Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Siebentes Capitel. Von der Differenziation der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52886

Siebentes Capitel.

Von der Differenziation der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

§. 208.

Wenn zwey oder mehrere veränderliche Größen x, y, z, von einander unabhängig sind, so kann, obgleich eine jede von ihnen veränderlich ist, dennoch die eine davon wachsen oder abnehmen, ohne daß deswegen die übrigen eine Veränderung erfahren; denn da sie keinen Zusammenhang unter einander haben, so zieht auch die Veränderung der einen die Veränderung der übrigen nicht nach sich. Es hängen daher auch die Differenzialien von y und z nicht von dem Differenziale von x ab, und es können folglich, wenn x um sein Differenzial dx vermehrt wird, y und z entweder dieselben bleiben, oder nach Gefallen verändert werden. Wenn man daher dx das Differenzial von x seyn läßt, so bleiben die Differenzialien der übrigen Größen, nemlich dy und dz unbestimmt, und können nach Gefallen als Null oder als unendlich kleine Größen, die zu dx ein gewisses Verhältniß haben, betrachtet werden.

§. 209.

Es pflegen aber meistens die Buchstaben y und z unbekannte oder solche Funktionen von x zu bedeuten, deren Verhältniß

hältniß zu x nicht bekannt ist, und in diesem Falle haben die Differenzialien dy und dz zu dx ein gewisses Verhältniß. Es mögen indeß y und z von x abhangen oder nicht, so bleibt die Art die Differenzialien dieser Größen zu finden, welche wir jetzt betrachten wollen, dieselbe. Wir wollen nemlich das Differenzial einer Funktion mehrerer veränderlichen Größen x, y, z suchen, welches sie bekömmt, wenn alle ihre veränderlichen Größen x, y, z um ihre Differenzialien dx, dy, dz wachsen, und dabey kann die Funktion übrigens beschaffen seyn, wie sie will. Um dieses Differenzial zu finden, setzt man in der Funktion anstatt der veränderlichen Größen x, y, z, allenthalben x + dx, y + dy, z + dz, und zieht von dem daraus sich ergebenden Ausdrucke die gegebene Funktion ab. Der Rest giebt, wie aus dem, was wir über die Natur der Differenzialien gesagt haben, hinlänglich erhellet, das gesuchte Differenzial.

§. 210.

Es sey X eine Funktion von x, und ihr Differenzial, oder ihr Zuwachs, wenn x um dx wächst, sey = Pdx. Ferner sey Y eine Funktion von y, und ihr Differenzial = Qdy, welches sie bekömmt, wenn y in y + dy übergeht. Endlich sey Z eine Funktion von z, und ihr Differenzial = Rdz. Wie man die Differenzialien Pdx, Qdy, Rdz aus den Funktionen X, Y, Z findet, solches ist bereits gezeigt worden. Ist nun die Größe X + Y + Z gegeben, welches offenbar eine Funktion dreyer veränderlichen Größen ist: so ist ihr Differenzial = Pdx + Qdy + Rdz. Ob diese drey Differenzialien unter einander homogen sind oder nicht? darauf kommt hier nichts an. Denn die Glieder, welche Potestäten von dx enthalten, verschwinden gegen Pdx eben so, als wenn Qdy und Rdz gar nicht da wären, und auf gleiche Art verhält es sich mit den Gliedern, die bey der Differenziation von Y und Z aus der Acht gelassen worden sind.

§. 211.

Nun sey das Differenzial der Funktion XYZ von x, y, z, indem X, Y und Z die ihnen vorhin beygelegte Bedeutung behalten, zu suchen. Setzt man hier $x + dx$ für x, $y + dy$ für y, und $z + dz$ für z; so geht X in $X + Pdx$, Y in $Y + Qdy$, und Z in $Z + Rdz$ über, und es verwandelt sich daher die Funktion XYZ in

$$(X + Pdx)(Y + Qdy)(Z + Rdz)$$
$$= XYZ + YZPdx + XZQdy + XYRdz$$
$$+ ZPQdxdy + YPRdxdz + XQRdydz + PQRdxdydz.$$

Da aber dx, dy und dz unendlich kleine Größen sind, so verschwindet das letzte Glied gegen ein jedes von den vorhergehenden, und dieses geschieht, dx, dy, dz mögen homogen oder heterogen seyn. Ferner verschwindet das Glied ZPQdxdy sowohl gegen YZPdx als gegen XZQdy, und auf ähnliche Art verschwinden auch die Glieder YPRdxdz und XQZdydz. Zieht man also die gegebene Funktion XYZ ab, so wird das Differenzial derselben $= YZPdx + XZQdy + XYRdz$.

§. 212.

Diese Beyspiele von Funktionen dreyer veränderlichen Größen x, y und z, deren Anzahl jeder nach Belieben vermehren kann, geben hinlänglich zu erkennen, daß das Differenzial jeder Funktion dreyer veränderlicher Größen x, y und z, wie darin auch immer diese Größen unter einander vermischt seyn mögen, allemal die Form haben werde: $pdx + qdy + rdz$; und dabey werden p, q, r entweder Funktionen von allen drey veränderlichen Größen x, y und z, oder nur von zweyen, oder auch nur von einer derselben seyn, je nachdem die gegebene Funktion von x, y und z selbst beschaffen ist. Eben so muß, wenn eine Funktion von vier veränderlichen Größen x, y, z und v gegeben wird, ihr Differenzial die Form $pdx + qdy + rdz + sdv$ bekommen.

§. 213.

Wir wollen zuvörderst die Funktionen betrachten, die nicht mehr als zwey veränderliche Größen enthalten. Es sey also V eine Funktion von x und y, deren Differenzial folglich die Form $pdx + qdy$ haben wird. Betrachtete man hier y als eine beständige Größe, wodurch $dy = 0$ würde: so würde das Differenzial der Funktion $V = pdx$; und betrachtete man x als beständig, wodurch $dx = 0$ würde: so würde das Differenzial von $V = qdy$ seyn. Da also, wenn man beyde Größen x und y als veränderliche Größen betrachtet, $dV = pdx + qdy$ wird: so ergiebt sich hieraus folgende Regel für die Differenziation der Funktionen zweyer veränderlicher Größen: Man behandele zuvörderst bloß x als eine veränderliche und y als eine beständige Größe, und suche das Differenzial von V, welches $= pdx$ seyn wird. Dann behandele man bloß y als eine veränderliche und x als eine beständige Größe, und suche abermals das Differenzial von V, welches $= qdy$ seyn wird. Ist dies geschehen, so wird für x und y, beyde als veränderliche Größen betrachtet, $dV = pdx + qdy$.

§. 214.

Da ferner das Differenzial einer Funktion dreyer veränderlicher Größen x, y und z, welche wir wieder $= V$ setzen wollen, die Form $pdx + qdy + rdz$ hat: so erhellet auf eine ähnliche Art, daß, wenn man bloß x als eine veränderliche Größe, und y und z als beständige Größen betrachtet, wodurch dy und $dz = 0$ wird, das Differenzial von $V = p dx$ ist. Auf eben dem Wege ergiebt sich ferner das Differenzial von $V = q dy$, wenn man x und z als beständige, und y allein als eine veränderliche Größe behandelt; und läßt man endlich bloß z veränderlich seyn, so wird das Differenzial von $V = r dz$. Um also das Differenzial einer Funktion dreyer veränderlicher Größen zu finden, betrachte man jede dieser Größen für sich als eine veränderliche Größe, und suche ihr Differenzial, als wenn die übrigen Größen keine veränderlichen Größen wären. Dann addire man die auf diese Art gefundenen Differenzialien, worauf das Aggregat derselben das gesuchte Differenzial der gegebenen Funktion seyn wird.

§. 215.

In dieser Regel, welche wir für die Differenziation der Funktionen von jeder Anzahl veränderlicher Größen gefunden haben, ist der Beweis der oben §. 170 für die Differenziation der Funktionen einer veränderlichen Größe gegebenen allgemeinen Regel enthalten. Denn wenn man für jeden der daselbst gedachten Theile einen besondern Buchstaben setzt, so bekommt die Funktion die Gestalt einer Funktion von so viel veränderlichen Größen, und läßt sich also nach der hier gegebenen Regel differenziiren, indem man erst jeden Theil auf die Art behandelt, als ob er allein veränderlich wäre, und darauf die gefundenen Differenzialien zu einer Summe vereiniget. Diese Summe ist jedesmal, nachdem man für jeden Buchstaben wieder seinen Werth gesetzt hat, das gesuchte Differenzial. Diese Regel hat also einen sehr weiten Umfang, und erstreckt sich auch auf die

Funk-

Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, wie sie auch immer beschaffen seyn mögen. Es ist daher dieselbe auch in der ganzen Differenzial-Rechnung von dem größten Nutzen.

§. 216.

Nachdem wir also eine allgemeine Regel gefunden haben, nach welcher alle Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, die Anzahl derselben mag seyn welche sie will, differenziirt werden können: so wollen wir den Gebrauch derselben an einigen Beyspielen zeigen.

I. Wenn $V = xy$ ist; so ist $dV = xdy + ydx$.

II. Wenn $V = \frac{x}{y}$ ist; so ist $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$.

III. Wenn $V = \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$; so ist

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{yxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. Wenn $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$ ist; so ist

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n (\alpha dx + \beta dy)$$
$$+ n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} (\delta dx + \varepsilon dy)$$

oder

$$dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1} (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} \times$$
$$\left(\begin{matrix} m\alpha\delta \\ n\alpha\delta \end{matrix} xdx \begin{matrix} + m\beta\delta \\ + n\alpha\varepsilon \end{matrix} xdy \begin{matrix} + m\alpha\varepsilon \\ + n\beta\delta \end{matrix} ydx \right.$$
$$\left. \begin{matrix} + m\beta\varepsilon \\ + n\beta\varepsilon \end{matrix} ydy \begin{matrix} + m\alpha\zeta \\ + n\gamma\delta \end{matrix} dx \begin{matrix} + m\beta\zeta \\ + n\gamma\varepsilon \end{matrix} dy \right)$$

V. Wenn $V = ylx$ ist; so ist $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$.

VI. Wenn $V = x^y$ ist; so ist $dV = yx^{y-1}dx + x^y dylx$.

VII. Wenn $V = A.\mathrm{tang.}\frac{y}{x}$ ist; so ist $dV = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$.

VIII. Wenn $V = \sin.x.\cos.y$ ist; so ist

$$dV = dx.\cos.x.\cos.y - dy.\sin.x.\sin.y.$$

IX. Wenn $V = \frac{e^z y}{\sqrt{(xx+yy)}}$ ist; so ist

$$dV = \frac{e^z y dz}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{e^z(xxdy - yxdx)}{(xx+yy)\sqrt{(xx+yy)}}.$$

X. Wenn $V = e^z A.\sin\frac{x-\sqrt{(xx-yy)}}{x+\sqrt{(xx-yy)}}$ ist; so ist

$$dV = e^z dz A.\sin\frac{x-\sqrt{(xx-yy)}}{x+\sqrt{(xx-yy)}}$$

$$+ e^z.\frac{xydy - yydx}{(x+\sqrt{(xx-yy)})(xx-yy)^{\frac{3}{4}}\sqrt{x}}.$$

§. 217.

Da wir gesehen haben, daß das Differenzial von V, wenn V eine Funktion zweyer veränderlicher Größen x und y ist, diese Form, $dV = Pdx + Qdy$, hat, worin P und Q Funktionen sind, die von V abhängen, und durch dasselbe bestimmt werden: so folgt, daß diese beyden Größen P und Q auch auf eine gewisse Art von einander abhängen, indem jede derselben von einer und derselben Funktion V abhängig ist. Wie nun aber auch der Zusammenhang zwischen den endlichen Größen P und Q, den wir nachher untersuchen wollen, beschaffen seyn mag: so ist klar, daß nicht alle Differenzial-Formeln von dieser Form $Pdx + Qdy$, worin P und Q aus x und y nach Willkühr formirt sind, Differenzialien jeder endlichen Funktion V von x und y seyn können. Denn wofern nicht P und Q das Verhältniß zu einander haben, welches die Natur der Differenziation erfordert: so kann das Differenzial $Pdx + Qdy$ auf keine Weise durch die Differenziation entstehen, und hat daher auch kein Integral.

§. 218.

§. 218.

Es kommt daher bey der Integration sehr viel darauf an, daß man das Verhältniß zwischen den Größen P und Q kenne, damit man die Differenzialien, die wirklich durch die Differenziation irgend einer endlichen Funktion entstanden sind, von denen zu unterscheiden im Stande sey, die man nach Belieben angenommen hat, und die kein Integral haben. Ob wir uns nun gleich hier noch nicht mit der Integration beschäftigen, so ist es doch zur genauen Kenntniß der reellen Differenzialien sehr nützlich, daß wir dieses Verhältniß untersuchen: denn es ist dieselbe nicht nur in der Integral-Rechnung, wozu wir uns hier den Weg bahnen, höchst nothwendig, sondern es wird dadurch auch in der Differenzial Rechnung vieles weit deutlicher. Zuvörderst also ist klar, daß in dem Differenziale von V, wenn V eine Funktion zweyer veränderlicher Größen x und y ist, das Differenzial jeder dieser Größen vorkommen muß. Es kann daher weder $P = 0$ noch $Q = 0$ seyn. Wenn daher P eine Funktion von x und y ist, so kann die Formel $P dx$ kein Differenzial einer endlichen Größe seyn, oder es giebt alsdenn keine endliche Größe, deren Differenzial $P dx$ wäre.

§. 219.

So giebt es keine weder algebraische noch transcendente endliche Größe V, deren Differenzial $y x dx$ wäre, wenn y eine veränderliche Größe ist, die nicht von x abhängt. Denn sollte es eine solche endliche Größe V geben, so müßte, da sich y in ihrem Differenziale findet, y auch in der Größe V selbst anzutreffen seyn; allein wenn y in V enthalten wäre, so müßte, da y eine veränderliche Größe ist, auch das Differenzial dy in dem Differenziale von V befindlich seyn. Da also dasselbe darin nicht anzutreffen ist, so ist es unmöglich,

daß

daß das Differenzial $yxdx$ durch die Differenziation irgend einer endlichen Größe entstehen könnte. Da also ausgemacht ist, daß die Formel $Pdx + Qdy$, wenn $Q = o$ ist, und P die veränderliche Größe y enthält, kein reelles Differenzial seyn kann: so erhellet zugleich, daß man der Größe Q keinen willkührlichen Werth geben darf, sondern daß derselbe von dem Werthe von P abhängt.

§. 220.

Um also das Verhältniß zwischen den Größen P und Q in dem Differenziale $Pdx + Qdy = dV$ zu untersuchen, wollen wir zuvörderst V eine Funktion von keiner Dimension von x und y seyn lassen, und so von besondern Fällen zum Allgemeinen aufsteigen. Setzt man also $y = tx$, so verschwindet x aus der Funktion V gänzlich, und man findet bloß eine Funktion von t, die wir $= T$ setzen wollen, und deren Differenzial also $= \Theta dt$ ist, wenn Θ eine Funktion von t bedeutet. Setzt man daher auch in dem Differenziale $Pdx + Qdy$ allenthalben $y = tx$, und $dy = tdx + xdt$, so bekommt man $Pdx + Qtdx + Qxdt$; und da dx darin nicht enthalten seyn soll, so muß $P + Qt = o$ seyn. Es ist also $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, oder $Px + Qy = o$, und hieraus erhellet das Verhältniß zwischen P und Q für diesen Fall. Ferner muß auch $\Theta = Qx$, und also $Qx =$ einer Funktion von t, d. h. einer Funktion von keiner Dimension von x und y seyn. Weil aber $Q = \frac{\Theta}{x}$ ist, so wird $P = -\frac{\Theta y}{xx}$, und es sind also sowohl Px als Qy Funktionen von keiner Dimension von x und y.

§. 221.

Wenn also eine Funktion von keiner Dimension von x und y, die wir $= V$ setzen, differenziirt wird, so ist ihr Differenzial $dV = Pdx + Qdy$ allezeit so beschaffen, daß $Px + Qy = 0$ ist. Das heißt, wenn man in dem Differenziale anstatt der Differenzialien dx und dy die Größen x und y setzt, so erhält man 0, wie solches in folgenden Exempeln statt findet.

I. Wenn $V = \frac{x}{y}$ ist, so wird $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$, und setzt man x für dx, und y für dy, so wird $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Wenn $V = \frac{x}{\sqrt{(xx - yy)}}$ ist; so wird

$$dV = \frac{-yydx + yxdy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}, \text{ und hieraus } \frac{-yyx + yyx}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

III. Wenn $V = \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{-y + \sqrt{(xx + yy)}}$, also eine Funktion von keiner Dimension von x und y ist; so wird $dV = \frac{2xxdy + 2xydx}{(\sqrt{(xx + yy)} - y)^2 \sqrt{(xx + yy)}}$ und diese Formel verwandelt sich, wenn man x für dx und y für dy setzt, in 0.

IV. Wenn $V = l\frac{x + y}{x - y}$ ist; so wird $dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$, und $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$.

V. Wenn $V = A.\sin.\frac{\sqrt{(x - y)}}{\sqrt{(x + y)}}$ ist; so wird

$$dV = \frac{ydx - xdy}{(x + y)\sqrt{2y(x - y)}}$$

welche Formel eben diese Eigenschaft hat.

§. 222.

§. 222.

Nun wollen wir uns zur Betrachtung anderer homogenen Funktionen wenden. Es sey also V eine Funktion von n Dimensionen von x und y. Setzt man daher $y = tx$, so erhält V die Form Tx^n, wo T eine Funktion von t bedeutet; und ist $dT = \Theta dt$, so wird $dV = x^n\Theta dt + nTx^{n-1}dx$. Wenn man also $dV = Pdx + Qdy$ setzt, so wird, weil $dy = tdx + xdt$ ist, $dV = Pdx + Qtdx + Qxdt$; und da diese Formel mit der vorhergehenden übereinstimmen muß, so wird, da auch $V = Tx^n$ ist,

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}.$$

Da nun $t = \frac{y}{x}$ ist, so wird hieraus $Px + Qy = nV$, und diese Gleichung bestimmt das Verhältniß zwischen P und Q auf eine solche Art, daß man jede dieser Größen leicht findet, sobald die andere bekannt ist. Da ferner $Qx = x^n\Theta$ ist, so ist Qx und folglich auch Qy und Px Funktionen von n Dimensionen von x und y.

§. 223.

Wenn also in dem Differenziale einer homogenen Funktion von x und y, anstatt dx und dy die Größen x und y gesetzt werden: so ist die daher entspringende Größe der Funktion, deren Differenzial gegeben wurde, mit der Anzahl der Dimensionen multiplicirt, gleich.

I. Wenn $V = \sqrt{(xx + yy)}$ ist; so ist $n = 1$: und da $dV = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx+yy)}}$ ist, so wird $\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{xx + yy} = V = \sqrt{(xx + yy)}$.

II. Wenn $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$ ist; so ist $n = 2$; und $dV =$

$2y^3dy$

$$\frac{2y^3dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3dx + y^3dx - x^3dy}{(y-x)^2}.$$

Setzt man nun x für dx, und y für dy, so wird

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y-x} = 2V.$$

III. Wenn $V = \frac{1}{(yy+xx)^2}$ ist, so ist $n = -4$, und

$dV = -\frac{4ydy - 4xdx}{(yy+xx)^3}$. Setzt man aber x für dx, und y für dy, so verwandelt sich diese Formel in $-\frac{4yy - 4xx}{(yy+xx)^3} = -4V$.

IV. Wenn $V = xx\,l\frac{y+x}{y-x}$ ist; so wird $n = 2$, und

$$dV = 2xdx\,l\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy - xx}.$$

Nimmt man aber hier die beschriebene Substitution vor, so findet man $2xx\,l\frac{y+x}{y-x} = 2V$.

§. 224.

Eine ähnliche Eigenschaft bemerkt man, wenn V eine homogene Funktion mehrerer veränderlicher Größen ist. Es sey V eine Funktion von den Größen x, y und z, so daß dieselben allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen ausmachen, wo denn bekannt ist, daß das Differenzial die Form $Pdx + Qdy + Rds$ haben muß. Setzt man nun $y = tx$ und $z = sx$, so daß $dy = tdx + xdt$, und $dz = sdx + xds$ wird, so bekommt die Funktion V die Form Ux^n, wenn U eine Funktion der beyden veränderlichen Größen t und s ist. Setzt man daher $dU = pdt + qds$, so wird

$$dV = x^npdt + x^nqds + nUx^{n-1}dx.$$

Die

Die erste Form aber giebt

$$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt + Rsdx + Rxds$$

und aus der Vergleichung dieser beyden Differenzialien ergiebt sich

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x}$$

und daraus fließt

$$Px + Qy + Rz = nV,$$

und eben diese Eigenschaft erstreckt sich auch auf mehrere veränderliche Größen.

§. 225.

Wenn also eine homogene Funktion von irgend einer Anzahl veränderlicher Größen x, y, z, v, ꝛc. gegeben ist, so ist das Differenzial derselben jederzeit so beschaffen, daß man, wenn man anstatt der Differenzialien dx, dy, dz, dv, ꝛc. die endlichen Größen x, y, z, v setzt, die gegebene Funktion, durch die Anzahl der Dimensionen multiplicirt, bekommt. Diese Behauptung gilt auch, wenn V eine homogene Funktion von nicht mehr als von einer einzigen veränderlichen Größe ist. Es ist nemlich in diesem Falle V eine Potestät von x, oder $V = ax^n$, welches eine homogene Funktion von n Dimensionen ist; denn es giebt keine andere Funktion von x, worin x allenthalben n Dimensionen hätte, als die Potestät x^n. Da nun $dV = nax^{n-1}dx$ ist, so bekommt man, wenn man x für dx setzt, $nax^n = V$. Es verdient daher diese wichtige Eigenschaft der homogenen Funktionen aufs sorgfältigste gemerkt zu werden, indem sie in der Integral-Rechnung den größten Nutzen gewährt.

§. 226.

§. 226.

Um nun das Verhältniß der Größen P und Q, welche das Differenzial $Pdx + Qdy$ einer jeden Funktion V von zwey veränderlichen Größen x und y bestimmen, allgemein zu untersuchen, müssen wir folgendes überlegen. Es sey V eine Funktion von x und y, und dabey nehme man an, daß V, wenn man $x + dx$ für x setzt, in R, hingegen, wenn man $y + dy$ für y setzt, in S, und wenn man sowohl $x + dx$ für x, als $y + dy$ für y setzt, in V^1 übergehe. Da also R aus V entsteht, wenn man darin $x + dx$ statt x setzt, so ist offenbar, daß sich, wenn man in R, $y + dy$ für y setzt, V^1 ergeben wird; denn es ist dieses eben so viel, als ob man in V sowohl $x + dx$ für x, als $y + dy$ für y setzte. Eben so entsteht auch V^1 aus S, wenn man in S die Größe $x + dx$ für x setzt, weil S aus V entstanden ist, indem darin $y + dy$ für y gesetzt wurde. Alles dies wird durch folgende Tafel deutlicher.

Die Größe	geht über in	wenn man für	setzt.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^1	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	V^1	y	$y + dy$
S	V^1	x	$x + dx$

§. 227.

Wenn also V so differenzirt wird, als wenn bloß x eine veränderliche, y aber eine beständige Größe wäre, so wird, weil V durch die Substitution von $x + dx$ für x in R übergeht, das Differenzial derselben $R - V$; und da aus der Form $dV = Pdx + Qdy$, eben dieses Differenzial $= Pdx$ ist, so wird $R - V = Pdx$. Wenn man hingegen $y + dy$ für y setzt, x aber als eine beständige Größe behandelt: so wird, weil alsdenn R in V^{I}, und V in S übergeht, die Größe $R - V$ in $V^{I} - S$ verwandelt, und folglich das Differenzial von $R - V = Pdx$, welches entsteht, wenn bloß y als eine veränderliche Größe behandelt wird, $= V^{I} - R - S + V$. Eben so wird, da, wenn man $y + dy$ für y setzt, V in S übergeht, $S - V$ das Differenzial von V, wenn man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet, und es ist daher $S - V = Qdy$. Weil nun, wenn man $x + dx$ für x setzt, S in V^{I} und V in R übergeht, so wird dadurch die Größe $S - V$ in $V^{I} - R$ verwandelt, und es ist folglich das Differenzial von $S - V = Qdy$, welches entsteht, wenn man bloß x als eine veränderliche Größe betrachtet, $= V^{I} - R - S + V$, und es stimmt also dieses Differenzial mit dem vorhergehenden auf das genaueste überein.

§. 228.

Aus dieser Uebereinstimmung fließt: Wenn das Differenzial einer Funktion V zweyer veränderlichen Größen x und $y = dV = Pdx + Qdy$ ist: so ist das Differenzial von Pdx, welches entsteht, wenn man bloß y als eine veränderliche, x aber als eine beständige Größe behandelt, dem Differenziale von Qdy gleich, welches entsteht, wenn man bloß x als eine veränderliche, y aber als eine beständige Größe betrachtet. Ist nemlich, wenn man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet, $dP = Zdy$, so ist das

das Differenzial von Pdx, auf die beschriebene Art gesucht, $= Zdxdy$; und nimmt man bloß x als eine veränderliche Größe an, so wird auch $dQ = Zdx$, denn alsdenn wird auch das Differenzial von Qdy, auf die beschriebene Art genommen, $= Zdxdy$. Auf diese Art erhellet das Verhältniß, welches die Größen Q und P zu einander haben, und welches, kurz es auszudrucken, darin besteht, daß das Differenzial von Pdx, wenn man x beständig seyn läßt, dem Differenziale von Qdy, wenn man y als eine beständige Größe betrachtet, gleich ist.

§. 229.

Um diese merkwürdige Eigenschaft in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir sie durch einige Beyspiele erläutern.

I. Ist also $V = yx$; so ist $dV = ydx + xdy$, und folglich $P = y$, und $Q = x$. Läßt man daher x beständig seyn, so wird $d.Pdx = dxdy$, und nimmt man y als beständig an, so wird $d.Qdy = dxdy$, und also beyde Differenzialien einander gleich.

II. Ist $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$; so wird $dV = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, und folglich $P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, und $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$. Setzt man also x beständig, so wird $d.Pdx = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, und läßt man y beständig seyn, so wird $d.Qdy = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

III. Ist $V = x\sin.A.y + y.\sin.A.x$; so wird

$$dV = dx.\sin.Ay + xdy.\cos.y + dy.\sin.Ax + ydx.\cos.x$$

und es ist daher

$$Pdx = dx.\sin.Ay + ydx.\cos.x, \text{ und}$$

$$Qdy = dy.\sin.Ax + xdy.\cos.y.$$

Läßt man also x beständig seyn, so wird

$$d.Pdx = dxdy.\cos.y + dxdy.\cos.x,$$

und nimmt man y beständig an, so wird

$$d.Qdy = dxdy.\cos.y + dxdy.\cos.x.$$

IV. Ist $V = x^y$; so wird $dV = x^y dylx + yx^{y-1}dx$, und

$$Pdx = yx^{y-1}dx, \text{ und } Qdy = x^y dylx.$$

Wenn man also x als eine beständige Größe betrachtet, so wird

$$d.Pdx = x^{y-1}dxdy + yx^{y-1}dxdylx,$$

und behandelt man y als eine beständige Größe, so wird

$$d.Qdy = yx^{y-1}dxdylx + x^{y-1}dxdy.$$

§. 230.

Diese Eigenschaft läßt sich auch auf folgende Art beschreiben, wodurch denn die so merkwürdige Beschaffenheit aller Funktionen zweyer veränderlichen Größen in die Augen fällt. Wenn man eine Funktion V zweyer veränderlicher Größen x und y so differenziirt, daß man bloß x als eine veränderliche Größe behandelt, und darauf von neuem das Differenzial dieses Differenzials so sucht, daß man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet: so findet man nach dieser doppelten Differenziation eben das, was man gefunden haben würde, wenn man in umgekehrter Ordnung die Funktion V zuerst so, als ob bloß y veränderlich wäre, differenziirt, und darauf bloß x als eine veränderliche Größe behandelt, und von dem gefundenen Differenziale von neuem das Differenzial gesucht hätte; in beyden Fällen erhält man nemlich $Zdxdy$. Der Grund dieser Gleichheit liegt sehr deutlich in der vorhin betrachteten Eigenschaft. Denn differenziirt

ziirt man V, als ob bloß x veränderlich wäre, so findet man Pdx; und differenziirt man V, als ob bloß y veränderlich wäre, so erhält man Qdy; daß aber die Differenzialien von diesen Differenzialien gleich sind, ist vorhin bewiesen worden. Uebrigens fließt diese Eigenschaft auch unmittelbar aus den Schlüssen des 227sten §.

§. 231.

Es läßt sich aber das Verhältniß von P und Q, wenn $Pdx + Qdy$ das Differenzial einer Funktion V ist, auch auf folgende Art anzeigen. Da P und Q Funktionen von x und y sind, so differenziire man beyde Größen, so daß man sowohl x als y als veränderliche Größen behandele. Ist nemlich

$$dV = Pdx + Qdy$$

so setze man $dP = pdx + rdy$

und $dQ = qdx + sdy$

Behandelt man also x als eine beständige Größe, so wird

$$dP = rdy, \text{ und } d.Pdx = rdxdy,$$

und behandelt man darauf y als beständig, so wird

$$dQ = qdx, \text{ und } d.Qdx = qdxdy.$$

Da nun diese beyden Differenzialien einander gleich sind, so folgt, daß $q = r$ ist. Es sind daher die Funktionen P und Q auf die Art mit einander verbunden, daß die Größen q und r, wenn man jene Funktionen auf die Art differenziirt, wie wir gethan haben, einander gleich werden. Der Kürze wegen können aber, wenigstens in dem gegenwärtigen Capitel, die Größen r und q bequem auf die Art angezeigt werden, daß man r durch $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ ausdruckt; es soll nemlich dadurch gesagt werden: Wenn man P auf die Art differenziirt, daß man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet, und darauf das gefundene Differenzial durch dy dividirt; denn dadurch bekommt man die endliche Grrße r. Auf eine ähnliche Art druckt $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ die endliche Größe q aus, weil dadurch angezeigt wird, daß man Q so, als wenn bloß x veränderlich wäre, differenziiren, und dann das Differenzial durch dx dividiren soll.

§. 232.

Wir wollen uns daher dieser Bezeichnungsart bedienen, ob sie gleich sonst zweydeutig seyn kann, welches indeß hier durch die Einschließung in Klammern verhindert wird. Wir vermeiden dadurch die Weitläuftigkeit in der Beschreibung der Art, wie differenziirt werden soll, und können das Verhältniß zwischen P und Q nun kurz also ausdrucken, daß wir sagen: es ist $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Es zeigt nemlich in dergleichen Brüchen der Nenner, außer seiner eigentlichen Bedeutung, nach welcher dadurch dividirt werden muß, auch an, daß das Differenzial des Nenners so genommen werden soll, als wenn bloß die Größe, deren Differenzial den Nenner ausmacht, veränderlich wäre. Auf diese Art fallen die Differenzialien durch die Division ganz aus der Rechnung weg, und es stellen daher die Brüche $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ endliche Größen vor, die in dem gegenwärtigen Falle einander gleich sind. Nach dieser Bezeichnungsart kann man also auch die Größen p und s auf die Art ausdrucken, daß man $p = \left(\frac{dP}{dx}\right)$ und $s = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$ setzt, indem die Differenziarenziation des Zählers, nach der gemachten Anmerkung durch den Nenner eingeschränkt wird.

§. 233.

Zwischen dieser und der vorhin von den homogenen Funktionen bewiesenen Eigenschaft findet sich eine sehr schöne Uebereinstimmung. Ist nemlich V eine Funktion von n Dimensionen von x und y, so ist, wenn man $dV = Pdx + Qdy$ setzt, $nV = Px + Qy$, und also

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}.$$

Setzt man nun $dP = pdx + rdy$; so wird $\left(\frac{dP}{dy}\right) = r$, und daß dieser Größe $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ gleich sey, läßt sich auf diese Art beweisen. Man differenziire Q, als wenn bloß x veränderlich wäre, und weil unter dieser Voraussetzung

$$dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y}$$

ist, so wird

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}, \text{ und es muß daher}$$

$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r, \text{ oder } (n-1)P = px + ry \text{ seyn.}$$

Diese Gleichheit erhellet daher, weil P eine homogene Funktion von $n-1$ Dimensionen von x und y ist, woher denn ihr Differenzial, $dP = pdx + rdy$, wegen der Eigenschaft der homogenen Funktionen so beschaffen seyn muß, daß $(n-1)P = px + ry$ ist.

§. 234.

Diese Eigenschaft, daß nemlich $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist, welche wir als allgemeine Eigenschaft aller Funktionen zweyer veränderlicher Größen x und y kennen gelernt haben, bahnt uns den Weg zur Untersuchung der Natur der Funktionen dreyer oder mehrerer veränderlicher Größen. Es sey V eine Funktion dreyer veränderlicher Größen x, y, z, und dabey sey $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Wenn man also bey dieser Differenziation z als eine beständige Größe behandelte, so würde $dV = Pdz + Qdy$ werden, und in diesem Falle müßte nach dem Vorhergehenden $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ seyn. Betrachtete man ferner y als eine beständige Größe, so würde $dV = Pdx + Rdz$, und also $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$ werden. Endlich gäbe x, als eine beständige Größe betrachtet, $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. Es hängen also in dem Differenziale $Pdx + Qdy + Rdz$ der Funktion V die Größen P, Q und R auf die Art von einander ab, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right) \text{ ist.}$$

§. 235.

Hieraus folgt eine Eigenschaft der Funktionen dreyer veränderlicher Größen, die derjenigen ähnlich ist, die wir oben § 230. bey den Funktionen zweyer veränderlicher Größen kennen gelernt haben. Wenn V eine Funktion dreyer veränderlicher Größen x, y und z ist, und dieselbe nach einander dreymal auf die Art differenzirt wird, daß man bey der ersten Differenziation bloß die eine von jenen Größen,

z. B.

z. B. x ferner bey der zweyten bloß y, und bey der dritten bloß z als eine veränderliche Größe behandelt; so findet man einen Ausdruck von der Form $Zdxdydz$, und diesen Ausdruck findet man jedesmal, man mag die Größen x, y und z in einer Ordnung auf einander folgen lassen, in welcher man will. Man gelangt also auf sechs verschiedene Arten, nach einer dreymaligen Differenziation, zu dem Ausdrucke $Zdxdydz$, weil die Ordnung der Buchstaben x, y und z sechsmal verändert werden kann. In was für einer Ordnung man auch diese Größen nimmt, so wird sich doch allemal, wenn man die Funktion V so differenziirt, als ob bloß die erste Größe veränderlich wäre, dann das Differenzial von diesem Differenziale sucht, so daß man bloß die zweyte als eine veränderliche Größe betrachtet, und endlich von diesem Differenziale von neuem das Differenzial auf die Art nimmt, daß man bloß die dritte als veränderlich behandelt, immer ein und derselbe Ausdruck ergeben.

§. 236.

Um den Grund von dieser Eigenschaft deutlich zu machen, wollen wir $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ setzen, und nun die Differenzialien der Größen P, Q und R suchen. Nach dem bereits Erwiesenen werden diese Differenzialien seyn

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdx + udy + rdz.$$

Differenziirt man nun V, als wenn bloß x veränderlich wäre, so findet man Pdx; differenziirt man ferner dieses Differenzial, als wenn bloß y veränderlich wäre, so findet man $sdxdy$; und sucht man endlich auch hiervon das Differenzial, so daß man z allein als eine veränderliche Größe behandelt, so findet man, nachdem man durch $dxdydz$ dividirt hat, $\left(\frac{ds}{dz}\right)$

Setzt man nun die veränderlichen Größen so, y, x, z, so giebt die erste Differenziation Qdy, die zweyte $sdxdy$, und die dritte (nach der Division durch $dxdydz$) $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ wie vorhin. Nun lasse man die veränderlichen Größen in dieser Ordnung auf einander folgen, z, y, x, wo denn die erste Differenziation Rdz, die zweyte $udydz$, und die dritte (nach der Division durch $dxdydz$) $\left(\frac{du}{dx}\right)$ giebt. Da nun aber, wenn man y als eine beständige Größe betrachtet, $dQ = sdx + udz$ ist; so ist $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, wie gleichfalls bewiesen worden ist.

§. 237.

Es sey $V = \frac{xxy}{aa - zz}$. Wir wollen diese Funktion so oft dreymal differenziiren, als die Ordnung von x, y und $z$verändert werden kann.

wenn man veränderlich setzt,	I. Differenz.	II. Differenz.	III. Differenz.
	bloß x	bloß y	bloß z
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.
⸗ ⸗ ⸗ ⸗	bloß x	bloß z	bloß y
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.
⸗ ⸗ ⸗ ⸗	bloß y	bloß x	bloß z
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.
⸗ ⸗ ⸗ ⸗	bloß y	bloß z	bloß x
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.

bloß

: : : : bloß z bloß x bloß y

$$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2};\quad \frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2};\quad \frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}.$$

: : : : bloß z bloß y bloß x

$$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2};\quad \frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2};\quad \frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}.$$

Dieses Exempel zeigt, daß man nach einer dreymaligen Differenziation immer auf einerley Ausdruck, $\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$ kommt, man mag die drey veränderlichen Größen in einer Ordnung nehmen, in was für einer man will.

§. 238.

So wie man aber nach einer dreymaligen Differenziation immer auf einerley Ausdruck kommt, so findet sich auch unter den Differenzialien, welche man durch die zweyte Differenziation findet, eine Uebereinstimmung. Unter diesen Differenzialien kommt nemlich jeder Ausdruck zweymal vor, und es erhellet daher, daß alle die Formeln, in denen einerley Differenzialien vorkommen, auch einander gleich sind, und daß deswegen alle dritten Differenzialien gleich sind, weil in ihnen dieselben Differenzialien $dxdydz$ enthalten sind. Wir schließen hieraus: Wenn V eine Funktion von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen x, y, z, v, u, rc. ist, und dieselbe nach und nach öfters auf die Art differenzirt wird, daß nur immer eine von diesen Größen als eine veränderliche Größe betrachtet wird: so sind, so oft man auf Ausdrücke von gleichen Differenzialien kommt, diese Ausdrücke auch einander gleich. So entsteht nach einer zweymaligen Differenziation unter andern der Ausdruck $Zdxdy$, einmal, wenn man x, und zweytens wenn man y allein als eine veränderliche Größe behandelt hat; und es

ist

ist daher gleich, welche man von diesen Größen zuerst, und welche man zuletzt nehmen will. Auf eine ähnliche Weise entsteht nach einer dreymaligen Differenziation der Ausdruck $Zdxdydz$ auf sechs verschiedene Arten, und nach einer viermaligen Differenziation der Ausdruck $Zdxdydzdv$ auf vier und zwanzig Arten u. s. f.

§. 239.

Die Wahrheit dieser Lehrsätze wird bey einiger Aufmerksamkeit ein jeder aus den vorhergehenden Sätzen einsehen, und durch eigenes Nachdenken darüber besser fassen, als wenn dieselben mit der hier unvermeidlichen Weitläuftigkeit vollständig geführt worden wären. Da aber die Kenntniß dieser Eigenschaften in der Integral Rechnung von der größten Wichtigkeit ist, so müssen sich Anfänger nicht bloß daran begnügen, daß sie die Wahrheit derselben erkennen, sondern sie auch an vielen Beyspielen prüfen, um sich diesen Gegenstand ganz geläufig, und des in der Folge daraus entspringenden Nutzens fähig zu machen. Ja, nicht bloß Anfänger, sondern auch die, die schon die Anfangsgründe der Differenzial Rechnung kennen, sollten dieses thun, weil dieser Gegenstand fast in allen Anleitungen zu diesem Theile der Analysis übergangen wird. Denn man begnügt sich gewöhnlich damit, die Regeln der Differenziation vorgetragen und ihren Gebrauch in der höhern Geometrie gezeigt zu haben, und bekümmert sich dabey nicht um die Natur und die Eigenschaften der Differenzialien, so groß auch der Nutzen ist, der daher für die Integral-Rechnung entspringt. Ich habe es daher für nützlich gehalten, diese fast ganz neue Materie in dem gegenwärtigen Capitel ausführlich zu betrachten, damit der Weg zu den schwerern Integrationen

gebahnt,

gebahnt, und diese Beschäftigung in der Folge leicht werden mögte.

§. 240.

Bey dieser Kenntniß der Eigenschaften der Differenzialien der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen ist man leicht im Stande zu beurtheilen, ob eine gegebene Differenzial-Formel, worin zwey oder mehr veränderliche Größen vorkommen, aus der Differenziation irgend einer endlichen Funktion entstanden sey oder nicht? Denn wenn in der Formel $Pdx + Qdy$ nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dz}\right)$ ist: so kann man mit Gewißheit behaupten, daß es keine Funktion von x und y gebe, deren Differenzial $= Pdx + Qdy$ wäre, und daß man also in der Integral-Rechnung dergleichen Formeln nicht integriren könne. Da z. B. $yxdx + xxdy$ die gedachte erforderliche Eigenschaft nicht hat, so giebt es keine Funktion, deren Differenzial $= yxdx + xxdy$ wäre. Ob aber, wenn $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist, die Formel allemal durch die Differenziation irgend einer Funktion entstanden sey? ist eine Frage, die erst in der Integral-Rechnung gründlich beantwortet werden kann.

§. 241.

Wenn in der gegebenen Differenzial-Formel drey oder mehrere veränderliche Größen vorkommen, wie z. B. in $Pdx + Qdy + Rdz$; so kann dieselbe nur dann durch die Differenziation entstanden seyn, wenn dabey die Bedingungen statt finden, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \left(\frac{dP}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right); \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dy}\right) \text{ ist.}$$

Sobald

Sobald eine von diesen Bedingungen fehlt, so kann man sicher behaupten, daß es keine Funktion gebe, deren Differenzial $Pdx + Qdy + Rdz$ wäre. Dergleichen Differenzial-Formeln sind daher gar keines Integrals fähig, und man muß daher auch nicht einmal nach ihren Integralien fragen. Das aber ist leicht einzusehen, daß man in der Integral-Rechnung allemal erst wissen muß, ob eine gegebene Differenzial-Formel eines Integrals fähig sey oder nicht, ehe man diese Integration wirklich unternimmt.