größer als das Unendliche oder noch mehr als unendlich wären; und da man auch durch fortgesetzte Verminderung der Zahlen über o hinaus zu negativen Zahlen kommt, so haben sie einen Unterschied zwischen negativen Zahlen von dieser Form -1, -2, -3, 2c. und zwischen negativen Zahlen dieser Art, $\frac{+1}{-1}$, $\frac{+2}{-2}$, $\frac{+3}{-3}$, 2c. gemacht: jene sollten ihrem Vorgeben nach kleiner als nichts, diese aber größer als das Unendliche seyn. Allein auf diesem Wege wird die Schwierigkeit nicht gehoben, welche sich bey der folgenden Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{2c.} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

findet. Es entspringen nemlich aus dieser allgemeinen Reihe die besondern Reihen

$$\text{A}\,..\,1+2+3+4+5+\text{2c.} = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{dem Unendl.}$$

$$\text{B}\,..\,1+4+12+32+80+\text{2c.} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$$

wo außer den ersten Gliedern alle Glieder der Reihe B grös-

ser

ser sind als die Glieder in der Reihe A. Wie aber die Summe der Reihe A unendlich, und die Summe der Reihe B der Einheit oder ihrem ersten Gliede soll gleich seyn können? das läßt sich aus jener Annahme auf keine Weise erklären.

§. 105.

Und wollte man leugnen, daß $-1 = \frac{+1}{-1}$, und $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$ sey, so würde der ganze Grund der Analyse bey aller seiner Festigkeit dahin sinken, und es kann daher die vorhin angeführte Erklärung auf keine Weise angenommen werden. Wir sehen uns vielmehr genöthiget zu behaupten, daß die Summen, welche jene allgemeine Formeln an die Hand geben, keine wahre Summen sind. Denn da diese Reihen aus einer fortgesetzten Division entspringen, indem der Rest immer wieder von neuem getheilt wird, und der Rest immer mehr wächst, je weiter man fortgeht: so sind wir nie berechtiget, diesen Rest wegzulassen, am allerwenigsten den letzten Rest, d. h. denjenigen, welcher, nachdem man zum unendlichen Male getheilt hat, übrig bleibt, weil derselbe unendlich groß ist. Da aber hierauf bey den obigen Reihen nicht gesehen worden ist, indem man den Rest gar nicht geachtet hat, so ist es kein Wunder, daß man beym Summiren auf Ungereimtheiten verfallen ist. Und diese Antwort ist eben so durchaus der Wahrheit gemäß, als sie aus der Entstehungsart der Reihen selbst hergenommen ist, und räumt also allen Zweifel aus dem Wege.

§. 106.

Damit dies noch deutlicher werde, so wollen wir die Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1-x}$ in den ersten bloß endlichen Gliedern betrachten. Es wird also

$\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

ꝛc.

Wer also die Summe dieser endlichen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3$$

$= \frac{1}{1-x}$ setzet, der irrt sich um $\frac{x^4}{1-x}$; und wer behauptet, daß die Summe dieser Reihe,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{1000}$$

$= \frac{1}{1-x}$ sey, der irrt sich um die Größe $\frac{x^{1001}}{1-x}$, und diese Zahl würde, wenn x größer als die Einheit wäre, eine außerordentliche Größe haben.

§. 107.

Hieraus erhellet, daß der, welcher die Summe eben dieser Reihe, bis ins Unendliche fortgesetzt, oder die Summe von

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^\infty$$

$= \frac{1}{1-x}$ setzet, die wahre Summe um $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ zu klein angiebt, und wenn nun x größer als 1 ist, so ist dies allerdings ein unendlich großer Unterschied. Zugleich erhellet hieraus, warum die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{ꝛc.}$$

in der That $= \frac{1}{1-x}$ ist, wenn x einen Bruch, der kleiner als die Einheit ist, bedeutet. Es wird nemlich alsdann der Fehler $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ unendlich klein oder Null, und braucht daher nicht in Anschlag gebracht zu werden. So ist, wenn man $x = \frac{1}{2}$ setzt, in der That

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{etc.} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

und aus eben dem Grunde wird die wahre Summe der übrigen Reihen, wenn x einen Bruch bedeutet, auf eine ähnliche Art gefunden.

§. 108.

Diese Antwort paßt auch auf die Summen solcher divergirenden Reihen, in welchen die Zeichen + und — abwechseln, und welche man gewöhnlich aus eben der Formel ableitet, indem man für x negative Zahlen setzt. Denn da

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc.}$$

ist, so wird, wenn man den letzten Rest wegläßt,

$$A \ldots 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}$$
$$B \ldots 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{etc.} = \tfrac{1}{3}$$
$$C \ldots 1 - 3 + 9 - 27 + 87 - 243 + \text{etc.} = \tfrac{1}{4}$$
etc.

Es fällt aber in die Augen, daß die Summe der zweyten Reihe B deswegen nicht $= \frac{1}{3}$ seyn kann, weil sich die Aggregate desto mehr von $\frac{1}{3}$ entfernen, je mehrere Glieder man wirklich mit einander vereiniget. Denn es muß die Summe einer Reihe eine Grenze seyn, der man desto näher kommt, je mehrere Glieder man wirklich zusammen addirt.

§. 109.

Hieraus haben einige geschlossen, daß die Reihen, welche man divergirende nennt, gar keine beständige Summe haben,

ben, weil man sich bey der wirklichen Vereinigung ihrer Glieder keiner Grenze nähert, die man für die Summe einer solchen Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, halten könnte. Diese Meinung ist auch der Wahrheit vollkommen angemessen, da die sogenannten Summen wegen der Auslassung der letzten Reste nach dem vorhergehenden ganz falsch sind. Gleichwohl bleibt dagegen der Einwurf übrig, daß eben diese Summen, bey aller ihrer Abweichung von der Wahrheit doch nie in einen Irrthum führen; daß man sich vielmehr durch ihre Annahme in den Stand gesetzt sieht, eine Menge der wichtigsten Sätze zu finden, auf welche man ohne jene Summen gar nicht würde kommen können. Wären aber diese Summen falsch, so könnten sie uns nicht beständig zu wahren Sätzen leiten, sondern sie müßten uns vielmehr, da sie sich nicht um etwas unbeträchtliches, sondern selbst um das Unendliche von der Wahrheit entfernen, auch in die größten Irrthümer stürzen. Da also dies nicht geschieht, so bleibt uns noch der schwerste Knoten zu lösen übrig.

§. 110.

Meiner Meinung nach liegt die ganze Schwierigkeit in dem Worte Summe. Denn wenn man das Wort, Summe der Reihe, in dem gewöhnlichen Verstande nimmt, wo man darunter das Aggregat aller ihrer wirklich vereinigten Glieder versteht: so ist es ausgemacht, daß man nur die Summen derer Reihen wirklich darstellen kann, die convergiren, und den Werth der Reihe einem gewissen beständigen Werthe desto mehr nähern, je mehrere Glieder wirklich zusammen genommen werden. Dagegen haben die divergirenden Reihen, deren Glieder nicht abnehmen, es mögen nun darin die Zeichen + und — mit einander abwechseln oder nicht, gar keine beständige Summen, wenn man dies Wort in dem angeführten Verstande nimmt. Wenn aber in den vorhin erwähnten Fällen gleichwohl aus diesen irrigen Summen etwas wahres hergeleitet wird, so geschiehet solches nicht, weil der endliche Ausdruck z. B. $\frac{1}{1-x}$ die Summe der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 +$ rc. ist, sondern nur in so fern, als jener Ausdruck, wenn man ihn entwickelt, diese Reihe giebt. Auf diese Art könnte man dabey des Ausdrucks, Summe ganz überhoben seyn.

§. 111.

Wir werden also diese Schwierigkeiten und anscheinenden Widersprüche gänzlich vermeiden, wenn wir dem Worte Summe eine andere Bedeutung geben, als es gewöhnlich zu haben pflegt. Wir wollen also den Ausdruck, aus dessen Entwickelung eine unendliche Reihe entsteht, die Summe dieser Reihe nennen. In diesem Verstande ist also $\frac{1}{1-x}$ in der That die Summe der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 +$ rc., weil diese Reihe aus der Entwickelung jenes Bruchs entsteht, man mag für x eine Zahl setzen, was für eine man will. Wenn also die Reihe eine convergirende Reihe ist, so stimmt dieser neue Begriff der Summe mit dem gewöhnlichen überein; und was die divergirenden Reihen betrifft, die keine eigentlich sogenannten Summen haben, so vermeidet man bey ihnen, wenn man jene Erklärung zum Grunde legt, alle Schwierigkeiten. Endlich ist man vermittelst derselben im Stande, die Nutzbarkeit der divergirenden Reihen zu behaupten, und sie wider alle Einwürfe zu vertheidigen.

Vier-