Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Sechstes Capitel. Von der Differenziation der transcendenten Funktionen.

Sechstes Capitel.

Von der Differenziation der transcendenten Funktionen.

§. 178.

Von den unzähligen Arten der transcendenten oder nicht algebraischen Größen, welche die Integral-Rechnung an die Hand giebt, haben wir in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen einige häufiger vorkommende Gattungen dieser Größen untersuchen können, nemlich diejenigen, welche die Lehre von den Logarithmen und den Zirkelgrößen darbietet. Da wir nun die Natur dieser Größen so deutlich aus einander gesetzt haben, daß man sich ihrer in der Rechnung eben so leicht als der algebraischen Größen bedienen kann: so wollen wir in dem gegenwärtigen Capitel die Differenzialien derselben aufsuchen, damit ihre Beschaffenheit und Eigenschaften noch deutlicher erkannt werden mögen. Auf diese Art wird zugleich der Weg zur Integral-Rechnung, welches die eigentliche Quelle der transcendenten Größen ist, gebahnt werden.

§. 179.

Zuvörderst kommen also die logarithmischen Größen, oder solche Funktionen von x zur Betrachtung, welche außer algebraischen Ausdrücken auch einen Logarithmen von x, oder eine Funktion desselben enthalten. Da nun die algebraischen Größen hierbey keine Schwierigkeit machen können, so kommt es lediglich auf die Erfindung des Differenzials des Logarithmen einer jeden Funktion von x an. Ob es aber gleich sehr viel Arten von Logarithmen giebt, so wollen wir doch hier vorzüglich nur die hyperbolischen Logarithmen betrachten, und wir können uns darauf einschränken, weil die Logarithmen verschiedener Systeme ein beständiges Verhältniß zu einander haben, und man also aus dem hyperbolischen Logarithmen sehr leicht einen jeden andern Logarithmen finden kann. Ist nemlich der hyperbolische Logarithme einer Funktion $p = lp$, so ist der Logarithme eben dieser Funktion aus einem andern Systeme $= m\,lp$, wenn m die Zahl bedeutet, welche das Verhältniß der Logarithmen dieses Systems zu den hyperbolischen Logarithmen ausdruckt. Es soll daher der Ausdruck lp in der gegenwärtigen Untersuchung immer den hyperbolischen Logarithmen von p bedeuten.

§. 180.

Wir wollen also das Differenzial des hyperbolischen Logarithmen von x aufsuchen, und dabey $y = lx$ setzen, so daß der Werth des Differenzials dy zu bestimmen sey. Setzt man nun $x + dx$ anstatt x, so geht y in $y^{I} = y + dy$ über, und es wird daher

$$y + dy = l(x + dx) \text{ und } dy = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x}).$$

Aus der Einleitung in die Analysis des Unendlichen ist aber bekannt, daß $l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{etc.}$ ist, und setzt man daher $\frac{dx}{x}$ anstatt z, so wird

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{etc.}$$

und

und da alle folgende Glieder dieser Reihe gegen das erste verschwinden, so wird

$$d.lx = dy = \frac{dx}{x},$$

und folglich das Differenzial jedes andern Logarithmen, der sich zu dem hyperbolischen wie $n:1$ verhält, $= \frac{n\,dx}{x}$.

§. 181.

Wenn also der Logarithme irgend einer Funktion von x, die wir p nennen wollen, also lp gegeben wird, so findet man auf eben dem Wege, daß das Differenzial desselben $= \frac{dp}{p}$ ist, und so ergiebt sich für die Erfindung der Differenzialien der Logarithmen folgende Regel. Man suche das Differenzial der Größe p, deren Logarithme gegeben ist, und dividire dasselbe durch diese Größe p. Diese Regel fließt auch aus dem Ausdrucke $\frac{p^0 - 1^0}{0}$, auf welchen wir oben den Logarithmen von p reducirt haben. Es sey $\omega = 0$, so wird, weil $lp = \frac{p^\omega - 1}{\omega}$ ist, $d.lp = d.\frac{1}{\omega}p^\omega = p^{\omega - 1}dp = \frac{dp}{p}$, indem $\omega = 0$ ist. Es ist aber hierbey zu bemerken, daß $\frac{dp}{p}$ das Differenzial des hyperbolischen Logarithmen von p ist, so daß man also, wenn der gemeine Logarithme von p gegeben würde, das Differenzial $\frac{dp}{p}$ noch durch die Zahl 0,43429448 rc. multipliciren müßte.

§. 182.

Vermittelst dieser Regel kann man das Differenzial des Logarithmen einer jeden Funktion von x sehr leicht finden, welches folgende Beyspiele bestätigen werden.

I. Ist $y = lx$; so ist $dy = \frac{dx}{x}$.

II. Ist $y = lx^n$; so setze man $x^n = p$, so daß also $y = lp$ wird. Alsdenn hat man $dy = \frac{dp}{p}$, und weil $dp = nx^{n-1}dx$ ist, so wird

$$dy = \frac{ndx}{x}.$$

Eben dieses erhellet aus der Natur der Logarithmen. Denn da $lx^n = nlx$ ist, so ist auch $d.lx^n = nd.lx = \frac{ndx}{x}$.

III. Ist $y = l(1 + xx)$; so ist $dy = \frac{2xdx}{1 + xx}$.

IV. Ist $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$; so ist, weil $y = -l\sqrt{(1-xx)} = -\frac{1}{2}l(1 - xx)$ ist,

$$dy = \frac{xdx}{1 - xx}.$$

V. Ist $y = l\frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}$, so ist, weil $y = lx - \frac{1}{2}l(1 + xx)$ ist,

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1 + xx} = \frac{dx}{x(1 + xx)}.$$

VI. Ist $y = l(x + \sqrt{(1 + xx)})$ so wird

$$dy = \frac{dx + xdx : \sqrt{(1 + xx)}}{x + \sqrt{(1 + xx)}} = \frac{xdx + dx\sqrt{(1 + xx)}}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}},$$

und da der Zähler und Nenner dieses Bruchs durch $x + \sqrt{(1 + xx)}$ theilbar sind, so wird

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 + xx)}}.$$

VII.

VII. Ist $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)})$ so setze man $x\sqrt{-1} = z$. Da also nun $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(z + \sqrt{(1+zz)})$ ist, so ist wegen des Vorhergehenden $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}} dz : \sqrt{(1+zz)}$; und weil $dz = dx\sqrt{-1}$ ist, so wird

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Ob also gleich der gegebene Logarithme imaginäre Größen in sich schließt, so wird demohngeachtet das Differenzial desselben reell.

§. 183.

Wenn die Größe, deren Logarithme gegeben wird, aus Faktoren besteht, so läßt sich der Logarithme derselben in mehrere andere zerfällen. Ist z. B. $y = lpqrs$, so wird, weil $y = lp + lq + lr + ls$ ist, $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$. Die Zerfällung findet ebenfalls statt, wenn die Größe, deren Logarithme differenziirt werden soll, ein Bruch ist. Ist nemlich $y = l\frac{pq}{rs}$, so wird, weil $y = lp + lq - lr - ls$ ist, $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$. Auch die Potestäten machen keine Schwierigkeit. Denn ist $y = l\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$, so wird, weil $y = mlp + nlq - \mu lr - \nu ls$ ist, $dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}$.

1. Ist

I. Ist $y = l(a+x)(b+x)(c+x)$ so wird, weil alsdenn $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$ ist

$$dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}.$$

II. Ist $y = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$, so wird $y = \frac{1}{2} l(1+x) - \frac{1}{2} l(1-x)$ und also

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2} dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}.$$

III. Ist $y = \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, so ist $y = \frac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)}+x)$ $- \frac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)} - x)$, und also

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}.$$

Eben dieses Differenzial findet man noch leichter, wenn man den irrationalen Nenner des Bruchs $\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$ durch die Multiplication des Zählers und Nenners mit $\sqrt{(1+xx)}+x$ wegschafft. Man erhält nemlich alsdann

$$y = \frac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)}+x)^2 = l(\sqrt{(1+xx)}+x)$$

und davon ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} \text{ ist.}$$

IV. Ist $y = l \frac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}$, so setze man den Zähler dieses Bruchs, $\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)} = p$, und den Nenner, $\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)} = q$, wodurch $y = l\frac{p}{q}$ $= lp - lq$, und $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$ wird. Da nun

$$dp = \frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} - \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}(\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)})$$

$$= \frac{-q\,dx}{2\sqrt{(1-xx)}};\text{ und}$$

dq=

$$dq = \frac{dx}{2\surd(1+x)} + \frac{dx}{2\surd(1-x)} = \frac{pdx}{2\surd(1-xx)}$$ ist, so wird

$$\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-qdx}{2p\surd(1-xx)} - \frac{pdx}{2q\surd(1-xx)} = \frac{-(pp+qq)dx}{2pq\surd(1-xx)}$$

und da $pp + qq = 4$, und $pq = 2x$ ist, so wird

$$dy = -\frac{dx}{x\surd(1-xx)}.$$

Dieses Differenzial findet man aber auf eine leichtere Art, wenn man den gegebenen Logarithmen auf diese Art verwandelt,

$$y = l\frac{1+\surd(1-xx)}{x} = l\left(\frac{1}{x} + \surd(\frac{1}{xx}-1)\right)$$

indem man nemlich den Zähler und den Nenner durch $\surd(1+x) + \surd(1-x)$ multiplicirt. Denn setzt man dabey $\frac{1}{x} + \surd(\frac{1}{xx} - 1) = p$, so wird

$$dp = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3\surd(\frac{1}{xx}-1)} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx\surd(1-xx)}$$

$$= \frac{-dx(1+\surd(1-xx))}{xx\surd(1-xx)},$$ und also, da $p = \frac{1+\surd(1-xx)}{x}$

ist

$$dy = \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x\surd(1-xx)},$$ wie vorhin.

§. 184.

Da nun die ersten Differenzialien, wenn man sie durch dx dividirt, algebraische Größen werden, so lassen sich die zweyten und die folgenden Differenzialien nach den Vorschriften des vorhergehenden Capitels leicht finden, vorausgesetzt, daß das Differenzial dx als eine beständige Größe betrachtet wird. So ist, wenn man $y = lx$ setzt

dy =

$$dy = \frac{dx}{x}, \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x};$$

$$ddy = \frac{-dx^2}{x^2}, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2};$$

$$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}, \text{ und } \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{2}{x^3};$$

$$d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4}, \text{ und } \frac{d^3y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4};$$

ꝛc.

Und wenn p eine algebraische Größe, und $y = lp$ ist, so sind auch, wenn gleich y keine algebraische Größe ist, doch $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$; ꝛc. algebraische Funktionen von x.

§. 185.

Nachdem auf diese Art die Differenziation der Logarithmen erklärt worden ist, so lassen sich die Funktionen, die aus algebraischen und logarithmischen Größen bestehen, leicht differenziiren; und eben so wenig Schwierigkeit machen die Größen, die allein aus den Logarithmen zusammengesetzt werden. Folgende Beyspiele werden dieses deutlich machen.

I. Ist $y = (lx)^2$, so setze man $lx = p$. Da nun $y = p^2$ ist, so wird $dy = 2pdp$, und da $dp = \frac{dx}{x}$ ist, so ist

$$dy = \frac{2dx}{x} lx.$$

II. Eben so wird, wenn $y = (lx)^n$ ist, $dy = \frac{ndx}{x}(lx)^{n-1}$, und wenn also $y = \sqrt{lx}$ ist, so ist, weil alsdenn $n = \frac{1}{2}$ wird,

$$dy = \frac{dx}{2x\sqrt{lx}}.$$

III. Ist ferner p irgend eine Funktion von x, und $y = (lp)^n$ so wird $dy = \frac{ndp}{p}(lp)^{n-1}$. Da nun das Differenzial von p nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann, so ist dadurch auch das Differenzial von y bekannt.

IV. Ist $y = lp . lq$, und sind p und q Funktionen von x, so ist nach der obigen von den Faktoren gegebenen Regel $dy = \frac{dp}{p}lq + \frac{dq}{q}lp$.

V. Wenn $y = xlx$ ist, so findet man nach eben der Regel $dy = dxlx + \frac{xdx}{x} = dxlx + dx$.

VI. Ist $y = x^m lx - \frac{1}{m}x^m$, so findet man, wenn man die Differenzialien der Theile aufsucht, $d . x^m lx = mx^{m-1}dxlx + x^{m-1}dx$, und $d . \frac{1}{m}x^m = x^{m-1}dx$. Es wird also $dy = mx^{m-1}dxlx$.

VII. Ist $y = x^m(lx)^n$ so wird $dy = mx^{m-1}dx(lx)^n + nx^{m-1}dx(lx)^{n-1}$.

VIII. Kommen Logarithmen von Logarithmen vor, z. B. wenn $y = llx$ ist, so setze man $lx = p$, wodurch $y = lp$, und $dy = \frac{dp}{p}$ wird. Es ist aber $dp = \frac{dx}{x}$, und also wird $dy = \frac{dx}{xlx}$.

IX. Ist $y = lllx$ so wird, wenn man $lx = p$ setzt, $y = llp$, und also nach dem vorhergehenden Exempel $dy = \frac{dp}{plp}$. Da nun $dp = \frac{dx}{x}$ ist, so wird $dy = \frac{dx}{xlx . llx}$.

§. 186.

Nach dieser Erklärung der Differenziation der Logarithmen wollen wir zu den Exponential-Größen oder zu den Potestäten, deren Exponent eine veränderliche Größe ist, fortgehen. Von dergleichen Funktionen von x lassen sich die Differenzialien durch die Differenziation der Logarithmen auf folgende Art finden. Soll das Differenzial von a^x gefunden werden, so setze man $y = a^x$, wodurch denn, wenn man die Logarithmen nimmt, $ly = xla$ wird. Differenziirt man nun, so wird $\frac{dy}{y} = dxla$, und also $dy = ydxla$; und da $y = a^x$ ist, so wird ferner $dy = a^x dxla$, und dieses ist das gesuchte Differenzial von a^x. Auf eine ähnliche Art findet man, wenn p eine Funktion von x ist, daß das Differenzial der Exponential-Größe $a^p = a^p dpla$ ist.

§. 187.

Eben dieses Differenzial kann aber auch aus dem, was in der Einleitung über die Natur der Exponential Größen gesagt worden ist, unmittelbar abgeleitet werden. Es sey der Ausdruck a^p gegeben, worin p eine Funktion von x bedeute, so daß, wenn man $x + dx$ statt x setzt, p in $p + dp$ übergehe. Setzt man daher $y = a^p$, so wird, wenn x in $x + dx$ übergeht, $y + dy = a^{p+dp}$, und also $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^{dp} - 1)$. Nun ist aber gezeigt worden, daß man jede Exponential-Größe a^z durch folgende Reihe, $1 + zla + \frac{z^2(la)^2}{2} + \frac{z^3(la)^3}{6} +$ rc. ausdrucken kann. Es wird demnach $a^{dp} = 1 + dpla + \frac{dp^2(la)^2}{2} +$ rc., und $a^{dp} - 1 = dpla$, weil die folgenden Glieder insgesamt gegen dpla verschwinden; und es ist folglich $dy = d.a^p = a^p dpla$.

Es

Es ist also das Differenzial einer Exponential-Größe ein Produkt aus der Exponential-Größe, aus dem Differenziale des Exponenten, dp, und aus dem Logarithmen der beständigen Größe a, in der veränderlichen Potestät des gedachten Exponenten.

§. 188.

Ist also e die Zahl, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist, so ist das Differenzial von $e^x = e^x dx$ Betrachtet man daher dx als eine beständige Größe, so wird das Differenzial von $e^x dx = e^x dx^2$, und dieses ist das zweyte Differenzial von e^x. Eben so wird das dritte Differenzial $= e^x dx^3$. Ist daher $y = e^{nx}$, so wird $\frac{dy}{dx} = ne^{nx}$; $\frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}$; $\frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx}$; u. s. f. Man sieht hieraus, daß das erste, das zweyte und die folgenden Differenzialien von e^{nx} in einer geometrischen Progression stehen, und daß $\frac{d^my}{dx^m} = n^m e^{nx}$, und folglich $\frac{d^my}{y\,dx^m}$ eine beständige Größe $= n^m$ ist.

§. 189.

Wenn die zu einer veränderlichen Potestät erhobene Größe selbst eine veränderliche Größe ist, so findet man das Differenzial derselben auf eine ähnliche Art. Es seyen p und q Funktionen von x, und $y = p^q$. Nimmt man nun die Logarithmen, so wird $ly = qlp$, und differenziirt man, so wird $\frac{dy}{y} = dqlp + \frac{qdp}{p}$, woraus sich denn $dy = ydqlp + \frac{ydp}{p} = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$ ergiebt, weil $y = p^q$ ist.

Es besteht also dieses Differenzial aus zwey Theilen, wovon der erste $p^q dq lp$ gefunden wird, wenn man die gegebene Größe p^q auf die Art differenziirt, als wenn p eine beständige und bloß der Exponent q eine veränderliche Größe wäre; der andere hingegen, nemlich $qp^{q-1}dp$, wenn man in der gegebenen Größe p^q den Exponenten q als eine beständige, und bloß p als eine veränderliche Größe behandelt. Es hätte daher dieses Differenzial auch nach der oben mitgetheilten allgemeinen Regel gefunden werden können.

§. 190.

Es läßt sich aber auch das Differenzial von p^q aus dem, was über die Natur der Exponential-Größen gesagt worden ist, herleiten. Ist nemlich $y = p^q$, so wird, wenn man $x + dx$ anstatt x setzt, $y + dy = (p + dp)^{q+dq}$, und löset man diesen Ausdruck auf die gewöhnliche Art in eine Reihe auf, so wird

$$y+dy = p^{q+dq} + (q+dq)p^{q+dq-1}dp + \frac{(q+dq)(q+dq-1)}{1 \cdot 2}p^{q+dq-2}dp^2$$

$+$ ꝛc.; und also

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)p^{q+dq-1}dp,$$

weil alle folgende Glieder, die eine höhere Potestät von dp enthalten, gegen $(q + dq)p^{q+dq-1}dp$ verschwinden. Nun ist aber $p^{q+dq} - p^q = p^q(p^{dq} - 1) = p^q(1 + dqlp + \frac{dq^2(lp)^2}{2} +$ ꝛc. $- 1) = p^q dq lp$, und setzt man in dem andern Gliede q für $q + dq$, so wird daraus $qp^{q-1}dp$. Folglich ist das gesuchte Differenzial wieder das vorige, oder es ist $dy = p^q dq lp + qp^{q-1}dp$.

§. 191.

Noch leichter leitet man dieses Differenzial aus dem Angeführten auf folgende Art her. Da, wenn e die Zahl

bedeu-

bedeutet, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist, $p^q = e^{qlp}$ wird, indem beyder Größen Logarithmen $= qlp$ sind: so wird $y = e^{qlp}$. Da nun hier die zur veränderlichen Potestät erhobene Größe eine beständige Größe ist: so wird $dy = e^{qlp}(dqlp + \frac{qdp}{p})$ wie vorhin §. 187. gelehret worden ist. Setzt man aber nun wieder p^q anstatt e^{qlp}, so wird

$$dy = p^q dqlp + p^q qdp : p = p^q dqlp + qp^{q-1}dp.$$

Wenn also $y = x^x$ ist, so wird $dy = x^x dxlx + x^x dx$; und daraus lassen sich denn auch die fernern Differenzialien leicht finden. Es wird nemlich

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x} + (1 + lx)^2\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x\left((1 + lx)^3 + \frac{3(1 + lx)}{x} - \frac{1}{xx}\right)$$

ꝛc.

§. 192.

Unter den Differenzialien derer Funktionen, die Exponential-Größen in sich schließen, sind vorzüglich folgende Beyspiele zu merken, die aus der Differenziation der Formel $e^x p$ entspringen. Es ist aber

$$d \cdot e^x p = e^x dp + e^x p dx = e^x(dp + pdx).$$

I. Ist $y = e^x x^n$, so ist $dy = e^x nx^{n-1}dx + e^x x^n dx$, oder

$$dy = e^x dx(nx^{n-1} + x^n).$$

II. Ist $y = e^x(x - 1)$; so ist

$$dy = e^x x dx.$$

III. Ist $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$; so ist

$$dy = e^x xx dx.$$

IV. Ist $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$; so ist

$$dy = e^x x^3 dx.$$

§. 193.

Wenn die Exponenten ebenfalls Exponential-Größen sind, so wird die Differenziation nach eben den Regeln verrichtet. Soll z. B. das Differenzial von e^{e^x} gesucht werden, so setze man $e^x = p$, wodurch denn $e^{e^x} = e^p$, und $dy = e^p dp$ wird. Es ist aber $dp = e^x dx$, und wenn also

$$y = e^{e^x} \text{ ist, so wird } dy = e^{e^x} e^x dx;$$

und wenn

$$y = e^{e^{e^x}} \text{ ist, so wird } dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx.$$

Ist hingegen $y = p^{q^r}$, so setze man $q^r = z$, wodurch $dy = p^z dzlp + zp^{z-1}dp$ wird. Da nun aber $dz = q^r drlp + rq^{r-1}dp$ ist, so wird $dy = p^z q^r drlp \,.\, lp + p^z rq^{r-1}dqlp + p^z q^r dp : p$. Wenn also $y = p^{q^r}$ ist, so wird

$$dy = p^{q^r} q^r (drlp \,.\, lq + \frac{rdqlp}{q} + \frac{dp}{p}).$$

Auf diese Weise lassen sich also die Differenzialien von allen Arten der Exponential-Größen finden.

§. 194.

Wir wollen daher zu denjenigen transcendenten Größen fortgehen, zu welchen uns die Betrachtung der Kreisbogen geführt hat. Es sey von einem Kreise, dessen Halbmesser beständig $= 1$ gesetzt werden soll, ein Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, gegeben, (diesen Bogen wollen wir durch $A.\sin.x$ ausdrucken), und dabey sey das Differenzial dieses Bogens, oder der Zuwachs, welchen er bekommt, wenn man $x + dx$ anstatt x setzt, zu bestimmen. Dies läßt sich vermittelst der Logarithmen thun, weil wir in der Einleitung gezeigt

zeigt haben, daß der Ausdruck A . sin. x auf diesen logarithmischen Ausdruck gebracht werden kann: $\frac{1}{\surd -1} l(\surd(1-xx) + x\surd -1)$. Setzt man also $y = A . \sin. x$, so ist auch $y = \frac{1}{\surd -1}(\surd(1-xx) + x\surd -1)$ und daraus findet man durch die Differenziation

$$dy = \frac{\frac{1}{\surd -1}\left(\frac{-x\,dx}{\surd(1-xx)} + dx\surd -1\right)}{\surd(1-xx) + x\surd -1}$$

$$= \frac{dx(x\surd -1 + \surd(1-xx))}{(\surd(1-xx) + x\surd -1)\surd(1-xx)}$$

und es wird also $dy = \frac{dx}{\surd(1-xx)}$.

§. 195.

Es läßt sich aber dieses Differenzial eines Kreisbogens noch leichter ohne Hülfe der Logarithmen finden. Ist nemlich $y = A . \sin. x$, so ist x der Sinus des Bogens y, oder $x = \sin. y$. Da nun y, wenn man $x + dx$ anstatt x setzt, in $y + dy$ übergeht, so wird $x + dx = \sin. (y + dy)$. Da aber

$\sin. (a + b) = \sin. a . \cos. b + \cos. a . \sin. b$ ist, so wird

$\sin. (y + dy) = \sin. y . \cos. dy + \cos. y . \sin. dy$.

Nun ist der Sinus eines verschwindenden Bogens dy dem Bogen dy selbst, und der Cosinus dem Radius gleich. Daher wird

$\sin. (y + dy) = \sin. y + \cos. y . dy$, und also

$x + dx = \sin. y + \cos. y . dy$.

Da aber $\sin. y = x$ ist, so wird $\cos. y = \surd(1-xx)$, und durch die Substitution dieser Werthe wird $dx = dy\surd(1-xx)$ und also endlich

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}.$$

Das Differenzial eines Bogens, dessen Sinus gegeben ist, ist daher dem Differenziale des Sinus, durch den Cosinus dividirt, gleich.

§. 196.

Da also, wenn p irgend eine Funktion von x ist, und y einen Bogen bedeutet, dessen Sinus $= p$ ist, das Differenzial dieses Bogens $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1 - pp)}}$ ist, und $\sqrt{(1-pp)}$ den Cosinus eben desselben Bogens ausdruckt: so läßt sich hieraus das Differenzial des Bogens finden, dessen Cosinus gegeben ist. Ist nemlich $y = A.\,cos.\,x$, so ist der Sinus eben desselben Bogens $= \sqrt{(1-xx)}$, und also $y = A.\,sin.\,\sqrt{(1-xx)}$. Setzt man also $p = \sqrt{(1 - xx)}$, so wird $dp = \frac{-xdx}{\sqrt{(1 - xx)}}$, und $\sqrt{(1 - pp)} = x$; woraus sich denn $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$ ergiebt. Es ist also das Differenzial eines Bogens, dessen Cosinus gegeben ist, gleich dem Differenziale des Cosinus, negativ genommen, und durch den Sinus eben desselben Bogens dividirt. Eben dieses läßt sich auch auf folgende Art zeigen. Es sey $y = A.\,cos.\,x$. Setzt man $z = A.\,sin.\,x$, so wird $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$. Da aber $y + z = 90^o$ ist, so ist $y + z$ eine beständige Größe, und also $dy + dz = 0$, oder $dy = - dz$. Hieraus folgt $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$ wie vorhin.

§. 197.

§. 197.

Soll das Differenzial eines Bogens gesucht werden, dessen Tangente gegeben worden, so daß $y = A.\text{tang}.\,x$ ist: so ist der Sinus eines Bogens, dessen Tangente x ist, $= \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, und der Cosinus $= \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$. Setzt man also $\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} = p$, so daß $\sqrt{(1-pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$ wird: so wird $y = A.\sin.\,p$, und es ist daher $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. Da aber $p = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ ist, so wird $dp = \frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$; und substituirt man diese Werthe, so findet man $dy = \frac{dx}{1+xx}$. Es ist also das Differenzial eines Bogens, dessen Tangente gegeben ist, gleich dem Differenziale der Tangente, durch das Quadrat der Secante dividirt. Denn wenn x die Tangente ist, so ist $\sqrt{(1+xx)}$ die Secante.

§. 198.

Ist ein Bogen gegeben, dessen Cotangente bekannt ist, so daß $y = A.\cot.\,x$ ist, so setze man die Tangente eben dieses Bogens, oder $\frac{1}{x} = p$, wodurch denn $y = A.\text{tang}.\,p$ und also $dy = \frac{dp}{1+pp}$ wird. Da nun $dp = \frac{-dx}{xx}$ ist, so wird durch die Substitution dieses Werthes $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, welches das Differenzial der Cotangente negativ genommen, und durch das Quadrat der Cosecante dividirt ist.

Ist ferner $y = A.\sec. x$, so wird, weil alsdenn $y = A.\cos.\frac{1}{x}$ ist, $dy = \frac{dx}{xx\surd(1-\frac{1}{xx})} = \frac{dx}{x\surd(xx-1)}$. Ist aber $y = A.\operatorname{cosec}. x$; so wird $y = A.\sin.\frac{1}{x}$, und folglich $dy = \frac{-dx}{x\surd(xx-1)}$.

Oft kommt auch der Quersinus vor. Ist daher $y = A.\operatorname{sv}. x$, so wird $y = A.\cos. (1-x)$; und da der Sinus dieses Bogens $= \surd(2x-xx)$ ist, so wird $dy = \frac{dx}{\surd(2x-xx)}$.

§. 199.

Ob also gleich jeder Bogen, dessen Sinus, oder Cosinus, oder Tangente, oder Cotangente, oder Secante, oder Cosecante, oder Quersinus gegeben ist, zu den transcendenten Größen gehört: so ist doch sein Differenzial, wenn es durch dx dividirt wird, eine algebraische Größe, und eben das sind daher auch seine zweyten, dritten und folgenden Differenzialien, wenn sie durch die zu ihnen gehörigen Potestäten von dx dividirt werden. Damit aber diese Differenziation desto geläufiger werde, mögen noch folgende Beyspiele hier stehen.

I. Ist $y = A.\sin. 2x\surd(1-xx)$ so setze man $p = 2x\surd(1-xx)$ so daß $y = A.\sin. p$ wird; alsdann ist $dy = \frac{dp}{\surd(1-pp)}$. Nun ist aber $dp = 2dx\surd(1-xx) - \frac{2xxdx}{\surd(1-xx)} = \frac{2dx(1-2xx)}{\surd(1-xx)}$, und $\surd(1-pp) = 1-2xx$. Substituirt man daher diese Werthe, so wird $dy = \frac{2dx}{\surd(1-xx)}$.

Dies

Dies erhellet auch daraus, weil $2x\sqrt{(1-xx)}$ der Sinus des doppelten Bogens ist, wenn x den Sinus des einfachen Bogens bedeutet. Hiernach ist nemlich $y = 2A.\sin.x$, und also $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

II. Ist $y = A.\sin.\frac{1-xx}{1+xx}$; so setze man $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, wodurch $dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2}$, und $\sqrt{(1-pp)} = \frac{2x}{1+xx}$ wird. Da also $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$ ist, so wird $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

III. Ist $y = A.\sin.\sqrt{\frac{1-x}{2}}$, so setze man $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$. Hierdurch wird $\sqrt{(1-pp)} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, und $dp = \frac{-dx}{4\sqrt{(\frac{1-x}{2})}}$; folglich $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$.

IV. Ist $y = A.\text{tang}.\frac{2x}{1-xx}$, so setze man $p = \frac{2x}{1-xx}$, wodurch $1 + pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$, und $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$ wird. Da also $dy = \frac{dp}{1+pp}$, nach der §.197. für die Tangenten gefundenen Regel, so ist $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

V. Ist $y = A.\text{tang}.\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, so wird, wenn man $\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x} = p$ setzt, $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx}$, und $1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx} = \frac{2(\sqrt{(1+xx)}-1)\sqrt{(1+xx)}}{xx}$.

Nun

Nun ist aber $dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-1)}{xx\sqrt{(1+xx)}}$.

Da also $dy = \frac{dp}{1+pp}$ ist, so wird $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$ welches man auch daraus erkennt, weil A. tang. $\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$ $= \frac{1}{2}$ A. tang. x ist.

VI. Ist $y = e^{A.\sin.x}$, so läßt sich auch diese Formel nach dem Vorhergehenden differenziiren; es wird nemlich $dy = e^{A.\sin.x}\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Auf diese Art lassen sich also alle Funktionen von x, in welchen außer den Logarithmen und Exponential-Größen auch Kreisbogen vorkommen, differenziiren.

§. 200.

Da die Differenzialien der Bogen, wenn man sie durch dx dividirt, algebraische Größen werden, so lassen sich auch ihre zweyten und folgenden Differenzialien nach dem, was wir von der Differenziation der algebraischen Funktionen gesagt haben, finden. Es sey $y = A.\sin.x$. Da nun $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ist, so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$; und da das Differenzial hiervon den Werth von $\frac{ddy}{dx^2}$ giebt, wenn man dx als eine beständige Größe betrachtet: so sind die Differenzialien von y folgende:

Wenn $y = A.\sin.$ ist, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}};$$ u. wenn man dx beständig nimmt,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

d^3y

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}}$$

2c.

und hieraus schließen wir wie oben §. 177, daß allgemein seyn werde

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots n}{(1 - xx)^{n+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\left(x^n + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} + \right.$$
$$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^{n-6} + \text{2c.}\right)$$

§. 201.

Nun sind noch die Größen, die aus der Umkehrung der bisherigen sich ergeben, oder die Sinus und Tangenten gegebener Bogen, übrig, und wir wollen daher jetzt untersuchen, wie man die Differenzialien dieser Größen findet. Es sey also x ein Kreisbogen, und sin. x sein Sinus, dessen Differenzial gesucht werden soll. Man setze $y = \sin. x$. Weil nun y, wenn man $x + dx$ für x setzt, in $y + dy$ übergeht, so wird

$$y + dy = \sin.(x + dx), \text{ und } dy = \sin.(x + dx) - \sin. x.$$

Da aber $\sin.(x + dx) = \sin. x \cos. dx + \cos. x \sin. dx$, und nach dem was in der Einleitung 1. Th. §. 134. f. gesagt worden,

sin. z

$$\sin. z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \text{ꝛc.}$$

$$\cos. z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

ist: so wird, wenn man die verschwindenden Glieder wegläßt, $\cos. dx = 1$, und $\sin. dx = dx$; folglich $\sin. (x + dx) = \sin. x + dx . \cos. x$. Ist also $y = \sin. x$, so ist $dy = dx . \cos. x$. Das Differenzial des Sinus eines Bogens ist also ein Produkt aus dem Differenziale dieses Bogens in den Cosinus desselben. Ist daher p irgend eine Funktion von x, so ist auf gleiche Art $d . \sin. p = dp . \cos. p$.

§. 202.

Ferner sey $\cos. x$, oder der Cosinus eines Bogens x gegeben, und sein Differenzial zu bestimmen. Es sey also $y = \cos. x$, so wird, wenn man $x + dx$ für x setzt, $y + dy = \cos. (x + dx)$. Da nun $\cos. (x + dx) = \cos. x . \cos. dx - \sin. x . \sin. dx$, und, wie wir so eben gesehen haben, $\cos. dx = 1$, und $\sin. dx = dx$ ist: so wird $y + dy = \cos. x - dx . \sin. x$, und folglich $dy = - dx . \sin. x$. Es ist daher das Differenzial des Cosinus eines jeden Bogens ein Produkt aus dem Differenziale des Bogens, negativ genommen, in den Sinus eben desselben Bogens. Ist also p irgend eine Funktion von x, so ist auch $d . \cos. p = - dp . \sin. p$.

Diese Differenzialien hätte man auch aus dem Vorhergehenden auf folgende Art finden können. Ist $y = \sin. p$, so ist $p = A . \sin. y$, und $dp = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$. Da aber $y = \sin. p$ ist, so ist $\cos. p = \sqrt{(1 - yy)}$, und gebraucht man diese Werthe, so wird $dp = \frac{dy}{\cos. p}$, also $dy = dp . \cos. p$

wie

wie vorhin. Eben so wird, wenn $y = \text{cos}.p$ ist, $\sqrt{(1-yy)} = \text{sin}.p$, und $p = A.\text{cos}.y$; folglich $dp = \frac{-dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{-dy}{\text{sin}.p}$; woraus sich denn $dy = -dp.\text{sin}.p$ wie vorhin ergiebt.

§. 203.

Ist $y = \text{tang}.x$, so wird $dy = \text{tang}.(x + dx) - \text{tang}.x$. Nun ist aber $\text{tang}.(x + dx) = \frac{\text{tang}.x + \text{tang}.dx}{1 - \text{tang}.x.\text{tang}.dx}$, und davon tang. x abgezogen, so bleibt

$$dy = \frac{\text{tang}.dx(1 + \text{tang}.x.\text{tang}.x)}{1 - \text{tang}.x.\text{tang}.dx}$$

übrig. Da ferner die Tangente eines verschwindenden Bogens dx dem Bogen selbst gleich ist, so wird $\text{tang}.dx = dx$, folglich der Nenner des gefundenen Bruchs $1 - dx.\text{tang}.x = 1$, und also $dy = dx(1 + (\text{tang}.x)^2)$. Endlich ist $1 + (\text{tang}.x)^2 = (\text{sec}.x^2) = \frac{1}{(\text{cos}.x)^2}$; und daher wird, wenn $y = \text{tang}.x$ ist, $dy = dx(\text{sec}.x)^2 = \frac{dx}{(\text{cos}.x)^2}$.

Eben dieses Differenzial kann man auch durch die Differenziation der Sinus und Cosinus finden. Denn da $\text{tang}.x = \frac{\text{sin}.x}{\text{cos}.x}$ ist: so wird

$$dy = \frac{dx.\text{cos}.x.\text{cos}.x + dx.\text{sin}.x.\text{sin}.x}{(\text{cos}.x)^2} = \frac{dx}{(\text{cos}.x)^2}$$

weil $(\text{sin}.x)^2 + (\text{cos}.x)^2 = 1$ ist.

§. 204.

§. 204.

Auch auf folgende Art läßt sich dieses Differenzial finden. Da $y = \text{tang.}\, x$ ist, so ist $x = A.\,\text{tang.}\, y$, und also nach dem Obigen $dx = \frac{dy}{1 + yy}$. Da aber $y = \text{tang.}\, x$ ist, so wird $\sqrt{(1 + yy)} = \text{sec.}\, x = \frac{1}{\text{cos.}\, x}$, und also $dx = dy.(\text{cos.}\, x)^2$, und $dy = \frac{dx}{(\text{cos.}\, x)^2}$, wie vorhin. Es ist also das Differenzial der Tangente eines Bogens gleich dem Differenziale dieses Bogens durch das Quadrat des Cosinus desselben dividirt. Auf ähnliche Art findet man das Differenzial der Cotangente. Ist nemlich $y = \text{cot.}\, x$, so wird $x = A.\,\text{cot.}\, y$, und $dx = \frac{-dy}{1 + yy}$. Nun ist aber $\sqrt{(1 + yy)} = \text{cosec.}\, x = \frac{1}{\text{sin.}\, x}$, folglich $dx = -dy.(\text{sin.}\, x)^2$, und $dy = \frac{-dx}{(\text{sin.}\, x)^2}$. Das Differenzial der Cotangente eines Bogens ist daher gleich dem Differenziale dieses Bogens, negativ genommen, und durch das Quadrat des Sinus eben dieses Bogens dividirt. Oder da $\text{cot.}\, x = \frac{\text{cos.}\, x}{\text{sin.}\, x}$ ist, so wird, wenn man diesen Bruch differenzirt,

$$dy = \frac{-dx(\text{sin.}\, x)^2 - dx(\text{cos.}\, x)^2}{(\text{sin.}\, x)^2} = \frac{-dx}{(\text{sin.}\, x)^2}.$$

§. 205.

Ist die Secante eines Bogens gegeben, und also $y = \text{sec.}\, x$; so ist, weil $y = \frac{1}{\text{cos.}\, x}$ ist, $dy = \frac{dx.\,\text{sin.}\, x}{(\text{cos.}\, x)^2} = dx.\,\text{tang.}\, x.\,\text{sec.}\, x.$ Eben so ist, wenn $y = \text{cosec.}\, x$ ist, wegen

wegen $y = \frac{1}{\sin.x}$, $dy = \frac{-dx.\cos.x}{(\sin.x)^2} = -dx.\cot.x.\mathrm{cosec}.x$, und es würde überflüßig seyn, diese Differenziationen durch besondere Regeln zu bestimmen. Ist der Quersinus eines Bogens gegeben, und also $y = \mathrm{sv}.x$, so ist, weil $y = 1 - \cos.x$ ist, $dy = dx.\sin.x$. Es lassen sich also die Differenzialien aller trigonometrischen Linien, da man eine jede derselben durch den Sinus und Cosinus ausdrucken kann, ohne Schwierigkeit finden. Auch reichen die gegebenen Regeln nicht bloß zur Erfindung der ersten Differenzialien, sondern auch zur Erforschung der zweyten und aller folgenden hin. Denn ist $y = \sin.x$, $z = \cos.x$, und dx eine beständige Größe: so ist

$$\begin{array}{llll} y = & \sin.x; & z = & \cos.x; \\ dy = & dx.\cos.x; & dz = & -dx.\sin.x; \\ ddy = & -dx^2.\sin.x; & ddz = & -dx^2.\cos.x; \\ d^3y = & -dx^3.\cos.x; & d^3z = & dx^3.\sin.x; \\ d^4y = & dx^4.\sin.x; & d^4z = & dx^4.\cos.x; \\ & \text{rc.} & & \text{rc.} \end{array}$$

§. 206.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die Differenzialien aller Ordnungen von der Tangente eines Bogens x finden. Denn setzt man $y = \mathrm{tang}.x = \frac{\sin.x}{\cos.x}$, und dx beständig, so ist

$$y = \frac{\sin.x}{\cos.x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\cos.x)^2};$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2\sin.x}{(\cos.x)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{(\text{cos. } x)^4} - \frac{4}{(\text{cos. } x)^2};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \text{ sin. } x}{(\text{cos. } x)^5} - \frac{8 \text{ sin. } x}{(\text{cos. } x)^3};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{(\text{cos. } x)^6} - \frac{120}{(\text{cos. } x)^4} + \frac{16}{(\text{cos. } x)^2};$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720 \text{ sin. } x}{(\text{cos. } x)^7} - \frac{480 \text{ sin. } x}{(\text{cos. } x)^6} + \frac{32 \text{ sin. } x}{(\text{cos. } x)^3};$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{(\text{cos. } x)^8} - \frac{6720}{(\text{cos. } x)^6} + \frac{2016}{(\text{cos. } x)^4} - \frac{64}{(\text{cos. } x)^2}$$

2c.

§. 207.

Nach diesen Regeln lassen sich also alle Funktionen, in welchen Sinus und Cosinus vorkommen, differenziiren, welches durch folgende Beyspiele klar werden wird.

I. Ist $y = 2 \text{ sin. } x . \text{cos. } x = \text{sin. } 2x$, so ist
$dy = 2dx . (\text{cos. } x)^2 - 2dx(\text{sin. } x)^2 = 2dx . \text{cos. } 2x.$

II. Ist $y = \sqrt{\frac{1 - \text{cos. } x}{2}}$, oder $y = \text{sin. } \frac{1}{2}x$, so wird

$dy = \frac{dx . \text{sin. } x}{2\sqrt{2(1 - \text{cos. } x)}}$. Da aber $\sqrt{2(1 - \text{cos. } x)} = 2 \text{ sin. } \frac{1}{2}x$, und $\text{sin. } x = 2 \text{ sin. } \frac{1}{2}x . \text{cos. } \frac{1}{2}x$ ist, so wird ferner $dy = \frac{1}{2}dx . \text{cos. } \frac{1}{2}x$, wie sich auch aus der Form $y = \text{sin. } \frac{1}{2}x$ unmittelbar ergiebt.

III. Ist $y = \text{cos. } l\frac{1}{x}$, so wird, wenn man $l\frac{1}{x} = p$ setzt, $y = \text{cos. } p$, und $dy = - dp . \text{sin. } p$. Da aber $p = l1 - lx$ ist, so wird $dp = \frac{-dx}{x}$, und folglich

$dy = \frac{dx}{x} \text{ sin. } l\frac{1}{x}.$

IV. Ist

IV. Ist $y = e^{\sin. x}$; so wird $dy = e^{\sin. x} dx . \cos. x$.

V. Ist $y = e^{\frac{-n}{\cos. x}}$, so wird $dy = - \frac{e^{\frac{-n}{\cos. x}} n dx . \sin. x}{(\cos. x)^2}$.

VI. Ist $y = l(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})})$ so setze man $e^{\frac{-n}{\sin. x}} = p$. Da nun alsdann $y = l(1 - \sqrt{(1 - p)})$ wird, so findet man $dy = \frac{dp}{2(1 - \sqrt{(1 - p)}) \sqrt{(1 - p)}}$. Da aber $dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin. x}} n dx . \cos. x}{(\sin. x)^2}$ ist, so bekommt man, wenn man diesen Werth substituirt,

$$dy = \frac{- n e^{\frac{-n}{\sin. x}} dx . \cos. x}{2(\sin. x)^2 (1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})}) \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})}}.$$