Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Viertes Capitel. Von der Natur der Differenzialien aller Ordnungen.

Viertes Capitel.

Von der Natur der Differenzialien aller Ordnungen.

§. 112.

Wir haben in dem ersten Capitel gesehen, daß der Zuwachs, den eine Funktion von x erhält, wenn man darin x um die Größe ω wachsen läßt, durch diese Form $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 +$ ꝛc. ausgedruckt werden kann, es mag nun dieser Ausdruck ein endlicher Ausdruck seyn, oder ohne Ende fortgehen. Wenn man also in der Funktion y, für x die Größe $x + \omega$ setzt, so bekommt sie folgenden Werth:

$$y^{I} = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

und zieht man davon den vorhergehenden Werth y ab, so bleibt die Differenz der Funktion y übrig, die man also ausdrucken kann,

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

und da der folgende Werth von x oder $x^{I} = x + \omega$ ist, so ist die Differenz von x oder $\Delta x = \omega$. Die Buchstaben P, Q, R, ꝛc. aber bedeuten Funktionen von x, die von y abhangen, und deren Erfindung in dem ersten Capitel gelehrt worden ist.

§. 113.

Um was für einen Zuwachs ω also auch die veränderliche Größe x vermehrt werden mag, so ist man gleichwohl jedesmal im Stande, den Zuwachs zu bestimmen, welchen eine jede Funktion y von x dadurch erhält, sobald man die Funktionen P, Q, R, S ꝛc. für einen jeden Werth von y bestimmen kann. In dem gegenwärtigen Capitel aber, so wie auch in der ganzen Analysis des Unendlichen, wird der Zuwachs ω, um welchen wir die veränderliche Größe x haben wachsen lassen, unendlich klein, oder als eine verschwindende Größe, oder $= 0$ angenommen; woher denn offenbar ist, daß auch der Zuwachs oder die Differenz der Funktion y unendlich klein wird. Da aber bey dieser Voraussetzung die folgenden Glieder des Ausdrucks

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ꝛc.}$$

gegen die vorhergehenden verschwinden (§. 88. u. f.) so bleibt allein das erste Glied $P\omega$ übrig, und es ist daher in dem Falle, daß ω unendlich klein ist, die Differenz von y oder $\Delta y = P\omega$.

§. 114.

Es ist daher die Analysis des Unendlichen, welche wir hier abzuhandeln angefangen haben, nichts anders, als ein besonderer Fall der Lehre von den Differenzen, die den Gegenstand des ersten Capitels ausmacht; es werden nemlich darin die Differenzen, die wir oben endlich annahmen, unendlich klein angenommen. Um daher die Analysis des Unendlichen von der Lehre von den Differenzen gehörig abzusondern, wird es gut seyn, daß wir die unendlich kleinen Differenzen sowohl mit besondern Namen belegen, als mit besondern Zeichen andeuten. Wir wollen also die unendlich kleinen Differenzen mit Leibnitzen Differenzialien nennen; und da wir in dem ersten Capitel die Differenzen in verschiedene Ordnungen eingetheilt haben, so wird daraus ein jeder leicht abnehmen, was das erste, das zweyte, das dritte Differenzial u. s. w. sey. Anstatt des Zeichens Δ aber,

aber, womit wir die Differenzen bezeichnet haben, wollen wir hier den Buchstaben d gebrauchen, so daß also dy das erste Differenzial von y; ddy das zweyte Differenzial von y; d^3y das dritte Differenzial von y, u. s. f. bedeuten soll.

§. 115.

Da wir die unendlich kleinen Differenzen, mit deren Betrachtung wir uns jetzt beschäftigen, Differenzialien nennen, so erhält daher der ganze Calcul, dessen Gegenstand in der Aufsuchung und dem Gebrauche der Differenzialien besteht, den Namen der Differenzial-Rechnung. Die englischen Mathematiker, unter welchen zuerst Newton, so wie Leibnitz unter den Deutschen, diesen neuen Theil der Analysis erfunden, und zu vervollkommnen gesucht hat, bedienen sich sowohl anderer Namen als anderer Zeichen. Sie nennen nemlich die unendlich kleinen Differenzen, die bey uns Differenzialien heißen, meistentheils Fluxionen, bisweilen auch Incremente, und diese Namen sind im Lateinischen allerdings dem Sprachgebrauche gemäßer, und drücken auch die Sache, die sie bezeichnen sollen, ziemlich gut aus. Denn man kann sich die veränderliche Größe, die wachsend immer von einem Werthe zu einem andern fortgeht, sehr wohl gleichsam als eine fließende Größe vorstellen; und es hat daher Newton das Wort Fluxion, welches er anfänglich von der Geschwindigkeit des Wachsthums gebrauchte, auf den unendlich kleinen Zuwachs, den die Größe gleichsam durch ihr Fließen erlangt, übergetragen.

§. 116.

Ob es aber gleich thöricht seyn würde, wegen des Gebrauchs dieser Benennungen und ihrer Erklärung mit den Engländern zu streiten, indem wir, wenn auf die Reinigkeit des lateinischen Ausdrucks und auf seine Bequemlichkeit gesehen würde, doch nachgeben müßten: so hat gleichwohl unsere Bezeichnungsart vor der englischen einen Vorzug. Die Engländer bezeichnen nemlich die Differenzialien oder ihre Fluxionen durch Punkte, welche sie über die Buchstaben schreiben, so daß $\dot{y}$ die erste, $\ddot{y}$ die zweyte, $\dddot{y}$ die dritte Fluxion von y u. s. f. bedeutet. Nun ist zwar diese Bezeichnungsart willkührlich, und wenn die Anzahl der Punkte klein ist, so daß man sie leicht überzählen kann, auch nicht zu tadeln; allein wenn viel Punkte gesetzt werden müssen, so entstehen daraus die größten Unbequemlichkeiten. Es ist z. B. sehr unbequem das zehnte Differenzial oder die zehnte Fluxion auf diese Art $\overset{\vdots}{y}$ zu bezeichnen, da man hingegen unsere Art $d^{10}y$ mit einem Blicke übersieht. Es kommen aber Fälle vor, wo noch höhere Ordnungen der Differenzialien anzuzeigen sind, und zur Bezeichnung der Differenzialien von einer unbestimmten Ordnung ist die englische Art ganz untauglich.

§. 117.

Wir wollen also sowohl unsere Zeichen als unsere Namen gebrauchen, weil diese bey uns allgemein eingeführt und den mehresten bekannt, jene aber bequemer sind. Inzwischen mußte auch der bey den Engländern üblichen Namen und Zeichen Erwähnung geschehen, damit jeder in den Stand gesetzt würde, die Schriften der Engländer zu lesen. Denn es sind dieselben gar nicht so von ihrer Art eingenommen, daß sie die Schriften, worin unsere Namen und Zeichen vorkommen, gänzlich verwerfen, und des Lesens unwerth halten sollten. Ich habe wenigstens ihre Werke mit der größten Begierde und mit dem größten Nutzen gelesen, und dabey oft wahrgenommen, daß auch sie die Schriften

der

der Unsrigen mit Nutzen gelesen haben. So wünschenswerth daher auch eine allgemeine und immer gleiche Bezeichnungs- und Benennungs-Art wäre, so hält es doch nicht schwer, sich so weit an beyde zu gewöhnen, als es zur Lesung der Schriften, in welchen eine andere Art herrscht, erfoderlich ist.

§. 118.

Da wir also bisher den Buchstaben ω zur Bezeichnung der Differenz oder des Zuwachses, um welchen man sich vorstellte, daß die veränderliche Größe x vermehrt werde, gebraucht haben, ω aber nunmehr unendlich klein angenommen wird: so ist ω das Differenzial von x, und also nach der eingeführten Bezeichnungsart $\omega = dx$, und dx also die unendlich kleine Differenz, um welche man sich vorstellt, daß x wachse. Auf eine ähnliche Art wird das Differenzial von y durch dy ausgedruckt; und wenn y eine Funktion von x ist, so bezeichnet das Differenzial dy den Zuwachs, den die Funktion y erfährt, wenn x in $x + dx$ übergeht. Setzt man daher in der Funktion y allenthalben $x + dx$ für x, und bezeichnet man den auf diese Art entspringenden Werth durch y^I, so wird $dy = y^I - y$, und man findet hiernach das Differenzial einer jeden Funktion. Doch muß man dies nur von dem ersten Differenziale oder von dem Differenziale der ersten Ordnung verstehen, denn von den übrigen wird erst nachher geredet werden.

§. 119.

Man hat sich daher wohl zu merken, daß der Buchstabe d hier keine Größe bedeutet, sondern bloß als ein Zeichen gebraucht wird, um die Benennung Differenzial auszudrucken, eben so wie in der Lehre von den Logarithmen der Buchstaben l als ein Zeichen des Logarithmen, und in der Algebra das Zeichen $\sqrt{}$ zur Bezeichnung der Wurzel gebraucht wird. Es bedeutet daher dy nicht, so wie sonst in der Analysis gewöhnlich ist, ein Produkt aus einer Größe d in die Größe y, sondern man muß es durch das Differenzial von y aussprechen. Eben so bedeutet in dem Ausdrucke d^2y weder die 2 einen Exponenten, noch d^2 eine Potestät von d, sondern man braucht diesen Ausdruck bloß, um das zweyte Differenzial kurz und passend auszudrucken. Wegen dieses Gebrauchs des Buchstabens d in der Differenzial-Rechnung muß man daher denselben in Rechnungen, wo mehrere Grössen vorkommen, um Verwirrung zu vermeiden, nie zur Bezeichnung einer von diesen Größen anwenden, eben so wie man in den Rechnungen mit Logarithmen den Buchstaben l nicht zu gebrauchen pflegt. Es wäre indeß zu wünschen, daß die Buchstaben d und l eine etwas veränderte Gestalt bekommen mögten, damit man sie nicht mit den Buchstaben des Alphabets, wodurch man die Größen bezeichnet, verwechseln könnte; auf eine ähnliche Art meine ich, wie man den Buchstaben r, wodurch man anfänglich das Wort Wurzel ausdruckte, in das Zeichen $\sqrt{}$ umgeändert hat.

§. 120.

Da wir gesehen haben, daß das erste Differenzial von y, wenn y irgend eine Funktion von x ist, diese Form $P\omega$ bekommt, so wird, weil $\omega = dx$ ist, $dy = P dx$. Was nemlich auch y für eine Funktion von x ist, so wird sein Differenzial dy doch immer durch eine gewisse Funktion von x, die wir hier durch P bezeichnen, mit dx multiplicirt, ausgedruckt. Ob also gleich die Differenziale von x und y in der That unendlich kleine Größen und der Null gleich sind; so haben sie doch ein endliches Verhältniß zu einander, indem $dy : dx = P : 1$ ist. Hat man daher die Funktion P gefun-

gefunden, so kennt man das Verhältniß zwischen den Differenzialien dx und dy. Da also das Geschäfte der Differenzial-Rechnung in der Erfindung der Differenzialien besteht, so sind es nicht sowohl die Differenzialien selbst, welche darin untersucht werden, sondern vielmehr das geometrische Verhältniß, welches sie zu einander haben. Denn die Differenzialien selbst könnte man, da sie insgesammt der Null gleich sind, leicht finden.

§. 121.

Es lassen sich also die Differenzialien weit leichter finden, als die Differenzen. Denn um die Differenz Δy zu finden, um welche die Funktion y wächst, wenn die veränderliche Größe x den Zuwachs ω bekommt, ist es nicht genug, daß man die Funktion P kennt, sondern man muß auch ausserdem die Funktionen Q, R, S, 2c., die in der Bestimmung der Differenz Δy

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{2c.}$$

vorkommen, wissen; zur Erfindung des Differenzials von y aber ist es genug P zu kennen. Es läßt sich daher auch aus der bekannten Differenz einer Funktion von x das Differenzial derselben leicht finden; allein aus dem Differenziale einer Funktion ist man nicht gleich im Stande, die Differenz derselben herzuleiten. Indeß wird doch in der Folge gezeigt werden, wie man aus den bekannten Differenzialien aller Ordnungen jede Differenz einer jeden Funktion finden kann. Uebrigens erhellet hieraus, daß das erste Differenzial $dy = P\,dx$ das erste Glied der Differenz, nemlich $P\omega$ giebt.

§. 122.

Wenn also der Zuwachs ω, um welchen man die veränderliche Größe sich vermehren läßt, sehr klein ist, so daß in

dem

dem Ausdrucke $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^2 +$ ꝛc. die Glieder $Q\omega^2$ und $R\omega^3$ und noch vielmehr die übrigen Glieder so klein werden, daß sie in solchen Rechnungen, wo es nicht auf die größte Schärfe ankommt, gegen $P\omega$ weggelassen werden können: so findet man aus dem bekannten Differenziale Pdx die Differenz beynahe. Es ist nemlich alsdann dieselbe $= P\omega$; und hieraus läßt sich in vielen praktischen Anwendungen ein beträchtlicher Nutzen ziehen. Es ist dies aber auch der Grund gewesen, warum verschiedene die Differenzialien als unendlich kleine Incremente betrachtet und behauptet haben, daß sie nicht eigentliche Nullen wären, sondern nur unbestimmt klein gedacht zu werden brauchten. Das hat denn andern Gelegenheit gegeben, die Analysis des Unendlichen zu beschuldigen, daß sie nicht die wahren, sondern nur beynahe wahren Größen finden lehre; und dieser Vorwurf würde allerdings einige Stärke haben, wenn wir nicht die unendlich kleinen Größen als eigentliche Nullen betrachteten.

§. 123.

Diesem Einwurfe zu begegnen, vergleichen diejenigen, die die unendlich kleinen Größen noch von den Nullen unterscheiden, die Differenzialien mit den kleinsten Sandkörnern im Gegensatz gegen die ganze Erde, wobey gewiß Niemand beschuldigt werden würde, daß er die Größe derselben falsch angegeben habe, wenn er um nicht mehr als ein solches Sandkorn sich geirrt hätte. Sie nehmen also zwischen dem Endlichen und dem unendlich Kleinen ein eben solches Verhältniß an, als sich zwischen der ganzen Erde und dem kleinsten Sandkorne findet; und wenn jemanden dieses Verhältniß noch nicht groß genug scheint, so vermehren sie solches tausendfältig und drüber, so daß das Kleine gar nicht mehr merkbar bleibt. Indeß sehen sie sich dabey doch genöthiget

zu

zu gestehen, daß dadurch etwas von der geometrischen Schärfe verloren gehe; wiewohl sie, um sich dagegen zu verwahren, ihre Zuflucht zu solchen Beyspielen nehmen, wo man die Auflösung sowohl vermittelst der Geometrie als durch die Analysis des Unendlichen finden kann, und da aus der Uebereinstimmung beyder Resultate auf die Güte der letzten Methode schließen. Auf der einen Seite aber reicht dies nicht hin, weil man auch öfters durch irrige Methoden auf Wahrheit kommen kann; auf der andern Seite fließt daraus, weil dies hier nicht der Fall ist, eigentlich das, daß die in der Rechnung aus der Acht gelassenen Größen nicht bloß bis zur Unbemerkbarkeit klein, sondern eigentlich nichts sind, so wie wir es angenommen haben. Wir thun daher der geometrischen Schärfe nicht die geringste Gewalt an.

§. 124.

Wir wenden uns zur Erklärung der Natur der Differenzialien der zweyten Ordnung, die aus den im ersten Capitel erklärten zweyten Differenzen entspringen, wenn man die Größe ω unendlich klein $= dx$ annimmt. Da also die zweyten Differenzen verschwinden, wenn man annimmt, daß die veränderliche Größe um gleiche Incremente wächst, so daß, wenn der zweyte Werth $x^{I} = x + dx$ ist, alsdenn die folgenden $x^{II} = x + 2d$; $x^{III} = x + 3dx$, 2c. sind; weil in diesem Falle die ersten Differenzen beständig $= dx$ sind: so sind auch die zweyten Differenzialien von x, oder $ddx = 0$, und eben so auch die folgenden $d^3x = 0$; $d^4x = 0$; $d^5x = 0$; 2c. Hierwider könnte zwar eingewendet werden, daß diese Differenzialien als unendlich kleine Größen schon an und für sich $= 0$ seyen, und daß man also dieses nicht als eine besondere Eigenschaft der veränderlichen Größe, deren Incremente gleich gedacht werden, zu betrachten habe.

Allein

Allein man muß dieses Verschwinden so verstehen, daß die Differenzialien ddx, d^3x, ꝛc. nicht bloß an sich betrachtet, Null seyn, sondern auch in Ansehung der Potestäten von dx, womit sie sonst verglichen werden könnten, verschwinden sollen.

§. 125.

Damit man dies desto deutlicher einsehen möge, so erinnere man sich daran, daß die zweyte Differenz einer jeden Funktion von x, die y seyn mag, durch diese Form $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 +$ ꝛc. ausgedruckt werden kann. Wenn man daher ω unendlich klein annimmt, so verschwinden die Glieder $Q\omega^3$, $R\omega^4$, ꝛc., und setzt man $\omega = dx$, so wird das zweyte Differenzial von $y = Pdx^2$, wo dx^2 das Quadrat des Differenzials dx bedeutet. Ob also gleich das zweyte Differenzial von y oder ddy an und für sich $= 0$ ist, so hat es doch zu dx^2, weil $ddy = Pdx^2$ ist, das endliche Verhältniß $P : 1$; wenn aber $y = x$ ist, dann wird $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, ꝛc., und es verschwindet also in diesem Falle das zweyte Differenzial von x auch in Ansehung von dx^2 und der höhern Potestäten von dx. Auf diese Art ist die vorhergehende Behauptung, daß $ddx = 0$, $d^3x = 0$, ꝛc. sey, zu verstehen.

§. 126.

Da die zweyte Differenz nichts anders ist, als die Differenz der ersten Differenz: so ist auch das zweyte Differenzial, oder das Differenzio-Differenzial, wie man es auch öfters nennt, nichts anders, als das Differenzial des ersten Differenzials. Da ferner die beständige Größe keinen Zuwachs und keine Verminderung bekommt, und folglich auch keine Differenzen hat, indem diese bloß den veränderlichen

Größen

Größen eigen sind: so sind auch in eben dem Sinne alle Differenzialien der beständigen Größen $= 0$, d. h. sie verschwinden insgesamt gegen alle Potestäten von dx. Da also das Differenzial von dx oder $ddx = 0$ ist, so kann man das Differenzial dx als eine beständige Größe betrachten, und so oft das Differenzial irgend einer Größe beständig genennt wird, so oft muß man sich auch die Incremente dieser Größe gleich gedenken. Wir stellen uns aber hier unter x eine Größe vor, deren Differenzial beständig ist, und wollen nun die Veränderlichkeit der Funktionen desselben, der seine Differenzialien ausgesetzt sind, untersuchen.

§. 127.

Angenommen also, daß das erste Differenzial von $y = pdx$ sey, so muß man, um das zweyte Differenzial von y zu finden, von neuem das Differenzial von pdx suchen. Da nun dx beständig ist, und nicht verändert wird, wenn man gleich $x + dx$ für x setzt, so hat man nur nöthig, das Differenzial der endlichen Größe p zu erforschen. Es sey also $dp = qdx$; weil wir gesehen haben, daß die Differenzialien aller Funktionen von x auf diese Form gebracht werden können; und da nun nach dem, was wir von den Differenzen bewiesen haben, das Differenzial von $np = nqdx$ ist, wenn n eine beständige Größe bedeutet: so findet man dadurch, daß man dx für n setzt, das Differenzial von $pdx = qdx^2$. Wenn also $dy = pdx$, und $dp = qdx$ ist, so ist das zweyte Differenzial $ddy = qdx^2$, und es erhellet auf diese Art, was wir schon vorhin berührt haben, daß das zweyte Differenzial von y zu dx^2 ein endliches Verhältniß hat.

§. 128.

In dem ersten Capitel haben wir bereits bemerkt, daß die zweyten und folgenden Differenzen nicht bestimmt werden können, wofern man nicht die Werthe, die man nach und nach für x setzt, so annimmt, daß sie nach einem gewissen Gesetze fortgehen; und da dieses Gesetz willkührlich ist, so haben wir für dieselben eine arithmetische Progression angenommen, weil sie unter allen die leichteste und zugleich die brauchbarste ist. Aus eben dem Grunde kann über die zweyten Differenzialien nichts gewisses festgesetzt werden, wofern nicht die ersten Differenzen, welche man als den Zuwachs der veränderlichen Grße x betrachtet, nach einem bekannten Gesetze fortgehen, und wir nehmen daher an, daß die ersten Differenzialien von x, nemlich dx, dx^{I}, dx^{II}, 2c. insgesammt einander gleich sind, woher denn die zweyten Differenzialien $ddx = dx^{I} - dx = 0$; $ddx^{I} = dx^{II} - dx^{I} = 0$; 2c. werden. Da also die zweyten und die folgenden Differenzialien von der Ordnung abhängen, welche die Differenzialien der veränderlichen Größe x unter einander haben, und diese Ordnung willkührlich ist: so muß sich, da die ersten Differenzialien dieser Bedingung nicht unterworfen sind, die Erfindung der zweyten und der folgenden Differenzialien von der Erfindung der ersten Differenzialien auf eine sehr merkliche Art unterschieden.

§. 129.

Wenn aber die Werthe, die der veränderlichen Größe x nach und nach beygelegt werden, nemlich x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, 2c. nicht in einer arithmetischen Progression stehen, sondern nach irgend einem andern Gesetze fortschreiten: so sind auch die ersten Differenzialien derselben dx, dx^{I}, dx^{II}, 2c. nicht einander gleich, und also auch nicht $ddx = 0$. Daher erhal-

erhalten die zweyten Differenzialien der Funktionen von x, ohne Einschränkung genommen, eine andere Form. Denn wenn das erste Differenzial einer solchen Funktion $y = p\,dx$ ist: so ist es zur Findung des zweyten Differenzials dieser Funktion nicht genug, das Differenzial von p mit dx zu multipliciren, sondern man hat außerdem auch auf das Differenzial von dx, welches ddx ist, zu sehen. Denn da man das zweyte Differenzial erhält, wenn man $p\,dx$ von seinem folgenden Werthe, der durch die Substitution von $x + dx$ für x, und $px + ddx$ für dx entspringt, abzieht: so wird, wenn man den folgenden Werth von p gleich $p + q\,dx$ setzt, der folgende Werth von $p\,dx$

$$= (p + qdx)(dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^2 + qdxddx;$$

und zieht man hiervon $p\,dx$ ab, so ist das zweyte Differenzial

$$ddy = pddx + qdx^2 + qdxddx = pddx + qdx^2,$$

weil $qdxddx$ gegen $pddx$ verschwindet.

§. 130.

Ob nun aber gleich das Verhältniß der Gleichheit das einfachste und für die Incremente von x das schicklichste ist; so geschiehet es doch sehr häufig, daß man nicht die Incremente der veränderlichen Größe x, wovon y eine Funktion ist, sondern die Incremente irgend einer andern Größe, wovon x selbst eine gewisse Funktion ist, gleich seyn läßt. Ja es werden oft sogar die ersten Differenzialien solchen Größen einander gleich gesetzt, deren Verhältniß zu x gänzlich unbekannt ist. In dem ersten Falle hängen die zweyten und folgenden Differenzialien von x von dem Verhältnisse ab, welches x zu der Größe hat, deren Incremente man gleich angenommen hat, und müssen daher auf eben die Art bestimmt werden, als wir hier die zweyten Differenzialien von y aus den

Differenzialien von x finden gelehret haben. Im letzten Falle aber muß man die zweyten und folgenden Differenzialien von x als unbekannte Größen betrachten, und an ihrer Stelle die Zeichen ddx, d^3x, d^4x, 2c. gebrauchen.

§. 131.

Da wir indeß die Art und Weise, in den gedachten Fällen die Differenzialien zu finden, unten ausführlich zeigen werden: so wollen wir hier fortfahren, die veränderliche Größe x als eine gleichförmig wachsende Größe zu betrachten, so daß also ihre ersten Differenzialien dx, dx^{I}, dx^{II}, 2c. insgesammt einander gleich, und die zweyten und folgenden Differenzialien $= 0$ gesetzt werden müssen. Diese Bedingungen druckt man auch auf die Art aus, daß man sagt: das Differenzial von x nemlich dx sey eine beständige Größe. Nun sey y irgend eine Funktion von x, und da dieselbe aus x und beständigen Größen besteht, so werden auch alle ihre ersten, zweyten, dritten, vierten Differenzialien u. s. f. welche durch dy, ddy, d^3y, d^4y, 2c. angezeigt werden, durch x und dx ausgedruckt werden können. Setzt man nemlich $x + dx$ für x in y, und zieht darauf von dem gefundenen Werthe den vorhergehenden ab, so bleibt das erste Differenzial dy übrig; und setzt man nun ferner hierin $x + dx$ für x, so bekommt man dy^{I} und dann wird $ddy = dy^{I} - dy$. Auf eine ähnliche Art findet man das dritte Differenzial d^3y aus ddy, wenn man daraus, durch die Substitution $x + dx$ für x, ddy^{I} macht, und $ddy^{I} - ddy$ sucht, u. s. f. Bey diesen Operationen wird das Differenzial dx beständig als eine unveränderliche Größe betrachtet, die keines Differenzials fähig ist.

§. 132.

Aus dem Verhältnisse, woraus die Funktion y durch x bestimmt wird, läßt sich sowohl vermittelst der Methode der Differenzen, als auch, und zwar noch viel leichter, durch das, was wir in der Folge sagen werden, der Werth der Funktion p bestimmen, welche, mit dx multiplicirt, das erste Differenzial dy giebt. Setzt man also $dy = pdx$, so giebt das Differenzial von pdx das zweyte Differenzial ddy: woher denn, wenn $dp = qdx$, da dx beständig ist, $ddy = qdx^2$ wird, wie wir bereits gezeigt haben. Geht man daher weiter, und setzt $dq = rdx$, so wird, da das Differenzial des zweyten Differenzials das dritte Differenzial giebt, $d^3y = rdx^3$, und auf eine ähnliche Art ergiebt sich, wenn man das Differenzial von dieser Funktion sucht, und $dr = sdx$ ist, $d^4y = sdx^4$ u. s. f. Kann man also nur das erste Differenzial einer Funktion finden, so läßt sich auch das Differenzial einer jeden Ordnung angeben.

§. 133.

Um die Form dieser verschiedenen Differenzialien und die Art und Weise sie zu finden deutlicher vor Augen zu legen, wollen wir dieselben in folgende Tabelle bringen.

Wenn y irgend eine Funktion von x ist,

so ist	und setzt man
$dy = pdx$	$dp = qdx$
$ddy = qdx^2$	$dq = rdx$
$d^3y = rdx^3$	$dr = sdx$
$d^4x = sdx^3$	$ds = tdx$
$d^5y = tdx^5$	ꝛc.

Da nun die Funktion p aus der Funktion y durch die Differenziation gefunden, und auf eine ähnliche Art q aus p,

r aus q, s aus r u. s. w. hergeleitet wird: so findet man die Differenzialien aller Ordnungen leicht, wenn das Differenzial dx als beständig betrachtet wird.

§. 134.

Da p, q, r, s, t, 2c. endliche Größen, nemlich Funktionen von x sind, so hat das erste Differenzial von y ein endliches Verhältniß zu dem ersten Differenziale von x, nemlich das Verhältniß $p : 1$; und aus dieser Ursache werden die Differenzialien dx und dy homogen genennt. Da ferner ddy zu dx^2 das endliche Verhältniß $q : 1$ hat, so sind auch ddy und dx^2 homogen, und eben so d^3y und dx^3, desgleichen d^4y und dx^4 u. s. f. So wie daher die ersten Differenzialien unter einander homogen sind, so sind es auch die zweyten Differenzialien mit den Quadraten der ersten Differenzialien, die dritten Differenzialien mit den Cubis der ersten Differenzialien u. s. f. Ueberhaupt ist das Differenzial von y von der Ordnung n, welches man durch d^ny bezeichnet, mit dx^n, d. h. mit der Potestät von dx, deren Exponent n ist, homogen.

§. 135.

Da also gegen dx alle die Potestäten davon, deren Exponenten größer als die Einheit sind, verschwinden, so werden auch dx^2, dx^3, dx^4, 2c. gegen dy verschwinden, und eben das werden die Differenzialien der höhern Ordnungen ddy, d^3y, d^4y, 2c. thun, die zu jenen Potestäten ein endliches Verhältniß haben. Auf eine ähnliche Art verschwinden auch gegen ddy, weil es mit dx^2 homogen ist, alle Potestäten von dx, die höher sind als das Quadrat, nemlich dx^3, dx^4, 2c. und folglich nicht minder d^3y, d^4y, 2c. Ferner verschwinden gegen d^3y: dx^4, d^4y, dx^5, d^5y, 2c. Hieraus läßt sich, wenn Ausdrücke vorkommen, die dergleichen

Diffe-

Differenzialien enthalten, leicht beurtheilen, ob dieselben homogen sind, oder nicht? Man darf nemlich nur auf die Differenzialien sehen, denn die endlichen Größen kann man aus der Acht lassen, weil sie auf die Homogeneität keinen Einfluß haben, und für die Differenzialien der zweyten und der höhern Ordnungen die denselben homogene Potestäten von dx setzen. Geben dieselben allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen, so sind die gegebenen Ausdrücke homogen.

§. 136.

Auf diese Art erkennt man, daß die Ausdrücke $Pddy^2$ und $Qdyd^3y$ homogen sind. Denn ddy^2 bedeutet das Quadrat von ddy, und da ddy homogen ist mit dx^2, so ist ddy^2 homogen mit dx^4. Da ferner dy und dx so wie auch d^3y und dx^3 homogen sind, so ist auch das Produkt dyd^3y mit dx^4 homogen. Es sind also die Ausdrücke $Pddy^2$ und $Qdyd^3y$ homogen, und haben folglich ein endliches Verhältniß zu einander. Auf eine ähnliche Art findet man, daß diese Ausdrücke $\frac{Pd^3y^2}{dxddy}$ und $\frac{Qd^5y}{dy^2}$ homogen sind. Denn setzt man für dy, ddy, d^3y und d^5y diese ihnen homogene Potestäten von dx: dx, dx^2, dx^3 und dx^5, so erhält man die Ausdrücke Pdx^3 und Qdx^3, welche allerdings einander homogen sind.

§. 137.

Wenn die gegebenen Ausdrücke nach dieser Reduktion nicht gleiche Potestäten von dx enthalten, so sind sie nicht homogen, und haben folglich kein endliches Verhältniß zu einander. Es wird also alsdenn der eine unendlichmal grösser als der andere seyn, und dieser in Rücksicht auf jenen verschwinden. So haben $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ und $\frac{Qddy^2}{dy}$ ein unendlich großes Verhältniß zu einander, denn jener Ausdruck läßt sich auf Pdx, und dieser auf Qdx^3 reduciren, und es verschwindet daher dieser gegen jenen. Kommt daher in der Rechnung ein Aggregat von zwey solchen Ausdrücken $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$ vor, so kann man den letzten ganz sicher gegen den ersten aus der Rechnung weglassen, und nur den ersten behalten. Es ist nemlich das Verhältniß dieser Ausdrücke

$$\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy} \text{ und } \frac{Pd^3y}{dx^2}$$

ein vollkommenes Verhältniß der Gleichheit, weil der Exponent

$$= 1 + \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 1 \text{ ist, indem } \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 0.$$

Auf diese Art können die Differenzial-Ausdrücke öfters ganz außerordentlich zusammengezogen werden.

§. 138.

In der Differenzial-Rechnung wird gelehrt, wie man das erste Differenzial einer jeden gegebenen Größe finden kann; und da die zweyten Differenzialien durch die Differenziation der ersten, die dritten durch die Differenziation der zweyten, und so ferner die folgenden aus den vorhergehenden gefunden werden: so enthält die Differenzial-Rechnung die Methode, die Differenzialien jeder Ordnung zu finden. Man hat aber von dem Worte Differenzial, womit man die unendlich kleinen Größen bezeichnet, verschiedene andere Wörter hergeleitet und zum Gebrauche aufgenommen. So sagt man Differenziiren, das heißt, das Differenzial finden, und eine Größe wird differenziirt, wenn ihr Differenzial gesucht wird. Unter der Differenziation aber versteht man die Operation, durch welche man die Differen-

zialien

zialien findet. Man nennt daher die Differenzial-Rechnung auch die Methode zu differenziiren, weil sie die Art und Weise, die Differenzialien zu finden, lehrt.

§. 139.

So wie man in der Differenzial-Rechnung das Differenzial einer jeden Größe erforscht: so giebt es auch einen Calcul, der die Größe, deren Differenzial gegeben ist, finden lehrt, und dieses ist die Integral-Rechnung. Denn wenn ein Differenzial gegeben ist, so heißt die Größe, wovon es das Differenzial ist, in Rücksicht auf dieses, das Integral. Der Grund dieser Benennung ist darin zu suchen, weil man das Differenzial als einen unendlich kleinen Theil betrachtet, um welchen eine gewisse Größe wächst, und also in Rücksicht auf diesen Theil die gedachte Größe selbst als ein Ganzes (Integrum) ansehen kann. So wie daher dy das Differenzial von y ist, so ist y hinwiederum das Integral von dy, und so wie ddy das Differenzial von dy ist, so ist wieder dy das Integral von ddy. Auf ähnliche Art ist ddy das Integral von d^3y, d^3y das Integral von d^4y u. s. f., so daß also eine jede Differenziation umgekehrt betrachtet, ein Beyspiel einer Integration giebt.

§. 140.

Der Ursprung und die Natur der Integralien läßt sich eben so als der Ursprung und die Natur der Differenzialien aus dem, was im ersten Capitel über die Differenzen gesagt worden ist, aufs deutlichste erklären. Nachdem nemlich gezeigt worden war, wie man die Differenz einer jeden Größe finden kann, so wurde umgekehrt auch gelehrt, wie man aus einer gegebenen Differenz die Größe, die sie zur Differenz hatte, zu finden im Stande ist, und diese Größe erhielt in Rücksicht auf ihre Differenz den Namen der Summe. So wie also die Differenzen, indem man sie ins unendliche verkleinert, in die Differenzialien übergehen: so verwandeln sich in diesem Falle auch die obigen Summen in Integrale, und man pflegt daher auch öfters die Integrale Summen zu nennen. Die Engländer, welche die Differenzialien Fluxionen nennen, geben den Integralien den Namen der fließenden Größen, und nach ihrer Art zu reden ist, die fließende Größe einer Fluxion finden, eben das, was wir durch, das Integral eines gegebenen Differenzials finden, ausdrucken.

§. 141.

So wie wir die Differenzialien durch den Buchstaben d anzeigen, so gebrauchen wir zur Bezeichnung der Integralien den Buchstaben ſ, der also, vor die Differenzial-Größen gesetzt, die Größen anzeigt, wovon sie die Differenzialien sind. Ist z. B. das Differenzial von y gleich $p\,dx$, oder $dy = p\,dx$, so ist y das Integral von $p\,dx$, und dieses zeigt man auf die Art an, $y = \int p\,dx$, weil $y = \int dy$ ist. Das Integral von $p\,dx$, welches durch $\int p\,dx$ angezeigt wird, bedeutet also die Größe, deren Differenzial $p\,dx$ ist. Auf eine ähnliche Art ist, da $ddy = q\,dx^2$, wenn $dp = q\,dx$ das Integral von ddy kein andres als $dy = p\,dx$, und da $p = \int q\,dx$, so wird $dy = dx\int q\,dx$, und also $y = \int dx\int q\,dx$. Wenn ferner $dq = r\,dx$ ist, so wird $q = \int r\,dx$ und $dp = dx\int r\,dx$. Wenn man daher den Buchstaben ſ noch weiter fortfährt vorzusetzen, so wird $p = \int dx\int r\,dx$, ferner $dy = dx\int dx\int r\,dx$, und $y = \int dx\int dx\int r\,dx$.

§. 142.

Da das Differenzial dy eine unendlich kleine Größe, sein Integral aber eine endliche Größe, und auf ähnliche Art das zweyte Differenzial ddy unendlichmal kleiner, als sein Integral dy ist: so ist offenbar, daß die Differenzialien in

Anse-

Ansehung ihrer Integralien verschwinden. Um diese Eigenschaft faßlicher zu machen, theilt man die unendlich kleinen Größen in Ordnungen ein, und rechnet zur ersten Ordnung die ersten Differenzialien dy und dx. Zur zweyten Ordnung rechnet man ferner die Differenzialien, welche mit dx^2 homogen sind, oder die Differenzialien der zweyten Ordnung; zur dritten die unendlich kleinen Größen, die mit dx^3 homogen sind, also die Differenzialien der dritten Ordnung, u. s. f. So wie daher die unendlich kleinen Größen der ersten Ordnung gegen die endlichen Größen verschwinden, so verschwinden auch die unendlich kleinen Größen der zweyten Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen der ersten Ordnung, und überhaupt verschwinden die unendlich kleinen Größen jeder höhern Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen jeder niedern Ordnung.

§. 143.

So wie also nunmehr das Differenzial einer endlichen Größe ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung, und das Differenzial einer unendlich kleinen Größe von der ersten Ordnung ein unendlich Kleines von der zweyten Ordnung, u. s. f. ist: so ist auch umgekehrt das Integral einer unendlich kleinen Größe der ersten Ordnung eine endliche Größe, das Integral einer unendlich kleinen Größe von der zweyten Ordnung ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung u. s. w. Ist daher ein Differenzial von der Ordnung n gegeben, so ist sein Integral ein unendlich Kleines von der Ordnung $n-1$; und so wie also durch die Differenzialien die Ordnung der unendlich kleinen Größen erhöhet wird, so gehet man bey der Integration zu den niedern Ordnungen zurück, bis man zu endlichen Größen kommt. Wenn man die endlichen Grössen von neuem integriren wollte, so würde man nach diesem

Gesetze zu unendlich großen Größen, und von diesen durch abermalige Integration zu unendlichmal unendlich großen Größen gelangen, und also auf diesem Wege ähnliche Ordnungen der unendlichen Größen finden, davon jede unendlichmal größer als die vorhergehende wäre.

§. 144.

Nun müssen wir, um aller Zweydeutigkeit vorzubauen, noch etwas von dem eingeführten Gebrauche der Zeichen sagen. Zuvörderst also bezieht sich das Zeichen der Differenziation d einzig und allein auf den unmittelbar folgenden Buchstaben, und es bedeutet daher dxy nicht das Differenzial des Produkts xy, sondern das Differenzial von x durch die Größe y multiplicirt. Man pflegt indeß in solchen Fällen, um die Verwirrung zu vermeiden, die Größe y vor das Zeichen zu setzen, und ydx zu schreiben, um das Produkt aus y in dx auszudrucken. Wenn indeß y das Wurzelzeichen $\surd$ oder das Zeichen der Logarithmen vor sich hat, so pflegt es gleichwohl nach dem Differenziale gesetzt zu werden. So bedeutet $dx\surd(aa - xx)$ das Produkt aus der endlichen Größe $\surd(aa - xx)$ in das Differenzial dx, und $dxl(1 + x)$ das Produkt aus dem Logarithmen von $1 + x$ in das Differenzial dx. Aus eben dem Grunde zeigt $ddy\surd x$ das Produkt des zweyten Differenzials ddy in die endliche Größe $\surd x$ an.

§. 145.

Nicht genug, daß der Buchstabe d bloß zu dem unmittelbar auf ihn folgenden gehört, er darf auch nicht einmal zu dem Exponenten dieses Buchstabens, wenn dergleichen vorkommen, gezogen werden. So bedeutet dx^2 nicht das Differenzial von x^2, sondern das Quadrat des Differenzials dx, so daß also der Exponent 2 nicht auf x, sondern auf dx gezo-

gezogen werden muß. Man könnte auch $dxdx$ schreiben, so wie man das Produkt aus den beyden Differenzialien dx und dy durch $dxdy$ ausdruckt, allein jene Art dx^2 ist bequemer und gebräuchlicher. Noch mühsamer würde es seyn, zur Bezeichnung der höhern Potestäten von dx dieses dx so oftmals zu wiederholen, und man bezeichnet daher den Cubus von dx durch dx^3, und die höhern Potestäten auf eine ähnliche Art. So bedeutet ddy^4 die vierte Dignität des Differentials der zweyten Ordnung ddy; und $d^3y^2\sqrt{x}$ das Quadrat des Differenzials der dritten Ordnung von y, durch $\sqrt{x}$ multiplicirt. Wenn durch eine rationale Größe x multiplicirt wird, so wird dieselbe vorgesetzt, wie hier, xd^3y^2.

§. 146.

Will man indeß, daß sich der Buchstabe d auf mehr als auf den unmittelbar folgenden Buchstaben beziehen soll, so muß man solches besonders anzeigen. Man bedienet sich in diesem Falle der Parenthese, und schließt darin die Größe ein, deren Differenzial man anzeigen will. So bedeutet $d(xx + yy)$ das Differenzial der Größe $xx + yy$, indeß ist diese Bezeichnungsart noch nicht hinlänglich, wenn man das Differenzial einer Potestät von einer solchen Größe ausdrucken will. Denn wollte man $d(xx + yy)^2$ schreiben, so würde dieser Ausdruck das Quadrat von $d(xx + yy)$ bedeuten können. Man kann sich aber in diesem Falle durch den Punkt helfen, so daß $d.(xx + yy)^2$ das Differenzial von $(xx + yy)^2$, hingegen $d(xx + yy)^2$ ohne Punkt das Quadrat von $d(xx + yy)$ ausdrucke. Es kann nemlich durch den Punkt sehr bequem angezeigt werden, daß sich der Buchstabe d auf die ganze Größe nach ihm beziehen soll; und auf diese Art zeigt denn $d.xdy$ das Differenzial von xdy; $d.^3xdy\sqrt{(aa + xx)}$ das Differenzial der dritten Ordnung von dem Ausdrucke $xdy\surd(aa+xx)$ an, welcher ein Produkt aus den endlichen Größen x und $\surd(aa+xx)$ und dem Differenziale dy ist.

§. 147.

So wie sich aber das Zeichen der Differenziation d bloß auf die unmittelbar folgende Größe bezieht, wofern nicht seine Bedeutung durch den zwischen gesetzten Punkt auf den ganzen folgenden Ausdruck ausgedehnt wird: so bezieht sich dagegen das Zeichen der Integration $\int$ jedesmal auf den ganzen Ausdruck, vor welchem es steht. So bedeutet $\int ydx(aa+xx)^n$ das Integral oder die Größe, deren Differenzial $ydx(aa+xx)^n$, und der Ausdruck $\int xdx\int dxlx$ die Größe, deren Differenzial $xdx\int dxlx$ ist. Wenn man daher das Produkt aus zwey Integralien $\int ydx$ und $\int zdx$ ausdrucken will, so ist es nicht gut, solches durch $\int ydx\int zdx$ zu thun, denn dieser Ausdruck zeigt das Integral von $ydx\int zdx$ an. Man pflegt daher auch hier durch einen Punkt der Zweydeutigkeit vorzubeugen, so daß also $\int ydx.\int zdx$ das Produkt aus den Integralien $\int ydx$ und $\int zdx$ bedeutet.

§. 148.

Da sich also die Analysis des Unendlichen theils mit der Erfindung der Differenzialien, theils mit der Erforschung der Integralien beschäftiget, so wird sie deswegen in zwey Haupttheile getheilt, davon jener die Differenzial-, dieser die Integral-Rechnung genennt wird. In der Differenzial-Rechnung wird gelehret, wie man aus jeder Größe ihre Differenzialien, in der Integral-Rechnung hingegen, wie man aus gegebenen Differenzialien ihre Integrale finden kann, und zugleich wird in beyden der große Nutzen dieser Rechnungen sowohl in der Analyse als in der höhern Geometrie gezeigt. Es hat daher auch dieser Theil der Analyse so starke

Erwei-

Erweiterungen bekommen, daß er nur in weitläuftigen Werken ausführlich abgehandelt werden kann. Vorzüglich vermehren sich in der Integral-Rechnung sowohl die neuen Kunstgriffe zu integriren als die Anwendungen derselben zur Auflösung der Aufgaben täglich, so daß daher die neuen Vermehrungen, die immerfort hinzukommen, nie erschöpft, und noch weniger vollkommen beschrieben und erklärt werden können. Ich werde indeß suchen, entweder alle bisher gemachten Entdeckungen mitzutheilen und zu erklären, oder doch die Methoden beybringen, wie man sie finden kann.

§. 149.

Gemeiniglich nimmt man in der Analysis des Unendlichen mehr Theile an, denn man findet sehr häufig außer der Differenzial- und Integral-Rechnung noch den Differenzio-Differenzial-Calcul und die Exponenzial-Rechnung. In der Differenzio-Differenzial-Rechnung wird die Art und Weise gelehrt, die zweyten und die folgenden höhern Differenzialien zu finden; da ich aber in der Differenzial-Rechnung selbst die Art und Weise, die Differenzialien jeder Ordnung zu finden, lehren werde, so habe ich diese Unterabtheilung nicht nöthig. Was ferner den Exponential-Calcul anbetrift, wodurch der um die Analysis des Unendlichen unsterblich verdiente Joh. Bernoulli die Methode des Differenziirens und Integrirens auf die Exponential-Größen angewandt hat: so habe ich nicht für nöthig gehalten, daraus einen besondern Theil zu machen, weil ich die Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung für alle Arten der Größen, der algebraischen sowohl als der transcendenten einzurichten beschlossen habe.

§. 150.

Zuvörderst werde ich also im gegenwärtigen Buche die Differenzial-Rechnung abhandeln, und die Art und Weise

lehren,

lehren, von allen Gattungen der veränderlichen Größen nicht bloß die ersten, sondern auch die zweyten und die folgenden Differenzialien zu finden. Dabey werde ich zuerst die algebraischen Größen betrachten, sie mögen nun Funktionen einer oder mehrerer veränderlichen Größen seyn, entwickelt oder in Gleichungen gegeben werden. Dann will ich die Regeln von der Erfindung der Differenzialien auch auf die nicht algebraischen Größen anwenden, so weit man dieselben ohne die Integral-Rechnung kennen lernen kann. Dahin gehören die Logarithmen, die Exponential-Größen, ferner die Kreisbogen mit ihren Sinus und Tangenten. Endlich werde ich auch die aus diesen Größen zusammengesetzten vermischten Größen betrachten, und damit den ersten Theil der Differenzial-Rechnung, der die Methode des Differenzirens enthalten soll, beschließen.

§. 151.

Der andere Theil ist zur Erklärung des Gebrauchs bestimmt, der von der Differenzial-Rechnung sowohl in der Analyse als in der höhern Geometrie gemacht werden kann. Die gemeine Algebra zieht daher sehr viele Vortheile, theils zur Erfindung der Wurzeln der Gleichungen, theils zur Behandlung und Summirung der Reihen, theils zur Bestimmung des Größten und Kleinsten, theils zur Bestimmung solcher Ausdrücke, die in gewissen Fällen unbestimmt scheinen u. s. w. Die höhere Geometrie aber hat der Differenzial-Rechnung ihre wichtigste Erweiterung zu verdanken, indem man dadurch die Tangenten der krummen Linien und ihre Krümmung auf eine bewundernswerthe leichte Art bestimmen, und viel andere Aufgaben, die wichtigsten Gegenstände betreffend, auflösen kann. Ob man gleich mit diesen Untersuchungen die weitläuftigsten Schriften anfüllen könnte, so will ich doch suchen, alles kurz und deutlich zu erklären.

Fünf-