Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Achtes Capitel. Von der fernern Differenziation der Differenzial-Formeln.

Achtes Capitel.

Von der fernern Differenziation der Differenzial-Formeln.

§. 242.

Es ist bereits in dem Vorhergehenden gelehret worden, wie man, wenn nur eine einzige veränderliche Größe da ist, und das erste Differenzial als eine beständige Größe betrachtet wird, die Differenzialien aller übrigen Ordnungen finden kann. Wenn man nemlich das Differenzial einer Funktion von neuem differenziirt, so findet man das zweyte Differenzial, und wenn man auch dieses Differenzial wieder differenziirt, so findet man das dritte Differenzial u. s. w. Eben diese Regel gilt aber auch, wenn eine Funktion mehrere veränderliche Größen enthält, oder wenn zwar nur eine veränderliche Größe da ist, aber das Differenzial derselben nicht als eine beständige Größe betrachtet wird. Es sey V irgend eine Funktion von x, und dx nicht beständig, sondern auf irgend eine Art veränderlich, so daß das Differenzial von $dx = ddx$, und das Differenzial hiervon $= d^3x$ u. s. f. sey. Unter dieser Voraussetzung wollen wir nun das Differenzial der Funktion V untersuchen.

§. 243.

Wir wollen annehmen, daß das erste Differenzial der Funktion $V = Pdx$ sey, wo denn P irgend eine Funktion von

von x ist, die von V abhängt. Wollen wir nun das zweyte Differenzial der Funktion V finden, so müssen wir ihr erstes Differenzial $P dx$ von neuem differenziiren; und da dasselbe ein Produkt aus zwey veränderlichen Größen P und dx ist, von welchen jene das Differenzial $dP = p dx$ und diese dx das Differenzial ddx hat: so ist nach der Regel von den Faktoren das zweyte Differenzial $ddV = P ddx + p dx^2$. Setzt man nun $dp = q dx$, so findet man, da das Differenzial von $dx^2 = 2 dx ddx$ ist, durch abermaliges Differenziiren.

$$d^3V = P d^3x + dP ddx + 2p dx ddx + dp dx^2$$

und da $dP = p dx$, und $dp = q dx$ ist, so wird

$$d^3V = P d^3x + 3p dx ddx + q dx^3$$

und auf eine ähnliche Art werden nun auch die folgenden Differenzialien gefunden.

§. 244.

Wir wollen dieses auf die Potestäten von x anwenden und die verschiedenen Differenzialien davon suchen, wenn dx nicht als eine beständige Größe angenommen wird.

I. Ist also $V = x$; so ist $dV = dx$; $d^2V = d^2x$; $d^3V = d^3x$; $d^4V = d^4x$; ꝛc.

II. Ist $V = x^2$; so ist

$$dV = 2x dx;$$
$$ddV = 2x ddx + 2 dx^2;$$
$$d^3V = 2x d^3x + 6 dx ddx;$$
$$d^4V = 2x d^4x + 8 dx d^3x + 6 ddx^2;$$
$$d^5V = 2x d^5x + 10 dx d^4x + 20 ddx d^3x;$$

ꝛc.

III. Ist überhaupt $V = x^n$; so ist

$$dV = nx^{n-1}dx;$$

$$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2;$$

$$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dx\,ddx + n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3;$$

$$d^4V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dx\,d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2 + 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4 + \text{rc.}$$

Nimmt man dx beständig, und setzt daher $ddx = 0$, $d^3x = 0$, $d^4x = 0$, rc., so findet man eben die Differenzialien, die wir bereits oben für diese Voraussetzung gefunden haben.

§. 245.

Da also die Differenzialien aller Ordnungen von x auf eben die Art differenziirt werden, als die endlichen Größen, so lassen sich auch alle Ausdrücke, in welchen außer einer endlichen Größe auch ihre Differenzialien vorkommen, nach den oben ertheilten Vorschriften differenziiren. Da diese Operation bisweilen vorkommt, so wollen wir sie hier durch einige Beyspiele erläutern.

I. Ist also $V = \frac{x\,ddx}{dx^2}$; so findet man durchs Differenziiren

$$dV = \frac{x\,d^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2x\,ddx^2}{dx^3}.$$

II. Ist $V = \frac{x}{dx}$; so ist $dV = 1 - \frac{x\,ddx}{dx^2}$, und es hindert also das nichts, daß wir V unendlich groß angenommen haben.

III. Ist $V = xx\,l\frac{ddx}{dx^2}$; so läßt sich dieser Ausdruck in

$$V = xx\,l\,ddx - 2xx\,l\,dx$$

verwandeln, und daraus findet man nach den gewöhnlichen Regeln der Differenziation

$$dV = 2xdxlddx + \frac{xxd^3x}{ddx} - 4xdxldx - \frac{2xxddx}{dx}.$$

Auf eine ähnliche Art werden aber auch die höhern Differenzialien von V gefunden.

§. 246.

Wenn der gegebene Ausdruck zwey veränderliche Größen, nemlich x und y enthält, so ist entweder das eine Differenzial derselben beständig, oder es sind beyde veränderlich; denn es ist willkührlich, von welcher Größe man das Differenzial als beständig betrachten will, weil es von unserm freyen Willen abhängt, wie wir die auf einander folgenden Werthe der einen Größe wachsen lassen wollen. Aber die Differenzialien beyder Größen können nicht beständig seyn, weil man sonst ein Verhältniß zwischen den veränderlichen Größen x und y annähme, dergleichen entweder nicht da ist, oder doch als unbekannt betrachtet wird. Denn wenn man, indem man x gleichförmig wachsen läßt, auch y gleichförmig wachsend annehmen wollte, so würde man dadurch zu erkennen geben, daß $y = ax + b$ sey, und es würde also y von x abhangen, welches man doch nicht annehmen darf. Es kann daher nur entweder das Differenzial einer von den veränderlichen Größen oder gar keins beständig angenommen werden. Kann man indeß die Differenziation verrichten, wenn gar keines von den Differenzialien als beständig betrachtet wird, so kann man auch die Differenzialien finden, wenn eins beständig ist: denn wenn dx beständig seyn soll, so darf man nur ddx, d^3x, d^4x, &c. ausstreichen.

§. 247.

Es bedeute also V irgend eine endliche Funktion von x und y, und es sey $dV = Pdx + Qdy$. Um nun das zweyte Differenzial zu finden, wollen wir beyde Differenzialien dx und dy als veränderlich betrachten; und da P und Q Funktionen von x und y sind, so wollen wir

$$dP = pdx + rdy$$
$$dQ = rdx + qdy$$

setzen, indem wir oben gesehen haben, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r \text{ ist.}$$

Dies vorausgesetzt, so differenziire man $dV = Pdx + Qdy$, wodurch man

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2$$

findet. Soll also dx beständig seyn, so wird

$$ddV = pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2;$$

und soll dy beständig seyn, so wird

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + qdy^2.$$

§. 248.

Wenn also eine Funktion zweyer veränderlicher Größen x und y zweymal differenziirt, und dabey keines von den Differenzialien als beständig betrachtet wird: so hat das zweyte Differenzial jedesmal diese Form:

$$ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy;$$

und dabey hängen die Größen P, Q, R, S und T auf die Art von einander ab, daß, wenn man die im vorhergehenden Capitel erklärte Bezeichnungsart gebraucht,

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \; R = \left(\frac{dP}{dx}\right); \; S = \left(\frac{dQ}{dy}\right); \text{ und}$$

$$T = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\left(\frac{dP}{dy}\right)$$

 ist.

ist. Fehlt von diesen Bedingungen auch nur eine einzige, so kann man sicher behaupten, daß die gegebene Formel kein zweytes Differenzial einer Funktion sey, und es läßt sich also bald erkennen, ob eine solche Formel das zweyte Differenzial irgend einer Größe sey oder nicht.

§. 249.

Auf eine ähnliche Art lassen sich auch die driten und die folgenden Differenzialien finden; es wird indeß besser seyn, solches an einem besondern Beyspiele zu zeigen, als dabey die allgemeinen Formeln zu gebrauchen.

Ist also $V = xy$, so ist

$$dV = ydx + xdy;$$
$$ddV = yddx + 2dxdy;$$
$$d^3V = yd^3x + 3dyddx + xd^3y;$$
$$d^4V = yd^4x + 4dyd^3x + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y$$

2c.

In diesem Exempel richten sich die Zahl-Coefficienten nach dem Gesetze der Potestäten des Binomiums, und man kann daher die Differenzialien soweit man will fortsetzen.

Ist hingegen $V = \frac{x}{y}$; so ist

$$dV = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx};$$

$$ddV = \frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{xx} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2}$$

$$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxddy}{xx} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{3dyddx}{x^2}$$
$$+ \frac{6ydxddx}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4} - \frac{yd^3x}{x^2}.$$

In diesem Exempel fällt die Folge der Differenzialien nicht so leicht in die Augen als in dem vorhergehenden.

§. 250.

§. 250.

Es läßt sich aber diese Methode zu differenziiren nicht bloß bey den endlichen Funktionen anwenden, sondern sie ist auch bey allen solchen Ausdrücken brauchbar, die selbst schon Differenzialien enthalten, es mag nun eines davon als beständig betrachtet werden oder nicht. Denn da die Differenzialien eben so und nach eben den Regeln differenziirt werden, wie die endlichen Größen: so gelten die in den vorhergehenden Capiteln gegebene Regeln auch hier, und müssen daher auch gegenwärtig befolgt werden. Bedeutet also V einen Ausdruck, dessen Differenzial gesucht werden soll, es mag nun derselbe eine endliche oder eine unendlich große oder eine unendlich kleine Größe vorstellen: so können folgende Beyspiele die Art, sein Differenzial zu finden, lehren.

I. Ist $V = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; so ist

$$dV = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

II. Ist $V = \frac{ydx}{dy}$; so ist

$$dV = dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}.$$

III. Ist $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$; so ist

$$dV = \frac{(3dxddx + 3dyddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dxddy - dyddx}$$

$$- \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}(dxd^3y - dyd^3x)}{(dxddy - dyddx)^2}.$$

Da diese Diefferenzialien in ihrem weitesten Umfange gesucht worden sind, indem dabey kein Differenzial als beständig betrachtet worden ist: so lassen sich daraus leicht die

Differenzialien ableiten, die entstehen, wenn entweder dx oder dy als beständig betrachtet wird.

§. 251.

Da, wenn kein Differenzial beständig angenommen wird, auch kein Gesetz vorgeschrieben ist, nach welchem die successiven Werthe der veränderlichen Größen auf einander folgen; so sind die zweyten und folgenden Differenzialien nicht bestimmt, und haben keine gewisse Bedeutung. Es hat daher auch eine Formel, worin die zweyten und die höhern Differenzialien vorkommen, keinen bestimmten Werth, als nur, wenn eines von ihren Differenzialien beständig angenommen worden ist; im entgegenstehenden Falle ist ihre Bedeutung schwankend, und ändert sich, je nachdem dieses oder ein anderes Differenzial als beständig betrachtet wird. Indeß giebt es Ausdrücke, die zweyte Differenzialien enthalten, und die, obgleich kein Differenzial als beständig betrachtet wird, dennoch eine bestimmte Bedeutung haben, die daher auch immer dieselbe bleibt, man mag ein Differenzial als beständig annehmen, welches man will. Wir werden weiter unten die Beschaffenheit dieser Formeln genauer untersuchen, und die Art und Weise beybringen, wie man dieselben von solchen, die keinen bestimmten Werth haben, unterscheiden kann.

§. 252.

Um die Beschaffenheit der Differenzial-Formeln, die zweyte oder höhere Differenzialien enthalten, deutlicher kennen zu lernen, wollen wir zuvörderst solche Formeln betrachten, die nur eine einzige veränderliche Größe enthalten. Hier ist leicht einzusehen, daß, wenn in einer Formel das zweyte Differenzial ihrer veränderlichen Größe vorkommt, und

und kein Differenzial beständig angenommen wird, die Formel alsdann keinen bestimmten Werth haben kann. Denn setzte man dx beständig, so würde $ddx = 0$; nähme man aber das Differenzial von xx, nemlich $2xdx$ oder xdx beständig an, so würde, da alsdenn das Differenzial von xdx $= xddx + dx^2 = 0$ wäre, $ddx = -\frac{dx^2}{x}$. Sollte das Differenzial von irgend einer Potestät x^n, nemlich $nx^{n-1}dx$ oder $x^{n-1}dx$ beständig seyn, so würde das zweyte Differenzial derselben $x^{n-1}ddx + (n-1)x^{n-2}dx^2 = 0$, und also $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$ werden. Es erhält also ddx verschiedene Werthe, je nachdem das Differenzial dieser oder einer andern Funktion von x als beständig betrachtet wird; und es fällt in die Augen, daß eine Formel, in welcher ddx vorkommt, ganz von einander verschiedene Werthe bekommen muß, wenn man darin einmal 0, dann $-\frac{dx^2}{x}$, dann $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ u. s. f. anstatt ddx setzt. Würde z. B. die Formel $\frac{xxddx}{dx^2}$ gegeben, die wegen der homogenen unendlich kleinen Größen ddx und dx^2 einen endlichen Werth haben muß: so wird dieselbe, wenn man dx beständig nimmt, in 0, wenn man $d.x^2$ beständig seyn läßt, in $-x$, wenn man $d.x^3$ beständig annimmt, in $-2x$, und wenn man $d.x^4$ als beständig betrachtet, in $-3x$ u. s. w. verwandelt. Es kann also die angenommene Formel keinen bestimmten Werth haben, wofern nicht ausgemacht ist, welches Differenzial als beständig betrachtet werden soll.

§. 253.

Auf eine ähnliche Art läßt sich die Unbeständigkeit der Bedeutung zeigen, wenn das dritte Differenzial in einer Formel enthalten ist. Wir wollen zu dem Ende die Formel $\frac{x^3 d^3 x}{dx\, ddx}$ betrachten, der ebenfalls ein endlicher Werth zukommt. Wird dabey das Differenzial dx beständig angenommen, so verwandelt sie sich in $\frac{0}{0}$, wovon der Werth gleich nachher gezeigt werden wird. Ist ferner $d.x^2$ beständig, so wird $ddx = -\frac{dx^2}{x}$, und wenn man von neuem differenziirt, so findet man $d^3x = -\frac{2dx\,ddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}$, weil $ddx = -\frac{dx^2}{x}$ ist. In diesem Falle wird daher die gegebene Formel $\frac{x^3 d^3 x}{dx\,ddx}$ in $-3x^2$ verwandelt. Ist aber $d.x^n$ beständig, so wird $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$, und daher denn ferner

$$d^3x = -\frac{2(n-1)dx\,ddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2 dx^3}{xx} + \frac{(n-1)dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)dx^3}{xx}.$$

In diesem Falle wird also

$$\frac{d^3x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x}; \text{ und } \frac{x^3d^3x}{dx\,ddx} = -(2n-1)x^2.$$

Hieraus erhellet, daß, wenn $n = 1$ oder dx beständig ist, der Werth dieser Formel $= -x^2$ ist. Auch fällt daraus in die Augen, daß die Formeln, die dritte oder höhere Differenzialien enthalten, ohne daß dabey angezeigt ist, welches Diffe-

Differenzial als beständig betrachtet werden soll, keinen bestimmten Werth haben können, und also eigentlich gar nichts bedeuten; woher denn auch dergleichen Formeln nicht in der Rechnung vorkommen können.

§. 254.

Auf eine ähnliche Art läßt sich erkennen, daß die Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen, die zweyte oder höhere Differenzialien enthalten, keinen bestimmten Werth haben können, wofern nicht irgend ein Differenzial beständig angenommen wird, bloß die Fälle ausgenommen, die wir sogleich betrachten werden. Denn sobald ddx in einer Formel vorkommt, so kann dieselbe keinen bestimmten Werth haben, weil sich der Werth von ddx nach dem Differenziale richtet, welches als beständig betrachtet wird, und eben dieses gilt von jedem höhern Differenziale von x, so wie auch von den zweyten und höhern Differenzialien der übrigen veränderlichen Größen. Wenn aber die zweyten Differenzialien von zweyen oder mehrern veränderlichen Größen in einer Formel vorkommen, so kann es sich ereignen, daß die Unbeständigkeit die von der einen herrührt, durch die Unbeständigkeit von der andern aufgehoben wird; und dann tritt also der gedachte Fall ein, da eine Formel, die die zweyten Differenzialien zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen enthält, gleichwohl einen bestimmten Werth haben kann, obgleich kein Differenzial beständig angenommen worden ist.

§. 255.

Es kann also die Formel $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ keine feste Bedeutung haben, wofern nicht irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen worden ist. Denn läßt man dx beständig seyn, so erhält man daher $\frac{xddy}{dxdy}$; nimmt man hingegen dy beständig an, so bekommt man $\frac{yddx}{dxdy}$, und es fällt in die Augen, daß diese beyden Formeln nicht nothwendig einander gleich sind. Denn sollten sie dieses seyn, so müßten sie auch immer dieselben bleiben, man mögte für x und für y eine Funktion setzen, was für eine man wollte. Wir wollen bloß $y = xx$ setzen. Da nun, wenn man dx als beständig ansieht, $ddy = 2dx^2$ ist, so verwandelt sich die Formel $\frac{xddy}{dxdy}$ in 1; wenn man aber dy oder $2xdx$ beständig annimmt, so wird $ddy = 2xddx + 2dx^2 = 0$, und also $ddx = -\frac{dx^2}{x}$, und dabey geht die Formel $\frac{yddx}{dxdy}$ in $-\frac{1}{2}$ über. Da man nun schon bey diesem einzigen Falle eine Verschiedenheit antrifft, so kann noch weniger überhaupt $\frac{xddy}{dxdy}$, wenn man dx als beständig betrachtet, gleich $\frac{yddx}{dxdy}$ seyn, wenn man dy als eine beständige Größe ansieht. Und da die Formel $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ nicht einmal einerley Werth behält, wenn man nur bloß entweder dx oder dy als beständig betrachtet, so wird sie noch viel weniger einerley Werth behalten, wenn man das Differenzial einer jeden Funktion entweder von x oder von y oder von beyden beständig annimmt.

§. 256.

Hieraus erhellet, daß dergleichen Formeln nicht anders einen festen Werth haben können, als wenn sie so beschaffen sind, daß die zweyten und höhern Differenzialien von x, nemlich

nemlich ddx, d^3x, ꝛc. gänzlich aus der Rechnung verschwinden, wenn anstatt der veränderlichen Größen y und z, welche außer x noch in jenen Formeln enthalten sind, nach Belieben jede Funktion von x gesetzt worden. Denn wenn nach einer solchen Substitution noch ddx, oder d^3x, oder d^4x, ꝛc. in der Formel zurückbleibt, so ist der Werth dieser Formel veränderlich, weil die angeführten Differenzialien ihre Bedeutung verändern, wenn ein anderes Differenzial als beständig betrachtet wird. So ist die vorhergehende Formel $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ beschaffen, die dann, wenn sie einen festgesetzten Werth hätte, es mögte y bedeuten, was es wollte, auch einerley Werth behalten müßte, was auch für y für eine Funktion von x gesetzt würde. Allein wenn man bloß $y = x$ setzt, so verwandelt sich diese Formel in $\frac{2xddx}{dx^2}$, und die Bedeutung hievon ist schwankend, weil darin ddx vorkommt, und also $\frac{2xddx}{dx^2}$, so wie man ein anderes Differenzial beständig annimmt, auch einen andern Werth bekommt, wie aus §. 252. zur Gnüge erhellet.

§. 257.

Es kann hier der Zweifel entstehen, ob es auch Formeln gebe, die zwey oder mehr Differenzialien vom zweyten, oder einem noch höhern Grade enthalten, und dabey so beschaffen sind, daß sich die Differenzialien des zweyten Grades insgesammt einander aufheben, wenn man anstatt der übrigen veränderlichen Größen Funktionen der einen setzt? Diesem Zweifel wollen wir auf die Art begegnen, daß wir zuvörderst eine solche Formel mittheilen, wodurch denn zugleich die weitere Untersuchung erleichtert werden wird. Ich behaupte

haupte also, daß die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ die angeführte Eigenschaft besitze: denn man mag für y eine Funktion von x, was für eine man will, setzen, so heben sich darin immer die Differenzialien des zweyten Grades einander auf. Folgende Beyspiele mögen dies bestätigen:

I. Ist $y = x^2$; so wird $dy = 2xdx$, und $ddy = 2xddx + 2dx^2$. Setzt man aber diese Werthe in die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$, so wird

$$\frac{2xdxddx - 2xdxddx - 2dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Ist $y = x^n$; so wird $dy = nx^{n-1}dx$, und $ddy = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Bringt man nun diese Werthe in die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{nx^{n-1}dxddx - nx^{n-1}dxddx - n(n-1)x^{n-2}dx^3}{dx^3} = -n(n-1)x^{n-2}.$$

III. Ist $y = -\sqrt{(1-xx)}$; so wird $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, und $ddy = \frac{xddx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$: und die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ verwandelt sich in

$$\frac{xddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{xddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

In allen diesen Beyspielen heben sich also die zweyten Differenzialien ddx einander auf, und eben das wird geschehen, was man auch sonst für Funktionen von x für y setzen will.

§. 258.

§. 258.

Da diese Beyspiele die Wahrheit unserer Behauptung schon dargethan haben, daß nemlich die Formel $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ einen bestimmten Werth habe, wenn auch gleich kein Differenzial beständig angenommen wird; so wird es nun um so leichter seyn, den Beweis davon zu führen. Ist also y irgend eine Funktion von x, so wird sein Differenzial $dy = pdx$, und p eine Funktion von x, und ihr Differenzial $dp = qdx$, und auch q eine Funktion von x seyn. Da nun $dy = pdx$ ist, so ist $ddy = pddx + qdx^2$, und $dyddx - dxddy = pdxddx - pdxddx - qdx^3 = - qdx^3$; und da in diesem Ausdrucke kein zweytes Differenzial vorkommt, so ist ihr Werth nicht weiter ungewiß, und $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3} = - q$. Wie also auch immer y von x abhängen mag, so heben sich doch immer die zweyten Differenzialien in dieser Formel einander auf, und es ist daher ihr Werth, so sehr er es sonst seyn würde, nichts weniger als schwankend und ungewiß.

§. 259.

Ob wir hier gleich angenommen haben, daß y eine Funktion von x sey, so bleibt dennoch das Gesagte wahr, wenn auch y gar nicht von x abhängt. Denn indem wir für y eine jede Funktion setzen, ohne zu bestimmen, wie sie beschaffen seyn soll: so nehmen wir im Grunde gar keine Abhängigkeit zwischen x und y an. Man kann indeß den Beweis, auch ohne einer Funktion Erwähnung zu thun, führen. Denn was auch y für eine Größe ist, sie mag von x abhängen oder nicht, so ist doch ihr Differenzial dy homo-

gen

gen mit dx, und es bedeutet daher $\frac{dy}{dx}$ eine endliche Größe, von der das Differenzial, welches sie bekömmt, wenn x in $x + dx$, und y in $y + dy$ übergeht, nicht ungewiß ist, und nicht von dem Gesetze der zweyten Differenzialien abhängt. Es sey also $\frac{dy}{dx} = p$; so ist $dy = pdx$; und $ddy = pddx + dpdx$; und folglich $dxddy - dyddx = dpdx^2$. In diesem Ausdrucke findet keine Ungewißheit weiter statt, weil er bloß erste Differenzialien enthält, und er bleibt daher derselbe, man mag ein Differenzial, und was für eins man will, als beständig betrachten, oder alle veränderlich seyn lassen.

§. 260.

Da also $dyddx - dxddy$, ungeachtet der darin vorkommenden zweyten Differenzialien, indem diese am Ende doch einander aufheben, eine gewisse Bedeutung hat: so wird auch jeder Ausdruck, in welchem außer der Formel $dyddx - dxddy$ keine andere zweyte Differenzialien vorkommen, ebenfalls eine gewisse Bedeutung haben. Oder, wenn $dyddx - dxddy = \omega$ gesetzt wird, und V eine aus x und y, und den ersten Differenzialien hiervon, dx und dy, und aus ω auf irgend eine Art zusammengesetzt ist, so wird der Werth von V ein gewisser Werth seyn. Denn da man bey den ersten Differenzialien dx und dy keine Rücksicht auf das willkührliche Gesetz zu nehmen braucht, nach welchem die successiven Werthe von x wachsend gedacht werden, und in ω die zweyten Differenzialien sich aufheben, so ist auch V keine ungewisse Größe mehr, sondern ihrer Bedeutung nach gewiß. So hat der Ausdruck $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$ einen

gewis-

gewissen Werth, ob er gleich durch die zweyten Differenzialien dazu unfähig zu seyn scheint; ja es ist dieser Werth, da der Zähler überdem mit dem Nenner homogen ist, ein endlicher Werth, wofern er nicht zufälliger Weise unendlich groß oder unendlich klein wird.

§. 261.

So wie gezeigt worden ist, daß die Formel $dxddy - dyddx$ einen gewissen Werth hat, so haben auch, wenn noch eine dritte veränderliche Größe z dazu kommt, die Formeln $dxddz - dzddx$ und $dyddz - dzddy$ gewisse Werthe. Wenn daher Ausdrücke, die drey veränderliche Größen x, y und z enthalten, weiter keine zweyten Differenzialien in sich schließen, als die angeführten, so ist ihre Bedeutung eben so gewiß, als wenn sie gar keine zweyte Differenzialien in sich fassen. So hat der Ausdruck

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)ddy - (dy + dz)ddx + (dx - dy)ddz}$$

der darin vorkommenden zweyten Differenzialien ungeachtet, eine gewisse Bedeutung. Auf eine ähnliche Art lassen sich Formeln machen, die noch mehr veränderliche Größen enthalten, und worin die zweyten Differenzialien die Gewißheit der Bedeutung nicht im mindesten verhindern.

§. 262.

Diese Formeln also unter denen, die zweyte Differenzialien enthalten ausgenommen, so haben die übrigen insgesammt eine ungewisse Bedeutung, und können daher auch nicht anders in den Rechnungen statt finden, als wenn irgend ein erstes Differenzial bestimmt und als beständig angenommen wird. Sobald aber irgend ein erstes Differenzial

zial als beständig angenommen wird, so erhalten alle Ausdrücke, sie mögen so viel veränderliche Größen enthalten als sie wollen, und es mögen außerdem außer dem ersten, Differenziale, von was für einer Ordnung es sey, vorkommen, gewisse Bedeutungen, und sind also nunmehr auch nicht aus der Rechnung ausgeschlossen. Ist z. B. dx als beständig angenommen worden, so verschwinden die zweyten und folgenden Differenzialien von x, und es werden von allen Funktionen von x, die man für die übrigen veränderlichen Größen y, z, ꝛc. setzt, die zweyten Differenzialien durch dx^2, die dritten durch dx^3, ꝛc. bestimmt, und so alle von den zweyten Differenzialien herrührende Unbeständigkeit aus dem Wege geräumt. Eben das geschiehet, wenn das erste Differenzial einer andern veränderlichen Größe oder irgend einer Funktion von ihr als beständig angenommen wird.

§. 263.

Hieraus folgt also, daß die zweyten und die höhern Differenziale eigentlich nie in die Rechnung kommen, und wegen ihrer ungewissen Bedeutung zur Analysis völlig unbrauchbar sind. Denn wenn zweyte Differenzialien da zu seyn scheinen, so wird entweder irgend ein erstes Differenzial als beständig angenommen, oder nicht. Im ersten Falle verschwinden die zweyten Differenzialien ganz aus der Rechnung, indem sie durch die ersten Differenzialien bestimmt werden. Im andern Falle ist ihre Bedeutung, wofern sie sich nicht einander aufheben, ungewiß, und sie selbst finden daher in der Analysis keinen Platz; heben sie sich aber einander auf, so sind sie nur scheinbar da, und man hat eigentgentlich nur die endlichen Größen mit ihren ersten Differenzialien als daseyend zu betrachten. Da sie aber sehr häufig, obgleich nur scheinbar, in den Rechnungen vorkommen, so war es nöthig ihre Behandlungsart zu berühren. Es wird sich indeß auch bald die Methode erklären lassen, wie man die zweyten und alle übrige höhere Differenzialien jedesmal wegschaffen kann.

§. 264.

Wenn ein Ausdruck nicht mehr als eine veränderliche Größe x enthält, und darin die höhern Differenzialien dieser Größe, oder ddx, d^3x, d^4x, ꝛc. vorkommen, so kann er keine gewisse Bedeutung haben, wofern nicht irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen wird. Es sey also t die Größe, deren Differenzial dt beständig seyn soll, so daß $ddt = 0$, $d^3t = 0$, $d^4t = 0$, ꝛc. ist. Setzt man $dx = pdt$, so ist p eine endliche Größe, auf deren Differenzial die ungewisse Bedeutung der zweyten Differenzialien keinen Einfluß hat, und es ist daher auch $\frac{dp}{dt}$ eine endliche Größe. Nun sey $dp = qdt$, und auf ähnliche Art $dq = rdt$, $dr = sdt$, ꝛc. so werden q, r, s, ꝛc. endliche Größen, deren Bedeutungen gewiß sind. Da also $dx = pdt$ ist, so wird

$$ddx = dpdt = qdt^2;\quad d^3x = dqdt^2 = rdt^3;$$
$$d^4x = drdt^3 = sdt^4;\ ꝛc.$$

und wenn man diese Werthe anstatt ddx, d^3x, d^4x setzt, so enthält der ganze Ausdruck bloße endliche Größen und das erste Differenzial dt, und es ist daher seine Bedeutung nicht mehr ungewiß.

§. 265.

Wenn x eine Funktion von t ist, so kann auf diese Art die Größe x gänzlich weggeschaft werden, so daß bloß die Größe t mit ihrem Differenziale dt in dem Ausdrucke zurück bleibt; ist aber x eine Funktion von t, so ist auch t eine Funktion von x. Inzwischen kann auch die Größe x selbst mit ihrem ersten Differenziale dx in der Rechnung beybehalten werden, wofern nur nach den vorhin gemachten Substitutionen allenthalben anstatt t und dt ihre durch x und dx ausgedruckte Werthe wieder hergestellt werden. Damit dieses deutlicher werde, so wollen wir $t = x^n$ setzen, und das erste Differenzial von x^n beständig annehmen. Da also

$dt = nx^{n-1}dx$ ist, so ist $p = \frac{1}{nx^{n-1}}$, und

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx; \text{ daher wird}$$

$$q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}}, \text{ und}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = rdt = nrx^{n-1}dx.$$

Hieraus wird ferner

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}}; \text{ und } s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}.$$

Wenn also das Differenzial von x^n als beständig betrachtet wird, so ist

$$ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x};$$

$$d^3x = -\frac{(n-1)(2n-1)dx^3}{xx};$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx^4}{x^3};$$

ꝛc.

§. 266.

Wenn ein Ausdruck zwey veränderliche Größen x und y enthält, und das Differenzial der einen x beständig angenommen

nommen wird, so kommen, weil $ddx = 0$ ist, keine andere zweyte und höhere Differenzialien vor als ddy, d^3y ꝛc. Diese lassen sich aber auf eben die Art wegschaffen, wenn man $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; ꝛc. setzt. Denn es wird alsdenn

$$ddy = qdx^2;\ d^3y = rdx^3;\ d^4y = sdx^4\ \text{ꝛc.}$$

und braucht man diese Werthe, so erhält man einen Ausdruck, der außer den Größen x, y, p, q, r, s, ꝛc. bloß das erste Differenzial dx enthält. Ist z. B. der Ausdruck

$$\frac{ydx^4 + xdyd^3y + xd^4y}{(xx + yy)ddy}$$

gegeben, und wird darin dx beständig angenommen: so setze man

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ \text{und}\ dr = sdx.$$

Durch den Gebrauch dieser Werthe verwandelt sich der gegebene Ausdruck in folgenden,

$$\frac{(y + xpr + xs)dx^2}{(xx + yy)q}$$

welcher weiter keine zweyte oder höhere Differenzialien enthält.

§. 267.

Auf eine ähnliche Art werden die zweyten und höhern Differenzialien weggeschaft, wenn dy beständig angenommen wird. Soll aber irgend ein anderes erstes Differenzial dt beständig seyn, so muß man zuvörderst auf die vorhin beschriebene Art die höhern Differenzialien von x wegschaffen, indem man

$$dx = pdt;\ dp = qdt;\ dq = rdt;\ dr = sdt,\ \text{ꝛc.}$$

setzt, wodurch denn

$$ddx = qdt^2;\ d^3x = rdt^3;\ d^4x = sdt^4;\ \text{ꝛc.}$$

wird. Ist dieses geschehen, so schafft man auf eine ähnliche Art die höhern Differenzialien von y weg, dadurch, daß man

$$dy = Pdt;\ dP = Qdt;\ dQ = Rdt;\ dR = Sdt;\ \text{rc.}$$

setzt, wodurch denn

$$ddy = Qdt^2;\ d^3y = Rdt^3;\ d^4y = Sdt^4;\ \text{rc.}$$

wird. Gebraucht man nun diese Werthe, so erhält man einen Ausdruck, der außer den endlichen Größen x, p, q, r, s, rc. y, P, Q, R, S, rc. bloß das Differenzial dt enthält, und dessen Bedeutung also auch weiter nicht ungewiß ist.

§. 268.

Wenn das erste Differenzial, welches man beständig annimmt, entweder von x, oder von y, oder von beyden abhängt, so ist die Einführung einer doppelten Reihe endlicher Größen, p, q, r, rc nicht nothwendig. Denn wenn dt allein von x abhängt, so werden die Buchstaben p, q, r, rc. Funktionen von x, und es kommen daher nur die Buchstaben P, Q, R, rc. vor. Eben das geschieht, wenn das beständige Differenzial dt allein von y abhängt. Hängt aber dt von beyden Größen ab, so ist eine in etwas veränderte Operation nöthig. Nehmen wir z. B. das Differenzial ydx beständig an, so wird $yddx + dxdy = 0$, und also $ddx = -\frac{dxdy}{y}$. Nun sey $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; rc., so wird $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, und wenn man fortfährt zu differenziiren,

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y},$$

oder wenn man hierin für ddx seinen Werth $-\frac{pdx^2}{y}$ setzt,

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy}.$$

Ferner

Ferner wird

$$d^4x = -\frac{rdx^4}{y} + \frac{pqdx^4}{yy} + \frac{6pqdx^4}{yy} - \frac{6p^3dx^4}{y^3}$$
$$+ \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right) 3dx^2ddx;$$

und setzt man für ddx seinen Werth $-\frac{pdx^2}{y}$, so erhält man

$$d^4x = \left(\frac{-r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right)dx^4.$$

Da nun $dy = pdx$ ist, so wird $ddy = qdx^2 + pddx = \left(q - \frac{pp}{q}\right)dx^2$; und wenn man fortfährt für ddx seinen Werth $-\frac{pdx^2}{y}$ zu setzen, so wird

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right)dx^3, \text{ und}$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right)dx^4;$$

rc.

Setzt man diese Werthe anstatt der höhern Differenzialien von x und y, so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in einen solchen, der keine höhere Differenzialien mehr enthält, und es ist also dabey nicht einmal nöthig, daß man ein Differenzial als beständig betrachte. Denn da nach dieser Verwandlung keine zweyte Differenzialien vorkommen, so ist es unnöthig zu bestimmen, welches Differenzial als beständig angenommen worden sey.

§. 269.

Bey der Anwendung des Calculs auf die krummen Linien pflegt man häufig dieses erste Differenzial $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

als beständig zu betrachten, und wir wollen daher nunmehr untersuchen, wie in diesem Falle die zweyten und höhern Differenzialien weggeschafft werden. Hierdurch wird man zugleich in den Stand gesetzt werden, dieses Geschäfte bey der Annahme eines jeden andern Differenzials als beständig zu verrichten. Es sey also nochmals

$$dy = pdx;\; dp = qdx;\; dq = rdx;\; dr = sdx;\; \text{ꝛc.}$$

Alsdann erhält das Differenzial $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ diese Form $dx\sqrt{(1 + pp)}$, und da dieses Differenzial beständig seyn soll, so wird

$$ddx\sqrt{(1+pp)} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1+pp)}} = 0, \text{ und also}$$

$$ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}.$$

Da man auf diese Art den Werth von ddx hat, so wird nun ferner

$$d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}; \text{ und}$$

$$d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2} - \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Da wir aber $dy = pdx$ gesetzt haben, so findet man, wenn man differenziirt

$$ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp};$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{2pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp} = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2};$$

$$d^4y = \frac{sdx^4}{1+pp} - \frac{13pqrdx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Es werden also alle höhere Differenzialien sowohl von x als von y durch endliche Größen, und die Potestäten von dx ausgedruckt, und substituirt man diese Werthe, so erhält man einen von allen zweyten Differenzialien befreyten Ausdruck.

§. 270.

Nachdem wir die Art, die zweyten und höhern Differenzialien wegzuschaffen, erklärt haben, so wollen wir nun diese Operation durch einige Beyspiele erläutern.

I. Ist also der Ausdruck $\frac{xddy}{dx^2}$ gegeben, und dx beständig; so setze man $dy = pdx$ und $dp = qdx$. Da nun dadurch $ddy = qdx^2$ wird, so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in die endliche Größe xq.

II. Ist der Ausdruck $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$ gegeben, und dy beständig; so setze man $dx = pdy$; $dp = qdy$, wodurch denn, weil ddx dabey $= qdy^2$ wird, $\frac{1 + pp}{q}$ entsteht. Wenn man aber, wie vorhin, $dy = pdx$; $dp = qdx$ setzen will, so wird, weil dy beständig ist, $0 = pddx + dpdx$, und $ddx = -\frac{qdx^2}{p}$. Hierdurch verwandelt sich der gegebene Ausdruck in $\frac{-p(1 + pp)}{q}$.

III. Ist der Ausdruck $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ gegeben, und soll dabey ydx beständig seyn; so setze man $dy = pdx$, und $dp = qdx$, wodurch aus §. 268. $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, und $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$, so wie durch den Gebrauch dieser Werthe der gegebene Ausdruck in $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$ verwandelt wird.

IV. Ist der Ausdruck $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$ gegeben, und dabey $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig; so setze man wieder $dy = pdx$, und $dp = qdx$, woher denn nach dem vorhergehenden §. $ddy = \frac{qdx^2}{1 + pp}$ wird. Hierdurch aber verwandelt sich der gegebene Ausdruck in $\frac{(1+pp)^2}{q}$.

Aus diesen Beyspielen erhellet zur Gnüge, wie man in jedem Falle, es mag ein erstes Differenzial als beständig angenommen seyn, was für eins man will, die zweyten und höhern Differenzialien wegschaffen kann.

§. 271.

So wie man auf diese Weise durch Einführung der endlichen Größen p, q, r, s, 2c. die zweyten und höhern Differenzialien wegschaffen kann, so daß der ganze Ausdruck außer den endlichen Größen x, y, p, q, r, s, 2c. bloß das Differenzial dx enthält: so kann man auch umgekehrt, wenn ein solcher reducirter Ausdruck gegeben ist, ihn wieder auf seine erste Form bringen, indem man anstatt der Buchstaben p, q, r, s, 2c. die zweyten und höhern Differenzialien wieder einführt. Hier ist es aber gleich, was man für ein erstes Differenzial als beständig betrachten will, und man kann dazu entweder das, was vorher als beständig angesehen worden ist, oder ein jedes andere nehmen. Ja man kann auch gar kein Differenzial als beständig betrachten, und in

diesem

diesem Falle entstehen dergleichen Ausdrücke mit zweyten und höhern Differenzialien, die, ohne daß ein erstes Differenzial angenommen wird, dennoch eine gewisse Bedeutung haben. Dergleichen Ausdrücke sind schon oben da gewesen.

§. 272.

Es sey also irgend ein Ausdruck gegeben, der aus den endlichen Größen x, y, p, q, r, ꝛc. und dem Differenziale dx zusammengesetzt, und worin $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$; ꝛc. ist. Sollen hieraus die Buchstaben p, q, r, ꝛc. auf die Art weggeschafft werden, daß man an ihre Stelle die zweyten und höhern Differenzialien von x und y seze, ohne daß ein Differenzial als beständig betrachtet werde: so wird

$$dp = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2} \text{ und } q = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}.$$

Differenziirt man nun diese Formel, so wird

$$dq = \frac{dx^2 d^3y - 3dx\,ddx\,ddy + 3dy\,ddx^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^4},$$

und also

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3dx\,ddx\,ddy + 3dy\,ddx^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5}.$$

Kommt außerdem der Buchstabe s vor, welcher den Werth $\frac{dr}{dx}$ anzeigt, so muß man dafür diesen Werth setzen,

$$s = \left\{ \begin{matrix} dx^3 d^4y - 6dx^2 ddx\,d^3y - 4dx^2 ddy\,d^3x + 15dx\,ddx^2 ddy \\ + 10dx\,dy\,ddx\,d^3x - 15dy\,ddx^3 - dx^2\,dy\,d^4x \end{matrix} \right\} : dx^7.$$

Braucht man nun diese Werthe anstatt der Größen p, q, r, s, ꝛc. so wird der gegebene Ausdruck in einen andern verwandelt, welcher höhere Differenzialien von x und y enthält, und welcher, obgleich kein erstes Differenzial als beständig betrachtet wird, dennoch eine nichts weniger als schwankende, sondern eine gewisse Bedeutung hat.

§. 273.

Auf diese Art läßt sich also jede Differenzial-Formel von einem höhern Grade, worin irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen worden ist, in eine andere Formel verwandeln, worin kein Differenzial als beständig betrachtet wird, und die gleichwohl einen gewissen Werth hat. Zuvörderst muß man nemlich vermittelst der vorhin beschriebenen Methode durch die Substitutionen $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; ꝛc. die höhern Differenzialien wegschaffen, und darauf für p, q, r, s, ꝛc. die vorhin dafür gefundenen Werthe setzen. Hierdurch entsteht ein Ausdruck, der dem vorigen gleich ist, und kein beständiges Differenzial in sich schließt. Folgende Beyspiele werden diese Operation in ein helleres Licht setzen.

I. Es sey der Ausdruck $\frac{xddy}{dx^2}$ gegeben, und darin dx beständig. Um denselben in einen solchen Ausdruck zu verwandeln, der kein beständiges Differenzial enthält, so setze man $dy = pdx$, und $dp = qdx$, wodurch denn, wie wir vorhin §. 270. gesehen haben, der gegebene Ausdruck in qx verwandelt wird. Nun setze man für q den Werth, welchen es bekommt, wenn man kein beständiges Differenzial annimmt, oder nehme $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$. Hierdurch findet man den Ausdruck $\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$, welcher dem gegebenen gleich ist, und kein beständiges Differenzial mehr in sich schließt.

II. Es

II. Es sey der Ausdruck $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$ gegeben, und dabey dy beständig angenommen. Setzt man $dy = pdx$, und $dp = qdx$; so verwandelt sich derselbe in $-\frac{p(1 + pp)}{q}$. Setzt man aber nun $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, so findet man den Ausdruck $\frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dyddx - dxddy}$, welcher, ohne daß ein beständiges Differenzial angenommen wird, eben denselben gewissen Werth hat, als der vorhergehende.

III. Es sey der Ausdruck $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ gegeben, in welchem das Differenzial ydx beständig angenommen worden ist. Setzt man $dy = pdx$, so wird derselbe, wie wir § 270 gesehen haben, in $-1 - \frac{xy}{p} + \frac{xp}{y}$ verwandelt. Hieraus aber erhält man, wenn kein Differenzial beständig seyn soll,

$$-1 - \frac{xdxddy + xdyddx}{dx^2dy} + \frac{xdy}{ydx} =$$

$$\frac{xdxdy^2 - ydx^2dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2dy}.$$

IV. Es sey der Ausdruck $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$ gegeben, in welchem das Differenzial $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig angenommen worden ist. Setzt man $dy = pdx$, und $dp = qdx$, so verwandelt sich dieser Ausdruck nach §. 270 in $\frac{(1 + pp)^2}{q}$. Nimmt man nun $p = \frac{dy}{dx}$, und $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, so

erhält

erhält man den Ausdruck $\frac{(dx^2 + dy^2)}{dx^2 ddy - dx dy ddx}$, welcher, ohne daß dabey ein beständiges Differenzial angenommen zu werden braucht, dem gegebenen Ausdruck gleich ist.

V. Es sey der Ausdruck $\frac{dx d^3y}{x ddy}$ gegeben, und dabey das Differenzial dx beständig angenommen. Setzt man $dy = p dx$, $dp + q dx$, und $dq = r dx$; so verwandelt sich derselbe, weil $ddy = q dx^2$, und $d^3y = r dx^3$ ist, in $\frac{r dx^2}{x q}$. Nun setze man für q und r die Werthe, welche sie bekommen, wenn man gar kein beständiges Differenzial annimmt, nemlich $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$, und

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3x}{dx^2},$$

so erhält man folgenden, dem gegebenen gleichbedeutenden Ausdruck:

$$\frac{dx^2 d^3y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3x}{dx ddy - dy ddx}$$

$$= \frac{dx (dx d^3y - dy d^3x)}{dx ddy - dy ddx} - 3 ddx.$$

§. 274.

Wenn wir diese Verwandlungen genau betrachten, so können wir daraus eine leichtere Methode ableiten, wobey man dieselben zu Stande bringen kann, ohne daß dabey die Einführung der Buchstaben p, q, r, 2c. nöthig ist. Dieses zu thun findet man aber verschiedene Wege, je nachdem man in der gegebenen Formel dieses oder jenes Differenzial als beständig betrachtet. Wir wollen zuvörderst annehmen, daß in der gegebenen Formel das Differenzial dx beständig gesetzt sey. Da wir nun für dy die Größe pdx, und dann für $\frac{dy}{dx}$ wieder p gesetzt haben, so kann man die ersten Differenzialien dx und dy allenthalben aus dem gegebenen Ausdrucke weglassen, ohne daß dadurch eine Veränderung hervorgebracht wird. Wenn aber ddy vorkommt, so verrichtet man die Verwandlung, weil wir dafür qdx^2, und dann für q den Werth $\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ gesetzt haben, wenn man sogleich für ddy allenthalben $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$ oder $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ setzt. Da ferner rdx^3 für d^3y gesetzt, und dann für r der vorhin dafür gefundene Werth genommen werden kann, so muß man für d^3y allenthalben $d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ setzen, und so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in einen andern, der kein beständiges Differenzial in sich schließt. Wäre z. B. der Ausdruck $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$ gegeben, worin dx beständig angenommen worden: so wird demselben, wenn man $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ für ddy setzt, folgender kein beständiges Differenzial in sich enthaltender Ausdruck gleich:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}.$$

§. 275.

Hieraus läßt sich leicht einsehen, daß man, wenn in einem gegebenen Ausdrucke das Differenzial dy als beständig

dig betrachtet wird, allenthalben $ddx - \frac{dxddy}{dy}$ anstatt ddx, und $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$ für d^3x setzen muß, wenn man einen gleichbedeutenden Ausdruck haben will, der kein beständiges Differenzial in sich schließt. Ist aber in einem gegebenen Ausdrucke ydx beständig angenommen worden, so muß man, weil alsdenn $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, und $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$ ist, für ddx allenthalben $-\frac{dxdy}{y}$, und für ddy allenthalben $ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$ setzen; und hiebey bleibe ich stehen, weil die höhern Differenzialien bey diesem Geschäfte sehr selten vorzukommen pflegen. Ist aber in dem gegebenen Ausdrucke $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig gesetzt worden: so muß man, weil wir dabey $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$, und $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$ gefunden haben, für ddx allenthalben $\frac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$ und für ddy allenthalben $\frac{dx^2ddy - dxdyddx}{dx^2 + dy^2}$ setzen. So wird der Ausdruck $\frac{dy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddx}$, worin $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ beständig ist, in folgenden verwandelt $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dyddx - dxddy}$, so daß hierin kein beständiges Differenzial enthalten ist.

§ 276

Damit dieser Reduktionen desto leichter übersehen werden können, so wollen wir sie in folgende Tabelle bringen.

Es wird also eine Differenzial-Formel eines höhern Grades vermittelst folgender Substitutionen in eine andere kein beständiges Differenzial enthaltende Formel verwandelt.

I. Wenn das Differenzial dx beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$.

II. Wenn das Differenzial dy beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
ddx	$ddx - \frac{dxddy}{dy}$
d^3x	$d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$.

III. Wenn das Differenzial ydx beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
ddx	$- \frac{dxdy}{y}$
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
d^3x	$\frac{dyddx}{y} - \frac{dxddy}{y} + \frac{3dxdy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$
	$- \frac{4dyddy}{y} + \frac{4dy^2ddx}{ydx} - \frac{3dy^3}{yy}$.

IV. Wenn

IV. Wenn das Differenzial $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
ddx	$\frac{dy^2 ddx - dx dy ddy}{dx^2 + dy^2}$
ddy	$\frac{dx^2 ddy - dx dy ddx}{dx^2 + dy^2}$
d^3x	$\frac{dy^2 d^3x - dx dy d^3y}{dx^2 + dy^2} + \frac{(dx ddy - dy ddx)(3dy^2 ddy - dx^2 ddy + 4dx dy ddx)}{(dx^2 + dy^2)^2}$
d^3y	$\frac{dx^2 d^3y - dx dy d^3x}{dx^2 + dy^2} + \frac{(dy ddx - dx ddy)(3dx^2 ddx - dy^2 ddx + 4dx dy ddy)}{(dx^2 + dy^2)^2}$

§. 277.

Es sind also die Ausdrücke, die kein beständiges Differenzial enthalten, von der Art, daß man darin jedes Differenzial als beständig betrachten kann. Hiernach können daher die Differenzial-Formeln der höhern Grade, in welchen kein beständiges Differenzial angenommen seyn soll, geprüft und untersucht werden, ob ihre Bedeutung schwankend oder gewiß ist. Nimmt man nemlich nach Gefallen irgend ein Differenzial, z. B. dx als beständig an, und verwandelt darauf nach der Regel des vorhergehenden §. die erste Formel wieder in eine andere, die kein beständiges Differenzial enthält: so ist, wenn diese mit jener übereinstimmt, die Bedeutung der gegebenen Formel gewiß, und hängt nicht von der Unbeständigkeit der zweyten Differenzialien ab: ist aber die gefundene Formel von der gegebenen verschieden, so ist die Bedeutung von dieser ungewiß. Es sey z. B. der Ausdruck

druck $yddx - xddy$ gegeben, so daß derselbe kein beständiges Differenzial enthalte. Um zu erforschen, ob derselbe eine gewisse Bedeutung habe, setze man dx beständig, wodurch man dafür $- xddy$ erhält. Hierauf setze man nach der Regel des vorhergehenden §. für ddy wieder $ddy - \frac{dyddx}{dx}$, so findet man $- xddy + \frac{xdyddx}{dx}$, und da dieser Ausdruck von dem gegebenen verschieden ist, so ist solches ein Zeichen, daß dieser keine gewisse Bedeutung hat.

§. 278.

Auf eine ähnliche Art lassen sich, wenn ein allgemeiner Ausdruck von dieser Form $Pddx + Qdxdy + Rddy$ gegeben ist, die Bedingungen untersuchen, unter welchen derselbe, ohne Annahme eines beständigen Differenzials, einen gewissen Werth hat. Setzt man nemlich dx beständig, so erhält man dafür: $Qdxdy + Rddy$; und verwandelt man diesen Ausdruck in einen andern immer dasselbe bedeutenden, obgleich dabey kein Differenzial beständig angenommen wird: so findet man $Qdxdy + Rddy - \frac{Rdyddx}{dx}$, und dieser Ausdruck wird dem gegebenen gleich seyn, wenn $Pdx + Rdy = 0$ ist, und nur in diesem Falle ist also die Bedeutung jenes Ausdrucks gewiß. Wenn aber nicht $P = - \frac{Rdy}{dx}$, oder nicht $R = - \frac{Pdx}{dy}$ ist, so hat der gegebene Ausdruck $Pddx + Qdxdy + Rddy$ keinen gewissen Werth, sondern es ist die Bedeutung desselben schwankend und verschieden, je nachdem dieses oder ein anderes Differenzial als beständig angenommen wird.

§. 279.

Nach diesen Grundlehren ist es leicht, einen Differenzial-Ausdruck, worin irgend ein Differenzial beständig angenommen worden ist, in einen andern zu verwandeln, bey welchem ein anderes beständiges Differenzial zum Grunde liegt. Man hat zu dem Ende nur nöthig, den gegebenen Ausdruck in einen solchen zu verwandeln, in welchem kein Differenzial beständig ist, und darauf das andere Differenzial als beständig zu betrachten. Ist z. B. in dem gegebenen Ausdrucke das Differenzial dx beständig, und soll derselbe in einen andern Ausdruck verwandelt werden, in welchem das beständige Differenzial dy enthalten sey: so setze man in den nach dem Obigen für ddy und d^3y zu substituirenden Formeln, weil dy beständig ist, $ddy = 0$, $d^3y = 0$, und dann wird dem Verlangten ein Genüge geschehen, wenn man $-\frac{dyddx}{dx}$ für ddy, und $\frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ für d^3y setzt. Auf diese Art wird die Formel $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$ worin dx beständig ist, in diese, $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$ verwandelt, worin dy als eine beständige Größe enthalten ist.

§. 280.

Wenn hingegen eine Formel, worin dy beständig ist, in eine andere verwandelt werden soll, worin dx beständig ist, so muß man $-\frac{dxddy}{dy}$ anstatt ddx, und $\frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$ anstatt d^3x setzen. Soll eine Formel, worin $\surd(dx^2 + dy^2)$ beständig ist, in eine andere verwandelt werden,

den, worin dx beständig ist, so muß man $- \frac{dx\,dy\,ddy}{dx^2 + dy^2}$ für ddx, und $\frac{dx^2\,ddy}{dx^2 + dy^2}$ für ddy setzen. Soll hingegen eine Formel, worin dx beständig ist, in eine andere verwandelt werden, worin $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig ist, so muß man, weil, wenn $dx^2 + dy^2$ beständig ist, $dx\,ddx + dy\,ddy = 0$, und $ddx = - \frac{dy\,ddy}{dx}$ wird, $- \frac{dy\,ddy}{dx}$ für ddx, und $ddy + \frac{dy^2\,ddy}{dx^2} = \frac{(dx^2 + dy^2)\,ddy}{dx^2}$ für ddy setzen.

Auf diese Art wird die Formel $- \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}$, worin dx beständig ist, in eine andere verwandelt, worin $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig ist, nemlich in $- \frac{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddy}$.