Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Fünftes Capitel. Von der Differenziation der algebraischen Funktionen einer veränderlichen Größe.

Fünftes Capitel.

Von der Differenziation der algebraischen Funktionen einer veränderlichen Größe.

§. 152.

Da das Differenzial der veränderlichen Größe x, $= dx$ ist, so wird x durch die nächste Veränderung $x^{\text{I}} = x + dx$. Ist daher y irgend eine Funktion von x, so geht dieselbe, wenn man darin $x + dx$ für x setzt, in y^{I} über, und die Differenz $y^{\text{I}} - y$ giebt das Differenzial von y. Wenn man also $y = x^n$ setzt, so wird

$$y^{\text{I}} = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}dx^2 + \text{etc.}$$

und folglich

$$dy = y^{\text{I}} - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}dx^2 + \text{etc.}$$

Allein das zweyte und die folgenden Glieder dieses Ausdrucks verschwinden gegen das erste Glied, und es ist daher $nx^{n-1}dx$ das Differenzial von x^n oder $d.x^n = nx^{n-1}dx$. Wenn also a eine beständige Zahl oder Größe ist, so ist auch $d.ax^n = nax^{n-1}dx$, und man findet daher das Differenzial einer jeden Potestät von x, wenn man dieselbe mit dem Exponenten multiplicirt, durch x dividirt, und den Quotienten durch dx multiplicirt; eine Regel, die sich leicht dem Gedächtnisse einprägen läßt.

§. 153.

§. 152.

Kennt man das erste Differenzial von x^n, so findet man daraus ohne Mühe das zweyte Differenzial, wenn man nur, so wie wir es hier immer thun, das Differenzial dx als eine beständige Größe betrachtet. Da nemlich in dem Differenziale $nx^{n-1}dx$ der Faktor ndx beständig ist, so muß man das Differenzial von x^{n-1} suchen, und dies ist $(n-1)x^{n-2}dx$. Multiplicirt man dasselbe mit ndx, so bekommt man das zweyte Differenzial, $dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man das Differenzial von x^{n-2}, welches $(n-2)x^{n-3}dx$ ist, mit $n(n-1)dx^2$ multiplicirt, das dritte Differenzial

$$d.^3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Ferner ist das vierte Differenzial

$$d.^4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4,$$

und das fünfte

$$d.^5x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5.$$

Hieraus fällt zugleich in die Augen, wie die Form der folgenden Differenzialien beschaffen ist.

§. 154.

So oft n eine ganze positive Zahl ist, so oft kommt man auch endlich zu verschwindenden Differenzialien, d. h. die in so fern $=0$ sind, daß sie gegen alle Potestäten von dx verschwinden. Von diesen muß man sich die einfachern Fälle merken.

$d.x = dx$; $dd.x = 0$; $d.^3x = 0$; etc.

$d.x^2 = 2xdx$; $dd.x^2 = 2dx^2$; $d.^3x^2 = 0$;
$d.^4x^2 = 0$; etc.

$d.x^3 = 3x^2dx$; $dd.x^3 = 6xdx^2$; $d.^3x^3 = 6dx^3$;
$d.^4x^3 = 0$; $d.^5x^3 = 0$; etc.

$d.x^4$

$$d.x^4 = 4x^3dx;\ dd.x^4 = 12x^2dx^2;\ d.^3x^4 = 24xdx^3;$$
$$d.^4x^4 = 24dx^4;\ d.^5x^4 = 0;\ d.^6x^4 = 0;\ \text{ꝛc.}$$
$$d.x^5 = 5x^4dx;\ dd.x^5 = 20x^3dx^2;\ d.^3x^5 = 60x^2dx^3;$$
$$d.^4x^5 = 120xdx^4;\ d.^5x^5 = 120dx^5;\ d.^6x^5 = 0;$$
$$d.^7x^5 = 0;\ \text{ꝛc.}$$

Man sieht hier, daß das Differenzial von x^n von der Ordnung n, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, eine beständige Größe, nemlich $= 1.2.3 \ldots\ldots n\,dx^n$ ist, und daß die Differenzialien aller folgenden Ordnungen $= 0$ sind.

§. 155.

Wenn n eine ganze negative Zahl ist, so kann man die Differenzialien von solchen negativen Potestäten von x, als $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, ꝛc. finden, indem $\frac{1}{x} = x^{-1}$; $\frac{1}{xx} = x^{-2}$, und überhaupt $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$ ist. Wenn man daher in der vorhergehenden Formel $n = -m$ setzt, so ist das erste Differenzial von $\frac{1}{x^m}$, $= \frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$; das zweyte $= \frac{m(m+1)\,dx^2}{x^{m+2}}$; das dritte $= \frac{-m(m+1)(m+2)\,dx^3}{x^{m+3}}$; ꝛc. Hieraus fließen folgende einfachere Fälle, die wohl gemerkt zu werden verdienen.

$$d.\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2};\quad dd.\frac{1}{x} = \frac{2dx^2}{x^3};\quad d^3.\frac{1}{x} = \frac{-6dx^3}{x^4};$$
$$d.\frac{1}{x^2} = \frac{-2dx}{x^3};\quad dd.\frac{1}{x^2} = \frac{6dx^2}{x^4};\quad d^3.\frac{1}{x^2} = \frac{-24dx^3}{x^5};$$
$$d.\frac{1}{x^3} = \frac{-3dx}{x^4};\quad dd.\frac{1}{x^3} = \frac{12dx^2}{x^5};\quad d^3.\frac{1}{x^3} = \frac{-60dx^3}{x^6};$$
$$d.\frac{1}{x^4} = \frac{-4dx}{x^5};\quad dd.\frac{1}{x^4} = \frac{20dx^2}{x^6};\quad d^3.\frac{1}{x^4} = \frac{-120dx^3}{x^7};$$
$$d.\frac{1}{x^5} = \frac{-5dx}{x^6};\quad dd.\frac{1}{x^5} = \frac{30dx^2}{x^7};\quad d^3.\frac{1}{x^5} = \frac{-210dx^3}{x^8};$$

ꝛc.

§. 156.

Setzt man ferner für n gebrochene Zahlen, so erhält man die Differenzialien der Wurzel-Größen. Macht man nemlich $n = \frac{\mu}{\nu}$, so ist das erste Differenzial von der Formel $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ oder $\sqrt[\nu]{x^\mu}$

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$$

das zweyte

$$= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}}$$

rc.

Hieraus fließt

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}};\quad dd.\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}};\quad d.^3\sqrt{x} = \frac{1.3\,dx^3}{8x^2\sqrt{x}};$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}};\quad dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}};\quad d.^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.5\,dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}};$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}};\quad dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}};\quad d.^3\sqrt[4]{x} = \frac{3.7\,dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}};$$

rc.

Betrachtet man diese Ausdrücke nur mit einiger Aufmerksamkeit, so erwirbt man sich bald eine Fertigkeit, dergleichen Differenzialien auch ohne eine vorläufige Reduktion auf die Potestäten-Form zu finden.

§. 157.

Wenn μ nicht 1, sondern eine andere positive, oder negative Zahl ist, so lassen sich die Differenzialien eben so leicht

leicht angeben. Da aber die zweyten und die folgenden Differenzialien aus den ersten auf eben die Art gefunden werden, als diese aus den Potestäten selbst: so wollen wir hier bloß die einfachern ersten Differenzialien hersetzen:

$$d.x\sqrt{x}=\tfrac{3}{2}dx\sqrt{x};\ d.x^2\sqrt{x}=\tfrac{5}{2}xdx\sqrt{x};\ d.x^3\sqrt{x}=\tfrac{7}{2}x^2dx\sqrt{x};$$

$$d.\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{-dx}{2x\sqrt{x}};\ d.\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}};\ d.\frac{1}{xx\sqrt{x}}=\frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}};$$

$$d.\sqrt[3]{x^2}=\tfrac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}};\quad d.x\sqrt[3]{x}=\tfrac{4}{3}dx\sqrt[3]{x};\ d.x\sqrt[3]{x^2}=\tfrac{5}{3}dx\sqrt[3]{x^2};$$

$$d.xx\sqrt[3]{x}=\tfrac{7}{3}xdx\sqrt[3]{x};\ d.xx\sqrt[3]{x^2}=\tfrac{8}{3}xdx\sqrt[3]{x^2};\ \text{ꝛc.}$$

$$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}};\ d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}};\ d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}=\frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}};$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}};\ d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}}=\frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}};\ \text{ꝛc.}$$

§. 158.

Hieraus ist man bereits im Stande, die Differenzialien aller ganzen rationalen algebraischen Funktionen zu finden, indem die Glieder dieser Funktionen lauter Potestäten von x sind, und deren Differenziation bekannt ist. Denn da eine Größe von dieser Form,

$$p + q + r + s + \text{ꝛc.}$$

wenn man darin $x + dx$ für x setzt, in folgende,

$$p + dp + q + dq + r + dr + s + ds + \text{ꝛc.}$$

verwandelt wird: so ist das Differenzial derselben =

$$dp + dq + dr + ds + \text{ꝛc.}$$

Kann man also das Differenzial einer jeden von den Größen p, q, r, s, angeben, so ist auch das Differenzial ihres Aggregats bekannt. Und da das Differenzial des Vielfachen von p ein Gleich-Vielfaches von dp, oder $d.ap = adp$ ist:

so ist das Differenzial der Größe $ap + bq + cr = adp + bdq + cdr$. Da endlich die beständigen Größen kein Differenzial haben, so ist auch das Differenzial von $ap + bq + cr + f = adp + bdq + cdr$.

§. 159.

Da also die Glieder der ganzen rationalen Funktionen entweder beständige Größen oder Potestäten von x sind, so lassen sich die Differenzialien dieser Funktionen nach den ertheilten Vorschriften leicht finden. So ist

$$d(a + x) = dx; \quad d(a + bx) = bdx;$$
$$d(a + xx) = 2xdx; \quad d(aa - xx) = -2xdx;$$
$$d(a + bx + cxx) = bdx + 2cxdx;$$
$$d(a + bx + cx^2 + ex^3) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx;$$
$$d(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + 4fx^3dx.$$

Und wenn die Exponenten unbestimmt sind, so ist

$$d(1 - x^n) = -nx^{n-1}dx; \quad d(1 + x^m) = mx^{m-1}dx;$$
$$d(a + bx^m + cx^n) = mbx^{m-1}dx + ncx^{n-1}dx.$$

§. 160.

Da man also die ganzen rationalen Funktionen nach der höchsten Potestät von x in Grade eintheilt, so ist klar, daß die Differenzialien dieser Funktionen, wenn man die gefundenen Differenzialien immer wieder von neuem differenziirt, und dabey dx als eine beständige Größe betrachtet, endlich selbst beständige Größen werden, und darauf verschwinden. So ist das erste Differenzial bdx der Funktion vom ersten Grade $a + bx$ eine beständige Größe, und das zweyte und die folgenden Differenzialien Null. Eben so ist, wenn man die Funktion vom zweyten Grade $a + bx + cxx = y$ setzt, $dy = bdx + 2cxdx$; $ddy = 2cdx^2$; $d^3y = 0$. Auf eine ähnliche Art ist, wenn man die Funktion des dritten

Grades

Grades $a + bx + cxx + ex^3 = y$ setzt, $dy = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx$; $ddy = 2cdx^2 + 6exdx^2$; $d^3y = 6edx^3$; und $d^4y = 0$. Gehört daher überhaupt eine ganze rationale Funktion zu dem nten Grade, so ist ihr Differenzial von der Ordnung n eine beständige Größe, und die folgenden Differenzialien insgesammt Null.

§. 161.

Auch sind die ertheilten Vorschriften hinlänglich, das Differenzial einer Funktion zu finden, wenn unter den Potestäten von x, woraus die Funktion zusammengesetzt ist, Potestäten mit negativen oder gebrochenen Exponenten vorkommen. Ist daher

I. $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$; so wird

$$dy = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{x^2}.$$ Ist ferner

II. $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - ex$; so wird

$$dy = \frac{-adx}{2x\sqrt{x}} + \frac{cdx}{2\sqrt{x}} - edx,$$ und

$$ddy = \frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}} - \frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}.$$ Ist

III. $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{xx}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{xx}$; so wird

$$dy = \frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}} + \frac{4cdx}{3xx\sqrt[3]{x}} - \frac{2fdx}{x^3},$$ und

$$ddy = \frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}} - \frac{28cdx^2}{9x^3\sqrt[3]{x}} + \frac{6fdx^2}{x^4}.$$

§. 162.

Ist die Größe, deren Differenzial gefunden werden soll, eine Potestät einer solchen Funktion, deren Differenzial nach dem Bisherigen gefunden werden kann: so reichen die ertheilten Vorschriften ebenfalls zu, um das erste Differenzial derselben zu finden. Denn ist p irgend eine Funktion von x, deren Differenzial dp man kennt, so ist das erste Differenzial der Potestät $p^n = np^{n-1}dp$. Hiernach lassen sich folgende Fälle behandeln.

I. Ist $y = (a + x)^n$; so ist $dy = n(a + x)^{n-1}dx$.

II. Ist $y = (aa - xx)^2$; so ist $dy = -4xdx(aa - xx)$.

III. Ist $y = \frac{1}{aa + xx}$, oder $y = (aa + xx)^{-1}$, so ist

$$dy = \frac{-2xdx}{(aa + xx)^2}.$$

IV. Ist $y = \sqrt{(a + bx + cxx)}$, so ist $dy = \frac{bdx + 2cxdx}{2\sqrt{(a + bx + cxx)}}$.

V. Ist $y = \sqrt[3]{(a^4 - x^4)^2}$, oder $y = (a^4 - x^4)^{\frac{2}{3}}$; so ist

$$dy = -\tfrac{8}{3}x^3dx(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4 - x^4)}}.$$

VI. Ist $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$ oder $y = (1 - xx)^{-\frac{1}{2}}$; so ist

$$dy = xdx(1 - xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1 - xx)\sqrt{(1 - xx)}}.$$

VII. Ist $y = \sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)}$ so ist

$$dy = \frac{dx\sqrt{b} : 2\sqrt{x} + dx}{3\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}} = \frac{dx\sqrt{b} + 2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x}.\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}}$$

VIII. Ist $y = \frac{1}{x + \sqrt{(aa - xx)}}$, so ist, weil $d.\sqrt{(aa - xx)} = \frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ ist,

dy

$$dy = \frac{-dx + xdx : \sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2} =$$

$$\frac{xdx - dx\sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2 \sqrt{(aa - xx)}} \text{ oder}$$

$$dy = \frac{dx(x - \sqrt{(aa - xx)})^3}{(2xx - aa)^2 \sqrt{(aa - xx)}}.$$

IX. Ist $y = \sqrt[4]{(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2})^3}$, so setze man $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ und $\sqrt[3]{(1 - xx)^2} = q$. Da auf diese Art

$y = \sqrt[4]{(1 - p + q)^3}$ wird, so ist

$$dy = \frac{-3dp + 3dq}{4\sqrt[4]{(1 - p + q)}}.$$

Nun ist aber aus dem Vorhergehenden

$$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}} \text{ und } dq = \left(\frac{3\sqrt[3]{(1 - xx)}}{-4xdx}\right) \frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{(1 - xx)}};$$

folglich, wenn man diese Werthe substituirt,

$$dy = \frac{3dx : 2x\sqrt{x} - 4xdx : \sqrt[3]{(1 - xx)}}{4\sqrt[4]{(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2})}}$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man jedesmal anstatt der Glieder, die einigermaßen zusammengesetzt sind, einzelne Buchstaben setzt, die Differenzialien aller dergleichen Funktionen leicht.

§. 163.

Wenn die Größe, deren Differenzial gefunden werden soll, ein Produkt aus zweyen oder mehrern Funktionen von x ist, deren Differenzialien bekannt sind: so findet man das

Differenzial derselben am bequemsten auf folgende Art. Es seyen p und q Funktionen von x, deren Differenzialien dp und dq bekannt sind. Da nun, wenn man $x + dx$ für x setzt, p in $p + dp$ und q in $q + dq$ übergeht, so wird dadurch das Produkt pq in

$$(p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dpdq$$

verwandelt, und es ist also das Differenzial des Produkts $pq = pdq + qdp + dpdq$, oder $d.pq = pdq + qdp$, weil das unendlich Kleine von der zweyten Ordnung dpdq gegen die unendlich Kleinen von der ersten Ordnung pdq und qdp, verschwindet. Es besteht also das Differenzial des Produkts pq aus zwey Gliedern, welche man findet, wenn man einen jeden Faktor mit dem Differenziale des andern Faktors multiplicirt. Hieraus läßt sich ferner die Art, das Differenzial des Produkts pqr, welches aus drey Faktoren besteht, zu finden, leicht ableiten. Denn setzt man $qr = z$, so wird $pqr = pz$, und $d.pqr = pdz + zdp$. Da aber $z = qr$ ist, so wird $dz = qdr + rdq$, und substituirt man diese Werthe, so findet man

$$d.pqr = pqdr + prdq + qrdp.$$

Auf eine ähnliche Art ist, wenn die zu differenzirende Größe ein Produkt aus vier Faktoren ist,

$$d.pqrs = pqrds + pqsdr + prsdq + qrsdp;$$

und hieraus läßt sich die Differenziation der Produkte, die aus mehrern Faktoren bestehen, sehr leicht erkennen.

I. Ist also $y = (a + x)(b - x)$ so wird

$$dy = -dx(a + x) + dx(b - x) = -adx + bdx - 2xdx;$$

und dieses Differenzial findet man ebenfalls, wenn man die gegebene Größe zuvor entwickelt. Denn es wird alsdann $y = ab - ax + bx - xx$, und daraus nach den obigen Regeln $dy = -adx + bdx - 2xdx$.

II. Ist

II. Ist $y = \frac{1}{x}\sqrt{(aa - xx)}$

so setze man $\frac{1}{x} = p$ und $\sqrt{(aa - xx)} = q$.

Weil nun $dp = \frac{-dx}{xx}$, und $dq = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ ist, so wird

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{(aa - xx)};$$

Da man aber durch die Reduktion auf einerley Nenner hieraus $\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$ erhält, so ist das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}.$$

III. Ist $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$;

so setze man $xx = p$, und $\frac{1}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = q$.

Da nun $dp = 2xdx$, und $dq = \frac{-2x^3dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$ ist, so wird

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{(a^4+x^4)}} = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}},$$

und also das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{2a^4xdx}{(a^4 + x^4)\sqrt{(a^4 + x^4)}}.$$

IV. Ist $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1 + xx)}}$;

so setze man $x = p$ und $\frac{1}{x+\sqrt{(1+xx)}} = q$, wodurch denn $dp = dx$, und $dq = \frac{-dx - xdx:\sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})^2} = \frac{-dx(x+\sqrt{(1+xx)})}{(x+\sqrt{(1+xx)})^2\sqrt{(1+xx)}} =$

 $-dx$

$\frac{-dx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$ wird. Hieraus aber findet man

$$pdq + qdp = \frac{-xdx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{x+\sqrt{(1+xx)}} =$$

$\frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x)}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$ und es ist also das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}, \text{ oder,}$$

wenn man den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch $\sqrt{(1+xx)}-x$ multiplicirt,

$$dy = \frac{dx(1+2xx-2x\sqrt{(1+xx)})}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

Eben dieses Differenzial hätte man auch noch bequemer auf folgende Art finden können. Da $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$ ist, so multiplicire man Zähler und Nenner durch $\sqrt{(1+xx)}-x$, wodurch man $y = x\sqrt{(1+xx)} - xx = \sqrt{(x^2+x^4)} - xx$ erhält, und davon ist das Differenzial nach der vorhergehenden Regel,

$$dy = \frac{xdx + 2x^3dx}{\sqrt{(xx+x^4)}} - 2xdx = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

V. Ist $y = (a+x)(b-x)(x-c)$ so ist

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Ist $y = x(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}$ so findet man, weil dies Produkt aus drey Faktoren besteht,

$$dy = dx(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)} + 2xxdx\sqrt{(aa-xx)} - \frac{xxdx(aa+xx)}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dx(a^4+aaxx-4x^4)}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

§. 164

§. 164.

Ob nun gleich hierbey auch Brüche in den Faktoren enthalten seyn können, so ist es doch bequemer die Brüche nach einer besondern Regel zu differenziiren. Es sey also das Differenzial des Bruchs $\frac{p}{q}$ zu finden. Da dieser Bruch durch die Substitution von $x + dx$ für x in folgenden Bruch $\frac{p + dp}{q + dq} = (p + dp)\left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq}\right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq}$ übergeht, so ist das Differenzial des Bruchs $\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, weil das letzte Glied $\frac{dpdq}{qq}$ verschwindet. Es ist also

$$d.\frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{qq}$$

und man findet das Differenzial eines jeden Bruchs, wenn man von dem Produkte aus dem Nenner in das Differenzial des Zählers das Produkt aus dem Zähler in das Differenzial des Nenners abzieht, und die gefundene Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt. Der Gebrauch dieser Regel wird durch folgende Beyspiele deutlich werden.

I. Ist $y = \frac{x}{aa + xx}$, so ist nach dieser Regel

$$dy = \frac{(aa + xx)dx - 2xxdx}{(aa + xx)^2} = \frac{(aa - xx)dx}{(aa + xx)^2}.$$

II. Ist $y = \frac{\sqrt{(aa + xx)}}{aa - xx}$, so findet man

$$dy = \frac{(aa - xx)xdx : \sqrt{(aa + xx)} + 2xdx\sqrt{(aa + xx)}}{(aa - xx)^2}$$

und

und wenn man diesen Bruch reducirt,

$$dy = \frac{(3aa + xx)xdx}{(aa - xx)^2 \sqrt{(aa + xx)}}.$$

Oft ist es vortheilhafter nach der Regel zu handeln, welche dieser Ausdruck, $d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, enthält, und nach welcher das Differenzial eines Bruchs dem Differenziale des Zählers durch den Nenner dividirt, weniger dem Differenziale des Nenners durch den Zähler multiplicirt, und durch das Quadrat des Nenners dividirt, gleich ist. Ist z. B.

III. $y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}$, so ist

$$dy = \frac{-2xdx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aaxdx + 4x^3dx)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

$$= \frac{-2xdx(2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}.$$

§. 165.

Diese Vorschriften reichen hin, um das Differenzial einer jeden rationalen Funktion von x zu finden. Denn ist dieselbe eine ganze Funktion, so ist die Art, ihr Differenzial zu finden, schon vorhin beschrieben worden. Ist sie aber eine gebrochene Funktion so kann man sie allemal auf folgende Form reduciren:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.}}$$

Setzt man nun den Zähler $= p$, und den Nenner $= q$, so daß also $y = \frac{p}{q}$ wird, so ist $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$. Da nun

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

und $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$ ist, so wird

$dp =$

$$dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \text{ꝛc.}$$

und $$dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\varepsilon x^3dx + \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man also, so findet man

$$\begin{aligned} qdp = \alpha Bdx + 2\alpha Cxdx &+ 3\alpha Dx^2dx + 4\alpha Ex^3dx + \text{ꝛc.} \\ + \beta Bxdx &+ 2\beta Cx^2dx + 3\beta Dx^3dx + \text{ꝛc.} \\ &+ \gamma Bx^2dx + 2\gamma Cx^3dx + \text{ꝛc.} \\ &+ \delta Bx^3dx + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} qdp = \beta Adx + \beta Bxdx &+ \beta Cx^2dx + \beta Dx^3dx + \text{ꝛc.} \\ + 2\gamma Axdx &+ 2\gamma Bx^2dx + 2\gamma Cx^3dx + \text{ꝛc.} \\ &+ 3\delta Ax^2dx + 3\delta Bx^3dx + \text{ꝛc.} \\ &+ 4\varepsilon Ax^3dx + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Hieraus aber wird das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{\left\{\begin{array}{lllll} +\alpha B & +2\alpha C & +3\alpha D & +4\alpha E & +5\alpha F \\ -\beta A & -2\gamma A & +\beta C & +2\beta D & +3\beta E \\ & & -\gamma B & -2\delta B & +\gamma D \\ & & -3\delta A & -4\varepsilon A & -\delta C \\ & & & & -3\varepsilon B \\ & & & & -5\zeta A \\ dx & xdx & x^2dx & x^3dx & x^4dx\ \text{ꝛc.} \end{array}\right.}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})^2}$$

Dieser Ausdruck kann sehr gut gebraucht werden, um darnach das Differenzial einer jeden rationalen Funktion schnell zu finden; denn die Art, wie der Zähler des Differenzials aus den Coefficienten des Zählers und des Nenners der gegebenen Funktion zusammengesetzt wird, ist leicht zu erkennen, und der Nenner des Differenzials ist das Quadrat des Nenners der gegebenen Funktion.

§. 166.

Wenn der Zähler oder der Nenner des gegebenen Bruchs oder beyde aus Faktoren bestehen, so erhält man zwar durch eine wirklich vorgenommene Multiplication eine

solche

solche Form, als wir eben differenziirt haben; allein es ist doch besser, dergleichen Fälle nach einer besondern Regel zu behandeln. Es sey also der Bruch $y = \frac{pr}{q}$ gegeben. Man setze $pr = P$, wodurch $dP = pdr + rdp$, und weil $y = \frac{P}{q}$ ist, $dy = \frac{qdP - Pdq}{qq}$ wird. Setzt man nun für P und dP die Werthe davon, so wird

I. wenn $y = \frac{pr}{q}$ ist,

$$dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}.$$

Ist hingegen $y = \frac{p}{qs}$, so setze man $qs = Q$, wodurch denn $dQ = qds + sdq$ und $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$ wird. Ist also

II. $y = \frac{p}{qs}$, so wird

$$dy = \frac{qsdp - pqds - qsdq}{qqss}.$$

Ist endlich $y = \frac{pr}{qs}$, so setze man $pr = P$ und $qs = Q$, wodurch man $y = \frac{P}{Q}$ und $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$ erhält. Da aber $dP = pdr + rdp$, und $dQ = qds + sdq$ ist, so wird, wenn

III. $y = \frac{pr}{qs}$ ist,

$$dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$$

$$= \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qqs}.$$

Auf

Auf eine ähnliche Art findet man die Differenzialien, wenn der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs aus mehrern Faktoren bestehen, und es braucht also hiezu keine besondere Anleitung gegeben zu werden. Ich füge daher auch keine zu diesen Fällen gehörende Beyspiele hinzu, zumal da bald eine allgemeine Regel das Differenzial zu finden gegeben werden wird, welche alle bisherigen besondern Regeln unter sich begreift.

§. 167.

Es giebt aber sowohl bey den Produkten als bey den Brüchen Fälle, wo sich das Differenzial bequemer ausdrukken läßt, als solches nach den allgemeinen bis jetzt erklärten Regeln geschieht. Dies findet statt, wenn die Faktoren, die entweder die Funktion selbst oder den Zähler oder Nenner derselben ausmachen, Potestäten sind.

Es sey also die Funktion $y = p^m q^n$ zu differenziiren gegeben. Setzt man hier $p^m = P$, und $q^n = Q$, so wird $y = PQ$ und $dy = PdQ + QdP$. Da nun $dP = mp^{m-1}dp$, und $dQ = nq^{n-1}dq$ ist, so findet man, wenn man diese Werthe braucht,

$$dy = np^m q^{n-1}dq + mp^{m-1}q^n dp = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp).$$

Ist daher

I. $y = p^m q^n$, so wird

$$dy = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp).$$

Auf eine ähnliche Art läßt sich auch das Differenzial eines Produkts aus drey Faktoren fiden. Ist nemlich

II. $y = p^m q^n r^k$, so wird

$$dy = p^{m-1}q^{n-1}r^{k-1}(mqrdp + nprdq + kpqdr).$$

§. 168.

Ist ein Bruch gegeben, dessen Zähler oder Nenner einen Faktor hat, der eine Potestät ist, so lassen sich auch für diesen

sen Fall besondere Regeln geben. Es sey zuvörderst der Bruch $y = \frac{p^m}{q}$ gegeben. Hier findet man nach der Regel für die Differenziation der Brüche, $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq}$; allein dieses Differenzial läßt sich bequemer ausdrucken. Ist nemlich

I. $y = \frac{p^m}{q}$, so wird

$$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}.$$

Nun sey $y = \frac{p}{q^n}$. Hier findet man nach der angeführten Regel $dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1}dq}{q^{2n}}$. Dividirt man aber den Zähler und Nenner dieses Ausdrucks durch q^{n-1}, so wird $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$. Ist daher

II. $y = \frac{p}{q^n}$, so wird

$$dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}.$$

Wäre $y = \frac{p^m}{q^n}$ gegeben, so fände man

$$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1}dq}{q^{2n}},$$

und hieraus durch die Reduktion

$$dy = \frac{mp^{m-1}qdp - np^m dq}{q^{n+1}}.$$ Wenn also

III. $y = \frac{p^m}{q^n}$ ist, so wird

$$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}.$$

Ist

Ist endlich das Differenzial von $y = \frac{r}{p^m q^n}$ zu finden, so giebt die angeführte Regel

$$dy = \frac{p^m q^n dr - mp^{m-1} q^n r dp - np^m q^{n-1} r dq}{p^{2m} q^{2n}}$$

und da der Zähler und Nenner dieses Ausdrucks durch $p^{m-1} q^{n-1}$ theibar sind, so wird, wenn

IV. $y = \frac{r}{p^m q^n}$ ist,

$$dy = \frac{pqdr - mqrdp - nprdq}{p^{m+1} q^{n+1}}.$$

Kommen mehr Faktoren vor, so kann man hiernach für jeden einzelnen Fall sehr leicht eine besondere Regel finden. Es wäre indeß überflüßig, die gefundenen Regeln durch Worte auszudrucken.

§. 169.

Die bisher ertheilten Regeln der Differenziation erstrecken sich so weit, daß sich keine algebraische Funktion von x gedenken läßt, deren Differenzial man nicht darnach finden könnte. Denn ist die gegebene Funktion eine rationale entweder ganze oder gebrochene Funktion, so ist für den ersten Fall im 159sten §. und für den andern im 165sten §. gezeigt worden, wie man sich dabey zu nehmen hat; auch sind zugleich die kurzen Arten bey vorkommenden Faktoren mitgetheilt worden. Außerdem kann man darnach auch die Differenzialien der Irrational-Größen finden; indem man dieselben, sie mögen in der gegebenen Funktion addirt oder subtrahirt seyn, als Multiplicatoren oder als Divisoren darin vorkommen, jedesmal auf die untersuchten Fälle zurückführen kann. Es ist dieses indeß von den entwickelten Funktionen zu verstehen; denn was die unentwickelten Funktionen betrifft, deren Natur durch eine Gleichung bestimmt wird, so werden wir davon erst weiter unten, nachdem wir das Differenzial der Funktionen zweyer und mehrerer veränderlichen Größen werden finden gelehrt haben, reden können.

§. 170.

Wenn man die bisher erklärten Regeln aufmerksam überdenkt und unter einander vergleicht, so sieht man bald, daß sie insgesammt auf eine einzige allgemeine Regel zurückgeführt werden können, deren Wahrheit auch hier nicht schwer zu erkennen ist, wenn gleich der strenge Beweis derselben erst weiter hin gegeben werden kann. Es besteht nemlich eine jede algebraische Funktion aus Theilen, die durch die Addition, oder Subtraktion, oder Multiplication, oder Division unter einander verbunden, und theils rational, theils irrational sind. Man nenne also die Größen, welche die Funktion ausmachen, Theile der Funktion. Dann suche man das Differenzial eines jeden Theils so, als wenn nur dieser Theil veränderlich und die übrigen alle beständige Größen wären, und vereinige darauf alle gefundene Differenzialien zu einer Summe. Vermittelst dieser Regel lassen sich alle Funktionen ohne Ausnahme, selbst die Transcendenten differenziiren, wie nachher gezeigt werden wird.

§. 171.

Um diese Regel zu erläutern bestehe zuvörderst y aus zwey Theilen, die entweder durch die Addition oder durch die Subtraktion mit einander verbunden sind, oder es sey $y = p \pm q$. Man denke sich also erstlich bloß p als eine veränderliche, und q als eine beständige Größe, wo man denn das Differenzial dp findet. Dann nehme man bloß $\pm q$ veränderlich an, und lasse p beständig seyn, wodurch man

man das Differenzial $\pm dq$ erhält. Aus diesen beyden Differenzialien findet man nun das gesuchte Differenzial so, daß $dy = dp \pm dq$ wird, gerade so, wie wir es bereits gefunden haben. Hieraus fällt zugleich in die Augen, daß auch das Differenzial solcher Funktionen, die aus mehrern entweder zu einander addirten oder von einander subtrahirten Theilen bestehen, nach dieser Regel gefunden werden kann. Ist z. B. $y = p \pm q \pm r \pm s$, so findet man darnach $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$, welches mit dem Obigen auf das genaueste übereinstimmt.

§. 172.

Sind die Theile mit einander multiplicirt, und also $y = pq$, so ist bekannt, daß das Differenzial, wenn man bloß p als eine veränderliche Größe betrachtet, qdp, und wenn man bloß q veränderlich seyn läßt, pdq ist. Addirt man aber diese beyden Differenzialien, so erhält man das gesuchte Differenzial $dy = qdp + pdq$, so wie es oben gefunden worden ist. Sind mehrere Größen mit einander multiplicirt, und also $y = pqrs$: so erhält man, wenn man nach und nach jede von diesen Größen allein veränderlich seyn läßt, die Differenzialien

$$qrsdp, \quad prsdq, \quad pqsdr, \quad pqrds,$$

und die Summe derselben giebt das gesuchte Differenzial

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqsdr$$

ganz so wie es oben gefunden wurde. Das Differenzial besteht daher jedesmal aus so viel Theilen, als Theile in der Funktion addirt oder subtrahirt oder mit einander multiplicirt sind.

§. 173.

Wenn die Theile der Funktion durch die Division verbunden sind, und also $y = \frac{p}{q}$ ist: so lasse man nach der gegebenen Regel erst bloß p veränderlich seyn. Weil also q eine beständige Größe ist, so ist das Differenzial $= \frac{dp}{q}$. Dann nehme man bloß q als eine veränderliche Größe an, wodurch, weil $y = pq^{-1}$ ist, das Differenzial $= -\frac{pdq}{qq}$ wird. Vereiniget man nun die gefundenen Differenzialien, so wird das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq}$$

so wie wir es bereits oben gehabt haben. Ist $y = \frac{pq}{rs}$, so findet man, wenn man wieder die einzelnen Größen p, q, r, und s nach und nach als veränderliche Größen betrachtet, die Differenzialien

$$\frac{qdp}{rs};\ \frac{pdq}{rs};\ \frac{-pqdr}{rrs};\ \frac{-pqds}{rss};$$

und es wird daher

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqsdr - pqrds}{rrss}.$$

§. 174.

Wenn also nur die einzelnen Theile, woraus die Funktion besteht, so beschaffen sind, daß man das Differenzial derselben finden kann: so ist man auch zugleich im Stande das Differenzial der ganzen Funktion zu finden. Wenn nun die Theile rationale Funktionen sind, so lassen sich ihre Differenzialien nicht nur nach den oben ertheilten Regeln finden, sondern man kann dieselben auch nach der mitgetheilten allgemeinen Regel erforschen; sind aber die Theile irrational, so kann man, da sich die Irrational-Größen auf Potestäten mit gebrochenen Exponenten reduciren lassen, das Diffe-

Differenzial derselben nach der Regel für die Differenziation der Potestäten, wornach $d . x^n = nx^{n-1}dx$ ist, finden. Und da aus eben dieser Quelle auch die Regeln für die Differenziation solcher irrationalen Ausdrücke, die außerdem noch andere irrationale Größen enthalten, fließen, so erhellet, daß die hier gegebene und weiter hin zu beweisende allgemeine Regel, verbunden mit der Regel für die Differenziation der Potestäten zur Erfindung der Differenzialien aller algebraischen Funktionen hinreichend ist.

§. 175.

Aus diesem allen folgt sehr deutlich, daß, wenn y irgend eine algebraische Funktion von x ist, das Differenzial von y die Form hat, $dy = pdx$, und daß der Werth von p nach den ertheilten Regeln allemal gefunden werden kann. Es ist aber auch p eine algebraische Funktion von x, weil es durch keine andere Operationen gefunden wird, als die in den algebraischen Funktionen gewöhnlichen. Wenn daher y eine algebraische Funktion von x ist, so ist auch $\frac{dy}{dx}$ eine algebraische Funktion von x; und ist auch z eine algebraische Funktion von x, so daß $dz = qdx$ ist, so ist auch, weil q eine algebraische Funktion von x ist, $\frac{dz}{dy}$ eine algebraische Funktion von x, indem $\frac{dz}{dy} = \frac{p}{q}$ ist. Wenn also Ausdrücke wie $\frac{dz}{dy}$ in einem Ausdrucke, der übrigens algebraisch ist, vorkommen, so hindern dieselben nicht, daß der ganze Ausdruck algebraisch sey, wofern nur y und z algebraische Funktionen sind.

§. 176.

Man kann diesen Schluß auch auf die zweyten und übrigen höhern Differenzialien ausdehnen. Bleibt nemlich y eine algebraische Funktion von x, und setzt man $dy = p\,dx$, und $dp = q\,dx$; so ist, wenn man das Differenzial dx als eine beständige Größe betrachtet, $ddy = q\,dx^2$, wie oben gezeigt worden ist. Da nun der angeführten Gründe wegen q eine algebraische Funktion von x ist, so ist auch $\frac{ddy}{dx^2}$ nicht nur eine endliche Größe, sondern auch eine algebraische Funktion von x, wenn y eine algebraische Funktion von x ist. Auf eben die Art erhellet, daß auch $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$; rc. algebraische Funktionen von x seyn werden, wenn y eine solche ist; und wenn z ebenfalls eine algebraische Funktion von x ist, so sind auch alle endliche Ausdrücke, die aus den Differenzialien aller Ordnungen von y und z und aus dx zusammengesetzt sind, z. B. $\frac{ddy}{ddz}$; $\frac{d^3y}{dzddy}$; $\frac{dxd^4y}{dy^3ddz}$; rc. algebraische Funktionen von x.

§. 177.

Da also die Art und Weise erklärt worden ist, wie man das erste Differenzial einer jeden algebraischen Funktion von x findet; so können wir nunmehr auf eben die Art die zweyten und höhern Differenzialien finden. Ist nemlich y irgend eine algebraische Funktion von x, so findet man durch Aufsuchung des Differenzials $dy = p\,dx$ den Werth von p. Differenziirt man nun von neuem, und findet man $dp = q\,dx$, so wird, wenn man dx beständig seyn läßt, $ddy = q\,dx^2$, und auf diese Weise wird das zweyte Differenzial gefunden. Differenziirt man nun weiter, und sucht man $dq = r\,dx$, so erhält man das dritte Differenzial $d^3y = r\,dx^3$,

$= r dx^3$, und so lassen sich, wenn man auf diesem Wege fortfährt, alle übrige höhere Differenzialien finden, weil die Größen p, q, r, 2c. insgesammt algebraische Funktionen von x sind, deren Differenziation nach den gegebenen Regeln in unserer Gewalt steht. Man muß also zu diesem Ende die Differenziation fortsetzen. Läßt man nemlich bey der Differenziation von y die dx weg, so findet man $\frac{dy}{dx} = p$, und differenziirt man diese Größe von neuem, und dividirt dabey das Kommende durch dx, welches geschieht, wenn man allenthalben dx wegläßt, so bekommt man $q = \frac{ddy}{dx^2}$. Auf eine ähnliche Art erhält man $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w.

I. Ist also $y = \frac{aa}{aa + xx}$, so findet man das erste sowohl als die folgenden Differenzialien auf diese Art.

Zuvörderst findet man durchs Differenziiren und durchs Dividiren mit dx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa + xx)^2}; \text{ und hieraus ferner}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa + xx)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4 - 24aax^3}{(aa + xx)^4};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa + xx)^5};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa + xx)^6};$$

2c.

II. Ist $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$ so ist das erste und die folgenden Differenzialien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}};$$

$$\frac{d^6y}{dx^5} = \frac{225x+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-xx)^{\frac{13}{2}}};$$

ꝛc.

Diese Differenzialien lassen sich leicht weiter fortsetzen, allein das Gesetz, nach welchem die Glieder derselben auf einander folgen, entdeckt sich nicht so leicht, obgleich der Coefficient der höchsten Potestät von x immer ein Produkt aus den Zahlen von 1 bis zu der Ordnung des Differenzials, welches man sucht, ist. Setzt man indeß die Differenziation weiter fort, und überlegt dabey das Gefundene genau, so findet man, daß überhaupt, wenn $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ ist,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots.n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}}\left(x^n + \tfrac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}\,x\right.$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2\ldots6}x^{n-6} +$$
$$\left.\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{n(n-1)\ldots..(n-7)}{1.2\ldots..8}x^{n-8} + \text{ꝛc.}\right)$$

ist. Dergleichen Exempel dienen also nicht bloß dazu, um sich eine Fertigkeit im Differenziiren zu erwerben, sondern es sind auch die Gesetze, die man bey den Differenzialien aller Ordnungen wahrnimmt, an und für sich sehr merkwürdig, und leiten zu verschiedenen andern Erfindungen.

Sechs-