Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Neuntes Capitel. Von den Differenzial-Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52886

Neuntes Capitel.

Von den Differenzial=Gleichungen.

§. 281.

Die Absicht dieses Capitels ist vorzüglich die Erklärung der Differenziation solcher Funktionen von x, die nicht entwickelt, sondern in einer Gleichung, welche das Verhältniß der Funktion y zu x ausdruckt, gegeben sind; worauf denn ferner die Natur der Differenzial Gleichungen allgemein untersucht, und ihre Entstehungsart aus endlichen Gleichungen beschrieben soll. Denn da das Hauptgeschäfte der Integral=Rechnung in der Integration der Differenzial=Gleichungen besteht, d. h. in der Erfindung solcher endlichen Gleichungen, die zu den Differenzial=Gleichungen passen: so ist nothwendig, daß wir hier die Natur und Eigenschaften der Differenzial=Gleichungen, die aus der Entstehungsart derselben fließen, sorgfältig untersuchen, und so den Weg zur Integral=Rechnung bahnen.

§. 282.

Es sey also y eine solche Funktion von x, als durch diese quadratische Gleichung bestimmt wird, $yy + Py + Q = 0$. Da der Ausdruck $yy + Py + Q = 0$ ist, x mag bedeuten, was es will, so wird derselbe auch $= 0$ seyn, wenn man $x + dx$ für x setzt, in welchem Falle denn y in $y + dy$ übergeht. Hat man aber diese Substitution vorgenommen, so bleibt, wenn man von der gefundenen Größe $yy + Py + Q$ abzieht,

abzieht, das Differenzial dieser letzten Größe übrig, welches daher ebenfalls = 0 ist. Hieraus erhellet, daß das Differenzial eines Ausdrucks, der = 0 ist, ebenfalls = 0 ist, und daß, wenn zwey Ausdrücke einander gleich sind, auch ihre Differenzialien einander gleich seyn müssen. Da also

$$yy + Py + Q = 0$$ ist, so ist auch

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0;$$

und da P und Q Funktionen von x sind, so werden ihre Differenzialien die Form haben, daß

$$dP = pdx, \text{ und } dQ = qdx$$

ist, und daher wird

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0,$$

und hieraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{yp-q}{2y+P}.$$

§. 283.

So wie daher eine endliche Gleichung, $yy + Py + Q = 0$ das Verhältniß zwischen y und x ausdruckt, so druckt eine Differenzial-Gleichung das Verhältniß aus, in welchem dy zu dx steht. Da aber $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp-q}{2y+P}$ ist; so kann man über das Verhältniß $dy : dx$ nicht eher urtheilen, als bis y bekannt ist. Dieß muß nothwendig so seyn. Denn wenn y aus der endlichen Gleichung einen doppelten Werth erhält, so hat auch ein jeder derselben sein besonderes Differenzial, und man findet das eine oder das andere, je nachdem man den einen oder den andern Werth von y in den Ausdruck $-\frac{yp-q}{2y+P}$ setzt. Auf eine ähnliche Art erhält $\frac{dy}{dx}$, wenn y durch eine cubische Gleichung bestimmt wird, einen dreyfachen Werth, nach dem dreyfachen Werthe nemlich von y.

Hat y in der gegebenen Gleichung vier oder mehr Dimensionen, so muß auch $\frac{dy}{dx}$ nothwendig eben so viel Bedeutungen bekommen.

§. 284.

Es kann indeß auch die Funktion y selbst aus der Gleichung weggeschafft werden, weil man zwey Gleichungen hat, die y enthalten, eine endliche nemlich und eine Differenzial-Gleichung; alsdenn aber steigt das Differenzial dy zu eben so viel Dimensionen auf, als vorher y hatte, und es begreift also die Gleichung, welche man durch die Elimination findet, alle verschiedene Verhältnisse von dy und dx zugleich. Wir wollen zum Beyspiele die vorhergehende Gleichung $yy + Py + Q = 0$ nehmen, deren Differenzial $2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$ ist, woher denn $y = -\frac{Pdy - dQ}{2dy + dP}$ wird. Setzt man nun diesen Werth anstatt y in die vorhergehende Gleichung, so wird

$$(4Q - PP)dy^2 + (4Q - PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0,$$

wovon die Wurzeln sind

$$dy = -\tfrac{1}{2}dP \pm \frac{(\tfrac{1}{2}PdP - dQ)}{\surd(PP - 4Q)}$$

und diese Wurzeln sind die beyden Differenzialien der beyden Werthe von y aus der endlichen Gleichung, oder von

$$y = -\tfrac{1}{2}P \pm \tfrac{1}{2}\surd(PP - 4Q).$$

§. 285.

Hat man den Werth von dy gefunden, so findet man durch wiederholte Differenziation den Werth von ddy, und so auch ferner von d^3y, d^4y ꝛc. Da aber diese Werthe ungewiß sind, wofern nicht ein erstes Differenzial als beständig ange-

angenommen wird, so wollen wir der größern Bequemlichkeit wegen dx beständig seyn lassen, und zur Erklärung der dabey zu beobachtenden Verhaltungsart dies Beyspiel $y^3 + x^3 = 3axy$ betrachten. Hieraus erhält man nun, wenn man differenziirt

$$3yydy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx, \text{ und also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}.$$

Nun nehme man abermals die Differenzialien, und behandle dabey dx als beständig, so findet man

$$\frac{ddy}{dx} = -\frac{ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

und wenn man für dy seinen so eben gefundenen Werth $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$ setzt, und durch dx dividirt, so wird

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3} + \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - xx)^2}$$

oder

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3} = -\frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3},$$

weil aus der endlichen Gleichung $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$ folgt. Und auf diese Weise können diese Werthe vermittelst der endlichen Gleichung unzählige Formen erhalten.

§. 286.

Auch die erste Differenzial-Gleichung kann auf unzählige Arten verändert werden, indem man sie mit der endlichen Gleichung vermischt. So erhält man, da bey dem vorhergehenden Exempel gefunden wurde,

$$yydy + xxdx = axdy + aydx,$$

wenn man diese Gleichung durch y multiplicirt,

$$y^3dy + xxydx = axydy + ayydx;$$

und wenn man hierin für y^3 seinen Werth $3axy - x^3$ setzt, so bekömmt man diese neue Gleichung

$$2axydy - x^3dy + xxydx = ayydx;$$

und multiplicirt man diese abermals durch y, und setzt darauf wieder den Werth desselben, so wird

$$2axy^2dy - x^3ydy + xxyydx = 3aaxydx - ax^3dx.$$

Ueberhaupt aber wird, wenn P, Q und R Funktionen von x und y bedeuten, und man die Differenzial-Gleichung durch P multiplicirt,

$$Pyydy + Pxxdx = aPxdy + aPydx.$$

Da nun $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ist, so ist auch

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0.$$

Addirt man aber diese beyden Gleichungen zu einander, so geben sie eine allgemeine aus der gegebenen endlichen Gleichung entstandenen Differenzial-Gleichung,

$$Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy +$$
$$Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0.$$

§. 287.

Es lassen sich aber auch durch die Differenziation selbst unzählige Differenzial-Gleichungen aus einer und derselben endlichen Gleichung finden, wenn man dieselbe, bevor man sie differenzirt, durch irgend eine Größe multiplicirt oder dividirt. Ist z. B. P irgend eine Funktion von x und y, so daß $dP = pdx + qdy$ ist: so erhält man, wenn man die endliche Gleichung durch P multiplicirt, und dann erst differenzirt, eine allgemeine Differenzial-Gleichung, die unendlich viele Formen annehmen kann, je nachdem für P diese oder jene Funktion angenommen wird. Diese Menge und Mannigfaltigkeit wird indeß noch unendlich vermehrt, wenn man zu der gefundenen Differenzial-Gleichung die endliche Gleichung, durch eine Formel wie diese, $Qdx + Rdy$, multiplicirt,

tiplicirt, addirt, wobey man denn für Q und R nach Gefallen jede Funktion von x und y annehmen kann. Ohnerachtet aber in allen diesen Gleichungen das Verhältniß zwischen dx und dy, welches das Differenzial der Funktion y, die durch eine endliche Gleichung durch x bestimmt ist, zu dx hat, begriffen ist, so erstrecken sie sich doch gewöhnlicher Weise viel weiter, und drucken zugleich das Verhältniß des Differenzials von y aus, wenn es durch andere endliche Gleichungen bestimmt ist. Der Grund hiervon kann erst in der Integral-Rechnung erklärt werden.

§. 288.

Es lassen sich aber nicht nur aus einer und derselben Gleichung unzählige Differenzial Gleichungen ableiten, sondern es lassen sich auch sehr viele ja unzählige endliche Gleichungen angeben, die insgesammt auf eben dieselbe Differenzial-Gleichung führen. So sind z. B. diese beyden Gleichungen $yy = ax + ab$, und $yy = ax$ allerdings verschieden, indem man in der ersten jede beständige Größe für b setzen kann. Wenn man indeß beyde Gleichungen differenziirt, so erhält man nicht mehr als eine Differenzial-Gleichung, nemlich $2ydy = adx$; ja es können alle, unter der Form $yy = ax$ begriffene Gleichungen, was auch a für einen Werth haben mag, in eine Differenzial-Gleichung, die a nicht enthält, zusammengefaßt werden. Denn dividirt man jene Gleichung durch x, so bekommt man $\frac{yy}{x} = a$, und diese giebt, wenn man sie differenziirt, $2xdy - ydx = 0$. Auch können transcendente und algebraische Gleichungen auf einerley Differenzial-Gleichungen gebracht werden, so wie solches bey den Gleichungen

$$yy - ax = 0, \text{ und } yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$$

statt findet. Denn dividirt man beyde Gleichungen durch $e^{\frac{x}{a}}$, wodurch dieselben in

$$e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0, \text{ und } e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb$$

verwandelt werden: so findet man aus beyden die einzige Differenzial-Gleichung

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

§. 289.

Der Grund dieser Verschiedenheit liegt darin, weil das Differenzial einer beständigen Größe $= 0$ ist. Wenn daher eine endliche Gleichung auf eine solche Form gebracht wird, daß darin irgend eine beständige Größe allein, und nicht durch eine veränderliche Größe multiplicirt oder dividirt, vorkommt: so findet man durch die Differenziation eine Gleichung, in welcher jene beständige Größe gar nicht enthalten ist. Auf diese Art kann eine jede beständige Größe, die in einer endlichen Gleichung befindlich ist, durch die Differenziation weggebracht werden. Ist z. B. die Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$ gegeben, so verwandelt sich dieselbe, wenn man sie durch xy dividirt, in $\frac{x^3 + y^3}{xy} = a$, und differenziirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

worin die beständige Größe a nicht mehr enthalten ist.

§. 290.

Wenn mehrere beständige Größen, die sich in einer Gleichung finden, aus derselben weggeschaft werden sollen, so geschiehet solches durch eine zwey oder mehreremal wie-

derholte

derholte Differenziation, und so erhält man endlich Differenzial-Gleichungen von einem höhern Grade, in welchen jene beständige Größen nicht mehr enthalten sind. Es sey die Gleichung $yy = maa - nxx$ gegeben, um daraus durch die Differenziation maa und n wegzuschaffen. Die erste fällt durch die erste Differenziation weg, wodurch $2ydy + 2nxdx = 0$ wird. Hieraus formire man nun die Gleichung $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, die, wenn man dx beständig nimmt, von neuem differenziirt, folgende giebt:

$$xyddy + xdy^2 - ydxdy = 0.$$

Obgleich diese Gleichung keine beständige Größe enthält, so begreift sie doch alle unter der Form $yy = maa - nxx$ enthaltene Gleichungen unter sich, es mag den Buchstaben m, a und n ein Werth beygelegt werden, was für einer man will.

§. 291.

Es lassen sich aber nicht bloß die beständigen Größen, die in einer endlichen Gleichung vorkommen, durch die Differenziation wegschaffen, sondern man kann dieses auch mit der einen veränderlichen Größe thun, mit derjenigen nemlich, deren Differenzial beständig angenommen wird. Sucht man nemlich aus der zwischen x und y gegebenen Gleichung den Werth von x, so daß $x = Y$ wird, wenn Y eine Funktion von y bedeutet: so wird $dx = dY$, und nimmt man dx beständig, so wird bey wiederholter Differenziation $0 = ddY$. Ist hingegen $xx + ax + b = Y$, so wird bey dreymaliger Differenziation $0 = d^3Y$, und die Gleichung $x^3 + axx + bx + c = Y$ giebt auf ähnliche Art, viermal differenziirt, $d^4Y = 0$. Ob aber gleich in diesen Gleichungen nur eine veränderliche Größe zu seyn scheinet, die eben

dadurch

dadurch aufhören würde, eine veränderliche Größe zu seyn, weil in keiner Gleichung nur eine veränderliche Größe seyn kann: so muß man gleichwohl, weil man das Differenzial dx beständig angenommen hat, und darauf in der Gleichung Rücksicht genommen werden muß, im Grunde annehmen, daß es in der Gleichung befindlich sey. Man hat sich daher auch nicht zu verwundern, wenn bisweilen Differenzial-Gleichungen vom zweyten oder noch höhern Graden vorkommen, die nur eine veränderliche Größe zu enthalten scheinen.

§. 292.

Vorzüglich aber ist zu merken, daß man durch die Differenziation die irrationalen und transcendenten Größen aus einer Gleichung wegschaffen kann. Was die irrationalen Größen betrifft so wird, wenn man durch die bekannten Reductionen die Irrationalität weggebracht hat, und nun differenziirt, die Gleichung von aller Irrationalität frey. Es kann aber dies öfters viel bequemer ohne die gedachte Reduction geschehen, indem man, wenn nur eine Irrational Größe da ist, dieselbe durch die Vergleichung der Differenzial-Gleichung mit der endlichen Irrational-Formel wegschaffen kann. Wenn aber in der endlichen Gleichung zwey oder mehrere irrationale Theile enthalten sind, so darf man nur die Differenzial-Gleichung davon von neuem differenziiren, und auf diese Art so viel Differenzial-Gleichungen höherer Grade suchen, als erforderlich sind, um alle irrationalen Theile wegzuschaffen. Auf diese Art können auch die unbestimmten und gebrochenen Exponenten weggebracht werden. Ist z. B. $y^m = (aa - xx)^n$, so erhält man durch die Differenziation,

$$my^{m-1}dy = - 2n(aa - xx)^{n-1}xdx,$$

und

und hieraus durch die Division durch die endliche Gleichung

$$\frac{mdy}{y} = -\frac{2nxdx}{aa - xx},$$

worin kein unbestimmter Exponent mehr enthalten ist. Hieraus erhellet, daß eine von aller Irrationalität befreyte Differenzial-Gleichung aus einer endlichen irrationalen und selbst transcendente Größen enthaltenden Gleichung entstanden seyn kann.

§. 293.

Um aber zu zeigen, wie die transcendenten Größen durch die Differenziation weggeschafft werden, so wollen wir von den Logarithmen anfangen, bey welchen dieses Geschäfte keine Schwierigkeit hat, da die Differenzialien der Logarithmen algebraische Größen sind. Ist nemlich $y = xlx$, so ist $\frac{y}{x} = lx$, und daraus findet man durch die Differenziation $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dx}{x}$, und es ist folglich $xdy - ydx = xdx$. Sind zwey Logarithmen da, so ist eine zweyte Differenziation nöthig. Ist z. B. $ylx = xly$, so ist $\frac{ylx}{x} = ly$, und daraus erhält man durch die Differenziation

$$\frac{xdylx + ydx - ydxlx}{xx} = \frac{dy}{y},$$

so wie sich hieraus $lx = \frac{xxdy - yydx}{yxdy - yydx}$ ergiebt. Nun differenziire man von neuem so, daß man dx beständig seyn läßt, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{xxddy + 2xdxdy - 2ydxdy}{yxdy - yydx} + \frac{(yydx - xxdy)(yxddy + xdy^2 - ydxdy)}{(yxdy - yydx)^2}$$

oder

oder

$$\frac{dx}{x} = \left\{ \begin{array}{c} y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - y^2xdxdy^2 \\ + y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3 \end{array} \right\} : yxdy - yydx^2.$$

Hieraus aber wird, wenn man diese Gleichung reducirt,

$$y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - 2xyydxdy^2$$
$$+ 3y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3 - \frac{y^4dx^3}{x} = 0,$$

oder

$$yyxx(y - x)dxddy + 3yxdxdy(xxdy + yydx)$$
$$- 2yyxxdxdy(dx + dy) = x^4dy^3 + y^4dx^3.$$

§. 294.

Die Exponential-Größen werden aus den Gleichungen auf eben die Art wie die Logarithmen durch die Differenziation weggeschafft. Ist z. B. die Gleichung $P = e^Q$ gegeben, wo P und Q jede Funktion von x und y bedeuten können: so läßt sich diese Gleichung in folgende logarithmische Gleichung $lP = Q$ verwandeln, deren Differenzial-Gleichung $\frac{dP}{P} = dQ$, oder $dP = PdQ$ ist. Auch hindert das nichts, wenn die Exponential-Größen mehr zusammen gesetzt sind; denn wenn eine Differenziation nicht hinreicht, so erreicht man doch durch zwey oder mehrere seinen Endzweck.

I. Ist $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, so multiplicire man den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch e^x. Hierdurch wird $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$, und also $e^{2x} = \frac{y + 1}{y - 1}$, und $2x = l\frac{y+1}{y-1}$. Hievon ist aber das Differenzial $dx = -\frac{dy}{yy-1} = \frac{dy}{1-yy}$.

II. Ist $y = l\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, so findet man durch die erste Differenziation $dy = \frac{(e^x - e^{-x})dx}{e^x + e^{-x}}$, oder $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, und $e^{2x} = \frac{dy + dx}{dx - dy}$, und folglich $2x = l\frac{dy + dx}{dx - dy}$. Nimmt man also dx beständig an, so wird $dx = \frac{dx\,ddy}{dx^2 - dy^2}$, oder $dx^2 = ddy + dy^2$.

§. 295.

Auf eine ähnliche Art werden auch die transcendenten Größen, die vom Kreise abhangen, aus den Gleichungen, vermittelst der Differenziation, weggeschafft; wie folgende Beyspiele zeigen werden.

I. Wenn $y = a\,A.\sin.\frac{x}{a}$ ist; so ist $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

II. Wenn $y = a\cos.\frac{y}{x}$ ist; so ist $\frac{y}{a} = \cos.\frac{y}{x}$ und $\frac{dy}{a} = -\frac{x\,dy + y\,dx}{xx} \times \sin.\frac{y}{x}$. Da aber $\cos.\frac{y}{x} = \frac{y}{a}$ ist, so ist $\sin.\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{a}$, und gebraucht man diesen Werth, so wird $\frac{dy}{a} = \frac{(y\,dx - x\,dy)\sqrt{(aa - yy)}}{axx}$ oder $xx\,dy = (y\,dx - x\,dy)\sqrt{(aa - yy)}$.

III. Wenn $y = m\sin.x + n\cos.x$ ist, so ist nach der ersten Differenziation $dy = m\,dx.\cos.x - n\,dx.\sin.x$. Hieraus findet man, wenn man von neuem differenziirt und dx beständig annimmt,

$$ddy = -m\,dx^2.\sin.x - n\,dx^2.\cos.x,$$

und

und diese Gleichung, durch die erste dividirt, giebt

$$\frac{ddy}{y} = -dx^2, \text{ oder } ddy + ydx^2 = 0.$$

so daß also hier nicht bloß der Sinus und Cosinus, sondern auch die beständigen Größen m und n verschwunden sind.

IV. Wenn $y = \sin. lx$ ist, so ist $A.\sin. y = lx$, und hieraus erhält man durch die Differenziation $\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{dx}{x}$. Nimmt man hiervon die Quadrate $xxdy^2 = dx^2 - yydx^2$, und differenziirt nun wieder, so daß man dx beständig seyn läßt, so wird

$$2xxdyddy + 2xdxdy^2 = -2ydx^2dy$$

oder

$$xxddy + xdxdy + ydx^2 = 0.$$

V. Wenn $y = ae^{mx}\sin. nx$ ist, so wird durch die Differenziation

$$dy = mae^{mx}dx\sin. nx + nae^{mx}dx\cos. nx$$

und hieraus durch die Division mit der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{dy}{y} = mdx + \frac{ndx.\cos. nx}{\sin. nx} = mdx + ndx.\cot. nx.$$

Es ist also $A.\cot.\left(\frac{dy}{nydx} - \frac{m}{n}\right) = nx$. Differenziirt man nun diese Gleichung, so daß man dx beständig seyn läßt, so wird

$$ndx = \frac{ndxdy^2 - nydxddy}{m^2y^2dx^2 + n^2y^2dx^2 - 2mydxdy}, \text{ oder}$$

$$(m^2 + n^2)y^2dx^2 - 2mydxdy = dy^2 - yddy.$$

Es erhellet hieraus, daß eine Differenzial-Gleichung, wenn sie auch gleich keine transcendenten Größen enthält, doch aus

aus einer endlichen Gleichung entstehen kann, die transcendente Größen jeder Art enthält.

§. 296.

Da also die Differenzial-Gleichungen sowohl des ersten als jedes höhern Grades, welche zwey veränderliche Größen x und y enthalten, aus endlichen Gleichungen entspringen: so wird durch sie ebenfalls ein Verhältniß zwischen jenen zwey veränderlichen Größen ausgedruckt. Ist nemlich irgend eine Differenzial-Gleichung, worin zwey veränderliche Größen x und y vorkommen, gegeben, so wird dadurch ein gewisses Verhältniß zwischen x und y ausgedruckt, nach welchem y eine gewisse Funktion von x ist. Daher erkennet man die Natur der Differenzial-Gleichung, wenn man für y die Funktion von x angeben kann, welche durch jene Gleichung angezeigt wird, oder welche so beschaffen ist, daß sich, wenn man dieselbe allenthalben anstatt y, ihr Differenzial anstatt dy, und ihre höhern Differenzialien anstatt ddy, d^3y, d^4y setzt, eine identische Gleichung ergiebt. Mit der Erfindung dieser Funktion beschäftiget sich die Integral-Rechnung, deren Endzweck ist, aus jeder gegebenen Differenzial-Gleichung die Funktion von x, welcher die andere veränderliche Größe gleich ist, zu finden, oder welches einerley ist, die endliche Gleichung zu finden, welche das Verhältniß zwischen x und y ausdruckt.

§. 297.

Es sey z. B. die Differenzial-Gleichung

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0$$

gegeben, welche wir §. 288 gefunden haben, und wodurch ein solches Verhältniß zwischen x und y ausgedruckt wird, als in folgender endlichen Gleichung $yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$ zum Grunde liegt. Da also aus dieser Gleichung $yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ ist, so erhellet, daß $\sqrt{(ax + bbe^{\frac{x}{a}})} = y$ die Funktion von x ist, der die veränderliche Größe y vermöge der Differenzial-Gleichung gleich ist. Denn wenn man in dieser Gleichung anstatt yy seinen Werth $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ und anstatt $2ydy$ sein Differenzial $adx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx$ setzt, so erhält man diese identische Gleichung:

$$adx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx - adx - xdx - \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx + xdx = 0.$$

Auf diese Art erhellet, daß jede Differenzial-Gleichung eben so als eine endliche Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen den Größen x und y anzeigt, welches aber nicht anders als vermittelst der Integral-Rechnung erforscht werden kann.

§. 298.

Um dies deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, daß die Funktion von x, der y vermöge der Differenzial-Gleichung gleich ist, bekannt sey, wobey denn die Differenzial-Gleichung zum ersten oder zu einem höhern Grade gehören kann. Ferner sey $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, &c., so daß also, wenn man dx beständig annimmt, $ddy = qdx^2$, $d^3y = rdx^3$ &c. werde. Setzt man diese Werthe in die Gleichung, so verschwinden daraus, weil alle ihre Glieder homogen sind, die Differenzialien dx durch die Division, und es entsteht eine Gleichung, welche bloß die endlichen

Größen

Größen x, y, p, q, r, rc. enthält. Da nun p, q, r Größen sind, die von der Natur der Funktion y abhangen, so enthält die Gleichung eigentlich nur die veränderlichen Größen x und y, und so erhellet wiederum, daß eine jede Differenzial-Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen den veränderlichen Größen x und y ausdrucke. Wenn man daher bey der Auflösung einer Aufgabe auf eine Differenzial-Gleichung zwischen x und y kommt, so ist dadurch das Verhältniß zwischen x und y eben so bestimmt, als wenn man eine endliche Gleichung gefunden hätte.

§. 299.

Auf diese Art kann daher jede Differenzial-Gleichung auf eine endliche Form gebracht werden, worin bloß endliche Größen enthalten, und woraus alle Differenzialien oder unendlich kleine Größen weggebracht sind. Denn da y eine Funktion von x ist, so werden, wenn man

$$dy = pdx; \quad dp = qdx; \quad dq = rdx; \text{ rc.}$$

setzt, man mag ein Differenzial, was für eins man will, beständig annehmen, die zweyten und höhern Differenzialien durch die Potestäten von dx ausgedruckt, und darauf durch die Division gänzlich weggebracht. Wäre z. B. die Gleichung

$$xyd^3y + xxdyddy + yydxddy - xydx^3 = 0,$$

worin dx beständig ist, gegeben: so würde sich dieselbe, wenn man $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, setzte, und die ganze Gleichung durch dx^3 dividirte, in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0.$$

verwandeln, und diese endliche Gleichung bestimmt das Verhältniß zwischen x und y.

§. 300.

Es werden also alle Differenzial-Gleichungen, zu was für einer Ordnung sie auch gehören mögen, durch diese Substitutionen

$$dy = pdx; \quad dp = qdx; \quad dq = rdx; \text{ ꝛc.}$$

auf bloße endliche Größen reducirt. Und wenn die gegebene Differenzial-Gleichung zur ersten Ordnung gehört, so daß also nur die ersten Differenzialien in ihr befindlich sind, so wird durch die gedachte Reduktion außer den veränderlichen Größen x und y noch die Größe p eingeführt. Gehört hingegen die Differenzial-Gleichung zum zweyten Grade, oder enthält sie zweyte Differenzialien, so kommt außerdem noch die Größe q, und gehört sie zum dritten Grade, so kommt noch die Größe r dazu u. s. f. Da also auf diese Art die Differenzialien gänzlich aus dem Calcul wegfallen, so hat man auch nicht weiter nöthig, ein Differenzial als beständig zu betrachten, und es bedarf daher, obgleich die aus den zweyten Differenzialien entspringenden Größen, q, r, s, ꝛc. da sind, keiner Anzeige, welches Differenzial beständig angenommen worden sey. Denn es ist gleich, ob man bey der Entwickelung ein beständiges Differenzial annimmt oder nicht.

§. 301.

Wenn also eine Differenzial-Gleichung vom zweyten oder einem noch höhern Grade gegeben wird, von der angezeigt ist, daß dabey kein erstes beständiges Differenzial zum Grunde liege: so kann man auf diese Art sogleich erforschen, ob sie ein bestimmtes Verhältniß zwischen x und y enthalte oder nicht? Denn da kein beständiges Differenzial angenommen worden ist, so steht es bey uns, welches wir als beständig betrachten wollen, und es kommt daher bloß darauf an, daß wir untersuchen, ob die Gleichung auch, wenn man ver-

schiedene

schiedene Differenzialien beständig seyn läßt, eben dasselbe Verhältniß zwischen x und y enthalte. Ist dies nicht, so ist solches ein untrügliches Kennzeichen, daß die Gleichung kein bestimmtes Verhältniß ausdruckt, und daher auch bey der Auflösung der Aufgaben nicht statt haben kann. Der sicherste und leichteste Weg dieses zu erforschen ist aber der, auf welchem nach dem Obigen bey den Differenzial Formeln der höhern Ordnungen untersucht wird, ob dieselben eine gewisse Bedeutung haben oder nicht.

§. 302.

Ist also eine Differenzial-Gleichung der zweyten oder einer höhern Ordnung gegeben, wobey kein beständiges Differenzial angenommen worden, so nehme man dx beständig an. Dann verwandele man die Gleichung auf die Art, wie bey den Differenzial Formeln gezeigt worden ist, in eine solche, die kein beständiges Differenzial voraussetzt, und schreibe zu dem Ende $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ für ddy, und $d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ für d^3y. Ist dies geschehen, so untersuche man, ob die gefundene Gleichung mit der gegebenen übereinstimme oder nicht. Im ersten Falle druckt die gegebene Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen x und y aus, im andern aber nicht, wie solches bereits ausführlich bewiesen worden ist.

§. 303.

Es sey, um dies deutlich zu machen, folgende Gleichung gegeben,

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

und zwar unter der Bedingung, daß darin kein Differenzial beständig sey. Setzt man dx beständig, so verwandelt sich dieselbe in

$$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

und verwandelt man nunmehr diese gefundene Gleichung auf die vorhin beschriebene Art wieder in eine solche, wobey kein beständiges Differenzial statt findet, so wird

$$-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Da nun diese Gleichung von der gegebenen bloß in Ansehung des ersten Gliedes unterschieden ist, so muß man zusehen, ob $P = -\frac{Qdy}{dx}$ ist. Ist dies, so druckt die gegebene Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen x und y aus, welches die Integral-Rechnung finden lehrt, was auch für ein erstes Differenzial als beständig angenommen wird; ist aber nicht $P = -\frac{Qdy}{dx}$, so ist die gegebene Gleichung unmöglich.

§. 304.

Wofern also die Gleichung

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

nicht unmöglich ist, so ist nothwendiger Weise $Pdx + Qdy = 0$. Dies kann auf eine zwiefache Art geschehen. Denn es ist entweder wirklich $P = -\frac{Qdy}{dx}$, oder die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$; oder es ist die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ selbst die Differenzial-Gleichung des ersten Grades, durch deren Differenziation die gegebene entstanden ist. Im letzten Falle stimmt die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ mit der gegebenen überein, und druckt eben dasselbe Verhältniß zwischen x und y aus, wobey man denn dieses Verhältniß ohne

Hülfe

Hülfe der Integral-Rechnung finden kann. Da nemlich $Pdx + Qdy = 0$ ist, so findet man, wenn man differenziirt,

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

und zieht man diese Gleichung von der gegebenen ab, so bleibt

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy$$

übrig. Weil aber $dy = -\frac{Pdx}{Q}$ ist, so lassen sich die Differenzialien gänzlich wegschaffen, und dadurch erhält man eine endliche Gleichung, welche das Verhältniß zwischen x und y ausdruckt.

§. 305.

Nun wollen wir annehmen, daß man bey der Auflösung eines Problems, wobey kein Differenzial beständig angenommen worden, auf diese Gleichung gekommen sey:

$$x^3ddx + xxyddy - yydx^2 + xxdy^2 + aadx^2 = 0.$$

Da man also weiß, daß diese Gleichung keinen Widerspruch enthalte, so ist

$$x^3dx + xxydy = 0, \text{ oder } xdx + ydy = 0.$$

Hiervon ist nun das Differenzial

$$x^3ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydxdy + xxdy^2 = 0,$$

und die Differenz zwischen dieser und der gegebenen Gleichung ist

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydxdy = 0,$$

oder

$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Da aber $xdx + ydy = 0$ ist, so wird $2xydy = -2xxdx$, und folglich

$$aadx - yydx - xxdx = 0, \text{ oder } yy + xx = aa.$$

Diese Gleichung druckt das wahre Verhältniß zwischen x und y aus, indem sie mit der vorhin gefundenen Differenzial-

Gleichung $xdx + ydy = 0$ übereinstimmt. Hätte sich diese Uebereinstimmung nicht gezeigt, so hätte man die Gleichung für unmöglich halten müssen; da sie aber hier statt fand, so haben wir die endliche Gleichung $xx + yy = aa$ ohne die Integral-Rechnung finden können.

§. 306.

Um auch ein Beyspiel einer unmöglichen Gleichung anzuführen, so sey folgende

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0$$

gegeben, und dabey kein Differenzial beständig. Hier sollte nun $yydx - xxdy = 0$, und also, wenn man differenziirt,

$$yyddx - xxddy + 2ydxdy + 2xdxdy = 0$$

seyn; woraus, wenn man diese Gleichung der gegebenen gleich setzt,

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy$$

fließt. Da aber $dy = \frac{yydx}{xx}$ ist, so erhält man durch Wegschaffung der Differenzialien

$$y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{xx}, \text{ oder}$$

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy.$$

Ob nun diese Gleichung mit der Differenzial-Gleichung $yydx - xxdy = 0$ übereinstimme, läßt sich leicht finden. Es wird nemlich, wenn man differenziirt,

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{9yy - ax + 4xy - 2xx},$$

und da aus jener Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$ ist, so müßte

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

oder

$$axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y} = 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3$$

seyn. Aus der zuerst gefundenen endlichen Gleichung aber ist

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

und zieht man diese Gleichung von jener ab, so wird

$$0 = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3$$

Diese Gleichung läßt sich in folgende zwey auflösen:

$$0 = y - x; \text{ und } 2yy + yx + 2xx = 0;$$

wovon die erste, $y = x$, zwar mit dem Differenziale $dy = \frac{yydx}{xx}$ bestehen kann, aber dagegen der endlichen Gleichung widerspricht, wofern nicht entweder $a = 0$, oder beyde veränderliche Größen x und y beständig angenommen werden. In diesem Falle geschieht, wegen $dx = 0$, und $dy = 0$ allen Differenzial-Gleichungen ein Genüge, und die gegebene Gleichung kann daher nicht bestehen.

§. 307.

Nun wollen wir auch die Differenzial-Gleichungen, die drey veränderliche Größen, x, y und z enthalten, betrachten, welche entweder zum ersten oder zum zweyten, oder zu einem höhern Grade gehören werden. Um die Natur derselben zu untersuchen, muß man merken, daß durch die endlichen Gleichungen, die drey veränderliche Größen enthalten, das Verhältniß ausgedruckt wird, welches eine jede von diesen Größen zu den beyden übrigen hat, und es wird also dadurch bestimmt, was z für eine Funktion von x und y ist. So wie daher eine solche endliche Gleichung aufgelöset wird, wenn man findet, was für eine Funktion von x und y für z

gesetzt werden muß, wenn der Gleichung ein Genüge geschehen soll: so bestimmt auch eine Differenzial-Gleichung von drey veränderlichen Größen, was für eine Funktion die eine davon von den übrigen ist, und eine solche Gleichung ist alsdenn aufgelöset, wenn die Funktion der beyden veränderlichen Größen x und y angegeben worden ist, die anstatt der dritten z gesetzt, der Gleichung ein Genüge thut, oder sie zu einer identischen Gleichung macht. Es wird also die Differenzial-Gleichung aufgelöset, wenn entweder die Funktion von x und y, welche den Werth von z ausdruckt, bestimmt, oder eine endliche Gleichung angegeben wird, die ebenfalls den Werth von z ausdruckt.

§. 308.

So wie aber jede Differenzial-Gleichung zweyer veränderlichen Größen immer ein bestimmtes Verhältniß zwischen diesen veränderlichen Größen ausdruckt, so kann sichs bey den Differenzial-Gleichungen dreyer veränderlichen Größen ganz anders verhalten. Denn es giebt darunter Gleichungen, denen auf keine Weise ein Genüge geleistet werden kann, was man auch für eine Funktion von x und y für z setzt. So sieht man leicht, daß man für die Gleichung $z\,dy = y\,dx$ keine einzige Funktion von x und y angeben kann, die für z gesetzt, $z\,dy = y\,dx$ gebe, denn es fallen bey keiner die Differenzialien dx und dy weg. Auf eine ähnliche Art erhellet, daß es keine Funktion von x und z giebt, die, für y gesetzt, der Gleichung ein Genüge leiste. Denn was man auch für eine Funktion von x und z nehmen mag, so ist doch in ihrem Differenziale dz enthalten, und da dieses in der Gleichung nicht vorkommt, so kann sie auch nicht 0 werden. Es läßt sich daher keine endliche Glei-

Gleichung zwischen x, y und z angeben, welche mit der Differenzial-Gleichung $z\,dy = y\,dx$ übereinstimme.

§. 309.

Man muß daher die Differenzial-Gleichungen dreyer veränderlicher Größen in imaginäre und reelle eintheilen. Imaginär ist eine Gleichung alsdenn, wenn ihr keine endliche Gleichung ein Genüge thut, so wie solches bey der eben betrachteten Gleichung $z\,dy = y\,dx$ statt fand. Hingegen ist eine Gleichung reell, wenn sich eine ihr gleichbedeutende endliche Gleichung angeben läßt, und dieses findet statt, wenn die eine veränderliche Größe irgend einer Funktion der beyden andern gleich ist. Von dieser Art ist die Gleichung

$$z\,dy + y\,dz = x\,dz + z\,dx + x\,dy + y\,dx$$

denn sie stimmt mit dieser endlichen Gleichung

$$yz = xz + xy$$

überein, und es ist daher

$$z = \frac{xy}{y - x}.$$

Diese Eintheilung der gegenwärtigen Gleichungen in imaginäre und reelle ist wohl zu merken, vorzüglich in der Integral-Rechnung; denn es würde thöricht seyn, eine Differenzial-Gleichung integriren, das heißt, eine ihr Genüge leistende endliche Gleichung suchen zu wollen, wenn es dergleichen gar nicht giebt.

§. 310.

Zuvörderst also fällt in die Augen, daß alle Differenzial-Gleichungen dreyer veränderlicher Größen, worin nur die Differenzialien zweyer von diesen Größen vorkommen, imaginär und widersprechend sind. Denn angenommen, daß in einer Gleichung, welche die veränderliche Größe z enthält,

enthält, bloß die Differenzialien dx und dy befindlich seyen, so ist offenbar, daß es keine Funktion von x und y geben könne, welche für z gesetzt, eine identische Gleichung hervorbringe, denn die Differenzialien dx und dy werden auf keine Art weggeschafft. In diesen Fällen giebt es also gar keine endliche, jener Differenzial-Gleichung Genüge leistende, Gleichung, es müßte sich denn ein solches Verhältniß zwischen x und y angeben lassen, welches mit jeder Bedeutung von z bestehen könnte, wie in der Gleichung

$$zdy - zdx = ydy - xdx,$$

welcher die Gleichung $y = x$ ein Genüge thut. Es ist aber leicht zu erforschen, in welchen Fällen dieses statt finde. Man darf nur das Verhältniß zwischen x und y, wenn $z = 0$ ist, aufsuchen, und dann prüfen, ob dieses Verhältniß für einen jeden Werth von z ein Genüge leiste.

§. 311.

Es ist indeß eine Gleichung von drey veränderlichen Größen nicht bloß dann imaginär, wenn sie nur zwey Differenzialien enthält, sondern sie kann solches auch seyn, wenn gleich alle drey Differenzialien in ihr vorkommen. Um diese Fälle zu entwickeln, wollen wir annehmen, daß P und Q bloß Funktionen von x und y seyen, und daß man die Gleichung habe,

$$dz = Pdx + Qdy.$$

Wenn diese Gleichung nicht imaginär ist, so ist z irgend eine Funktion von x und y, und ist das Differenzial derselben $dz = pdx + qdy$, so wird $P = p$, und $Q = q$. Nun haben wir aber oben gezeigt, daß $pdx + qdy$ kein Differenzial einer Funktion von x und y seyn kann, wofern nicht $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$ ist, wo, wie wir oben angenommen haben, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$

das

das Differenzial von p, wenn bloß y als veränderlich betrachtet wird, durch dy dividirt, bedeutet, und $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ auf eine ähnliche Art verstanden werden muß. Es kann daher die Gleichung $dz = Pdx + Qdy$ nicht anders reell seyn, als wenn

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

ist.

§. 312.

Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit der Gleichung

$$dZ = Pdx + Qdy,$$

wenn Z irgend eine Funktion von z, P und Q aber Funktionen von x und y bedeuten, die z nicht enthalten. Soll nemlich Z einer Funktion von x und y gleich seyn, so muß $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ seyn. Nach diesem Kennzeichen läßt sich also bey jeder gegebenen in dieser allgemeinen Form enthaltenen Differenzial-Gleichung beurtheilen, ob sie reell oder imaginär ist. Auf diese Art läßt sich z. B. zeigen, daß diese Gleichung $zdz = ydx + xdy$ reell ist. Denn da $P = y$ und $Q = x$ ist, so wird $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1$. Dagegen ist diese Gleichung $azdz = yydx + xxdy$ imaginär; denn hier wird $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y$, und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$, welche Werthe einander ungleich sind.

§. 313.

Um aber dieses Kennzeichen in seinem ganzen Umfange zu untersuchen, so seyen P, Q und R beliebige Funktionen

von

von x, y und z; wo denn alle Differenzial Gleichungen dreyer veränderlicher Größen, wenn sie zum ersten Grade gehören, unter dieser Form begriffen werden:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

So oft nun diese Gleichung reell ist, so ist z immer gleich einer Funktion von x und y, und sein Differenzial hat folglich diese Form: $dz = pdx + qdy$. Wenn daher in der gegebenen Gleichung jene Funktion von x und y für z, und $pdx + qdy$ für dz gesetzt wird, so muß nothwendig die identische Gleichung $0 = 0$ entstehen. Und da nun aus der gegebenen Gleichung $dz = -\frac{Pdx}{R} - \frac{Qdy}{R}$ ist, so muß nothwendig, wenn in P, Q und R jener Werth für z gesetzt wird $p = -\frac{P}{R}$, und $q = -\frac{Q}{R}$ werden.

§. 314.

Weil aber $dz = pdx + qdy$ ist, so ist nach dem vorhin Bewiesenen $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Da nun durch die Substitution des Werthes von z in x und y, $p = -\frac{P}{R}$, und $q = -\frac{Q}{R}$ wird, so findet man hierdurch

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{RdP + PdR}{RRdy}\right) \text{ und } \left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{RdQ + QdR}{RRdx}\right)$$

und multiplicirt man durch RR, so erhält man diese Gleichung

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Die Nenner dy und dx zeigen auch hier an, daß man bey der Differenziation der Zähler bloß die Größe als veränderlich betrachten soll, deren Differenzial in dem Nenner steht,

steht. Diese Differenzialien aber dP, dQ, dR, lassen sich nicht eher erkennen, als bis man in den Größen P, Q und R den gehörigen Werth für z substituirt hat. Da nun derselbe unbekannt ist, so muß man folgenden Weg einschlagen.

§. 315.

Da P, Q und R Funktionen von x, y und z sind, so setze man

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$
$$dQ = \delta dx + \epsilon dy + \zeta dz$$
$$dR = \eta dx + \vartheta dy + \iota dz$$

und lasse α, β, γ, δ, ϵ, ꝛc. die Funktionen bedeuten, die bey der Differenziation entstehen. Nun nehme man an, daß anstatt z allenthalben sein Werth, durch x und y ausgedruckt, gesetzt werde, und substituire $pdx + qdy$ für dz. Alsdenn wird

$$dP = (\alpha + \gamma p)dx + (\beta + \gamma q)dy$$
$$dQ = (\delta + \zeta p)dx + (\epsilon + \zeta q)dy$$
$$dR = (\eta + \iota p)dx + (\vartheta + \iota q)dy.$$

Aus diesen Werthen fließt nun

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \vartheta + \iota q; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p$$
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta + \gamma q; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p.$$

§. 316.

Da also zur Realität der Gleichung erfordert wird, daß

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

sey, so wird, wenn man die gefundenen Werthe substituirt,

$$P(\vartheta + \iota q) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p)$$

Nun

Nun haben wir vorhin $p = -\frac{P}{R}$, und $q = -\frac{Q}{R}$ gefunden, und da die Differenzialien nicht mehr in Rechnung kommen, so können diese Werthe gebraucht werden, wenn auch gleich für z sein durch x und y ausgedruckter Werth nicht gesetzt wird. Es ist daher

$$P\vartheta - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

oder

$$0 = P(\zeta - \vartheta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta).$$

Weil aber die Größen $\beta, \delta, \gamma, \eta, \zeta, \vartheta$, durch die Differenziation gefunden werden, so wird, wenn man die obige Bezeichnungsart gebraucht:

$$0 = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Wenn diese Eigenschaft nicht in einer Gleichung anzutreffen ist, so ist dieselbe nicht reell, sondern imaginär.

§. 317.

Ob wir gleich diese Regel aus der Betrachtung der veränderlichen Größe z hergeleitet haben, so ist gleichwohl, da alle Größen auf gleiche Art vorkommen, offenbar, daß man bey der Betrachtung einer von den übrigen Größen eben denselben Ausdruck gefunden haben würde. Ist also irgend eine Differenzial-Gleichung des ersten Grades von drey veränderlichen Größen gegeben, so läßt sich hiernach leicht beurtheilen, ob sie reell oder imaginär ist. Man darf nemlich dieselbe nur mit der allgemeinen Form,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

vergleichen, und den Werth dieser Formel suchen:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) - R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Ist

Ist dieser Werth $= 0$, so ist die Gleichung reell; ist er aber nicht $= 0$, so ist solches ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung imaginär und widersprechend ist.

§. 318.

Die gegebene Gleichung kann auch jedesmal durch die Division auf diese Form gebracht werden:

$$Pdx + Qdy + dz = 0,$$

und da die vorhergehende Gleichung in diese übergeht, wenn $R = 1$ ist, so läßt sich das gefundene Kennzeichen einfacher auf folgende Art ausdrucken:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

So oft nemlich dieser Ausdruck in der That $= 0$ ist, so oft ist die Gleichung reell; wenn aber das Gegentheil sich ereignet, imaginär. Das letzte ist aus den bisher geführten Beweisen gewiß. Was das erste betrifft, so ließe sich noch fragen, ob eine Gleichung allezeit reell sey, wenn das gegebene Kennzeichen statt findet. Da dieses an dem gegenwärtigen Orte nicht vollständig bewiesen werden kann, sondern der Beweis davon in die Integral-Rechnung gehört: so begnügen wir uns hier, es bloß zu behaupten; es ist aber auch daher kein Nachtheil zu besorgen, wenn etwa jemand so lange an der Wahrheit dieser Behauptung zweifeln will.

§. 319.

Es erhellet aber aus diesem Kennzeichen zuvörderst, daß, wenn in einer Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, P eine Funktion von x, Q eine Funktion von y, und R eine Funktion von z allein ist, die Gleichung allezeit reell seyn wird. Denn es wird alsdann

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0;$$

§. 320.

Wenn aber, wie vorhin, P bloß von x, und Q bloß von y, R hingegen von x, y und z irgend eine Funktion ist: so wird die Gleichung reell seyn, wenn

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ oder } \left(\frac{dR}{dx}\right) : \left(\frac{dR}{dy}\right) = P : Q$$

ist. Ist z. B. die Gleichung

$$\frac{2dx}{x} + \frac{3dy}{y} + \frac{x^2y^3dz}{z^6} = 0$$

gegeben, so wird, weil hier $P = \frac{2}{x}$, $Q = \frac{3}{y}$ und $R = \frac{x^2y^3}{z^6}$, und hieraus $\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{2xy^3}{z^6}$, und $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{3xxyy}{z^6}$ ist, $P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{6xyy}{z^6}$, und es ist also die gegebene reell.

§. 321.

Wenn P und Q Funktionen von x und y, R hingegen bloß von z eine Funktion ist, so ist, wegen $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0$;

$\left(\frac{dQ}{dz}\right)$

$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0$; $\left(\frac{dR}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{dR}{dy}\right) = 0$, die Gleichung reell, wenn $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist. Eben diese Bedingung aber wird erfordert, wenn $Pdx + Qdy$ ein bestimmtes Differenzial, oder aus der Differenziation irgend einer endlichen Funktion von x und y entstanden seyn soll. Hierauf läuft das hinaus, was wir oben §. 312. bereits angemerkt haben, nemlich, daß die Gleichung $dZ = Pdx + Qdy$, wenn Z bloß von z, P und Q aber von x und y Funktionen sind, nicht reell seyn kann, wofern nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist. Beyde Fälle stimmen aber völlig mit einander überein, denn anstatt Rdz kann man, wenn R eine Funktion von z allein ist, dZ setzen, wenn Z eine Funktion von z ist.

§. 322.

Um dieses Kennzeichen durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die Gleichung gegeben:

$$(6xy^2z - 5yz^3)dx + (5x^2yz - 4xz^3)dy + (4x^2y^2 - 6xyz^2)dz = 0.$$

Vergleicht man dieselbe mit der allgemeinen Form, so wird

$$P = 6xy^2z - 5yz^3; \left(\frac{dP}{dy}\right) = 12xyz - 5z^3;$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 6xy^2 - 15yz^2.$$

$$Q = 5x^2yz - 4xz^3; \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 10xyz - 4z^3;$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xz^2.$$

$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2;\ \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2;$$

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = 8x^2y - 6xz^2.$$

Hat man diese Werthe gefunden, so wird die Gleichung, welche das Kennzeichen enthält, folgende:

$$+(6xy^4z - 5yz^3)(-3xxy - 6xzz) + (5x^2yz - 4xz^3)(2xyy + 9yzz)$$
$$+(4x^2y^2 - 6xyz^2)(2xyz - z^3) = 0.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so heben sich alle Glieder einander auf, und es wird $0 = 0$, welches anzeigt, daß die Gleichung reell ist.

§. 323.

Wenn aber der Ausdruck, der auf diese Art aus dem Kennzeichen hergeleitet worden ist, nicht verschwindet, so dient dies zur Anzeige, daß die gegebene Gleichung imaginär ist. Da man aber auf diese Art aus dem Kennzeichen eine endliche Gleichung findet, so zeigt dieselbe, wenn sie mit der Differenzial-Gleichung übereinstimmt, zugleich das Verhältniß an, welches die veränderlichen Größen zu einander haben. Und auf diese Art werden die Fälle, deren wir oben §. 310. Erwähnung gethan haben, entwickelt. Es sey die Gleichung

$$(z - x)dx + (y - z)dy = 0$$

gegeben. Hier wird $P = z - x$; $Q = y - z$; und $R = 0$, ferner $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$ und $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1$. Ferner wird die Gleichung, welche das Kennzeichen enthält, $P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$, oder $z - x = z - y$, woher denn $y = x$ wird.

Da

Da sichs also hier trifft, daß die Gleichung $y = x$ zugleich der Differenzial-Gleichung ein Genüge leistet, so kann man sagen, daß die gegebene Gleichung eigentlich nichts anders bedeute, als daß $y = x$ sey.

§. 324.

Ist also eine Differenzial-Gleichung, die drey veränderliche Größen enthält,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gegeben, so sind drey Fälle zu betrachten, zu denen diese Gleichung führt:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Der erste findet statt, wenn dieser Ausdruck in der That $= 0$ wird, wo denn die gegebene Gleichung reell ist. Wenn aber diese Gleichung nicht identisch ist, so muß man untersuchen, ob sie der gegebenen Gleichung ein Genüge thut. Ist dies, so hat man eine endliche Gleichung, und dieses ist der zweyte Fall. Der dritte endlich findet statt, wenn die endliche Gleichung nicht mit der gegebenen Differenzial-Gleichung bestehen kann, und dann ist die gegebene Gleichung imaginär, denn es läßt sich keine endliche Gleichung finden, die ihr ein Genüge leistete.

§. 325.

Der erste und dritte Fall sind von selbst deutlich. Was den zweyten betrifft, so verdient er, ob er gleich sehr selten vorkommt, dennoch sorgfältig gemerkt zu werden. Und da wir schon oben ein Beyspiel davon in einer Gleichung, die zwey veränderliche Größen enthält, gegeben haben, so wollen wir noch eine Gleichung anführen, in welcher drey Differenzialien vorkommen, nemlich

$$(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0.$$

Hier ist also

$$P = z - y; \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0; \quad \left(\frac{dR}{dy}\right) = 1;$$

$$Q = x; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = 1;$$

$$R = y - z; \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1;$$

Es ist also die Gleichung, welche das Kennzeichen enthält,

$$z - x - y = 0, \text{ oder } z = x + y.$$

Setzt man aber diesen Werth von z in die Differenzial-Gleichung, so wird

$$xdx + xdy - x(dx + dy) = 0$$

und da dieses eine identische Gleichung ist, so folget, daß die Differenzial-Gleichung nichts anders bedeutet, als daß $z = x + y$ ist.

§. 326.

Da wir behauptet haben, daß alle Differenzial-Gleichungen des ersten Grades, die drey veränderliche Größen enthalten, auf die Form:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gebracht werden können: so kann hier ein Zweifel in Ansehung derer Gleichungen entstehen, in welchen die ersten Dif-

feren-

ferenzialien zwey oder mehrere Dimensionen ausmachen, dergleichen z. B. folgende ist:

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdxdy + 2Tdxdz + Vdydz.$$

Allein von diesen Gleichungen ist zu merken, daß sie auf keine Weise reell seyn können, wofern sie nicht Divisoren von der ersten Form haben, die daher einfache Gleichungen geben werden. Denn da aus dieser Gleichung $dz =$

$$\frac{-Tdx - Vdy \pm (dx^2(T^2-PR) + 2dxdy(TV+RS) + dy^2(V^2-QR))}{R}$$

wird: so ist leicht einzusehen, daß z keiner Funktion von x und y, oder dz einem solchen Ausdrucke, $pdx + qdy$ gleich werden kann, wofern nicht die irrationale Größe rational wird. Dies wird geschehen, wenn

$$(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$$

oder

$$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}$$

ist. Wenn also nicht diese endliche Gleichung selbst der gegebenen Gleichung ein Genüge thut, so ist diese imaginär.

§. 327.

Nun sollten noch in diesem Capitel die Differenzial-Gleichungen der höhern Ordnungen, die drey veränderliche Größen enthalten, betrachtet, und die Fälle festgesetzt werden, wo dieselben reell oder imaginär sind. Allein da die Kennzeichen gar zu verwickelt werden würden, so lassen wir sie hier auf der Seite, zumal, da sie aus den bisher benutzten Quellen gleichfalls fließen. Wenn übrigens in der Integral-Rechnung diese Kennzeichen nöthig werden, so wird es da auch leicht seyn, sie zu finden.

Aus eben dem Grunde betrachten wir auch die Gleichungen nicht, die mehr veränderliche Größen enthalten, indem dergleichen fast nie vorkommen, und wenn sie vorkämen, nach dem Bisherigen leicht untersucht werden könnten. Wir endigen also hier die Anleitung zur Differenzial-Rechnung, und wollen nunmehr den außerordentlichen Nutzen zeigen, den diese Rechnung, theils in der Analysis selbst, theils in der höhern Geometrie gewährt.