Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Anmerkungen und Zusätze.

Anmerkungen und Zusätze

zum

ersten Theile

der

vollständigen Anleitung

zur

Differenzial-Rechnung

von

Leonhard Euler

vom

Uebersetzer.

Anmerkungen und Zusätze
zum
ersten Theile
der
vollständigen Anleitung
zur
Differenzial-Rechnung
von
Leonhard Euler.

Es ist in mehr als einer Rücksicht wichtig, das Verhältniß der Differenzial-Rechnung zu den übrigen Theilen der Mathematik genau zu kennen, und die Bestimmung desselben soll daher auch den ersten Gegenstand der gegenwärtigen Anmerkungen und Zusätze ausmachen.

Die Mathematik betrachtet die Größe entweder einzeln in Constructionen, und führt dann den Namen der Elementar-Mathematik; oder im Allgemeinen, wobey sie die Eigenschaften der Größen, vermittelst Constructionen, aus deut-

lichen

lichen Begriffen, das heißt aus solchen, welche die Größe nach Zahl und Einheit darstellen, entwickelt. Da ihr Hauptgeschäft in der Untersuchung des Verhältnisses der Größen zu einander besteht, und das Verhältniß zweyer Größen bey gleichen Einheiten nach den Zahlen, und bey gleichen Zahlen nach den Einheiten sich richtet: so zerfällt daher die allgemeine Mathematik in zwey Theile, in die gemeine und höhere Mathematik. Jene betrachtet das Verhältniß derjenigen Größen, wobey die Einheiten, und diese das Verhältniß derer, wobey die Zahlen gleich gedacht werden. Was für Theile die Elementar- und die gemeine Mathematik unter sich begreifen, brauche ich hier nicht aus einander zu setzen, indem die Differenzial-Rechnung zur höhern Mathematik gehört; was diese betrifft, so verhält es sich damit auf folgende Art. Zuvörderst enthalten die Größen, welche man auf die Weise untersucht, daß man dabey bloß auf ihre Einheiten Rücksicht nimmt, alle bestimmte Größen ihrer Gattung unter sich; und da man dergleichen Größen veränderliche Größen zu nennen pflegt, so hat die höhere Mathematik die veränderlichen Größen zum Gegenstande. Zum andern kann man bey der Untersuchung der veränderlichen Größen entweder aus den Größen das Verhältniß ihrer Einheiten, oder aus dem Verhältnisse dieser Einheiten die Größen entwickeln; und dabey ferner jene Einheiten entweder von endlicher Größe sich gedenken, oder kleiner annehmen, als jede endliche Größe, die gegeben werden kann. Auf diese Art entstehen zwey Haupttheile der höhern Mathematik, die Differenzial-Rechnung und die Integral-Rechnung, und jeder derselben zerfällt von neuem in zwey andere, der erste nemlich in die Lehre von den Differenzen und die Differenzial-Rechnung im engern und gewöhnlichen Verstande; der andere aber in die Lehre von den

Sum-

Summen und in die Integral-Rechnung, in der Bedeutung, in welcher dieses Wort gewöhnlich genommen wird. Um hier nur ein Paar Worte zur Bestätigung dieser Bestimmung der Hauptheile der Mathematik zu sagen, so ist dabey sehr leicht zu erklären, wie ein und derselbe Gegenstand theils in der Elementar-, theils in der gemeinen, theils in der höhern Mathematik vorkommen könne; wie dieses z. B. selbst beym Cirkel der Fall ist. Auch ist sie im Grunde weder neu noch unbekannt, sondern wenn man in den meisten Abhandlungen über den Begriff der Mathematik und ihre Theile andere und oft weniger genaue Eintheilungen der Mathematik findet, so rührt solches daher, weil dieselben in einer andern Absicht, und für andere Personen geschrieben wurden, als ich gegenwärtig vor Augen habe.

Dieses vorausgesetzt, so beschäftiget sich das Werk des unsterblichen Euler, welches ich den Liebhabern der höhern Mathematik in einer deutschen Uebersetzung zu liefern angefangen, mit der Differenzial Rechnung im weitläuftigen Verstande, und dem ersten Theile der Integral-Rechnung, oder der Lehre von den Summen; und der erste Theil desselben enthält besonders die Lehre von den Differenzen und den Summen, so wie auch die Differenzial-Rechnung im engern Verstande selbst, indem die Anwendungen dieser Theorien den Gegenstand des zweyten Theils ausmachen. Betrachtet man daher die Integral-Rechnung eben dieses großen Mathematikers, als zu dem gedachten Werke gehörig: so findet man in beyden Schriften die Haupttheile der höhern Mathematik ganz in der Ordnung, in welcher sie sich vorhin darboten, und es spricht daher auch dieser Umstand für die vorstehende Entwickelung. Aber die Art, wie sich Euler über die Differenzen und die Differenzialien erklärt

klärt hat, beweiset, daß ich bey meiner Classification von einer andern Vorstellung ausgegangen bin; und so eröfnet sich mir eine Quelle zu mehrern Anmerkungen, von welchen ich hoffe, daß sie wenigstens denen nicht unwillkommen seyn werden, welche das Eulerische Werk bey der Erlernung der Differenzial-Rechnung zum Grunde legen wollen, wenn sie gleich für Kenner keine Wichtigkeit haben können. In der Mittheilung derselben will ich die Ordnung befolgen, daß ich jedesmal eine tabellarische Darstellung des Inhalts derjenigen Capitel, worauf sie sich beziehen, voranschicke.

Inhalt
des ersten und zweyten Capitels
des
ersten Theils der Eulerischen vollständigen Anleitung zur Differenzial-Rechnung.

Inhalt des ersten Capitels.
Von den Differenzen.

γ. Er-

Inhalt

Inhalt des zweyten Capitels.

Von dem Gebrauche der Differenzen in der Lehre von den Reihen.

a. Was das summirende Glied einer Reihe sey, so wie auch die Erklärung der summirenden Reihe, §. 53.

b. Von der Erfindung des summirenden Gliedes der Reihen, vermittelst der summirenden Reihen, §. 54 57.

c. Methode das summirende Glied der Reihe unmittelbar aus dem allgemeinen Gliede derselben zu finden, §. 58 : 68.

α. Beschreibung dieser Methode, §. 58 : 60.

β. Gebrauch derselben, §. 61 : 71.

aa. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied unter der Form x^n begriffen, oder eine ganze rationale Funktion von x ist, §. 61 : 64.

bb. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied ein Produkt aus einfachen Faktoren ist, §. 65 67.

cc. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied eine gebrochene Funktion ist, §. 68. 69.

γ. Summirende Glieder einiger vor andern merkwürdigen Reihen, §. 70. 71.

Anmer-

Anmerkungen und Zusätze
zum
ersten und zweyten Capitel.

Wenn man den Theil der Differenzial-Rechnung, welcher sich mit den Differenzen beschäftiget, aus dem S. 284. festgesetzten Gesichtspunkte betrachtet, oder annimmt, daß in der Lehre von den Differenzen das Verhältniß der Einheiten solcher Größen erforscht werde, auf deren Zahlen man bey dieser Vergleichung nicht zu sehen braucht, weil dieselben bey den verglichenen Größen gleich groß vorausgesetzt werden: so gebührt der erste Platz darin der Anweisung, die gedachten Einheiten deutlich auszudrucken, weil ohne dies die Untersuchung ihres Verhältnisses unmöglich ist. Angenommen also, daß y und z zwey gleichartige Größen bedeuten, deren Verhältniß bloß von ihren Einheiten abhängt: so ändert sich zuvörderst das Verhältniß von y und z nicht, wenn man my für y, und mz für z setzt, m mag übrigens vorstellen, was es will, eine ganze oder gebrochene, eine absolute oder positive oder negative, eine rationale oder irrationale, eine mögliche oder imaginäre Zahl, und es sind daher y und z veränderliche Größen in dem Verstande, in welchem Euler in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen *) diese Benennung nimmt. Dieses vorausgesetzt, ist

*) Im ersten Theile im ersten Capitel, so wie auch im zweyten Theile im ersten Capitel, gleich im Anfange.

ist leicht einzusehen, daß man die Einheiten von y und z selbst, nicht anders als unbestimmt gedenken und ausdrucken kann, ob sich gleich dabey der doppelte Fall annehmen läßt, daß diese Einheiten zu ihren Größen entweder irgend ein endliches Verhältniß haben oder nicht. Jenes findet in der Lehre von den Differenzen und Summen, dieses in der Differenzial- und Integral-Rechnung statt. Nun sey $\triangle y$ die Einheit von y, welche zu y irgend ein endliches aber unbekanntes Verhältniß hat, und eben so $\triangle z$ die Einheit von z: so ist offenbar, daß sich das Verhältniß $\triangle y : \triangle z$, wenn die Art, wie y und z von einander abhangen, nicht gegeben ist, bloß andeuten, aber nicht entwickeln läßt, und dabey muß es also auch bey ihnen sein Bewenden haben. Anders ist der Fall, wenn y irgend eine Funktion von z wird. Denn setzt man z. B $y = az$, und behält dabey $\triangle y$ und $\triangle z$ in der angenommenen Bedeutung: so muß, wenn beyde Größen y und z aus einer gleich großen Anzahl von Einheiten bestehen sollen, nothwendig $\triangle y = a\triangle z$, und also

$$\triangle y : \triangle z (= a\triangle z : \triangle z) = a : 1$$

werden. Unterscheidet man daher veränderliche Größen und Funktionen veränderlicher Größen auf die Art, daß man unter jenen bloß diejenigen veränderlichen Größen versteht, welche einzig und allein als Summen ihrer Einheiten gedacht werden; und unter Funktionen veränderlicher Größen alle diejenigen veränderlichen Größen begreift, welche aus jenen und aus beständigen Größen auf irgend eine Art zusammengesetzt sind: so ist klar,

1. daß man das Verhältniß der Einheiten zweyer veränderlicher Größen bloß bezeichnen, aber nicht entwickeln und deutlich ausdrucken kann; sondern daß dieses

2. nur

2. nur dann möglich wird, wenn die gegebenen Größen Funktionen von andern veränderlichen Größen sind.

Was aber die Art und Weise betrifft, das gedachte Verhältniß in diesem zweyten Falle zu finden: so beruhet dieselbe auf folgendem leichten Satze: Da die veränderlichen Größen, man mag diese Benennung im engern oder im weitläuftigern Verstande nehmen, in Ansehung der Menge ihrer Einheiten nicht von einander verschieden gedacht werden dürfen, und folglich die Menge der Einheiten einer Funktion dieselbe seyn muß, als die Menge der Einheiten derjenigen Größe, wovon sie eine Funktion ist: so muß, da $z + \triangle z$ von z um die Einheit $\triangle z$ unterschieden ist, auch jede Funktion von $z + \triangle z$, welche man aus einer Funktion von z erhält, wenn man darin allenthalben $z + \triangle z$ für z setzt, von der Funktion von z um eine ihrer Einheiten unterschieden seyn. Verwandelt man daher eine gegebene Funktion von z auf die gedachte Art in eine Funktion von $z + \triangle z$, und zieht von dieser, nachdem man die dazu nöthigen, in der Funktion selbst angezeigten, Operationen vorgenommen hat, die gegebene Funktion ab: so findet man in dem Reste die Einheit der gegebenen Funktion, und zwar durch $\triangle z$, z und beständige Größen, und also deutlich ausgedruckt. Es sey, z. B. die gegebene Funktion von z:

$$z^2;$$

so ist die nach der gegebenen Vorschrift daraus abgeleitete:

$$(z + \triangle z)^2 = z^2 + 2z\triangle z + \triangle z^2$$

und folglich

$$z^2 + 2z\triangle z + \triangle z^2 - z^2 = 2z\triangle z + \triangle z^2$$

die gesuchte Einheit der Funktion von z^2 in einem deutlichen Ausdrucke. Auf ähnliche Art findet man für die Einheit der Funktion z^3 den Ausdruck:

$$3z^2\triangle z + 3z\triangle z^2 + \triangle z^3$$

und für die Einheit der allgemeinen Funktion z^n den Ausdruck:

$$nz^{n-1}\triangle z + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^{n-2}\triangle z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^{n-3}\triangle z^3$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

wo, da der Binomische Lehrsatz (S. Zusätze zum ersten Theile meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen) für jeden Werth von n erwiesen worden ist, n jede Zahl, von was für einer Art sie seyn mag, bedeuten kann.

Was ich bisher Einheiten veränderlicher Größen genennt habe, belegt Euler mit dem Namen, Differenz, und statt der Redensart: die Einheit einer veränderlichen Größe, oder einer Funktion von einer veränderlichen Größe deutlich ausdrucken, gebraucht er diese: die Differenz einer veränderlichen Größe, oder einer Funktion von einer veränderlichen Größe finden. Beyde Ausdrücke sind gut, wie, bey einiger Ueberlegung, jeder von selbst sieht, und ich werde mich ihrer daher in der Folge ebenfalls bedienen. Bis jetzt habe ich es nicht gethan, so wie ich mir dieselbe Freyheit, wo es mir nützlich scheinen wird, auch noch ferner vorbehalte, um die Hauptsätze der Lehre von den Differenzen und Summen unmittelbar aus dem Begriffe dieser Theile der Differenzial- und Integral-Rechnung, und, wie ich hoffe, zugleich auf eine leichtere Art abzuleiten.

Da ferner die veränderlichen Größen dadurch veränderliche Größen sind, weil sie aus gleich großen Mengen von Einheiten bestehen, und die Gleichheit der Mengen ihrer Einheiten keine Veränderung leiden kann, wenn

man

man jede dieser Größen um eine ihrer Einheiten vermehrt: so ist es auch bey der Untersuchung der veränderlichen Größen als solcher (d. h. unter der Bedingung, daß alles von ihnen zu Behauptende auf die gleiche Menge ihrer Einheiten in ihnen, und zugleich darauf allein, gegründet werde) gleichviel, ob man diese veränderlichen Größen selbst nimmt, oder jede derselben um eine Einheit vermehrt. Sind daher zwey veränderliche Größen, sie mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen, einander gleich: so muß man auch wieder eine Gleichung bekommen, wenn man statt jeder der veränderlichen Größen im engern Verstande, woraus sie etwa zusammengesetzt sind, eben diese Größen, um eine ihrer Einheiten vermehrt, setzt. Ist daher

$$y = \pm z \pm x \pm w \pm v \pm \text{ꝛc.}$$

so ist auch

$$y + \Delta y = \pm z \pm \Delta z \pm x \pm \Delta x \pm w \pm \Delta w \pm v \pm \Delta v \pm \text{ꝛc.}$$

und daher, wenn man hiervon die vorhergehende Gleichung abzieht,

$$\Delta y = \pm \Delta z \pm \Delta x \pm \Delta w \pm \Delta v \pm \text{ꝛc.}$$

und ist

$$y = zx$$

so ist auch

$$y + \Delta y = (z + \Delta z)(x + \Delta x) = zx + x\Delta z + z\Delta x + \Delta z\Delta x$$

und

$$\Delta y = x\Delta z + z\Delta x + \Delta z\Delta x$$

und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Da dieses die Hauptsätze zur Erfindung der ersten Differenzen gegebener Funktionen sind, aus welchen die übrigen im Werke befindlichen abgeleitet werden: so kann ich mich zu der Art und Weise wenden, die zweyten und folgenden Differenzen gegebener Funktionen zu finden, oder deutlich auszudrucken, habe aber dabey nicht nöthig, weitläuftig zu seyn. Denn ist die Einheit oder erste Differenz einer gegebenen Funktion wieder eine Funktion; so gilt das Vorhergehende, in sofern sie eine Funktion ist, natürlich auch von ihr; und behandelt man sie darnach: so findet man auf eben die Art die zweyte Differenz aus der ersten, als man die erste aus der gegebenen Funktion bekam. Ist ferner die zweyte Differenz ebenfalls eine Funktion: so läßt sich auch von ihr behaupten, was so eben von der ersten im ähnlichen Falle gesagt worden ist; und also auch aus der zweyten Differenz auf eben die Art die dritte finden, als die zweyte aus der ersten, oder die erste aus der gegebenen Funktion selbst, abgeleitet werden kann. Auf ähnliche Art kann man immer fort schließen, und zur wirklichen Anwendung des Gesagten darf man nur vor Augen behalten, was man bey einiger Ueberlegung bald findet, daß die Einheiten der veränderlichen Größen im engern Verstande keine veränderliche Größen seyn können, sondern nothwendig beständig seyn müssen.

Auf diese Art ist vieles von dem, was Euler in den ersten 10 §§. des ersten Capitels sagt, zur Erfindung der Differenzen, entbehrlich; aber dieses benimmt ihm nichts von seiner Wichtigkeit, sondern es würde vielmehr die vorstehende Entwickelung der Eulerischen sehr weit nachstehen, wenn man dabey die Methode, die Differenzen auszudrucken, welche §. 10. enthalten ist, auf der Seite lassen müßte, indem dieselbe bey dem Gebrauche der Differenzen äußerst nothwendig und wichtig ist. Allein der Weg dazu ist nicht versperrt, sondern er bietet sich nur etwas später dar; und ob dies nachtheilig sey oder nicht, wird sich bald beurtheilen lassen.

Zuvor

Zuvor muß ich folgendem Einwurfe begegnen. „Wenn der Grund feststeht, auf welchem der Satz S. 293. sich stützt, so muß man auch folgendes behaupten können. Wenn y irgend eine Funktion von z, Δy die Differenz von y, und Δz die Differenz von z bedeutet: so muß, nachdem man y um $n\Delta y$, und z in dem y gleichen Ausdrucke allenthalben um $n\Delta z$ vermehrt, die nöthigen Operationen vorgenommen, und die gegebene Gleichung von der gefundenen abgezogen hat, $n\Delta y$ dem in der andern Hälfte der resultirenden Gleichung sich ergebenden Ausdrucke gleich seyn, n mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will. Ist dies, so muß man auch für n die um eins verminderte Zahl $n-1$ setzen können, und thut man solches, so muß, wenn zuletzt der für $(n-1)\Delta y$ gefundene Werth von dem für $n\Delta y$ gefundenen abgezogen wird, der Werth von Δy eben so herauskommen, als ihn der S. 293. stehende Satz giebt. Es sey aber z. B. $y = z^2$, so bekommt man

$$n\Delta y = 2nz\Delta z + n^2\Delta z^2, \text{ und}$$

$$(n-1)\Delta y = 2nz\Delta z - 2z\Delta z + n^2\Delta z^2 - 2n\Delta z^2 + \Delta z^2$$

und folglich

$$n\Delta y - (n-1)\Delta y = \Delta y = 2z\Delta z + 2n\Delta z^2 - \Delta z^2,$$

und nach der S. 293. gegebenen Regel findet man

$$\Delta y = 2z\Delta z + \Delta z^2;$$

wie läßt sich dieser Widerspruch heben?“ Ich habe die veränderlichen Größen eingetheilt in veränderliche Größen in engerer Bedeutung, und in Funktionen; und zu jenen die gerechnet, welche man sich nicht anders als Summen ihrer Einheiten gedenken kann. Wenn daher von veränderlichen Größen in engerer Bedeutung die Rede ist: so hat man allerdings ein Recht anzunehmen, daß die Einheiten von jeder derselben einander gleich sind, und daß sich die Einheiten zweyer solcher veränderlichen Größen zu einander eben so als diese Größen selbst verhalten. Es seyen z. B. y und z zwey veränderliche Größen in engerer Bedeutung; so hat sowohl Δy als Δz die Größe, die demselben einmal, obgleich unbestimmter Weise, beygelegt ist, beständig; und wenn $y = az$ ist: so verhält sich $\Delta y : \Delta z = y : z = az : z = a : 1$. Allein, wenn die gegebenen veränderlichen Größen Funktionen sind, so verhält es sich meistens (denn einige sind allerdings ausgenommen, wie z. B., wenn $y = az$ ist) auf eine andere Art. Wollte man nemlich auch die Einheiten oder Bestandtheile der Funktionen einander gleich annehmen, so würde man dadurch die ganze Untersuchung der veränderlichen Größen, als solcher, unmöglich machen, weil man dadurch in der That die gegebenen veränderlichen Größen in beständige verwandelte. Denn es sey $y = x^2$: so ist nothwendiger Weise $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$. Nun sey $y + \Delta y = Y$, und $x + \Delta x = X$: so ist auch $Y = X^2$, und $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^2$; folglich $\Delta y = 2Xdx + \Delta x^2$. Sollte daher $2Xdx + \Delta x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$ seyn, so würde auch $X = x$ seyn müssen, und es könnte demnach x nicht den Werth von X in sich schließen, welches doch seyn muß, wenn x eine veränderliche Größe bleiben soll. Muß man also annehmen, daß die Funktionen veränderlicher Größen nicht immer, oder vielmehr in den wenigsten Fällen, Summen gleicher, sondern ungleicher Bestandtheile sind: so muß man auch, wenn verschiedene, unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende, Bestandtheile derselben allgemein ausgedruckt werden sollen, die Zeichen dazu so einrichten, daß dadurch zugleich die Stelle dieser Bestandtheile angedeutet werde. Dazu ist nun die Eulerische Bezeichnungsart sehr bequem, und sie wird daher, so wenig als wir sie bisher gebraucht haben, so bald man auf den gegenwärtigen Punkt gekommen ist, nothwendig. Es sey also y irgend einer Funktion

von

von z gleich, und y werde $y + n\triangle y$, wenn z in $z + n\triangle z$ verwandelt wird. Ferner sey

$$y + \triangle y = y^{\mathrm{I}};\quad y + 3\triangle y = y^{\mathrm{III}};$$
$$y + 2\triangle y = y^{\mathrm{II}};\quad y + 4\triangle y = y^{\mathrm{IV}};$$

ꝛc.

und $\triangle y = y^{\mathrm{I}} - y$; $\triangle y^{\mathrm{I}} = y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}}$; $\triangle y^{\mathrm{II}} = y^{\mathrm{III}} - y^{\mathrm{II}}$; ꝛc.: so wird man nie versucht werden, so zu schließen, als es in dem angeführten Einwurfe am Ende geschehen ist, sondern vielmehr auf folgende Art: Ist

$$y = z^2;$$

so ist, wenn man den bey y in der Stelle der Exponenten stehenden deutschen Buchstaben eben die Bedeutung giebt, welche vorhin die dabey stehenden römischen Ziefern hatten,

$$y + n\triangle y = y^{\mathfrak{n}} = 2nz\triangle z + n^2\triangle z^2$$
$$y + (n-1)\triangle y = y^{\mathfrak{n}-1} = 2nz\triangle z - 2z\triangle z + n^2\triangle z^2 - 2n\triangle z^2 + \triangle z^2$$

und also

$$y^{\mathfrak{n}} - y^{\mathfrak{n}-1} = \triangle y^{\mathfrak{n}-1} = 2z\triangle z + (2n-1)\triangle z^2;$$

und wem könnte es dabey einfallen, $\triangle y = 2z\triangle z + \triangle z^2$ mit $\triangle y^{\mathfrak{n}-1}$ zu verwechseln?

Angenommen also, daß die Lehre von den Differenzen ganz methodisch vorgetragen werden soll: so scheint es am füglichsten in folgender Ordnung geschehen zu können.

1. Den Anfang muß der Begriff von dieser Lehre machen, so daß dabey der Gegenstand derselben, und die Absicht, in welcher er darin untersucht wird, deutlich und entwickelt angegeben werde.

2. Hierauf muß die Art und Weise folgen, die Einheiten, oder Bestandtheile, oder Differenzen der veränderli-

chen

chen Größen überhaupt, in so fern man unter jenen endliche Größen versteht, deutlich auszudrucken. Dann muß

3. die Natur der gedachten Bestandtheile oder Differenzen genauer entwickelt, und damit die Beschreibung der übrigen auf diese Entwickelung sich gründenden Methoden, die Differenzen darzustellen, verbunden werden.

4. Ist dieses geschehen, so ist der Weg zur Untersuchung des Verhältnisses der Differenzen gegebener veränderlicher Größen gebahnt, und dadurch auch der Ort dieser Untersuchung bestimmt.

5. Den Beschluß kann endlich die Lehre von dem Gebrauche der Differenzen machen, wofern man nicht lieber die Anleitung dazu bis nach der Lehre von den Summen versparen will.

Da es hier nicht meine Absicht ist, die Lehre von den Differenzen vollständig abzuhandeln, sondern bloß eins und das andere zu berühren, was mir nicht undienlich scheint, Anfänger in der höhern Mathematik, zur eigenen Ueberlegung anzuleiten, (welches bekanntlich durch Vorzeichnung und Vergleichung mehrerer zu Einem Ziele führenden Wege am besten geschehen kann) und zugleich, sie so viel als möglich vor den Schwierigkeiten zu verwahren, die so manche bey der Erlernung der höhern Mathematik finden: so habe ich nicht nöthig, das bis jetzt aus Eulern nicht berührte ebenfalls aus den oben mitgetheilten Hauptsätzen abzuleiten, und dadurch erwähnten Anfängern das Vergnügen zu entziehen, was sie durch die eigene Herleitung desselben sich verschaffen können. Noch weniger kann ich mich entschließen, hier schon die Betrachtungen anzustellen, welche eigentlich

erst

erst in der Lehre von den Differenzialien gebraucht werden. Ich setze also bloß noch einige leichte Anmerkungen über die Lehre von den Summen her.

Zuvörderst fließt der Satz, S. 27, daß

$$y = \Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_{V} + \text{ꝛc.}$$

ist, sehr leicht aus der in diesen Anmerkungen von den veränderlichen Größen gegebenen Vorstellung, wobey Δy^{n} ein allgemeiner Ausdruck für die Einheiten von y ist, und alle vorhergehende Einheiten von y diejenigen werden, welche der V. durch $\Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} +$ ꝛc. ausgedruckt hat.

Zum andern ergeben sich nicht weniger leicht die Regeln, welche bey der Abänderung der S. 28. §. 28. zum Grunde gelegten Formeln befolgt worden sind, aus dem Satze, daß bey den veränderlichen Größen im engern Verstande das Verhältniß ihrer Einheiten dem Verhältniß der Größen selbst gleich sey; und wenn daher Anfängern, wie bisweilen zu geschehen pflegt, die Art zu schließen, welche in dem angeführten §. herrscht, nicht einleuchtend ist, so liegt die Schwierigkeit in nichts als in gewissen dunkeln Vorstellungen.

Inhalt

Inhalt
des
dritten und vierten Capitels.

Inhalt des dritten Capitels.

Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen.

Unter allen Untersuchungen, welche Euler in dem gegenwärtigen Werke angestellt hat, ist keine, die Anfängern mehr Schwierigkeiten machen könnte, als die in diesem dritten Capitel, und vielleicht sind dieselben nicht immer bloß scheinbar. Es wird daher auch nöthig seyn, dabey länger als bey den übrigen zu verweilen. Euler handelt darin von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen auf folgende Art.

1. Zuvörderst sucht er die Behauptung festzustellen, und wider die dagegen gemachten Einwürfe zu sichern: daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden könne, §. 72 - 82. In diesem Abschnitte findet man
   a. die erwähnte Behauptung selbst, §. 72. 73.
      α. aus dem Begriffe der Größen abgeleitet, §. 72.
      β. an einzelnen Arten der Größe erläutert, und dadurch bestätiget, §. 73.
   b. eine Anzeige der Schwierigkeiten, worin man sich bey dieser Behauptung verwickelt hat, nebst der Wegräumung derselben, §. 74 - 81.

c. Daß

c. daß man wenigstens in der theoretischen Mathematik unendliche Zahlen in dem Verstande, in welchem das Wort unendlich vom Verfasser genommen wird, nicht leugnen könne, §. 82. Hierauf folgt

2. eine genauere Entwickelung der Begriffe des Unendlichen und des unendlich Kleinen, §. 83 - 96.

a. Entwickelung des Begriffs des unendlich Kleinen, §. 83 - 89.

α. Was man unter einer unendlich kleinen Größe zu verstehen habe, §. 83. und warum man diese Größen nicht so bezeichnet, als es darnach geschehen zu müssen scheint, §. 84. 85.

β. Daß man die unendlich kleinen Größen zwar wohl in Ansehung ihres arithmetischen, aber nicht in Ansehung ihres geometrischen Verhältnisses zu einander verwechseln dürfe, §. 86 87.

γ. Wie es sich mit den Potestäten der unendlich kleinen Größen verhalte, oder von den Ordnungen unter den unendlich kleinen Größen, §. 88. 89.

b. Entwickelung des Begriffs des Unendlichen, oder unendlich Großen, § 90 - 96.

α. Daß man das Unendliche durch die Division endlicher Größen durchs unendlich Kleine erhalte, §. 90. 91.

β. Hierauf gegründete Erklärung des Unendlichen, § 92.

γ. Verschiedenheit der unendlich großen Größen, und daß jede derselben noch weiter vermehrt werden kann, §. 93.

δ. Beyspiele unendlicher Größen aus der gemeinen Mathematik, §. 94.

ε. Von den Ordnungen oder Graden des Unendlichen, §. 95. 96.

3. Den

3. Den Beschluß machen noch einige anderweitige Betrachtungen über das Unendliche und das unendliche Kleine, §. 97 = 111.
   a. Was das Produkt aus einem unendlich großen, und einem unendlich kleinen Faktor für eine Größe sey? §. 97.
   b. Wie man nach dem Gesetze der Stetigkeit von den endlichen Größen zu den unendlich großen und unendlich kleinen Größen übergehen muß, §. 98 = 101.
   c. Erläuterung der Lehre vom Unendlichen aus den ohne Ende fortlaufenden Reihen, und dabey gelegentlich einiges über die negativen Zahlen, und über die Summen der gedachten Reihen, §. 102 = 111.

Inhalt des vierten Capitels.

Von der Natur der Differenzialien einer jeden Ordnung.

1. Erklärung und Bezeichnungsart sowohl des Differenzials überhaupt, als des ersten, zweyten, dritten Differenzials ꝛc. insbesondere, §. 112 = 119.
   a. Wiederholung eines hieher gehörigen Satzes aus der Lehre von den Differenzen, §. 112.
   b. Erklärung und Bezeichnung der Differenzialien, §. 113. 119.
      α. Nach Leibnitzens Art, §. 113.
      β. Nach Newtons Art, §. 114.
      γ. Vergleichung beyder Arten, §. 115. 116.
      δ. Von der im gegenwärtigen Werke gebrauchten Bezeichnung der Differenzialien, §. 117. 119.

2. Von

2. Von der Natur der Differenzialien einer jeden Ordnung, §. 120 - 128.
   a. Von der Natur der Differenzialien der ersten Ordnung, §. 120 - 123.
   b. Von der Natur der Differenzialien der zweyten Ordnung, §. 124
      α. Von der Natur der Differenzialien der zweyten und der folgenden Ordnungen, dieselben an sich betrachtet, §. 124 - 127.
      β. Von der Natur der Differenzialien der zweyten und folgenden Ordnungen, in Vergleichung mit denen der ersten Ordnung betrachtet, §. 128 - 130.
      γ. Von der Natur der Differenzialien aller Ordnungen, wenn die veränderliche Größe x als eine gleichförmig wachsende Größe betrachtet wird, §. 131 - 137.
      δ. Erklärung der Differenzial-Rechnung, §. 138.
3. Von den Integralien und der Integral-Rechnung, §. 139 - 143.
   a. Erklärung der Integral-Rechnung und des Integrals, §. 139. 140. Desgleichen die Bezeichnungsart der Integralien, §. 141.
   b. Von der Natur der Integralien, §. 142. 143.
4. Ausführlichere Beschreibung der Art, die Differenzialien und Integralien zu bezeichnen, §. 144 - 147.
5. Wie man die Differenzial- und Integral-Rechnung gelich abzuhandeln pflegt, und wie solches in dem Folgenden geschehen soll, §. 148 - 151.

Anmerkungen und Zusätze

zum

dritten und vierten Capitel.

Ich nehme diese beyden Capitel zusammen, und werde dasjenige, was ich dabey und darüber zu sagen habe, in der Ordnung vortragen, daß ich

1. einige von den Schwierigkeiten berühre, in welche man sich durch Annahme der Eulerischen Vorstellung von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen, und von der Natur der Differenzialien verwickelt. Dann will ich
2. den Begriff der Differenzialien auf eine andere, mit weniger Schwierigkeiten verknüpfte Art, festzusetzen suchen, und daraus die Natur derselben entwickeln; und zuletzt
3. einige anderweitige hieher gehörige Betrachtungen beyfügen.

1. Von den Schwierigkeiten,

worin man sich durch Annahme der Eulerischen Vorstellung von dem Unendlichen, dem unendlich Kleinen, und von der Natur der Differenzialien verwickelt.

Es leidet freylich keinen Zweifel, daß jede gegebene Größe, ihre Zahl mag so groß oder so klein seyn als sie will, ohne

ohne Ende, oder ins Unendliche, wenn dieser Ausdruck eben dasselbe sagen soll, vermehrt oder vermindert werden kann, und daß also unendlich, d. h. ohne Ende wachsende oder abnehmende Größen keinen Widerspruch enthalten. Aber so wie keine ohne Ende wachsende Größe je eine unendliche Größe werden kann: so verschwinden auf der andern Seite die ohne Ende abnehmenden Größen auch nie, oder werden nie $= 0$. Eben so ausgemacht ist es, daß jede gegebene Größe durch fortgesetzte Verminderung in nichts verwandelt werden kann; nur wird es dabey unmöglich, die Verminderung, wodurch solches geschieht, ohne Ende fortzusetzen. Denn soll eine Größe ohne Ende vermindert werden, so kann solches nicht anders als auf dem Wege der Division oder der Extraction der Wurzeln geschehen; und soll sie in Null übergehen, so wird dazu der Weg der Subtraction erfordert. Wenn man mit Rücksicht hierauf den 83sten §. lieset, welcher die Quelle und den Grund dessen enthalten soll, was in dem Folgenden über das Unendliche, das unendlich Kleine, und über die Natur der Differenzialien gesagt wird: so muß man sich wundern, daß Euler eine so wichtige Untersuchung auf so schwankende Behauptungen hat gründen können. Eine unendlich kleine Größe soll nichts anders als eine verschwindende Größe, und in der That $= 0$ seyn. Eine unendlich kleine Größe kann doch, wenn man den Worten keine Gewalt anthun will, nichts anders bedeuten, als die Größe, welche man durch keine, noch so weit fortgesetzte, Verminderung erhalten würde; wie kann also dieselbe $= 0$ seyn? Kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, kann und muß sie seyn, aber es ist relativ gesprochen, wenn man sagt, daß dergleichen Größen $= 0$ seyn, und es sind daher Größen, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, und verschwindende Größen noch sehr von einander verschieden. Wir haben dergleichen unendlich kleine Größen in dem Unterschiede des Winkels eines Halbkreises und eines rechten Winkels, aber es ist Mangel an geometrischer Schärfe, wenn man diesen Unterschied $= 0$ setzt. Auch zeigen sich die Nachtheile von der geringen Sorgfalt, welche Euler bey der Festsetzung des Begriffs des unendlich Kleinen bewiesen, bald und in großer Menge. Wie unbefriedigend ist z. B. gleich das, was er im 84sten §. sagt? Wie scheinbar sind die Widersprüche, welche man wider die unendlich vielen Ordnungen der Nichtse macht? Wie kann in der Folge §. 306. daraus, daß man $dx = 0$, und $dy = 0$ findet, geschlossen werden, daß die Gleichung, woraus man diese Bestimmungen gefunden, nicht bestehen könne? Wie können in der Integral-Rechnung die Integralien als Summen aller vorhergehenden Differenzialien angesehen werden. Doch hiervon nachher mehr, wenn ich zuvor den Begriff der unendlich kleinen Größen, so wie ich glaube, daß es geschehen muß, festgesetzt habe.

2. Von der Natur der Differenzialien.

Wir mögen eine gegebene Größe theilen, durch was für eine Zahl wir wollen, so haben die Theile, auf welche wir dadurch kommen, zu der getheilten Größe ein bestimmtes Verhältniß, welches sich angeben läßt, und jeder Theil, so klein er auch seyn mag, kann wieder von neuem getheilt werden. Es sey x die gegebene Größe, und m stelle jede noch so große Zahl vor; so ist

$$\frac{x}{m} : x = \frac{1}{m} : 1 = 1 : m$$

und setzt man $\frac{x}{m} = y$, so läßt sich, was von x gesagt worden,

den, ebenfalls von y behaupten. Wenn man sich daher eine Größe bloß als ein Aggregat bestimmter Theile, oder solcher, deren Verhältniß zu der Größe angegeben werden kann, vorstellt: so erschöpft man dadurch die Arten, wie diese Größe gedacht werden kann, nicht, sondern es bleibt noch übrig, dieselbe als ein Aggregat solcher Theile anzusehen und zu betrachten, deren Verhältniß zu der Größe durch keine Zahl, wie man dieselbe auch annehmen mag, ausgedruckt werden kann; und es fällt in die Augen, daß diese Theile kleiner seyn müssen, als jede Größe, die sich angeben läßt. Wir wollen daher dergleichen Theile Differenzialien, und zwar derjenigen Größen, welche man sich als Aggregate von ihnen gedenkt, nennen; und wenn eine von diesen Größen $= x$ gesetzt wird, das Differenzial derselben, durch dx bezeichnen. Da also das Verhältniß von $dx : x$ durch keine Zahl, so groß man dieselbe auch annehmen mag, dargestellt werden kann: so gehört auch das Verhältniß $n dx : x$, n mag angenommen seyn, wie es will, nur daß es eine bestimmte Zahl bedeute, zu denen, welche sich nicht angeben lassen. Denn wollte man das Gegentheil behaupten, so sey $n dx : x = p$, also $n dx = px$. Alsdenn wäre auch $dx : x = p : n$, und da p und n bestimmte Zahlen wären, so hätte man in $p : n$ einen deutlichen und bestimmten Ausdruck für das Verhältniß von $dx : x$, welches wider den Begriff von dx streitet. Hieraus folgt:

1. daß man bey den Größen, welche man sich als Aggregate von Differenzialien oder solchen Theilen vorstellt, deren Verhältniß zu der Größe nicht angegeben werden kann, die Menge der Theile unbestimmt lassen muß, und daher auch nur diejenigen Untersuchungen dabey anzustellen im Stande ist, welche diese Voraussetzung zulassen.

2. Daß aber gleichwohl die Differenzialien wirkliche Größen sind, und an sich betrachtet, nie mit Null verwechselt werden dürfen, welches denn natürlich auch von den Produkten aus Differenzialien und gegebenen Größen gilt.

3. Daß folglich auch die Differenzialien, nachdem man sie ihrer Natur gemäß, durch Zeichen ausgedruckt hat, alle Operationen zulassen, welche man mit ähnlichen Constructionen bestimmter Größen vorzunehmen gewohnt ist.

4. Daß, wenn Differenzialien oder Produkte aus Differenzialien und gegebenen Größen als Null betrachtet werden sollen, solches nur dann geschehen dürfe, wenn die vorgesetzte Absicht weiter keine Größen erfordert, als solche, die sich bestimmt geben lassen.

Wenn man also unter den unendlich kleinen Größen keine andere versteht, als diejenigen, welche jetzt betrachtet worden sind: so fällt in die Augen, warum man dieselben durch besondere Zeichen, und nicht durch o ausdrucken muß. Ferner braucht man den offenbar harten Satz nicht, daß diese Größen in Ansehung ihres arithmetischen Verhältnisses gleich, und dabey doch in Ansehung des geometrischen Verhältnisses ungleich, ja eine unendlichmal größer als eine andere seyn könne. Auch wird dadurch, wie sich in der Folge zeigen wird, den Widersprüchen vorgebauet, welche man sonst in der Lehre von den Differenzialien wahrzunehmen glauben muß. Die Schlußfolge §. 306, deren vorhin gedacht wurde, erscheint in ihrer ganzen Richtigkeit und Stärke. Endlich bleibt dabey die Vorstellung von den Integralien als Summen aller vorhergehenden Differenzialien, welche in der Integral Rechnung und bey der Anwendnung derselben so wichtig und unentbehrlich ist, von allen Schwierigkeiten frey.

Dies

Dies kann ohnstreitig hier hinreichen, den mitgetheilten Begriff von den unendlich kleinen, oder denjenigen Größen, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, vorläufig zu empfehlen.

Da also der Begriff von den Differenzialien, wobey man sich dieselben als wirkliche Größen gedenkt, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, auf keine Weise etwas widersprechendes in sich schließt: so darf man allerdings bey allgemeinen Untersuchungen über die Größen von ihm ausgehen, und es kommt nur darauf an: nicht bloß nichts dawider streitendes zu behaupten, sondern alle Sätze von den aus Differenzialien bestehenden Größen gerade aus dem in ihm enthaltenen Kennzeichen abzuleiten. Sollen nun Größen aus Differenzialien auf die Art bestehen, daß man sie als Summen derselben betrachten kann: so wird jede Untersuchung derselben unmöglich, wofern man nicht annimmt, daß die Menge der Differenzialien in jeder derselben eben so groß, als in jeder andern, sey; und in diesem Stücke sind daher die Differenzialien den in den beyden ersten Capiteln untersuchten Differenzen ähnlich. Eben diese Uebereinstimmung nimmt man ferner darin wahr, daß der Gegenstand der Untersuchung solcher Größen, die als Summen von Differenzialien betrachtet werden, kein anderer ist, als das Verhältniß ihrer Differenzialien, unter der Voraussetzung, daß die Menge derselben in jeder Größe dieselbe sey, wodurch also die Größen selbst veränderliche Größen werden. Ueberhaupt wird also auch die Lehre von den Differenzialien, oder die Differenzial-Rechnung auf eine ähnliche Art eingetheilt werden können, als nach S. 299. 300. die Lehre von den Differenzen.

Nun seyen y und z veränderliche Größen, und dy das Differenzial von y, so wie dz das Differenzial von z. Sind y und z nicht weiter bekannt, so kann weder dy noch dz deutlich, sondern bloß wie hier durch ein willkührliches Zeichen ausgedruckt, und also das Verhältniß dy : dz nicht angegeben, sondern bloß angezeigt werden. Ist hingegen y eine Funktion von z, so findet derselbe Schluß statt, welcher S. 293. in der Lehre von den Differenzen gebraucht wurde. Da nemlich die veränderlichen Größen in Ansehung der Menge ihrer Differenzialien in ihnen nicht von einander verschieden gedacht werden dürfen, und folglich auch die Menge der Differenzialien einer Funktion dieselbe seyn muß, als die Menge der Differenzialien derjenigen Größe, wovon sie eine Funktion ist: so muß, da z + dz von z um das Differenzial dz verschieden ist, auch jede Funktion von z + dz, welche man aus einer Funktion von z erhält, wenn man darin allenthalben z + dz für z setzt, von der Funktion von z um eins ihrer Differenzialien unterschieden seyn. Verwandelt man daher eine gegebene Funktion von z auf die gedachte Art in eine Funktion von z + dz, und zieht von dieser, nachdem man die dazu nöthigen, in der Funktion selbst angezeigten, Operationen vorgenommen hat, die gegebene Funktion ab: so findet man in dem Reste das Differenzial der gegebenen Funktion, und zwar durch dz, z und beständige Größen, und also deutlich ausgedruckt. Es sey z. B. die gegebene Funktion

$$z^2$$

so ist die nach der vorstehenden Regel daraus abgeleitete:

$$(z + dz)^2 = z^2 + 2zdz + dz^2$$

und folglich

$$z^2 + 2zdz + dz^2 - z^2 = 2zdz + dz^2$$

das gesuchte Differenzial von z^2 in einem deutlichen Ausdrucke.

drucke. Auf ähnliche Art findet man für das Differenzial der Funktion z^3 den Ausdruck:

$$3z^2dz + 3zdz^2 + dz^3$$

und für das Differenzial der allgemeinen Funktion von z^n diesen:

$$nz^{n-1}dz + \frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}dz^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^{n-3}dz^3$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

und zwar für jeden Werth für n: so daß also auch die Art die Differenzialien der Funktionen deutlich auszudrucken, mit der Art, die Differenzen der Funktionen zu finden, übereinstimmt.

Aus diesem Grunde sind auch bey dem S. 294. 295. stehenden Satze nur einige leichte Modificationen nöthig, um ihn den Differenzialien anzupassen. Mit diesen Modificationen nemlich lautet er folgendermaßen.

Da ferner die veränderlichen Größen, als Summen von Differenzialien betrachtet, dadurch veränderliche Größen sind, weil sie als aus gleich großen Mengen von Differenzialien bestehend gedacht werden, und die Gleichheit der Mengen ihrer Differenzialien keine Veränderung leiden kann, wenn man jede dieser Größen um eins ihrer Differenzialien vermehrt: so ist es auch bey der Untersuchung der veränderlichen Größen, als solcher, gleichviel, ob man diese veränderlichen Größen selbst nimmt, oder jede derselben um eins ihrer Differenzialien vermehrt. Sind daher zwey veränderliche Größen einander gleich, sie mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen: so muß man auch wieder eine Gleichung bekommen, wenn man statt jeder der veränderlichen Größe, woraus sie etwa zusammensammengesetzt sind, eben diese Größen, um eins ihrer Differenzialien vermehrt, setzt. Ist daher

$$y = \pm z \pm x \pm w \pm v + \text{rc.}$$

so ist auch

$$y + dy = \pm z \pm dz \pm x \pm dx \pm w \pm dw \pm v \pm dv \pm \text{rc.}$$

und daher, wenn man hiervon die vorhergehende Gleichung abziehet,

$$dy = \pm dz \pm dx \pm dw \pm dv \pm \text{rc.}$$

und ist

$$y = zx$$

so ist auch

$$y + dy = (z + dz)(x + dx) = zx + xdz + zdx + dxdy$$

und

$$dy = xdz + zdx + dxdy,$$

und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Wenn das Differenzial einer Funktion wieder eine veränderliche Größe ist: so gilt das Bisherige von ihm, in so fern es eine veränderliche Größe ist, natürlich ebenfalls, und so werden zweyte, dritte, vierte Differenzialien u. s. w. bey ihm möglich. Man findet aber jedes von den folgenden aus dem unmittelbar vorhergehenden eben so, als man das erste aus der gegebenen Funktion erhält, und so braucht hier davon nicht besonders geredet zu werden.

Allein man druckt deswegen die Differenzialien deutlich aus, um die Differenzialien zweyer und mehrerer veränderlichen Größen mit einander zu vergleichen, und ihr Verhältniß zu einander anzugeben, in so fern dasselbe durch endliche Größen bestimmt werden kann. Ob nemlich gleich die Größen, welche kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, an sich betrachtet, nie = o gesetzt werden dürfen: so so kommen sie doch in Ansehung unserer nicht in Betrachtung, und wir haben das Verhältniß zweyer Differenzialien zu einander in aller uns erreichbaren Schärfe und Genauigkeit ausgedruckt, wenn wir den Quotienten desselben so darstellen, daß dabey keine Größe, die sich angeben läßt, vernachläßiget und aus der Acht gelassen wird. Weiter gehen wir ja in der gemeinen Mathematik nie. Hierdurch wird eine sehr vortheilhafte Abkürzung der nach den vorhergehenden Regeln für die Differenzialien der Funktionen gefundenen deutlichen Ausdrücke möglich. Denn soll z. B. das Verhältniß des Differenzials der Funktion z^2 zu dem Differenziale von z, oder

$$d.z^2 : dz$$

angegeben werden: so ist, da $d.z^2 = 2zdz + dz^2$, und $dz^2 = dz.dz$ ist,

$$d.z^2 : dz = 2zdz + dz.dz : dz$$

und also der Quotient des Verhältnisses von $d.z^2 : dz$

$$2z + dz$$

wofür man, weil sich dz durch keine Größe, so klein man sie auch annehmen mag, ausdrucken läßt, 2z setzen kann. Wollte jemand behaupten, daß man sich dadurch von der Schärfe, welche in der gemeinen Mathematik beobachtet wird, entferne, der würde vor allen Dingen beweisen müssen, daß wir bey der Bestimmung der Verhältnisse in der gemeinen Mathematik auch das bestimmt ausdruckten, was sich seiner Natur nach gar nicht bestimmt ausdrukken läßt; und wem dieses möglich schiene, mit dem hörte aller fernere Streit auf. Auf ähnliche Art ist der Quotient des Verhältnisses

$$d.z^3 : dz$$

da $d.z^3 = 3z^2dz + 3zdz^2 + dz^3$, und $dz^2 = dz.dz$, so wie $dz^3 = dz.dz^2$ ist,

$$3z^2 + 3zdz + dz^2 = 3z^2 + (3z + dz)dz,$$

und da jedes Produkt aus einem Differenziale und endlichen Größen zu jeder gleichartigen endlichen Größe ein eben so wenig anzugebendes Verhältniß hat, als das Differenzial allein genommen: so kann man dafür wieder, ohne der mathematischen Schärfe im geringsten zu nahe zu treten, $3z^2$ setzen. Ueberhaupt wird hiernach der Quotient des Verhältnisses

$$d.z^n : dz$$

$$\frac{nz^{n-1}dz + \frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}dz^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dz^3 + \text{ꝛc.}}{dz}$$

$$=$$

$$\frac{(nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}dz + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dz^2)dz}{dz}$$

$$=$$

$$nz^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dz + \text{ꝛc.}\right)dz$$

und folglich, wenn wir bloß angeben wollen, was sich seiner Natur nach angeben läßt,

$$d.z^n : dz = \frac{d.z^n}{dz} = nz^{n-1}.$$

Wenn man das Bisherige sorgfältig überdenkt, wird man leicht von selbst finden, daß es zur Erfindung aller der Abkürzungen hinreiche, welche bey dem Geschäfte, die Differenzialien der Funktionen deutlich auszudrucken, gebraucht werden. Und da man dabey alles lediglich aus dem Begriffe ableitet, daß das Differenzial jeder veränderlichen Größe, obgleich nicht $= 0$, sondern stets eine wirkliche, aber auf keine Art bestimmt anzugebende Größe ist, und dieser Begriff keine Schwierigkeiten hat, da es nie verlangt wird, das Differenzial irgend einer veränderlichen Größe selbst anzugeben: so kann dasselbe wenigstens als ein Versuch gelten, die Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung Anfängern zu erleichtern. Uebrigens bedarf es kaum erwähnt zu werden, daß die Ausdrücke

$$\frac{d.z^n}{dz} = nz^{n-1}, \text{ und } d.z^n = nz^{n-1}dz$$

einander völlig gleichbedeutend sind.

Allein so außer allem Zweifel auch die bisher betrachteten Abkürzungen der deutlichen Ausdrücke der Differenzialien sind; so betreffen sie doch nur außer den ersten Differenzialien diejenigen zweyten und höhern Differenzialien, wobey das Differenzial der veränderlichen Größe der Funktion beständig ist, und es kann daher das Gesagte, bey aller seiner Richtigkeit und Gewißheit, den Fehler der Unvollständigkeit und Unzulänglichkeit zu haben scheinen. Nun bedürfen zwar allerdings die zweyten und höhern Differenzialien solcher Funktionen, wobey das Differenzial ihrer veränderlichen Größe ebenfalls eine veränderliche Größe ist, in Ansehung der bey ihrer Darstellung möglichen, üblichen und selbst nothwendigen Abkürzungen einer besondern Untersuchung; allein die Schlüsse, worauf sich diese Abkürzungen gründen, sind von den bisherigen nicht verschieden. Denn es sey y irgend eine Funktion von x, und x eine Funktion der veränderlichen Größe z im engern Verstande, und also das Differenzial von z beständig; so ist, allgemein ausgedruckt, nach §. 129.

$$dx = pdz.$$
$$dy = qdx = Pdz$$
$$ddy = rddx + sdx^2 + dxddx.$$

Da

Da aber ddx allemal $= \nu dz^2$, und $dx^2 = \omega dz^2$ wird: so folgt hieraus

$$ddy = \rho dz^2 + \sigma dz^2 + \tau dz^3;$$

und soll daher ddy mit dz^2 verglichen werden, so fällt dabey nach den obigen Gründen $\tau dz^3 = \tau dz^2 . dz$ weg, und es wird

$$\frac{ddy}{dz^2} = \rho + \sigma.$$

Es sey z. B. $y = x^2$ und $x = z^2$, also $y = z^4$; so ist

$$dx = 2zdz$$

$$dy = 2xdx = 4z^3dz, \text{ und}$$

$$ddy = 2(xddx + dx^2 + dxddx).$$

Nun ist aber $ddx = 2dz^2$, und $dx^2 = 4z^2dz^2$; folglich

$$ddy = 2(2z^2dz^2 + 4z^2dz^2 + 4zdz^3),$$

und also

$$\frac{ddy}{dz^2} = 12z^2 = d^2 . z^4.$$

Will man daher das zweyte Differenzial von y vor der Bestimmung desselben, durch das Differenzial derjenigen veränderlichen Größe, deren Differenzial beständig ist, und wovon y eine Funktion ist, so abkürzen, daß man nur die Glieder behält, die bey der Erforschung des verlangten Verhältnisses wirklich gebraucht werden können: so hat man

$$ddy = rddx + sdx^2,$$

und auf ähnliche Art lassen sich auch in andern Fällen die nöthigen Abkürzungen finden und beweisen. Uebrigens setze ich hier voraus, was allgemein zugestanden werden muß, daß bey der wirklichen Bestimmung des Verhältnisses der Differenzialien, die Ausdrücke derselben allemal auf solche reducirt werden müssen, die durch endliche Größen und beständige Differenzialien dargestellt sind, wofern nicht etwa der Fall ist, daß die vorkommenden Differenzialien durchaus

von

von einer und derselben Art sind; und bemerke nur noch, daß sich, wenn y eine Funktion von x, und x eine Funktion von z ist, beweisen läßt, daß sich jedes zweyte Differenzial von dx, oder ddx, durch ein Produkt aus dz^2 und einer endlichen Größe, das dritte Differenzial von dx, oder d^3x, durch ein Produkt aus dz^3 und einer endlichen Größe ausdrucken läßt, und daß sich hierauf dasjenige gründet, was Euler im 4ten Capitel § 134 f. von diesen Differenzial-Größen behauptet. Soviel jetzt hiervon; vielleicht in der Folge ein Mehreres.

Da die Menge der Differenzialien in einer veränderlichen Größe durch keine Zahl ausgedruckt werden kann, S. 308 f. so bleibt uns bey der Darstellung der Differenzialien der veränderlichen Größen, wenn diese Größen selbst gegeben sind, nichts weiter möglich, als diejenigen Differenzialien in ihrer natürlichen Ordnung, so weit wir es etwa für nützlich halten, auszudrucken, die entweder auf die in den gegebenen Größen enthaltenen folgen, oder vor denselben vorhergehen. Es sey die gegebene veränderliche Größe y, und y irgend eine Funktion von x. Ferner sey

$$y^{I} = y + dy;\quad y^{II} = y + 2dy;\quad y^{III} = y + 3dy;\ \text{rc.}$$
$$y_{I} = y - dy;\quad y_{II} = y - 2dy;\quad y_{III} = y - 3dy;\ \text{rc.}$$

desgleichen

$$dy = y^{I} - y;\quad dy^{I} = y^{II} - y^{I};\quad dy^{II} = y^{III} - y^{II}\ \text{rc.}$$
$$dy_{I} = y - y_{I};\quad dy_{II} = y_{I} - y_{II};\quad dy_{II} = y_{II} - y_{III}\ \text{rc.}$$

und allgemein

$$y^{n} = y + ndy;\quad y_{n} = y - ndy$$

und

$$dy^{n-1} = y^{n} - y^{n-1};\quad dy_{n-1} = y_{n} - y_{n-1}$$

so wird, da y = eine Funktion von x ist,

der

der hier stehende Ausdruck	gleich derselben Funktion von x, wenn man darin für x allenthalben setzt
y^{I}	$x + dx$
y^{II}	$x + 2dx$
y^{III}	$x + 3dx$
y^{IV}	$x + 4dx$
$\vdots$	$\vdots$
y^{n}	$x + ndx$
ferner	
y_{I}	$x - dx$
y_{II}	$x - 2dx$
y_{III}	$x - 3dx$
y_{IV}	$x - 4dx$
$\vdots$	$\vdots$
y_{n}	$x - ndx$

und will man daher dy; dy^{I}; dy^{II}; dy^{III}; dy^{IV} rc. oder dy_{I}; dy_{II}; dy_{III}; dy_{IV} rc. durch dx und endliche Größen ausdrucken, so darf man die Funktionen suchen, welche den Ausdrücken y^{I}; y^{II}; y^{III}; rc. y_{I}; y_{II}; y_{III}; rc. gleich sind, und darauf mit denselben nach diesen Gleichungen verfahren:

$$dy = y^{I} - y;\quad dy^{I} = y^{II} - y^{I};\quad dy^{II} = y^{III} - y^{II};\ \text{rc.}$$
$$dy_{I} = y - y_{I};\quad dy_{II} = y_{I} - y_{II};\quad dy_{III} = y_{II} - y_{III};\ \text{rc.}$$

Uebrigens ist allemal, so wie in der Lehre von den Differenzen

$$y = \Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_{V} + \text{rc.}$$

war, auf ähnliche Art hier,

$$y = dy_{I} + dy_{II} + dy_{III} + dy_{IV} + dy_{V} + \text{rc.}$$

ein Satz, der sowohl bey den Anwendungen der Differenzial-

Rech-

Rechnung, als auch in der Integral-Rechnung von der äussersten Wichtigkeit ist.

Ob die Differenzialien, woraus Eine gegebene veränderliche Größe besteht, einander gleich seyn oder nicht? läßt sich, da man dieselben nach der beschriebenen Methode deutlich darstellen kann, leicht untersuchen. Es verhält sich aber damit völlig, wie mit den Differenzen der veränderlichen Größen; und da sie also nur bey den wenigsten veränderlichen Größen einander gleich sind: so entsteht die Frage:

Ob es hinlänglich sey, bey der Untersuchung des Verhältnisses der Differenzialien der veränderlichen Größen, überhaupt genommen, bloß diejenigen Differenzialien zum Grunde zu legen, welche man nach den S. 312 f. mitgetheilten Regeln findet?

Eben diese Frage hätte auch schon in der Lehre von den Differenzen aufgeworfen werden können, weil sich die Differenzialien von den Differenzen bloß darin unterscheiden, daß diese zu ihren Größen ein endliches, obgleich unbekanntes, Verhältniß haben, das Verhältniß von jenen zu ihren Größen hingegen kleiner ist, als jedes Verhältniß, das sich angeben läßt. Die Antwort aber ist bejahend und leicht. Es sind nemlich die Ausdrücke, welche man nach der gewöhnlichen Methode für die Differenzialien der veränderlichen Größen findet, nicht bloß Ausdrücke für das nächste Differenzial, sondern allgemeine Darstellungen aller in jenen Größen enthaltenen Differenzialien. Denn sind die gegebenen veränderlichen Größen veränderliche Größen in engerer Bedeutung, oder auch von der Art, daß sie unter die Form $y = az$ u. dgl. gehören: so sind alle ihre Differenzialien einander gleich, und was also von einem gilt, das gilt auch von allen. Sind aber dieselben solche Funktionen, daß die Differenzialien ungleich werden: so enthält das gedachte Differenzial, außer dem Differenziale der veränderlichen Größe der Funktion, auch diese veränderliche Größe selbst, und begreift deswegen alle in den gegebenen veränderlichen Größen enthaltene Differenzialien unter sich. Es sey z. B. $y = z^2$, und also $dy = 2zdz + dz^2$, um dasselbe vollständig auszudrucken. Man suche $dy^n = y^{n+1} - y^n = (z + (n+1)dz)^2 - (z + ndz)^2 = 2zdz + 2ndz^2 + dz^2$. Da y und z, so wie sie, als veränderliche Größen, ihre Einheiten in gleicher Menge enthalten müssen, also auch hier bloß durch dieses Kennzeichen gegeben sind: so kann man allemal, wenn y in irgend einer Funktion von z gegeben ist, $y + ndy = Y$, und $z + ndz = Z$ setzen, und dann Y nicht nur als eben die Funktion von Z ansehen, welche y von z ist, sondern auch dy als die Differenzialien von Y, und dz als die Differenzialien von Z betrachten. Auf diese Art aber wird in dem gegenwärtigen Falle $Y = Z^2$, und $dY = 2Zdz + dz^2 = dy^n$; und setzt man hierin $Z = z + ndz$, so wird $2Zdz + dz^2 = 2zdz + 2ndz^2 + dz^2$. Da übrigens hieraus zugleich erhellet, daß man, wenn man bey der Untersuchung des Verhältnisses der Differenzialien nicht die nächsten, oder nach der S. 312 f. beschriebenen Methode sich ergebenden, sondern irgend andere nehmen wollte, doch allemal dy^n nehmen müßte, wenn man von irgend einer veränderlichen Größe das gleichliegende Differenzial genommen hätte; und $dy^n = y^{n+1} - y^n$, hingegen $dy = y^1 - y$ ist: so lassen sich auch die Differenzialien auf keine bequemere Art ausdrucken, als eben nach der gedachten Methode.

Wenn man in dem Gesagten statt des Worts Differenzial den Ausdruck Differenz, und statt dy das Zeichen Δy.

u. s. f.

u. s. f. setzt: so paßt die aufgeworfene Frage und die Beantwortung derselben durchaus in die Lehre von den Differenzen; und wäre sie daselbst aufgeworfen und beantwortet worden, so würde man sie durch eine entgegenstehende Abänderung für die Differenzial-Rechnung haben einrichten können. Dieses rührt ebenfalls her von der vorhin S. 311. und S. 321. erwähnten Uebereinstimmung zwischen den Differenzen und den Differenzialien, aber nicht daher, weil man die Differenzialien aus den Differenzen durch genugsam fortgesetzte Verkleinerung dieser letztern erhalten könnte. Denn man setze die Theilung einer Differenz so weit fort, als man irgend will und kann: so haben die Theile, auf welche man kommt, zu der Differenz, und also auch zu der veränderlichen Größe derselben, noch immer ein endliches Verhältniß, welches bey den Differenzialien nicht statt findet. Oder soll man die Theilung der Differenzen ohne Ende fortsetzen? Dann kann man ja selbst in Gedanken das Ende dieser Theilung nicht erreichen; und wie stimmt das mit einander überein, daß die Differenzialien kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, seyn, und doch durch eine unbegrenzte Theilung sollen gefunden werden können? da jene Redensart im Grunde nichts anders sagt, als: die Differenzialien sind Größen, welche man durch keine Theilung irgend einer Größe finden kann?

Um bey dieser Gelegenheit noch einiger andern Vorstellungen von den Differenzialien zu gedenken, so ist es gar nicht ungewöhnlich, sich dieselben auch, ohne sie erst von den Differenzen abzuleiten, sogleich als unbestimmt kleine Theile ihrer Größen zu gedenken, so daß ihr Verhältniß zu diesen Größen gleichwohl ein endliches Verhältniß bleibt. So erklärt z. B. Raymond-Roux in seinen Leçons élémentaires de Calcul infinitésimal das Differenzial auf folgende Art: La *différentielle* ou la *fluxion* d'une quantité x sera une partie de x assez petite pour devoir s'évanouir en comparaison de la quantité dont elle fait partie; c'est à dire, que la fluxion de x n'est autre chose que x divisée par l'unité, suivie d'un assez grand nombre de zeros, pour que le quotient soit négligeable en comparaison du dividende, ou fluxion

de $x = \frac{x}{1000\ldots.0}$ fluxion de $y = \frac{1}{1000\ldots.0}$ y, ꝛc.

Nach dieser Erklärung wären also nicht bloß Differenzialien bey veränderlichen Größen möglich, sondern es ließen sich dergleichen auch sehr gut bey beständigen Größen gedenken! Man braucht nicht mehr, um das Falsche derselben einzusehen; allein es werden dabey noch schönere Behauptungen nothwendig. So findet sich z. E. in den Schriften von einigen, die eben die Meinung von den Differenzialien haben, ob sie gleich dabey die Differenzen gebrauchen, der Satz, daß die abgekürzten Differenzial-Ausdrücke nur beynahe wahr seyn, und denn heißt es weiter: Wenn zwey Größen beynahe gleich sind, so sind auch ihre Gleichvielfachen, ihre gleichnamigen Theile, ihre gleichvielte Potenzen oder Wurzeln ꝛc. beynahe gleich. Ferner: wenn zwey Größen beynahe gleich sind, und es werden Größen dazu addirt oder davon subtrahirt, welche beynahe gleich sind, oder sie werden mit beynahe gleichen Größen multiplicirt oder dividirt u. s. f. so sind die Resultate auch beynahe gleich; so daß, da diese Grundsätze durch die ganze Differenzial-Rechnung gebraucht werden, die ganze Differenzial-Rechnung zu einer Beynaherechnung gemacht wird. Nun bedeute n eine solche Zahl, daß $\frac{x}{n}$ nach der gedachten Mathematiker Begriffe ein Differenzial von x ausdrucke. Dann sind

x †

$$x + \frac{x}{n} \text{ und } x, \text{ oder } x(1 + \frac{1}{n}) \text{ und } x$$

beynahe gleich; folglich, nach dem einen von den angeführten Grundsätzen, beynahe

$$(x(1 + \frac{1}{n}))^m = x^m (1 + \frac{1}{n})^m = x^m,$$

und

$$(1 + \frac{1}{n})^m = 1$$

was auch m für eine Zahl bedeute. Hätte Euler das im Jahr 1748 gewußt, als er seine Einleitung in die Analysis des Unendlichen schrieb; würde er wohl im siebenten Capitel des ersten Buchs, §. 119 behauptet haben, daß $(1 + k\omega)^i = 1 + x$ in den daselbst den Buchstaben k, ω, i, und x beygelegten Bedeutungen sey? Und wenn von den beynahe gleichen Größen überall eben das beynahe wahr seyn soll, was von den gleichen Größen streng und vollkommen wahr ist: so müssen doch auch die Potestäten gleicher Größen, wenn ihre Exponenten beynahe gleich sind, einander beynahe gleich seyn. Nun sey beynahe m = n, wobey also m, wie ich hier annehmen will, so viel nemlich, als es das Wort, beynahe, erlaubt, größer seyn kann als n. Da

$$dx = dx$$

ist, so muß nach dem angeführten Satze beynahe

$$dx^m = dx^n$$

und eben so

$$\frac{a}{dx^m} = \frac{a}{dx^n}$$

seyn. Man vergleiche hiermit den 95sten §. des ersten Theils der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung! Endlich ließe sichs wahrlich nicht, ohne ein Wunder zu Hülfe zu nehmen, erklären, wie die Differenzial-Rechnung die endlichen Größen, welche sie finden lehrt, aus beynahe wahren Größen genau zusammensetzen könne, ohne das Weggelassene je wieder dazu zu nehmen? Das zu erklären, wie die, welche gedachten durchaus falschen Begriff von den Differenzialien zum Grunde legen, im Stande gewesen sind, aus diesem falschen Begriffe so viele wahre Lehrsätze herzuleiten? ist leicht. Sie haben nemlich diese Lehrsätze, nicht aus dem Begriffe, sondern aus und durch Constructionen gefunden, und die mathematischen Constructionen lassen sich nicht so verwirren und verderben, als sich wohl durch Worte ausgedruckte Begriffe verwirren und verderben lassen. Wer genau überlegt, was dx unter den Umständen, unter welchen wir es brauchen, andeuten kann, und dabey das, bey den Ausdrücken der Differenzialien überhaupt, übliche Verfahren gehörig untersucht, wird in Ansehung des wahren Begriffs von den Differenzialien nicht zweifelhaft bleiben.

Weit scheinbarer ist die Theorie derer, die behaupten, daß man durch die Differenzial-Formeln und Gleichungen weiter nichts als die Grenze gewisser Verhältnisse, und z. B. durch $dy = nz^{n-1}dz$, oder $\frac{dy}{dz} = nz^{n-1}$, bloß die Grenze des Verhältnisses ausdrucke, welcher sich, wenn $y = z^n$ ist, das Verhältniß $dy : dz$ ohne Ende nähern kann; allein genau geprüft kämpft sie gleichwohl mit einer doppelten Unbequemlichkeit. Die eine ist, daß man dabey nicht füglich vermeiden kann, dy und dz in Nichtse zu verwandeln, und dann erst den für $\frac{dy}{dz}$ gefundenen Ausdruck als eine genaue Bestimmung ihres Verhältnisses anzusehen; die andere aber, daß man dabey gezwungen ist, eine Menge uneigentlicher Redensarten, die einer weitläuftigen Erklärung bedür-

bedürfen, einzuführen. Jenes thut selbst Hr. Kästner in seinen Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen, S. 11. in dem Zusatze 16; dieses findet man allenthalben. Gleichwohl hat diese Theorie, insbesondere unter den neuern Mathematikern, viel Anhänger gefunden, und vorzüglich haben sie Hr. Karsten in seiner Abhandlung vom Mathematisch-Unendlichen, der ersten unter den 1786 zu Halle von ihm herausgegebenen mathematischen Abhandlungen, und Hr. L'Huilier in der in eben dem Jahre von der hiesigen Akademie der Wissenschaften gekrönten Preisschrift: Exposition élémentaire des principes des calculs superieurs, von allen Zweifeln zu befreyen, und wider alle Einwürfe zu sichern gesucht. Es wird daher nicht unzweckmäßig seyn, beyder Schriften noch mit etwas Mehrerm zu gedenken.

Hr. Karsten verwirft also zuvörderst den Eulerischen Grundsatz: Jede Größe kann ohne Ende vermehrt werden. Jener vermeinte Grundsatz, sagt er §. 20, ist wenigstens in der Allgemeinheit genommen, falsch, wie man ihn hier anwenden will, und man kann ihn ohne Umstände verwerfen: denn man ist eben so gut berechtiget, festzusetzen, jede Größe könne ohne Ende vermindert werden. Daraus würde also folgen, es sey unmöglich, daß eine Größe $= 0$ werden könne, denn hiemit hätte ja die Verminderung ein Ende. Seiner Meinung nach enthalten daher unendliche Größen für den Verstand keinen Widerspruch, und zwar unendliche Größen in der Bedeutung, wobey $\frac{1}{\infty} = 0$ ist. Im 29sten und 30sten §. erklärt er sich ferner über das unendlich Kleine und über die Differenzialien auf folgende Art: „Der Ausdruck unendlich klein rührt von der Vorstellung her, wie vermittelst der Division eines Ganzen mit einer beständig wachsenden Zahl der Quotient der Größe o immer näher gebracht werden kann. Sie ist der Vorstellung ganz ähnlich, wie vermittelst der Division mit einer veränderlichen beständig abnehmenden Zahl der Quotient größer als jede noch zu bestimmende Größe werden kann, sie sey so groß, als man will. Kurz man wählte für das Zeichen $\frac{1}{\infty} = 0$ den Ausdruck unendlich klein, weil man für das Zeichen $\frac{1}{0} = \infty$ den Ausdruck unendlich groß gewählt hatte. Ehemalige Vorstellungen von der Sache könnten dem Leser Zweifel übrig lassen, ob man auch berechtigt sey, das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ schlechterdings mit o für gleichgültig anzunehmen. Um solchem Zweifel zu begegnen, muß ich an die sehr bekannte trigonometrische Formul $\frac{1}{\sec.\alpha} = \cot.\alpha$ erinnern. Wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, setzt man $\sec.\alpha = \infty$, also $\frac{1}{\infty} = \cot. 90^\circ$. Nach aller Geständniß bezeichnet $\frac{1}{\infty}$ das unendlich Kleine, und nach aller Geständniß ist $\cot. 90^\circ = 0$, also kann $\frac{1}{\infty}$ kein Mittelding zwischen Nichts und Etwas seyn. Wenn ich nun voraus setze, daß $\frac{1}{\infty}$ nichts mehr und nichts weniger bedeute als o, so versteht es sich von selbst, daß $a + \frac{1}{\infty} = a - \frac{1}{\infty} = a$ sey, oder daß $\frac{1}{\infty}$ in allen solchen Fällen aus einer Formel wegfallen müsse, wenn die o selbst, oder was vielleicht damit multiplicirt ist, wegfallen muß. Das ist es, was die Regel sagen will:

Das

Das unendlich Kleine verschwinde in Vergleichung mit dem Endlichen.

Vormals mogte man diese Regel nöthig haben, jetzt ist sie ganz überflüssig. Wenn man bey Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Geometrie oder andere Theile der Mathematik $x + dx = x$, $y + dy = y$ nimmt: so liegt allemal die Voraussetzung zum Grunde, daß dx oder dy so viel als $\frac{1}{\infty}$, mithin nichts anders als 0 sey. Die ehemaligen Zweifel dagegen rühren von den ganz undeutlichen Begriffen her, die man sich davon machte, was dx, dy eigentlich bedeuten solle.“ Man sieht hieraus, daß Hr. Karsten eben denselben Begriff von den Differenzialien zum Grunde legt, der im gegenwärtigen übersetzten Eulerischen Werke angenommen worden ist, ob er gleich die Behauptung verwirft, auf welche man denselben hierin gebauet findet; aber so bleibt die Quelle, woraus die Schwierigkeiten in den ersten Grundsätzen der Differenzial-Rechnung fließen, immer noch unverstopft. Denn einmal läßt sich aus dem gedachten Begriffe nicht erklären, warum die beständigen Größen kein Differenzial haben. Zum andern giebt derselbe keine sichere Regel an die Hand, wornach man sich bey der Weglassung einiger Differenzial-Ausdrücke und der Beybehaltung anderer richten könnte. Endlich bleibt dabey drittens immer die Schwierigkeit zurück, daß man in der Differenzial-Rechnung bloße Nichtse untersuche, und, ohne eine Verschiedenheit unter ihnen aus dem Begriffe derselben herleiten zu können, sie gleichwohl verschiedentlich bezeichne, und bey der Vergleichung als wirklich von einander verschieden behandele. Ob dieser zuletzt gedachten Schwierigkeit auf folgende Art hinlänglich begegnet werde? wird jeder Uneingenommene von selbst schon beurtheilen: „Es sey

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{2c.}$$
$$z = fx + gx^2 + hx^3 + kx^4 + \text{2c.}$$

so müssen y und z beyde o werden, wenn man $x = o$ setzt. Dagegen ist der Exponent des Verhältnisses $y : z$

$$\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{2c.}}{f + gx + hx^2 + kx^3 + \text{2c.}}$$

und dieser wird $\frac{a}{f}$, wenn man $x = o$ setzt, in allen andern Fällen aber ist der Werth des Exponenten $\frac{y}{z}$ von $\frac{a}{f}$ verschieden. Wenn nun gleich in dem Falle $x = o$ nicht weiter gefragt werden kann, wie vielmal z und y enthalten sey? weil es sich von selbst versteht, daß alle Nullen einander gleich sind, und weiter keine Größe haben, die man vergleichen könnte: so läßt sich doch oft durch andere Schlußfolgen beweisen, daß der letzte Werth des Exponenten $\frac{y}{z}$ für den besondern Fall $x = o$ dem Exponenten des Verhältnisses zweyer andern Größen gegen einander, welches man eigentlich suchte, gleich seyn müsse. Eben diese Grenze des Verhältnisses $y : z$ stellte man sich sonst als das Verhältniß der dem eingeführten Sprachgebrauche gemäß, nun unendlich klein gewordenen Größen $y : z$ vor, und in diesem Sinne konnte man so reden, als wenn die eine unendlich kleine Größe z in der andern y so und so vielmal enthalten sey, oder als wenn zwischen zweyen unendlich kleinen Größen jedes endliche Verhältniß statt haben könne." Wenn $y = ax + bx^2 + cx^3 + \text{2c.}$ und $z = fx + gx^2 + hx^3 + \text{2c.}$ ist: so ist allerdings y sowohl als z für $x = o$ ebenfalls o, und $\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + \text{2c.}}{f + gx + hx^2 + \text{2c.}}$. Allein da hieraus für

$x = o$

$x = 0$ auch $\frac{0}{0} = \frac{a}{f}$ fließt, und alle Nullen einerley seyn sollen, so ist $0 : 0 = 1$, und so muß auch $a : f = 1$, und also $a = f$ seyn; und wozu alsdenn die Bestimmung des Verhältnisses $y : z$ durch $a : f$? „Aber es zeigt sich ja der Nutzen von dergleichen Bestimmungen in so vielen Fällen und so offenbar, daß man darauf das Recht, diese Bestimmungen zu gebrauchen, gründen könnte?“ Giebt man Größen zu, die kleiner sind, als jede Größe, die sich angeben läßt; und dergleichen Größen gebraucht man ja schon in der Elementar-Mathematik: so ändern sich vorstehende Schlüsse in folgende. Wenn $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{rc.}$ und $z = fx + gx^2 + hx^3 + kx^4 + \text{rc.}$ ist: so ist sowohl y als z für $x = 0$ ebenfalls 0, und $a = f$, und es hört also in diesem Falle alle Vergleichung der Größen, y und z, mit einander auf. Allein wenn man x kleiner nimmt, als jede Größe, die sich angeben läßt, und $a, b, c, d,$ rc. $f, g, h, k,$ rc. endliche Größen bedeuten, so werden auch y und z Größen die kleiner sind, als jede anzugebende Größen, aber weder 0, noch nothwendig einander gleich. Ihr Verhältniß zu einander ist vielmehr alsdann

$$\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{rc.}}{f + gx + hx^2 + kx^3 + \text{rc.}}$$

so daß x kleiner als jede anzugebende Größe ist; und wenn daher das Verhältniß $y : z$ nur so weit ausgedruckt werden soll, als wir es durch endliche Größen zu thun im Stande sind: so bekommt man

$$\frac{y}{z} = \frac{a}{f}.$$

Hier hat man es nicht mit Nullen, sondern mit Größen zu thun, die kleiner sind, als jede Größe, die sich angeben läßt; und wenn man durch Bestimmung und Vergleichung der

Nichtse wirklich etwas wahres und brauchbares findet: so hat man es sicher allemal auf die Art gefunden, daß man zwar von Nichtsen geredet, aber im Grunde immer Größen, die kleiner sind, als jede anzugebende Größe, darunter gedacht, und seine vorgegebenen Nichtse durchaus als dergleichen Größen behandelt hat.

Dieses vorausgesetzt will ich gerne zugeben, daß man mich mit Recht tadeln würde, wenn ich behaupten wollte, daß die unter dem Namen der Exhaustion bekannte Methode der Alten, gehörig erweitert, unzulänglich sey, um den Grund der Differenzial Rechnung fest zu legen. Dieses leugne ich keinesweges selbst und an sich genommen, sondern ich verlange nur, daß man die dabey nöthigen unbestimmbar kleinen Größen nicht mit Null verwechsele und wirklichen Nichtsen gleich annehme; und behaupte dabey, daß die gewöhnliche Art, die Gründe der Differenzial Rechnung auf die Exhaustions-Methode zu bauen, weitläuftiger und unbequemer sey, als es nöthig ist. Wo haben wohl die Alten bey ihren Exhaustionen Größen gebraucht, die Nullen gleich gesetzt werden könnten? Durch die Einführung solcher Größen erweitert man die Exhaustions-Methode der Alten nicht, sondern man entfernt sich gänzlich von ihr. Und wie schwer ist das mit einander zu vereinigen, oder vielmehr wie unmöglich, daß man einmal durch keine noch so weit fortgesetzte Theilung einer endlichen Größe je auf Null kommen könne, und denn doch die endlichen Differenzen durch eine solche Theilung zu verschwindenden Größen machen soll? Hr. L'Huilier vermeidet diese Klippe, allein wenn man ein Beyspiel von der oben gedachten Weitläuftigkeit und Unbequemlichkeit anführen will, braucht man sich auch nur auf seine Expoſition &c. zu berufen. Damit dieses Urtheil nicht

nicht unbillig scheine, will ich die Erklärungen und Lehrsätze, aber ohne die hinzugefügten Erläuterungen und Beweise, hersetzen, auf welche Hr. L'Huilier die Erfindung der Differenzialien bauet. Sie sind folgende:

Erste Erklärung.

Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujour plus grande qu'une quantité constante proposée; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle: cette *quantité* constante est dite la *limite* en grandeur ou en petitesse de la quantité variable.

Zweyte Erklärung.

Soit un rapport variable toujours plus petit qu'un rapport donné, mais qui puisse être rendu plus grand qu'aucun rapport assigné plus petit que ce dernier: le *rapport* donné est appelé la *limite en grandeur* du rapport variable. Item: soit un rapport variable toujours plus grand qu'un rapport donné; mais qui puisse être rendu plus petit qu'aucun rapport assigné plus grand que ce dernier: le *rapport* donné est appelé la *limite en petitesse* du rapport variable.

Erster Lehrsatz.

Soit une quantité constante; & soit une quantité variable toujours plus petite ou toujours plus grande que la première, mais qui puisse en différer moins que d'aucune quantité assignée plus petite qu'elle. Le rapport d'égalité est la limite en petitesse ou en grandeur du rapport de la quantité constante à la quantité variable. Et reciproquement, si le rapport d'égalité est la limite, soit en grandeur soit en petitesse, du rapport d'une quantité constante à une quan-

quantité variable plus grande ou plus petite qu'elle, la quantité variable peut différer de la quantité constante moins que d'aucune quantité assignée.

Zweyter Lehrsatz.

Soient deux quantités variables susceptibles de limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse; & ayant entr'elles un rapport constant; je dis que leurs limites sont entr'elles dans le même rapport.

Soient A & B deux quantités variables, dont les limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse, soient A' & B'; & soit le rapport de a à b le rapport constant des quantités A & B. Je dis que aussi $A' : B' = a : b$.

Dritter Lehrsatz.

Soient deux quantités variables d'espèces différentes susceptibles de limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse. Que les rapports de ces quantités variables à deux quantités constantes soient toujours égaux entr'eux. Je dis que les rapports de leurs limites aux mêmes quantités constantes sont aussi égaux entr'eux.

Soient A & B deux quantités variables, dont les limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse, soient A' & B'; & soient a & b deux quantités constantes, respectivement, des mêmes espèces qu'elles. Si on a toujours la proportion $A : a = B : b$, je dis qu'on a aussi la proportion $A' : a = B' : b$.

Vier=

Vierter Lehrsatz.

Si deux rapports variables, susceptibles de limites, sont toujours égaux entr'eux, leurs rapports limites sont aussi égaux entr'eux.

Que les rapports de A à B & de C à D soient toujours égaux entr'eux & que les rapports de A' à B' & de C' à D' soient respectivement leurs limites; je dis que les rapports de A' à B' & de C' à D' sont aussi égaux entr'eux.

Fünfter Lehrsatz.

Le rapport composé d'un nombre quelconque de rapports susceptibles de limites a pour limite le rapport composé des rapports limites des premiers.

Sechster Lehrsatz.

Soient $A, B, C, D, \ldots L, M, N$, des quantités données; soit x une quantité variable non susceptible de limite en petitesse (ou qui peut être rendue plus petite qu'aucune quantité assignée); soient $b, c, d, \ldots l, m, n$, des exposants donnés qui vont successivement en croissant.

Soit Q une fonction de x telle que, $Q = A + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \&c. \ldots Lx^l + Mx^m + Nx^n +$;

je dis que le rapport d'égalité est la limite du rapport de Q à A, en petitesse ou en grandeur, suivant que B est positif ou négatif.

Lehnsatz.

Soit Q une quantité variable susceptible de limite, laquelle soit Q': je dis que le rapport limite du rapport de Q à une quantité constante A est égal au rapport de Q' à A.

Sieben=

Siebenter Lehrsatz.

Soit a un nombre donné; soit n un exposant donné; soit x une quantité variable, dont la variation, que j'appellerai changement, soit $\triangle x$; je dis: que le rapport des changements simultanés de $a^{n-1}x$ & de x^n peut approcher du rapport de a^{n-1} à nx^{n-1} plus près que n'en approche aucun rapport assigné plus petit ou plus grand que celui-là, suivant que n est plus grand ou plus petit que l'unité.

Achter Lehrsatz.

Soit Q une fonction de x de la forme $Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + Ex^e + \ldots$ Et soit $Q' = Aax^{a-1} + Bbx^{b-1} + Ccx^{c-1} + Ddx^{d-1} + Eex^{e-1} + \ldots\ldots$; je dis que le rapport de A' à Q' est la limite du rapport des changements simultanés de $A'x$ & de Q, par un même changement $\triangle x$ de x. En effet, le rapport des changements simultanés de $A'x$ & de Q est celui de A' à la quantité Q' augmentée de la somme des produits de $\triangle x$ & de ses puissances par des puissances de x & des facteurs constants. Donc, pour une même valeur de x, le rapport de A' à Q' est bien la limite du rapport de ces changements simultanés.

Ich lasse es bey der bloßen Mittheilung dieser Sätze mit den Worten des Verfassers bewenden, um Raum zu den übrigen hieher gehörigen Anmerkungen zu behalten. Aber vielleicht fällt jemanden der Gedanke ein: „Wozu so viel Worte über die Natur der Differenzialien? Wir haben so manche unvollkommne Erklärungen in der Mathematik, ohne dabey über die Eigenschaften der Gegenstände derselben im mindesten ungewiß zu seyn. Was läßt sich z. B. selbst über

die

die Erklärung der geraden Linie und des geradlinigen Winkels sagen, die nichts weniger als Definitionen, im strengen Sinne genommen, sind; und wie evident sind gleichwohl die Sätze von den geraden Linien und Winkeln! Wenn denn nun auch in der Beschreibung der unendlich kleinen Größen nicht alles ganz genau paßt und wörtlich verstanden werden darf, was schadets? Wer sich mit der Differenzial- und Integral-Rechnung selbst bekannt macht, kann wegen der Wahrheit ihrer Vorschriften nicht in Ungewißheit bleiben.“ Zuvörderst gebe ich sehr gern zu, daß derjenige, der den Begriff von den Differenzialien zu berichtigen und einen unbezweifelten Grundsatz für die Differenzial-Rechnung zu finden sucht, bloß den Anfang des Weges zu einem reizenden und fruchtbaren Gefilde ebene; allein dieses scheint mir, jenes Einwurfs ungeachtet, nothwendig und wichtig. Denn daß in der Elementar-Mathematik und also auch in der Euclideischen Geometrie unvollkommene Erklärungen hinreichen, rühret daher, weil die Elementar-Mathematik die Größe unmittelbar in Constructionen betrachtet, und häufig weiter nichts als Beschreibungen erfordert werden, um diese Constructionen zu machen. Dahingegen untersucht die allgemeine Mathematik, wovon die Differenzial-Rechnung ein Theil ist, die Größe zwar vermittelst Constructionen, aber nicht in denselben, sondern in deutlichen Begriffen; und wie kann ein Strom klar fließen, wenn seine Quelle trübe ist? Und denn enthalten die unvollkommenen Erklärungen der Elementar-Mathematik, von welchen man sagen kann, daß sie nicht geändert zu werden brauchen, nichts, woraus etwas widersprechendes flösse. So lange man daher keinen wahrhaftig mathematischen Grundsatz hat, der an die Stelle des Unendlichen gesetzt werden kann, und dennoch die Untersuchungen, so durch dieses Mittel geschehen, weder erschwert noch verlängert: so lange kommt die ehrenvolle Benennung der völlig genauen Wissenschaft nur dem niedrigsten Theile der Mathematik zu. Aber vielleicht ist folgendes, für manchen wenigstens, wichtiger. Es werden nicht nur durch die Differenzial- und Integral-Rechnung viele, auch ohne sie mögliche, Untersuchungen in einem sehr hohen Grade erleichtert und abgekürzt; sondern es machen auch diese beyde Rechnungen eine, gewiß eben so große, Menge von Untersuchungen über die Größe erst möglich, und die angewandte und praktische Mathematik kann des Differenzial- und Integral-Calculs bey dem jetzigen Zustande der Sachen schlechterdings nicht entbehren. Nun gründe man diesen Calcul auf Principien, welche von denen der gemeinen Mathematik, und ich möchte sagen, von denen der geraden Vernunft, wesentlich verschieden sind; ists denn Wunder, wenn diejenigen, die die Mathematik wegen der Anwendung auf die Geschäfte des Lebens treiben, sich durch die Dornen abschrecken lassen, womit er umzäunt ist, und in dem Gebiete der gemeinen Mathematik verweilen? Man muß von dem, der Theorien brauchen soll, nicht bloß verlangen, daß er sie lerne, sondern ihm auch die Erlernung derselben in seiner Lage möglich, und ohne Nachtheil der Gründlichkeit angenehm und leicht machen.

Und nun zur weitern Entwickelung der Schwierigkeiten womit die Eulerische Theorie von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen kämpft.

Zu §. 84 und 85.

Man darf in der Mathematik allerdings nicht immer einerley oder gleiche Größen durch einerley oder dieselbigen Zeichen ausdrucken, aber umgekehrt müssen dieselbigen Zeichen immer dieselbigen Größen bedeuten, oder es muß das

Gegen-

Gegentheil, wenn es statt finden soll, ausdrücklich angezeigt werden. Es sey also, wie Euler verlangt,

$$n : 1 = 0 : 0$$

weil $n . 0 = 0$ ist. Ferner bedeute m eine von n verschiedene Zahl. Aus eben dem Grunde, aus welchem $n . 0 = 0$ ist, ist auch $m . 0 = 0$, und also auch, so wie $n : 1 = 0 : 0$ ist,

$$m : 1 = 0 : 0; \text{ folglich}$$

$$n : 1 = m : 1; \text{ und } n = m.$$

Zu §. 86.

Wenn $dx = 0$, und auch $adx = 0$ ist: so verhält sich

$$adx : dx = 0 : 0.$$

Nun sollen nach dem 85sten § die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können: (inter cyphras ratio quaecunque intercedere potest) also wäre nicht bloß

$$adx : dx = a : 1, \text{ sondern auch}$$

$$adx : dx = A : 1$$

wie verschieden auch A von a seyn mögte. Hierdurch würde die Möglichkeit adx und dx mit einander zu vergleichen gänzlich aufgehoben.

Zu §. 88.

Eine Linie ist eine Fläche, deren Breite $= 0$ ist. Gäbe es unter den Nullen verschiedene Ordnungen, so ließe sich vielleicht auch geometrisch scharf darthun, daß die Breite von einigen Linien in Vergleichung mit der Breite anderer unendlich groß sey, obgleich keine eine Breite hätte.

Zu §. 90 - 95.

So wie es Größen giebt, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, so giebt es auch solche, die größer sind, als jede anzugebende Größe, d. h. beyde Arten von Größen lassen sich denken. Jene werden selbst in der Elementar-Mathematik gebraucht, zu diesen gehören die Mengen der Differenzialien in jeder Größe. Warum sollte man also, da man jene durch dx bezeichnet, wenn x die gegebene Größe ist, nicht auch für diese ein besonderes Zeichen, z. B. ∞ brauchen. Aber nun stehen auch dx und ∞ einander gegenüber, und so wie jenes nicht $= 0$ ist, so bedeutet auch ∞ keine unendliche Größe im metaphysischen Verstande. So wie man durch eine, ohne Ende fortgesetzte, Verkleinerung jeder endlichen Größe sich dem Differenziale derselben immer mehr nähert, ohne es je zu erreichen, und also noch weniger dadurch zu 0 gelangt, weil dx nicht $= 0$ ist: so nähert man sich auch der durch ∞ angezeigten Größe durch eine ohne Ende fortgesetzte Vermehrung immer mehr, erreicht sie aber nie, und gelangt also auch noch weniger zu dem Unendlichen, welches 0 gegenüber gedacht werden muß. Für dieses Unendliche will ich das Zeichen $[\infty]$ gebrauchen, und dann würde allerdings, wenn man beym bloß Gedenkbaren stehen bliebe, nicht nur

$$\frac{x}{dx} = \infty, \text{ und } \infty \,.\, dx = x$$

sondern auch

$$\frac{x}{[\infty]} = 0, \text{ und } [\infty]\,.\,0 = x$$

seyn. Was indeß diese Gleichung $[\infty].0 = x$ betrifft, so wird sich weiter hin Gelegenheit finden, sie genauer zu erklären. Das Zeichen ∞ wird aber sehr verschieden gebraucht. So setzt man nicht bloß

$$\frac{x}{dx} = \infty; \text{ sondern auch } \frac{ax}{dx} = \infty;$$

auch ist es nicht ungewöhnlich, die Summen von Reihen wie folgende:

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ꝛc.
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + ꝛc.
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + ꝛc.

durch eben dieses Zeichen auszudrucken. Sehr häufig entsteht daraus kein Nachtheil; allein wenn man mehrere durch ∞ ausgedruckte Größen mit einander vergleichen will, so ist auch klar, daß man seine Behauptungen nicht auf das Zeichen ∞ bauen müsse. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß wenn ∞ weiter nichts als eine unbestimmbar große Größe bedeuten soll, der Begriff im Grunde nicht verändert werde, wenn man dafür $\infty + a$ oder $\infty - a$ setzt, oder überhaupt diese Bezeichnungen und ∞ mit einander verwechselt, denn $\infty + a$ und $\infty - a$ zeigen eben sowohl unbestimmbar große Größen an als ∞. Was aber das Zeichen [∞] betrifft, so kann man von der dadurch ausgedruckten Größe immer sagen, was Haller von der Ewigkeit sagt:

Ich häufe ungeheure Zahlen
Gebürge Millionen auf.
Ich setze Zeit auf Zeit und Welt auf Welt zu Hauf
Und wenn ich von der grausen Höh
Mit Schwindeln wieder nach dir seh,
Ist alle Macht der Zahl, vermehrt zu tausend Malen
Noch nicht ein Theil von dir
Ich zieh sie ab, und du liegst ganz vor mir.

nur mit dem Unterschiede, daß man nicht eben das Recht hat, die Ewigkeit so mit den imaginären Dingen zu vergleichen, als die durch [∞] angedeuteten Größen mit den imaginären Größen zusammengestellt worden sind. Unter der folgenden Nummer werde ich diese Begriffe brauchen, um über die sogenannten unendlichen Größen noch eins und das andere zu sagen; jetzt kehre ich zu Eulern zurück.

Im 94sten §. wird behauptet, man müsse in der Geometrie sogar zugeben, daß das Produkt aus einer unendlichen Größe in Null eine endliche Größe seyn könne, weil aus

$$\text{tang.}\,\alpha\,.\,\text{cot.}\,\alpha = r^2$$

wenn $\alpha = R$ ist, $\infty\,.\,0 = r^2$ folge. Aus dem was Euler behauptet, fließt dieses allerdings; allein wenn aus richtigen Vordersätzen durch richtige Schlüsse nichts Falsches muß herausgebracht werden können, und jene Behauptung nicht zugegeben werden kann, ohne andere ausgemachte Wahrheiten über den Haufen zu werfen: so ist ja dieselbe ein sicheres Kennzeichen, daß die Sätze, worauf sie gebauet ist, falsch sind. Wenn $\alpha = R$ ist, so ist $\text{tang.}\,\alpha = [\infty]$ und $\text{cot.}\,\alpha = 0$. Aber will man aus $\text{tang.}\,\alpha\,.\,\text{cot.}\,\alpha = r^2$ für $\alpha = R$ den Satz

$$[\infty]\,.\,0 = r^2$$

herleiten, so ist dabey noch einiges zu beobachten, was weiter unten angeführt werden wird.

Zu §. 95 - 97.

Wenn in der Elementar-Mathematik die Linie durch eine Länge ohne Breite erklärt oder beschrieben, die Grenzen der Linien Punkte genennt, und weil man eine Linie theilen kann, wo man will, in jeder Linie unzählige Punkte angenommen werden: so sind das Vorstellungen und Behauptungen, wowider kein Mensch etwas einwenden kann; und wenn man bey den Untersuchungen, wobey man den Begriff der Linie gebraucht, weiter nichts fordert: so kann allenthalben das hellste Licht herrschen. Allein man ziehe aus jenen Behauptungen die Folge: Jede Linie bestehe aus unendlich vielen Punkten; und verschwende dann seine Zeit mit der Bestimmung der unendlichen Mengen der Punkte

in

in verschiedenen Linien: so wird und muß man sich, obgleich nach und nach, doch immer bald, aus der lichtvollsten Gegend in dicke Finsterniß versetzt sehen. In der Rücksicht sind zwar die Differenzialien von den Punkten verschieden, daß sie als wirkliche Theile ihrer Größen gedacht werden müssen: allein übrigens darf man nur mit ihnen so verfahren, als nach dem Vorigen mit den Punkten, um in dasselbe Labyrinth zu gerathen. Wenn x jede veränderliche Größe bedeutet, so ist, das Verhältniß von $x : dx$ anzugeben, keine noch so große Zahl hinreichend. Dies fließt aus dem Begriffe des Differenzials; und was könnte die Lehre von den Differenzialien für Schwierigkeiten haben, wenn man darin weiter nichts als dieses fordert. Allein man folgere daraus, daß $\frac{x}{dx} = \infty$ sey, und denke sich das ∞, wie gewöhnlich; und daneben auch dx als unendlich klein, im gewöhnlichen Verstande: so hat man auf einmal nicht bloß unendlich große und unendlich kleine Größen, sondern auch unendlich große Größen, die unendlichmal kleiner als andere unendlich große Größen, und unendlich kleine, die unendlichmal kleiner als andere unendlich kleine Größen sind. Noch mehr! Man hat alsdenn so viele unendlich große und unendlich kleine als endliche Größen, ja sogar unendlich viele Ordnungen unendlich großer und unendlich kleiner Dinge: ja wenn ein unendlich großes schon wer weiß wie vielmal unendliche Male auf einander gehäuft ist, so ist es doch wieder soviel als Nichts gegen ein anderes Unendliche; und wenn ein unendlich Kleines wer weiß wie vielmal unendliche Mal in Theile getheilt ist, so ist doch jeder Theil noch ein unendlich großes gegen andere unendlich Kleine. Das sind doch wohl keine *toleranter vera, quae explicatione rigidantur?* Und wozu nun diese ganze geheimnißvolle

Sprache? Was ist man dadurch im Stande zu finden, was man nicht ohne sie viel leichter und bequemer finden könnte? Wenn man Dinge an sich zu untersuchen unternimmt, welche bloß in Vergleichung mit einander untersucht werden können, und untersucht zu werden brauchen: so kann dasjenige, was man findet, aus dem ersten Grunde nicht anders als verworren und falsch, und aus dem andern nicht anders als unnütz und unbrauchbar seyn. Daß zu dieser Classe der Inhalt des 95, 96 und 97sten §. gehöre, glaube ich nur nöthig zu haben, anzuzeigen.

3. Einige anderweitige hieher gehörige Betrachtungen.

Zu §. 102 - 111.

Wenn man nach speciellen Regeln, die nur auf eine Art passen, weil sie bloß aus dem Begriffe dieser Art abgeleitet sind, auch die übrigen neben ihr liegenden, wenn gleich mit ihr zu einem und demselben Geschlechte gehörenden, Arten behandelt: so darf man sich nicht wundern, wenn man dadurch auf Resultate geführt wird, die nicht erlauben, den angenommenen zu eingeschränkten Gesichtspunkt beyzubehalten. Auf diese Weise aber verhält es sich mit den individuellen Reihen, welche der Verf. aus der allgemeinen Formel:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ꝛc.}$$

hergeleitet hat. Es haben dieselben ganz und gar keine Schwierigkeit, wenn man dabey vor Augen behält, daß die Regeln der Division bey den positiven und negativen Zahlen bald auf die Vorstellung: jede negative Zahl sey weniger als 0; und bald auf den Begriff gegründet sind, wobey das

Nega=

Negative als dem Positiven entgegengesetzt, und das Positive noch vom Absoluten unterschieden gedacht wird. Wenn

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \text{2c.}$$

gesetzt wird, so werden die Regeln der ersten Gattung, wenn aber $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$ angenommen wird, die Regeln der zweyten Gattung befolgt. Man kann daher nicht sagen, daß schlechterdings und ohne alle weitere Rücksicht

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \text{2c.} = -1$$

sey, weil sowohl $\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{2c.}$, als auch $\frac{1}{1-2} = -\frac{1}{1}$ nach richtigen Regeln gefunden werde: denn so richtig diese Regeln sind, so liegt dabey gleichwohl ein doppelter Begriff von den negativen Zahlen zum Grunde. Allein da ohne Einschränkung

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{2c.} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

seyn müßte, wenn jene Regeln nicht durch die bey ihnen angenommenen Gesichtspunkte eingeschränkt wären: so läßt sich aus den vom V. angeführten Reihen allerdings beweisen, daß man sich, wenn die Regeln vom Positiven und Negativen ganz allgemein und ohne alle weitere Rücksicht gebraucht werden sollen, die negativen Zahlen, außer auf die doppelte vorhin berührte Art, auch noch als Zeichen des mehr als unendlich Großen gedenken müsse. Thut man dieses, so wird zwar die Bedeutung der negativen Zahlen mannigfaltig, und man muß in jedem Falle, wenn man am Ende auf dergleichen Zahlen stößt, aus andern Umständen bestimmen, was für eine Bedeutung statt habe: allein ähnliche Fälle giebt es in der unbestimmten Mathematik in

Menge, und es entsteht also daher kein Einwurf. Aber das könnte wichtiger scheinen, daß alsdenn die negativen Zahlen solche Zahlen vorstellen müßten, die größer wären als das Unendliche, welches ich oben S. 340. durch [∞] zu bezeichnen vorgeschlagen habe. Indeß zugegeben, daß die durch das Zeichen [∞] ausgedruckten Zahlen, und also noch mehr die unter die Form [∞] + m gehörigen imaginär seyen; wir gebrauchen ja auch sonst mit Vortheil imaginäre Größen im Calcul, warum sollten wir diese Gattung verwerfen? zumal da jene imaginären Größen bloße Verkürzungsmittel der anzustellenden Untersuchungen sind, und, wofern das Gesuchte nicht unmöglich ist, am Ende aus der Rechnung wegfallen; diese hingegen häufig in Resultaten vorkommen, welche wir nicht für unmöglich erklären dürfen, ohne die schönsten Regeln der Mathematik über den Haufen zu stoßen. Uebrigens verweise ich wegen der Bedeutungen, welche wir den negativen Zahlen beylegen müssen, auf das, was ich darüber in den Zusätzen zum achten Capitel des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen und in der folgenden Betrachtung, von S. 352. an, gesagt habe.

Dieses vorausgesetzt haben die Reihen, welche Euler im 103ten § aus der Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ꝛc.}$$

ableitet, keine Schwierigkeit. Es ist vielmehr ganz natürlich, daß z. B.

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.}$$

ist, weil man diesen Werth von $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1}$ durch die Division der 1 mit einer Größe, die kleiner als 0 gedacht

wird,

wird, findet, und also der Quotient größer werden muß als [∞], welches $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ ꝛc. ist. Auch kann man mit vollem Rechte sagen, daß

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.} = -1$$

sey, weil -1 ja auch eine Zahl vorstellt, die größer seyn soll, als [∞]; nur muß man nicht daraus ableiten wollen, daß allemal und ohne Rücksicht

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.}$$

sey, wovon der Grund ebenfalls in dem Gesagten liegt. Eben so natürlich ist es, daß $\frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$, wenn man seinen Werth nach der Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ꝛc.}$$

sucht, mehr giebt, als man nach eben dieser Formel für $\frac{1}{1-2} = -1$ findet, u. s. f. Aber was sollen uns Größen, die größer sind als das [∞]? Antwort: Zeichen sollen sie uns seyn, wenn sie in Resultaten vorkommen, daß wir an ihrer Stelle die negativen Größen zu nehmen haben, aus deren Entwickelung sie erhalten werden können. Man erinnere sich hier an die aus der Lehre von der Hyperbel hergehörigen Fälle, welche Wallisen so viele Schwierigkeiten machten, und Varignon zuerst erklärte, und wobey ein Raum, der nach den Voraussetzungen, die beym Calcul angenommen werden, mehr als unendlich groß seyn sollte, nichts anders als ein negativer oder auf der entgegengesetzten Seite befindlicher endlicher Raum ist. Doch auch hiervon nachher S. 352 f. mehr.

Allein wie verhält es sich mit den Reihen, welche §. 104. aus der Formel

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{rc.} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

abgeleitet werden? Hieraus findet man

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{(1-1)^2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{rc.}$$

und da vorhin

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{rc.}$$

war, und $\frac{1}{0}$ nach dem Obigen $= [\infty]$ seyn soll: so sollte ja auch

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{rc.} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{rc.}$$

seyn. Noch mehr! Wenn man in jener Formel für x die Zahl -2 setzt, so bekommt man

$$\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{rc.} = 1.$$

Wie kann $1 = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{rc.}$ seyn? oder: Wie kann, da durch $(1-2)^2$ dividiren eben so viel ist, als durch -1 dividiren, und den Quotienten nochmals durch -1 theilen, und jene Division schon mehr als das Unendliche giebt, folglich diese das Unendliche, unendliche Mal genommen, hervorbringen müßte, $\frac{1}{(1-2)^2} = 1$ werden? Dergleichen Knoten sind leicht geschürzt, aber in der That noch leichter gelöset. Wenn man $\frac{1}{(1-1)^2}$ oder $\frac{1}{(1-2)^2}$ nach der Formel:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{rc.}$$

entwickelt: so dividirt man im ersten Falle 1 durch 0, und den gefundenen Quotienten wieder durch 0; im andern aber 1 erst durch -1, und darauf den Quotienten nochmals durch

$-1.$

— 1. Wenn man hingegen $\frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0}$ und $\frac{1}{(1-2)^2}$ $= 1$ findet: so dividirt man im ersten Fall 1 durch 0, und im zweyten 1 durch 1; und so wäre es doch in der That zu bewundern, wenn jemand sich wundern wollte, daß einerley Größe durch verschiedene Größen dividirt, verschiedene Quotienten geben. Allein vielleicht wendet hier jemand ein, daß man auf diese Art bey der Anwendung der Sätze von den Zeichen + und — in Gefahr sey, sich zu irren, wenn man dieselben ganz unbedingt befolgte? Ich kann dieses an meinem Theile nicht leugnen, da bekanntermaßen bedingte Sätze nie als unbedingte gebraucht werden dürfen; und daß insbesondere die Behauptung: bey zwey Größen geben einerley Zeichen sowohl im Produkte als im Quotienten +, und verschiedene —; keine allgemeine und unbedingte Wahrheit haben, habe ich in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, Berlin 1788, im ersten Abschnitte §. 98 f. genugsam gezeigt, und daher auch an diesem Orte jene Behauptung anders entwickelt und genauer bestimmt, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt.

„Wenn aber die negativen Zahlen bald weniger als 0 und bald mehr als das [∞] bedeuten: so wäre es ja wohl gut, wenn man die negativen Zahlen von jener Bedeutung von denen, welchen diese zukäme, auch durch die Bezeichnungsart unterschiede, etwa so, wie nach dem V. §. 104. schon mehrere gewollt haben?“ Man könnte es wohl thun, allein es müßte auf eine andere Art geschehen, und dabey auch noch die negativen Zahlen, wenn man sie als den positiven entgegengesetzt gedenkt, unterschieden werden. Indeß wozu soll man es thun, da man die Bedeutung der negativen Zahlen jedesmal so lange unbestimmt lassen kann, bis man

man die bestimmte Bedeutung derselben braucht, und es dann allemal leicht ist, die unter den daseyenden Umständen statt findende Bedeutung zu erkennen. Nur muß man sich hüten, daß man den Satz: In der Multiplication und Division geben einerley Zeichen + und verschiedene — nicht auf Fälle ausdehne, wofür er nicht bewiesen worden ist; dies ist das Einzige, was zu beobachten übrig bleibt, was aber auch schlechterdings beobachtet werden muß.

Nun ein Paar Worte von der Benennung Summe §. 110. 111. Man hat gar nicht nöthig, für die Fälle, wo es Euler vorschlägt, die Bedeutung dieses Worts zu verändern, es wäre auch in der That nicht gut, wenn man es thun müßte, da sich die gewöhnliche Bedeutung durch den langen und häufigen Gebrauch zu fest gesetzt hat, als daß man darüber nach Gefallen gebieten könnte. Denn wenn man von den Reihen

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.} = [\infty]$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \text{ꝛc.} = -1$$
$$1 + 3 + 9 + 27 + 87 + 243 + 729 + 2187 + \text{ꝛc.} = -\tfrac{1}{2}$$

u. s. w.

immer mehr und mehr Glieder zu einander addirt, so nähert man sich ja dem Werthe von $[\infty]$, von -1, von $-\frac{1}{2}$ u. s. f. die angeführte Bedeutung von -1 und $-\frac{1}{2}$ vorausgesetzt, immer mehr und mehr; und wenn dieses bey den Reihen mit abwechselnden Gliedern nicht statt findet, so bekömmt man doch aus diesen die dadurch ausgedruckte Größe jedesmal genau, wenn man das in dem ꝛc. enthaltene zu den wirklich addirten Gliedern hinzusetzt. So ist z. B.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \frac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}$$

1 —

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \frac{64}{1+2} = \tfrac{1}{3}$$

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \frac{128}{1+2} = \tfrac{1}{3}$$

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \frac{729}{1+3} = \tfrac{1}{4}$$

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729 - \frac{2187}{1+3} = \tfrac{1}{4}$$

u. s. f.

Man kann also allerdings in jedem Falle oder für jeden Werth von x,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{&c.}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{&c.}$$

setzen, aber unter den einzeln Fällen, die unter diese allgemeine Formel gehören, giebt es welche, wo es besser ist, den Werth von $\frac{1}{1-x}$ oder von $\frac{1}{1+x}$ unmittelbar aus diesen Ausdrücken zu entwickeln, als denselben aus den unendlichen Reihen zu suchen, welche ihnen gleich sind, weil man dasjenige, was man hieraus findet, nicht eher zu beurtheilen im Stande ist, als bis man es mit dem verglichen hat, was die Ausdrücke $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{1}{1+x}$, unmittelbar angewandt, geben.

Zum Schlusse dieser Betrachtung bemerke ich nur noch, daß der Anfang des 107ten §. einen wirklichen Widerspruch enthalte, wenn man darin das Zeichen ∞ eben so versteht, als nach meiner Annahme dieses [∞] gedacht werden muß, denn

1 +

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^{[\infty]}$$

muß nothwendig allemal $\frac{1}{1 - x}$ seyn, ob man gleich das [∞]ste Glied selbst in Gedanken nie erreicht.

Von dem sogenannten unendlich Großen und unendlich Kleinen der Mathematiker.

Es hat Gelehrte gegeben, die bewunderten, wie unser endliche Geist unendliche Reihen fassen könne, und wohl gar darin eine Probe seines unendlichen Ursprungs fanden. Hr. Kästner ist so menschenfeindlich, diesen Traum zu stören, und in seinen Betrachtungen über die Art, wie allgemeine Begriffe im göttlichen Verstande sind, Göttingen 1767, zu behaupten: das Unendliche, welches unser Geist bey den unendlichen Reihen fasse, sey so endlich, so den Kräften eines endlichen Geistes angemessen, daß man bey einiger Ueberlegung sich wundern müsse, wie man sich darüber habe wundern können. Der Marquis de l'Hôpital sagt im Anfange der Vorrede zu seiner Analyse des infiniment petits: L'Analyse qu'on explique dans cet Ouvrage, suppose la commune; mais elle en est fort différente. L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies: celle-ci *pénétre jusques dans l'infini même.* Elles compare les différences infiniment petites des grandeurs finies; elle découvre les rapports de ces différences, et par-la elle fait connoître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. *On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini*: car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes, quatriemes, et ainsi de suite,

suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. *De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis.* Hier ist Bewunderung zu wenig, staunen muß man! Denn ist der Geist, der das Unendliche zu fassen vermag, schon unendlich, so muß der, welcher das Unendliche vom Unendlichen faßt, zum wenigsten unendlichmal unendlich seyn. Dazu nehme man die Gewalt, mit welcher unser Geist in der höhern Analyse über das Unendliche herrscht. Vor dem Schelten Gottes fliehen nur Berge, auf seinen Befehl entstehen nur Welten, die endlich sind. Die höhere Analyse winkt, so verschwinden unendliche Größen zu Tausenden; sie befiehlt, so schwingen sie sich aus Nichts hervor und stehen da. Nur Schade, daß bloße Namen zwar die Dinge aus unserm Gesichtskreise entfernen, aber nicht ihre Natur verändern können. Schade, daß alle auf die Unendlichkeit des Gegenstandes der höhern Analyse gebaute Lobsprüche dieser Wissenschaft noch nicht einmal so fest gegründet sind, als Kartenhäuser, woran sich Kinder ergötzen! Ich habe nichts dawider, wenn man mich hier an die Ehrfurcht erinnern will, welche man einem Manne, der in dem Jahrhunderte Newtons, Leibnitzens, der Bernoulli und Huyghens zu den großen Mathematikern gehörte, schuldig ist; ich kenne sie, und hätte deswegen gerne die ausgezogene Stelle nicht hergesetzt. Allein soll denen, für welche ich schreibe, die folgende Untersuchung wichtig seyn, so mußte ich ihnen ein Beyspiel vor Augen legen, zu was für Behauptungen über den Gegenstand derselben selbst Mathematiker vom ersten Range sich haben verleiten lassen. Und warum soll man von den Verirrungen großer Männer nicht frey sprechen, da dieselben, eben weil sie Verirrungen großer Männer sind, mit einem verführerischen Schein umgeben sind, und überdies wahre Größe nicht gänzliche Freyheit von Fehlern, sondern nur neben Fehlern große und ausgebreitete Verdienste erfordert? Zur Sache! d. h. zum Beweise des Satzes:

Daß die Mathematik kein anderes unendlich Große anerkenne, als dasjenige, über welches oder jenseits dessen nichts mehr statt findet; mit andern Worten: kein anderes als das metaphysisch Unendliche, oder dasjenige, welches ich S. 340. durch [∞] ausgedruckt habe; daß ferner das unendlich Kleine, welches sie braucht, diesem unendlich Großen im strengsten Verstande gegenüberstehe, und nichts anders als 0 sey; daß sie folglich alle Verschiedenheit sowohl unter mehrern unendlich großen als unendlich kleinen Größen Einer Art, und also noch mehr unendliche Ordnungen bey denselben, durchaus verwerfe; daß ihr unendlich Großes und ihr unendlich Kleines, oder ihr [∞] und ihr 0, ganz und gar nicht bloß der Differenzial- und Integral-Rechnung eigenthümlich sey, sondern eben so in andern Theilen der Mathematik gebraucht werde; daß folglich alle Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung gefunden, bewiesen und gebraucht werden können, ohne jene Begriffe dabey im geringsten zu Hülfe zu nehmen; daß die aus [∞], 0, und endlichen Größen willkührlich zusammengesetzten Größen in der ganzen Mathematik nicht anders gebraucht werden müssen, als solches darin entweder mit den imaginären oder auch mit den irrationalen Größen geschieht; und daß also die Entfernung, in welcher die Mathematik öfters von ihrer Schwester der Philosophie hat stehen müssen, nicht von der Denkungsart dieser beyden Schönen selbst, sondern von den Hindernissen herrühre, welche ihre Liebhaber denselben in den Weg gelegt haben.

Es ist wahr, es wird in der Mathematik und insbesondere in der höhern Analyse sehr häufig vom Unendlichen und unendlich Kleinen gesprochen, ohne daß man unter jenem das [∞], und unter diesem o denken darf: allein alle diese unendlich großen und unendlich kleinen Größen gleichen völlig dem Papiergelde, welches zwar den Namen führt, und unter denen, welche sich darüber vereiniget haben, die Stelle des Geldes vertritt, aber, an sich betrachtet, doch bloß den Werth des Papiers hat. Um sich davon zu überzeugen braucht man nur die unendlichen Größen etwas näher und genauer zu untersuchen.

Wenn wir uns eine unendliche Größe von irgend einer Art vorstellen wollen, so gehen wir allemal von einer endlichen Größe derselben Art aus, und setzen entweder zu ihren Einheiten in Gedanken ohne Ende immer eine mehr hinzu, oder dividiren dieselbe fortgesetzt, durch immer kleinere und kleinere Brüche. Auf jenem Wege sind wir, sogar in Gedanken, nicht im Stande, das Unendliche ohne das Unendliche zu erreichen, ich will sagen, zu einer unendlichen Größe zu gelangen, ohne eine unendliche Menge von Einheiten zu der angenommenen endlichen Größe hinzugesetzt zu haben: und eben dieses muß von dem andern Wege behauptet werden, wenn man die Brüche, womit man dividirt, auf die Art immer kleiner und kleiner macht, daß man ihre Nenner entweder durch die Addition, oder durch die Multiplication vergrößert. Wollen wir uns daher eine unendliche Größe irgend einer Art wirklich gedenken, so bleibt kein anderes Mittel übrig, als von einer endlichen Größe derselben Art auszugehen, diese durch irgend eine unbenannte Zahl zu dividiren, den Divisor durch die Subtraction immer kleiner zu machen, bis er in o verwandelt wird, und nun den zugehörigen Quotienten unendlich groß anzunehmen. Da sich jede Zahl durch fortgesetzte Subtraction einer oder mehrerer ihrer Einheiten in 0 verwandeln läßt, und der Satz: der Quotient nimmt in eben dem Verhältnisse zu, in welchem bey unverändertem Dividend der Divisor abnimmt, keine Ausnahme zuläßt: so schwingen wir uns auf diese Art allerdings zum Unendlichen auf: allein es ist auch klar:

1. daß, da 0 die Grenze der Verminderung des Divisors ist, (und dies leidet keinen Widerspruch, wofern man nicht die Zahlen relativ sich gedenken, und dadurch alles ohne Noth verwirren will) der auf dem beschriebenen Wege denkbare Quotient die Grenze der Vermehrung der dividirten Größe, oder wenn man diese $= a$ setzt,

$$\frac{a}{0} = [\infty] . a$$

seyn müsse.

2. daß wir, wenn wir unendliche Größen irgend einer Art construiren wollen, weiter nichts thun können, als endliche Größen derselben Art so zu verzeichnen oder darzustellen, daß dabey zugleich der Weg, auf welchem man dieselben ohne Ende wachsen lassen kann, vor Augen liege. Dieses findet sich sehr deutlich bey folgender Darstellung:

$$\tfrac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.}$$

desgleichen bey der Construction der Tangente eines rechten Winkels, u. dgl.

3. daß wir jedesmal, wenn wir uns eine unendlich große Größe vorstellen, ein Produkt aus einer gleichartigen endlichen Größe und der durch $[\infty]$ bezeichneten unendlichen Zahl denken, und daß also das Unendliche der Größen nicht in ihren Einheiten, sondern lediglich in ihrer Zahl gedacht werde.

4. daß,

4. daß, da o und [∞] einander gegenüberstehen, o in eben dem Verstande unendlich klein sey, als [∞] das unendlich Große bedeutet, und daß also unendlich klein und o, desgleichen eine unendlich kleine Größe und eine endliche Größe von eben der Art, entweder mit o multiplicirt oder durch [∞] dividirt, einerley sagen wollen.

Dieses vorausgesetzt sollte man zuvörderst die unendlich großen Größen nicht bloß durch das Zeichen [∞], welches man besser allein für die unendlich große Zahl brauchte, sondern durch dieses Zeichen und das Zeichen der Einheit, welche die Art jener Größen bestimmte, z. B. wenn a diese Einheit bedeutete, durch $[\infty] \,.\, a$ bezeichnen; und die ähnliche Form $o \,.\, a$ für die unendlich kleinen Größen wenigstens dann gebrauchen, wenn man unmittelbar auf die Bezeichnungen unendlich großer und unendlich kleiner Größen weitere Schlüsse bauen wollte. Auf diese Art erhielte man aus der Gleichung $\text{tang.}\,\alpha \,.\, \text{cot.}\,\alpha = r^2$, §. 94. und S. 324, wenn $\alpha = R$ würde, nicht sowohl $[\infty] \,.\, o = r^2$, als vielmehr

$$[\infty] \,.\, r \,.\, o \,.\, r = [\infty] \,.\, o \,.\, r^2 = r^2$$

und da das [∞] nichts anders bedeutet als $\frac{1}{o}$, und folglich $[\infty] \,.\, o = \frac{1}{o} \,.\, o = 1$ ist: so sagte nunmehr die Formel $[\infty] \,.\, o \,.\, r^2 = r^2$ nichts weiter, als es sey $1 \,.\, r^2 = r^2$. Hierwider hat die Geometrie nichts einzuwenden, aber wo lehrt sie aus einer unbegrenzten geraden Linie und o ein Rechteck oder ein Quadrat hervorbringen? wie ihr §. 94. am Ende beygelegt wird. Wenn man in $[\infty] \,.\, o \,.\, r^2 = r^2$ anstatt $o \,.\, r$ den gleichbedeutenden Ausdruck $\frac{r}{[\infty]}$ setzt, so ist ebenfalls $\frac{[\infty] \,.\, r^2}{[\infty]} = r^2$.

Zum andern kommt es nun bey dem Beweise, daß es keine verschiedene unendliche Größen Einer Art in der Mathematik gebe, wegen der Nr. 2. stehenden Behauptung bloß darauf an, daß dargethan werde, die Mathematik fordere nie, Zahlen anzunehmen, die größer als [∞] wären; (wobey es sich aber von selbst versteht, daß absolute Zahlen gemeint werden, denn sobald relativ geredet wird, können Welten Punkte, und Punkte Welten heißen.) Dieses ist leicht. Da nemlich o die Grenze der Verminderung jeder Zahl m ist: so ist auch der zu $\frac{m}{o}$ gehörige Quotient die Grenze der Vermehrung derselben. Aber vielleicht wendet man ein: $\frac{m}{o}$ müsse dabey doch immer größer seyn als $\frac{n}{o}$, wenn m größer als n sey. Dieser Einwurf ist sehr scheinbar, so lange man sich die Art, wie wir die unendlich große Zahl uns denken, nicht deutlich vorstellt. Denn da $\frac{1}{o} = [\infty]$ ist, und jede Zahl $m = 1 . m$ ist: so scheint natürlich $\frac{m}{o} = \frac{1 . m}{o} = m . [\infty]$, und $\frac{m}{o} = \frac{1 . n}{o} = n . [\infty]$, und also $\frac{m}{o} : \frac{n}{o} = m : n$ zu seyn. Allein da o nicht bloß die Abwesenheit der 1, sondern die Abwesenheit jeder Zahl andeutet, und daher $m . o = o = n . o$ ist: so kann man auch $\frac{m}{o} = \frac{m}{m . o}$ und $\frac{n}{o} = \frac{n}{n . o}$ setzen; und da auf diese Art $\frac{m}{o} : \frac{n}{o} = 1 : 1$ wird, so fällt dadurch der gemachte Schluß gänzlich über den Haufen. Auch bleibt, wenn man sich auf dem S. 355. beschriebenen Wege von einer endlichen Zahl zur unendlichen aufschwingen will, der anfängliche endliche Divisor willkühr-

lich.

lich. Man gehe also vom $\frac{m}{m}$ aus, so hat man allemal $\frac{1}{1}$, und die unendlich große Zahl oder

$$[\infty] = \tfrac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc. ohne Ende.}$$

„Aber wenn $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ꝛc.} = [\infty]$ ist, so müssen doch nothwendig die Summen der Reihen

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.} \\ 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + \text{ꝛc.} \\ 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + \text{ꝛc.} \end{array}\right\} \text{ohne Ende}$$

nothwendig mehr als $[\infty]$ bedeuten.“ Dergleichen Reihen setzt man entweder willkührlich zusammen, und dann sind ihre Summen chimärische Größen; oder man erhält sie durch die Entwickelung der Brüche: $\frac{1}{1-2}$; $\frac{1}{1-3}$; $\frac{1}{1-4}$; u. dgl. In diesem Falle bleibt man nicht bey den absoluten Zahlen stehen, denn die positiven und negativen Zahlen gehören zu den relativen, indem dabey auf den Gang, welchen man im Zählen nimmt, Rücksicht genommen wird. Man lege die Vorstellung zum Grunde, welche man in meinen Zusätzen zum achten Capitel des ersten Buchs der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen findet: so sagt der Ausdruck, mehr als unendlich groß, bey den Zahlen nichts anders als negativ, und es wird

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.} = -1 \\ 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + \text{ꝛc.} = -\frac{1}{2} \\ 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + \text{ꝛc.} = -\frac{1}{3} \end{array}$$

u. s. f.

So wie sichs nun in Ansehung des Unendlichen bey den Zahlen verhält, eben so ists in dieser Rücksicht bey den continuirlichen Größen. Zwar kann man sich in jeder endlichen geraden Linie zwey von einander entfernte Punkte gedenken,

 sich

sich die Linie nach einer Seite unbegrenzt vorstellen, und so zwey unendliche gerade Linien sich einbilden, welche um die Entfernung der angenommenen Punkte verschieden zu seyn scheinen; oder eine nach beyden Seiten unbegrenzte Linie, so wie auch eine nach allen Seiten unbegrenzte Fläche oder dergleichen körperlichen Raum, in Theile theilen, die zum Theil begrenzt, zum Theil unbegrenzt sind, und die Theile so wie ihre Grenzen unendlich groß nennen: allein hat man alsdenn unendliche Linien, und unendliche Flächen, und körperliche Räume, wie sie die Geometrie giebt? Wenn $\alpha = R$ wird, so soll die Tangente unendlich groß seyn. Ist sie es etwa nur, weil sie von der einen, oder weil sie von keiner Seite begrenzt ist? Ein Kreis, dessen Radius unendlich groß gedacht wird, verwandelt sich in eine gerade Linie; eine Kugelfläche von eben dem Halbmesser, in eine Ebene. Ist dieses wahr, wenn der Ausdruck unendlich groß nicht im strengsten Sinne genommen wird? und läßt sich ein größerer Radius denken, ohne ihn endlich aber negativ zu nehmen? Wir gelangen nicht anders zum Begriffe des Unendlichen, als so, daß wir uns etwas endliches von eben der Art vorstellen, und durch o dividiren. Man nehme alle die Fälle, wo wir in der Geometrie eben dieses zu thun ein Recht haben, und untersuche das Unendliche, wozu sie führen. Man wird allemal finden, daß man entweder zu unendlichen Größen komme, die unter die Form $[\infty] . a$ gehören, oder daß man einen Fehlschluß begangen, und Bestimmungen übersehen habe. Dies letzte fände z. B. statt, wenn man aus der Gleichung für die Parabel, $px = y^2$, herleiten wollte, daß, für $x = [\infty]$, y nothwendig ein kleineres Unendliche bedeuten müsse. Denn soll $x = [\infty]$ seyn, so muß es in $\frac{x}{o}$ übergehen. Da aber $a : y = y : x$ ist, so kann man statt x nicht anders $\frac{x}{0}$ setzen, als wenn man auch $\frac{y}{0}$ statt des einen y schreibt. Allein dann bleibt nicht mehr, wie bey der Parabel seyn muß, $a : y = y : x$, sondern man hat die Proportion $a : \frac{y}{0} = y : \frac{x}{0}$. Ueberhaupt rühren alle paradoxe Behauptungen, welche man in der Mathematik bey den unendlichen Größen hat, so wie auch alle übrige, aus undeutlichen und verworrenen Vorstellungen her, und verschwinden insgesammt, sobald man an deren Stelle deutliche Begriffe braucht.

Dieser Umstand verleitet mich zu einer Ausschweifung, wegen welcher ich um Verzeihung bitte, wenn sie wirklich Ausschweifung ist; den Gegenstand derselben wird hoffentlich Niemand für unwichtig erklären.

Ich habe oben S. 283 f. die Elementar- und allgemeine Mathematik auf die Art unterschieden, daß ich behauptete, die Elementar-Mathematik betrachte die Größen unmittelbar in Constructionen, die allgemeine hingegen vermittelst Constructionen in deutlichen Begriffen. In jener werden daher die Größen durch die Merkmale gegeben, wodurch sie sich von allen andern unterscheiden, in dieser durch eine bekannte Größe von eben der Art, und durch das Verhältniß, welches sie zu dieser Größe haben. Hieraus fließt, um nur einiges zu berühren,

1. daß der Gegenstand der allgemeinen Mathematik viel allgemeiner ist als der der Elementar-Mathematik, obgleich auch diese sich nie mit einzelnen Größen, sondern mit den Arten und den niedrigsten Geschlechtern der Größen beschäftiget.

2. daß die Constructionen, welche in der allgemeinen Mathematik gebraucht werden, keine nothwendige, sondern willkührliche Constructionen sind, deren Ausdehnung also lediglich von der Bedeutung abhängt, welche wir den darin gebrauchten Zeichen beygelegt haben.

Nur dieses vorausgesetzt, wer muß nicht zugeben, einmal, daß es in der allgemeinen Mathematik eine Sache von der äußersten Wichtigkeit sey, den Umfang der gebrauchten Constructionen jedesmal aufs genaueste und deutlichste zu bestimmen; und zweytens, daß die Resultate der allgemeinen Mathematik bey der Anwendung auf die weniger allgemeinen Fälle allemal erst nach der Natur dieser Fälle modificirt werden müssen, wenn sie durchaus passend seyn sollen. Wenn man nach diesen Regeln den Vortrag der allgemeinen Mathematik einrichten will, so ist es freylich unvermeidlich, manche Unterscheidungen zu machen, die dem, welcher von der Nothwendigkeit jener Regeln nicht lebhaft überzeugt ist, überflüssig scheinen können, und dann um so eher in Gefahr sind verworfen zu werden, weil durch sie die Erlernung der Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik schwerer zu werden scheint. Allein man übergehe dieselben, so wird freylich der Anfang des Weges, welchen man seine Schüler führt, ihnen lichtvoller und angenehmer seyn, aber dagegen in der Folge desto mehr dunkle und dornige Stellen haben. Wie soll man z. B. das erklären, daß man durch bekannte und nicht verwerfliche Entwickelungen

$$\frac{1}{1-1} = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+ \text{rc.} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{(1-1)^2} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+ \text{rc.} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{(1-2)^2} = 1+4+12+32+80+192+448+ \text{rc.} = 1$$

findet. Nach dem, was ich in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra über die Zeichen + und —, insbesondere S. 68 f. §. 98 - 103. gesagt habe, kann man nicht nur, sondern man muß selbst den Zähler 1, in den Brüchen $\frac{1}{(1-1)^2}$ und $\frac{1}{(1-2)^2}$, nicht absolute, ja nach den Regeln der allgemeinen Multiplication und Division, außerdem noch als ein Produkt, und also entweder als $+1 \times +1$, oder als -1×-1 ansehen. Hierdurch wird

$$\frac{1}{(1-1)^2} = \frac{+1 \times +1}{0 \times 0} = \frac{-1 \times -1}{0 \times 0}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{(1-2)^2} = \frac{+1 \times +1}{-1 \times -1} = \frac{-1 \times -1}{-1 \times -1}.$$

Nun ist $\frac{+1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ ꝛc., folglich

$$\frac{+1}{0} \times \frac{+1}{0} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \text{ꝛc.}$$

Ferner ist $\frac{+1}{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 +$ ꝛc., folglich

$$\frac{+1}{-1} \times \frac{+1}{-1} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 + 448 + \text{ꝛc.}$$

Eben das findet man, wenn man +1 im ersten Fall durch 0, und den Quotienten nochmals durch 0, im zweyten aber durch —1, und den Quotienten nochmals durch —1, auf die Art dividirt, daß man $0 = 1 - 1$, und $-1 = 1 - 2$ setzt. Nach eben den Regeln also, nach welchen man $\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ ꝛc. findet, ergiebt sich zwar auch $\frac{1}{(1-1)^2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 +$ ꝛc.; so wie ebenfalls bey $\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 +$ ꝛc.

und

und $\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 +$ 2c. einerley Regeln gebraucht worden sind. Aber da die Vorstellung welche der Bruch $\frac{1}{1-2}$ giebt, von der, welche der Bruch $\frac{1}{(1-1)^2}$ erzeugt, ganz verschieden ist, so muß nothwendig bey der Entwickelung verschiedenes kommen. Es ist daher auch ganz natürlich, daß der Bruch $\frac{-1 \times -1}{0 \times 0}$ nicht anders den Werth bekommt, welchen man für den Bruch $\frac{+1 \times +1}{0 \times 0}$ durch die Entwickelung findet, als wenn man ihn zuvor in $\frac{+1}{0 \times 0}$ verwandelt hat, und daß es sich auf ähnliche Art mit dem Bruche $\frac{-1 \times -1}{-1 \times -1}$ verhält. Wenn man aber aus $\frac{1}{(1-2)^2}$ nichts weiter als 1 herleitet, so handelt man dabey nach Regeln, welche sich auf die Vorstellung von den negativen Zahlen gründen, bey welcher sie, nicht kleiner als 0, sondern den absoluten Zahlen entgegengesetzt gedacht werden, und diese Vorstellung ist von der so eben gedachten, so wenig man sie auch unterscheidet, sehr verschieden. Ob man daher gleich den Bruch $\frac{1}{0}$ in gewissen Rücksichten den Brüchen $\frac{1}{(1-1)^2}$; $\frac{+1 \times +1}{0 \times 0}$; $\frac{-1 \times -1}{0 \times 0}$, so wie diesen $\frac{1}{1}$ den Brüchen $\frac{1}{(1-2)^2}$; $\frac{+1 \times +1}{-1 \times -1}$; $\frac{-1 \times -1}{-1 \times -1}$ gleich setzen kann: so darf man solches doch auch nur in diesen Rücksichten thun; und da sich dieselben mit den gebrauchten Substitutionen ändern: so muß man nothwendiger Weise

bey

bey der Entwickelung auf Resultate stoßen, die nicht allgemein mit einander verwechselt, oder einander gleich gesetzt werden können. Einen andern Fall anzuführen, wo der Mangel an Genauigkeit in den ersten Bestimmungen Schwierigkeiten erzeugt, die, bey größerer Sorgfalt dabey, sogleich verschwinden: so ist bekanntermaßen, wenn α einen spitzigen Winkel bedeutet, die Secante von α positiv und die Secante von $2R + \alpha$ negativ, und doch liegen beyde Secanten, wenn man die ersten Schenkel der Winkel α und $2R + \alpha$ auf einander legt, so, daß die Vergleichung derselben mit einem Wege, den man hin und her machen, und mit einer Treppe, die man hinauf und hinunter steigen kann, (Geometrische Abhandlungen, von Abr. Gotth. Kästner, erste Sammlung, Göttingen 1790 S. 463. 464) nicht zu den glücklichen Gleichnissen gehört. Als Linie betrachtet und vollständig ausgedruckt, ist nemlich jede Secante eines Winkels y, oder $\sec. y = \frac{r^2}{\cos. y}$, also $\sec. \alpha = \frac{r^2}{\cos. \alpha}$, und $\sec. (2R + \alpha) = \frac{r^2}{\cos. (2R + \alpha)}$; folglich $\sec. \alpha$ positiv, weil $\cos. \alpha$ positiv, und $\sec. (2R + \alpha)$ negativ, weil $\cos. (2R + \alpha)$ negativ ist. Auf diese Art ist für die Rechnung sowohl als für die Zeichnung allen Schwierigkeiten selbst die Quelle verstopft, und man hat gar nicht nöthig, zu einer doppelten Einheit, einer bejahten und einer verneinten, seine Zuflucht zu nehmen, sondern kann dieselbe, wie es in der Geometrie seyn muß, entweder positiv oder negativ sich denken, nur daß man die einmal angenommene Voraussetzung beybehalte. Auch sehe ich nicht ein, wozu überhaupt die doppelte Einheit hier dienen könne? Denn da der Satz

$$\sec. \alpha = \frac{r^2}{\cos. \alpha}, \text{ oder } \sec. \alpha : r = r : \cos. \alpha$$

ein allgemeiner Satz ist, und seyn muß: so wäre bey einem doppelartigen Halbmesser oder Einheit

$$\text{sec.}\,\alpha : -r = \pm r : \text{cos.}\,\alpha, \text{ und sec.}\,\alpha = \frac{-r^2}{\text{cos.}\,\alpha};$$

und wer also bey dem angeführten Satze keine doppelte Einheit sieht, der übersieht nicht, sondern er nimmt nur nicht wahr, was nicht da ist. Um zur Sache selbst zurück zu kehren, so hat man in der allgemeinen Mathematik noch weit mehr Ursache, sich vor dunkeln und unvollständigen Begriffen zu hüten, als in jeder andern Wissenschaft; weil man hier die zum Grunde gelegten Begriffe immer vor Augen behalten muß, indem man unmittelbar aus denselben folgert, dagegen in der allgemeinen Mathematik von den Begriffen zu Constructionen forteilt, und bey den Operationen, welche man damit vornimmt, die zum Grunde gelegten Begriffe sehr bald aus dem Gesichte verliert. Auch ist in andern Wissenschaften die Prüfung des Gefundenen durch Anwendung auf einzelne Fälle meistentheils leichter. Aber wie oft sind nicht die Untersuchungen der allgemeinen Mathematik so transcendent, daß jede Erläuterung durch einzelne Fälle eben so unpassend seyn würde, als wenn man ein Differenzial mit der Veränderung vergleichen wollte, welche die Höhe des Oceans erfährt, wenn man eine Schwalbe im Fluge daraus ihren Durst löscht? Hat man sich nicht ganz genau mit dem Sinne und der Ausdehnung oder dem Umfange der Constructionen bekannt gemacht, welche man braucht, oder verliert man denselben aus den Augen: so wird man ein Spiel dieser Constructionen, und öfters nach Orten hingeschleudert, von welchen man keinen Rückweg finden kann, weil man den Weg, der zu denselben führt, nicht kennen zu lernen suchte. Ich hoffe, daß diese Betrachtung mich rechtfertigen werde, wenn ich bey der Erklärung der ersten Gründe

der

der Mathematik hie und da Unterscheidungen mache, wo dergleichen von andern entweder noch gar nicht gemacht, oder doch nicht genug verfolgt worden sind. Ich habe dieses in Rücksicht auf die gemeine Algebra bereits sowohl in meiner Anleitung zur Selbsterlernung der Buchstabenrechnung und Algebra in Briefen, als auch in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra gethan, und wage es hier ebenfalls in der höhern Mathematik. Nach den Urtheilen, welche über jene Versuche gefällt worden sind, darf ich freylich hoffen, daß man den gegenwärtigen nicht ganz verwerfen werde, muß aber auch einigen Einwürfen entgegen sehen, die mir hier ein Paar Worte nöthig machen. Der erste, daß durch dergleichen Unterscheidungen die Anfangsgründe der Mathematik zu sehr erschwert werden, ist bloß scheinbar; davon bin ich durch die damit beym Unterrichte gemachten Versuche überzeugt. Ein anderer ist: die Mathematik werde dadurch mit problematischen Sätzen überhäuft. Wenn Kenner sich die Mühe geben wollen, meine Vorschläge und Behauptungen zu prüfen: so können dieselben entweder über den Haufen geworfen, oder zu Sätzen erhoben werden, die nicht mehr problematisch sind. Der dritte: daß durch meine Methode gleichwohl nicht alle Schwierigkeiten gehoben werden, und die Art, wie einige weggeräumt werden, nicht den gehörigen Grad der Leichtigkeit haben. Diesen Einwurf will ich gern nicht widerlegen, wenn mir nur jene Schwierigkeiten angezeigt und Winke gegeben werden, wie man einen höheren Grad der Leichtigkeit erhalten kann. Ueberhaupt soll mir jede gründliche Belehrung um so willkommner seyn, je tiefer sie eindringt, und alle Bitten, die ich sonst etwa thun könnte, vereinigen sich dahin, den Gesichtspunkt nicht aus den Augen zu verlieren, daß ich den Weg zur Erlernung der Mathematik Anfängern

gern

gern auf die Art eben machen mögte, daß sie zwar vom Anfang an angestrengtes Nachdenken beweisen müßten, aber doch in keinem höhern Grade, als jedem möglich, und zur Erhaltung alles, von dem Studium dieser Wissenschaft zu erwartenden, formellen Nutzens, nothwendig ist.

Um zu dem Unendlichen zurück zu kehren, so wird das, was ich S. 355 bis S. 361. gesagt habe, hinreichend seyn zum Beweise, daß wir allerdings im Stande sind, uns zu dem Begriffe einer unendlich großen Zahl aufzuschwingen, daß wir aber, wenn wir bey den absoluten Zahlen stehen bleiben wollen, auf keine Weise über dieselbe hinauszugehen vermögen, und daß, wenn die Zahlen relativ gedacht werden, zwar mehr als unendlich großen Zahlen, dem Namen nach, entstehen können, die aber, sobald jene Relation wegfällt, durchaus als endliche Zahlen erscheinen. Ueberlegt man insbesondere, daß wir bey der Herleitung der unendlichen Zahl aus endlichen durch die Division mit o, die o als das Zeichen der Abwesenheit aller Zahlen betrachten: so fällt auch die Behauptung über den Haufen, daß verschiedene Zahlen, durch o dividirt, doch nothwendig verschiedene unendlich große Zahlen geben müssen, und die angeführten Sätze sind wider alle Einwürfe gesichert. Allein demungeachtet könnte mancher glauben, es seyen dadurch noch nicht alle Schwierigkeiten gehoben, weil wir doch die unendliche Zahl, da sie keinen Widerspruch enthalte, zu sich selbst setzen, desgleichen mit jeder endlichen Zahl multipliciren und dividiren könnten, und so nothwendig zu mehrern der Größe nach verschiedenen unendlich großen Zahlen gelangten. Eben so verhalte sichs, könnte hinzugefügt werden, mit allen übrigen unendlichen Größen. Wenn [∞] . a

irgend

irgend eine unendliche Größe vorstelle, so müsse doch [∞]. ma nothwendig eine von jener verschiedene unendliche Größe ausdrucken. Daß wir das Vermögen besitzen, mehrere reelle Begriffe willkührlich mit einander zu combiniren, wer könnte das leugnen. Wer wollte einem Maler das Vermögen absprechen, einen Venuskopf auf einen Pferdehals zu setzen, den Leib mit Gliedern von verschiedenen Thieren mit bunten Federn und mit Flügeln auszuschmücken, und um aus allen Elementen etwas anzubringen das schöne Bild in einen grausenhaften Fisch sich verlieren zu lassen? nur muß er sich nicht schmeicheln, nun ein wundervolles Werk uns aufgestellt zu haben. Auf ähnliche Art, was sollte uns hindern, das Zeichen des reellen Begriffs der unendlich großen Zahl mit den Zeichen der eben so reellen Begriffe von endlichen Zahlen oder jeden Größen, wie wir wollen, zu combiniren? wofern wir nur nicht verlangen, daß jede dieser Combinationen reelle Zahlen und Größen vorstellen solle. Wie sehr wir uns bey willkührlichen Constructionen betrügen können, wenn wir dabey die Bedeutung, welche ihnen nach den Umständen zukommt, unter welchen wir sie gemacht haben, nicht beständig und genau vor Augen behalten, mag folgendes Beyspiel zeigen. Wenn $\alpha = R$ ist, so ist allemal tang. α eine unendlich große Linie in dem Verstande, daß keine größere gedacht werden kann, denn sie ist von beyden Seiten unbegrenzt. Nun sey der Radius einmal $= r$ und dann $= mr$. Da allgemein tang. α . cot. $\alpha = r^2$ ist, so hätte man für $\alpha = R$, wenn $[\infty]$ die unendliche gerade Linie im strengen Verstande bedeutete, nicht nur

$$[\infty] . 0 = r^2, \text{ sondern auch } [\infty] . 0 = m^2 r^2$$

und folglich nicht nur $[\infty] = \frac{r^2}{0}$, sondern auch $\frac{m^2 r^2}{0}$. Was wollen wir hieraus schließen? Daß es mehrere der Größe nach verschiedene unendliche, von beyden Seiten unbegrenzte, gerade Linien gebe? oder, daß das Unendliche keine Verschiedenheit in der Größe zulasse, wenn der Begriff desselben reell seyn soll? Am besten wäre es unstreitig, da wir doch das Unendliche uns nicht anders vorstellen können, als nach der Art, wie wir uns dazu vom gleichartigen Endlichen aufschwingen, wenn man bloß diejenigen Quotienten unendlich groß nennte, welche entstehen, wenn man jede Größe durch sich selbst oder durch die Zahl, welche die Menge der in ihr enthaltenen Einheiten ausdruckt, zu dividiren anfängt, und dann den Divisor in 0 übergehen läßt. Hierdurch würde alle Verschiedenheit in der Größe unter den unendlichen Größen einer und derselben Art unmöglich, und die allgemeine Mathematik hätte kein anderes reelle Unendliche als die Elementar-Mathematik. Nur ein Einwurf bliebe noch möglich, und zwar folgender: „Man nehme eine unendliche gerade Linie, ein unendliches Quadrat, und einen unendlichen Cubus, und nenne einen Theil jener Linie a. Dies vorausgesetzt, muß die Linie $= [\infty] . a$, das Quadrat $[\infty]^2 . a^2$, und der Cubus $= [\infty]^3 . a^3$ seyn, und hier sind also drey reelle Ordnungen der unendlichen Zahl $[\infty]$". Allein einmal unternimmt man, wenn man auf diese Art schließt, das Unendliche durchs Endliche zu messen; und stellt sich eben deswegen das Unendliche zweytens nicht als unendlich vor, sondern bildet sich dabey nur eine sehr weit, aber doch immer erreichbare, Grenze ein; und endlich bliebe drittens übrig, mit Bailly in seiner Histoire de l'Astronomie moderne zu sagen: L'infini est le gouffre, ou se perdent nos pensées.

Indeß entsteht nun eine doppelte Frage, nemlich: Wie soll man es machen, wenn unendliche Größen unter solchen Umstän-

Umständen vorkommen, daß dabey und damit die einfachen mathematischen Operationen nöthig werden? und: Wie sind die Fälle zu erklären, wenn das Verhältniß einer Größe, die nicht unendlich groß im absoluten Verstande ist, zu einer endlichen Größe $= 1 : 0$ gefunden wird? wohin z. B. derjenige gehört, dessen Montucla im 2ten Theile seiner Histoire des Mathematiques S. 300 gedenkt. Ich beantworte diese letzte Frage zuerst, weil sie die leichteste ist. Man darf nemlich in diesen Fällen nur vor Augen behalten, daß durch den gefundenen Quotienten nichts weiter angezeigt werden solle, als, der Nenner des gesuchten Verhältnisses sey eine unendlich große Zahl sey. Daß man dabey, wenn der eine Raum a und der andere b gesetzt, und $a : b = 1 : 0$ gefunden wird, nicht schließen darf, es sey $a = \frac{b}{0}$, und folglich eine unendlich große Größe im absoluten Verstande, rührt daher, weil die 0, welche man braucht, unter solchen Umständen gefunden wird, daß sie nicht ein Zeichen der Abwesenheit aller Zahlen, sondern bloß die Abwesenheit der 1 anzeigt. Was die erste Frage betrifft, so werden zwar allerdings die Größen, welche man aus reellen unendlichen Größen durch die einfachen mathematischen Operationen zusammensetzt, wenn sie nicht unter die Formen $[\infty]$ und $[\infty] . a$ gehören, eben so wohl imaginäre Größen, als die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen: allein hierin liegt auch zugleich die Antwort auf die aufgeworfene Frage. Während des Calculs mag man sich immerhin der Größe nach verschiedene unendlich große Größen einbilden, und nach Gefallen combiniren und trennen: dadurch bekommen dieselben keine Realität, sondern sind nur ein Verkürzungsmittel der Untersuchungen. Oder soll es keine imaginäre Größe weiter geben, als die geraden Wurzeln aus negativen Größen? wozu gehörte dann

$abcd$, wenn jeder dieser vier Buchstaben eine gerade Linie bedeutet? Aber wenn jene eingebildete unendliche Größen in den letzten Resultaten bleiben, so ist nur ein Fall, bey welchem die aufgelösten Aufgaben mögliche Aufgaben seyn können, und dieser findet dann statt, wenn die Einheit, welche bey dem Zeichen des Unendlichen steht, eben dieselben Dimensionen hat, als das Zeichen des Unendlichen, und mit diesen Dimensionen wirklich gedacht werden kann. Bedeutet z. B. a eine gerade Linie, so sind $[\infty]^2 . a^2$ und $[\infty]^3 . a^3$ wenn man dazu durch die mathematischen Operationen gelangt, deswegen nicht imaginär, sondern den Ausdrücken $[\infty] . a^2$ und $[\infty] . a^3$ gleichbedeutend, weil der Ausdruck $[\infty]^2 . a^2$ eigentlich nichts anders als ein Quadrat, und dieser, $[\infty]^3 . a^3$ eigentlich nichts anders als einen Cubus, deren Seiten unendlich groß sind, bedeutet. Auf diese Art wird daher der Gebrauch des $[\infty]$ in der Mathematik durch das Bisherige auf keine Weise eingeschränkt, sondern es enthält dasselbe nur die Regeln, ohne welche man bey dem Gebrauche des Unendlichen öfters ungewiß und in Gefahr ist, Fehlschlüsse zu machen.

Ich wende mich zu einer andern Betrachtung. Wenn man aus dem Endpunkte eines Halbmessers eines Kreises auf dem Halbmesser eine senkrechte Linie errichtet: so hat dieselbe mit der Peripherie des Kreises weiter keinen Punkt gemein als denjenigen, in welchem sie auf dem Halbmesser senkrecht steht; alle ihre übrige Punkte liegen außerhalb des Kreises. Es heiße der gedachte gemeinschaftliche Punkt A, der in der Tangente ihm nächste B, und der in der Peripherie ihm nächste b. Da B und b wegen des angeführten Satzes nicht zusammen fallen können, so muß zwischen ihnen eine gerade Linie möglich seyn, aber diese gerade Linie kann zu jeder gegebenen geraden Linie kein Verhältniß haben, welches sich durch irgend eine Zahl, so groß sie auch angenommen wird, ausdrucken ließe. Hier haben wir also eine gerade Linie, die kleiner ist als jede gerade Linie, die sich angeben läßt, und welche gleichwohl nicht $= 0$ ist, und durch sie gelangen wir sehr leicht zu Quadraten und Würfeln von ähnlicher Art. Ich will hier die Realität der Größen, die kleiner sind, als jede gleichartige Größe, welche sich angeben läßt, ohne daß man sie deswegen $= 0$ setzen könnte, ihre Realität nemlich in der reinen Mathematik, nicht beweisen, sondern nur durch ein Paar Beyspiele erläutern: denn ich denke nicht, daß man Einwendungen dawider machen werde. Aber wie soll man nun dergleichen Größen nennen? unendlich kleine Größen? dann müßten sie $= 0$ seyn; oder Differenzialien? diese Benennung kommt ihnen nicht allgemein, sondern nur unter gewissen Umständen zu. Man erlaube mir daher, sie mit dem Namen Elemente zu belegen, ohne daß dadurch denselben Einfachheit und Untheilbarkeit beygelegt werde, denn diese kommt ihnen auf keine Weise zu. Ferner erlaube man mir eine jede Größe dieser Art, wenn die Gattung, zu welcher sie gehört, durch die Einheit a bestimmt wird, durch $\delta . a$ oder δa zu bezeichnen. Da bey diesen Voraussetzungen δa nicht $= 0 . a$ ist, so kann auch $\frac{a}{\delta a}$ nicht $= [\infty]$ seyn, aber eben so wenig durch irgend eine Zahl, wie groß man sie auch annehmen mag, ausgedruckt werden. Es heiße daher die Zahl, welche $\frac{a}{\delta a}$ gleich gesetzt werden kann, unbestimmbar groß, und ihr Zeichen sey ∞. Dann ist die durch ∞ ausgedruckte Zahl keine unendliche Zahl, und eben so wenig ∞a eine unendlich große Größe. Ferner ist $\frac{a}{\delta a} = \infty$, und $\frac{m a}{\delta a} = m \infty$;

$\frac{a^2}{(\partial a)^2} = \infty^2$, so wie $\frac{ma^2}{(\partial \alpha)^2} = m\infty^2$ u. s. w. und es lassen sich also unter den unbestimmbar großen Zahlen und Größen eben die Verschiedenheiten und Ordnungen gedenken, welche unter den endlichen, oder bestimmbar großen Zahlen und Größen statt finden, und zwar so, daß allen diesen unbestimmbar großen Größen in der reinen Mathematik die Realität schlechterdings nicht abgesprochen werden kann. Da aber zugestanden werden muß, daß nur $\frac{a}{0 \cdot a}$ eine unendliche Größe sey, so werden durch diese Verschiedenheiten und Ordnungen unter den unbestimmbar großen Größen auf keine Weise reelle unendlich große Größen einer Art, die in der Größe verschieden wären, in die Mathematik, eingeführt: sondern wenn man dieses behauptet hat, so hat das daher gerührt, weil man das unbestimmbar Große mit dem unendlich Großen verwechselte.

Ich kann diese Gelegenheit nicht vorbey lassen, ohne noch einiges andere theils über die Elemente, oder unbestimmbar kleinen Bestandtheile der Größen, theils über die unbestimmbar großen Größen, und insbesondere über die Art und den großen Nutzen ihres Gebrauchs in der Mathematik zu sagen.

Wenn ∂a ein Element von a bezeichnet, oder unter ∂a eine Größe gedacht werden soll, die kleiner ist, als jede Größe, die sich angeben läßt: so ist auch $m \partial a$ kleiner als jede anzugebende Größe, wofern nur m eine bestimmbare Zahl bedeutet. Der Beweis dieses Satzes ist dem S. 308, 309. ähnlich. Stellt man sich daher unter A und a bestimmbare

Größen

Größen Einer Art vor, so hat man gar nicht nöthig δA und δa gleich anzunehmen, sondern man kann, wenn solches aus andern Gründen nützlich ist, $\delta A : A = \delta a : a$, oder $\frac{A}{\delta A} = \frac{a}{\delta a} = \infty$ setzen, und folglich dem Zeichen ∞ die Bedeutung einer zwar unbestimmbar großen, aber dabey gleichwohl beständigen Zahl beylegen. Thut man dieses, so ist allemal

$$1 = \delta . 1 . \infty; \quad a = \delta a . \infty; \quad \text{und } \frac{1}{\infty} = \delta . 1; \quad \frac{a}{\infty} , \delta a;$$

Ferner lassen sich reelle Verschiedenheiten in Ansehung der Größe, so wie auch reelle Ordnungen, sowohl unter den Elementen als unter den unbestimmbar großen Zahlen und Größen denken, und ihrer Natur gemäß bezeichnen. Eben deswegen sind drittens bey und mit diesen Größen alle einfache mathematische Operationen erlaubt; aber wenn irgend eine dieser Größen wirklich dargestellt werden soll, so können wir solches nie anders als auf dem Wege der Näherung thun. Hierin liegen alle Regeln, welche man bey dem Gebrauche der Elemente und der unbestimmbar großen Größen nöthig hat. Man unterscheide daher das unendlich Große von dem unbestimmbar Großen, da sie durch ihre Natur von einander verschieden sind, auch durch die Bezeichnung, und verwechsele solche selbst dann nicht, wenn daraus der Beschaffenheit der vorgesetzten Absicht wegen kein Fehler entstehen könnte. Wenn man z. B. aus der bekannten Formel für die Berechnung der Brennweiten bey sphärischen Hohlspiegeln $f = \frac{dr}{2d - r}$ die Bestimmung des Orts, wo das Bild eines vor einem ebenen Spiegel stehenden Objekts erscheint, ableiten will: so ist allerdings nicht nur

$$f = \frac{[\infty]d}{2d - [\infty]} = \frac{[\infty]d}{-[\infty]} = -d; \text{ sondern auch}$$

 f =

$$f = \frac{\infty d}{2d - \infty} = \frac{\infty d}{-\infty} = -d$$

S. 341; allein warum wollte man nicht lieber bloß $f = \frac{[\infty]d.}{2d - [\infty]} = -d$ brauchen, da auf diese Art die strengste Wahrheit gefunden wird. Eben so verhält sichs mit den Formeln für die Erfindung der natürlichen Logarithmen

$$la = (a^{\frac{1}{\infty}} - 1)\infty, \text{ und } la = (a^{\frac{1}{[\infty]}} - 1)[\infty].$$

Wenn man unmittelbar nach diesen Formeln rechnen will, mag man darunter nach Gefallen wählen, man kann nach der einen nicht anders handeln als nach der andern. Allein will man daraus auf die bekannte Art den Satz:

$$l(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \text{ꝛc.}$$

herleiten, so bekommt derselbe nicht anders als durch den Gebrauch der letzten Formel strenge Gewißheit. Ferner brauche man das Zeichen ∞, wenn man unbestimmbar große Zahlen oder Größen deutlich ausdrucken will, allemal so, das seine Bedeutung beständig bleibe, und setze im zweyten Falle die Einheit, wodurch die Gattung der Größe bestimmt wird, dazu. Hiemit ist verbunden, daß man verschiedene unbestimmbar große Zahlen und Größen, auf eben die Art als verschiedene bestimmbare Zahlen und Größen, verschiedentlich bezeichne, und es wird dieses nothwendig, wenn verschiedene unbestimmbar große Zahlen und Größen mit einander verglichen werden sollen. Eben so brauche man drittens zur Bezeichnung der unbestimmbar kleinen Größen oder der Elemente verschiedene Zeichen, und betrachte dieselben, absolute genommen, nie als Nullen. Beobachtet man diese Regeln, und modificirt man darnach, wo es nöthig ist, das bey dem Gebrauche der fälschlich sogenannten unendlich großen und unendlich kleinen Größen übliche Ver-

fahren:

fahren: so sind die unbestimmbar großen und kleinen Größen in der Mathematik von dem größten Nutzen. Wenn diese Behauptung noch bewiesen zu werden brauchte, so dürfte ich nur daran erinnern, daß man durch die genannten Größen in den Stand gesetzt werde, die Größen von einer neuen und ganz andern Seite zu betrachten, als es geschieht, wenn man sich dieselben bloß als Aggregate bestimmter oder bestimmbarer Theile gedenkt, und wegen des daher entspringenden Vortheils auf Cavaleri Geometrie des Untheilbaren (Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota; auctore P. *Bonaventura Cavalerio*. Bononiae, MDCLIII.) verweisen. Durch Annahme unbestimmbar kleiner Größen gelangt man nemlich zu alle dem, wozu Cavaleri sein Untheilbares brauchte, vermeidet aber, weil man diese Größen nicht als untheilbare oder einfache Größen zu denken nöthig hat, alle die Schwierigkeiten, worin ihn die Einfachheit seiner Elemente verwickelte. Kommen endlich unbestimmbare Größen in letzten Resultaten vor, so ist solches, wie ebenfalls aus dem Gesagten erhellt, ein Kennzeichen, daß man das Gesuchte nicht anders als auf dem Wege der Näherung bekommen könne. So viel hier von diesem Gegenstande, eine weitere Ausführung gehört an einen andern Ort.

Ich ziehe aus dem, was ich, von S. 352. an, über das sogenannte unendlich Große und unendlich Kleine der Mathematiker gesagt habe, folgende Behauptungen.

Die Größen, welche in der allgemeinen Mathematik vorkommen, sind der Zahl nach, wodurch sie ausgedruckt werden, entweder bestimmte oder unbestimmte, und jene entweder endliche oder unendliche, theils unendlich große, theils unendlich kleine, diese entweder bloß unbestimmte aber dabey bestimmbare, oder unbestimmbare, theils unbestimmbar große, theils unbestimmbar kleine. Ferner untersucht die allgemeine Mathematik, da ihr Endzweck ist, Verhältnisse zu erforschen, nie das Unendliche, weder das unendlich Große noch das unendlich Kleine, selbst, indem dabey keine Verhältnisse zu erforschen sind; sondern es gehören alle Größen, über welche sie sich verbreitet, zu den endlichen; und wenn in ihr unendlich große und unendlich kleine Größen, oder in den Constructionen, welche sie zum Grunde legt, die Zeichen [∞]; [∞].a; o.a und o vorkommen, so befinden sie sich entweder in den letzten Resultaten, oder werden bloß als Erleichterungsmittel gebraucht. Eben so wenig unternimmt sie das Verhältniß unbestimmbarer Größen zu untersuchen, und zwar aus eben dem Grunde; findet aber auch auf eben die Art öfters dergleichen Größen, oder bedient sich ihrer, um desto schneller ihr Ziel zu erreichen. Also bleiben bloß die endlichen Größen, für den wirklichen Gegenstand der allgemeinen Mathematik übrig; und da diese nunmehr nicht weiter als in bestimmte und in unbestimmte, obgleich nicht unbestimmbare, eingetheilt werden können: so hat auch die ganze allgemeine Mathematik nicht mehr als zwey Haupttheile, davon der erste mit Recht den Namen der gemeinen Mathematik führt. Was den andern Haupttheil oder denjenigen betrifft, welcher sich mit der Untersuchung unbestimmter Größen beschäftiget: so bedient man sich darin bey der Erforschung der Verhältnisse der gegebenen Größen entweder bestimmter oder unbestimmter Constructionen: in jenen denkt man sich die Größen als unbestimmte Mengen bestimmter und in jeder Größe durchaus einander gleicher Einheiten, in diesen als unbestimmbare, aber bey allen gleich große, Mengen, bald gleicher bald un-

gleicher

gleicher Einheiten. Die Größen, welche durch die erste Art der Constructionen dargestellt werden können, sind allerdings veränderliche Größen, aber ihre Veränderlichkeit hat Schranken; dagegen diejenigen, welche durch die andere Gattung ausgedruckt werden, veränderliche Größen ohne Einschränkung sind. Hiernach läßt sich der zweyte递理theil der allgemeinen Mathematik von neuem in zwey Theile theilen, die, mit bekannten Namen, unbestimmte Mathematik, und höhere Mathematik genennt werden können, wenn man sich bey dem letztern die Differenzial- und Integral-Rechnung in ihrem ganzen Umfange gedenkt. Logisch beurtheilt ist also die unbestimmte Mathematik sowohl von der gemeinen als von der höhern Mathematik unterschieden, und kann als zwischen beyden mitten inne stehend angesehen werden. Um hier auch der Elementar-Mathematik mit ein Paar Worten zu gedenken, so betrachtet dieselbe die Größen in solchen Constructionen, welche die unterscheidenden Merkmale der Größen, nicht aber ihr Verhältniß zu andern ausdrucken, und also Anschauungen erzeugen und nicht Begriffe; übrigens aber hat auch sie es theils mit bestimmten theils mit unbestimmten Größen zu thun, und theilt sich ferner noch nach dem Unterschiede der Größen, nach welchem dieselben entweder continuirliche oder discrete, oder beydes zugleich sind, in Geometrie, Arithmetik und Mechanik ein. Ich will diesen letzten Theil aus gewissen Gründen hier weglassen, ob ich gleich sonst der reinen Mechanik sehr gern eine Stelle in dem Gebiete der reinen Mathematik einräume; und dann läßt sich also die ganze reine Mathematik auf die Art eintheilen, wie es folgende Tabelle darstellt.

Reine

Reine Mathematik.

1. Elementar-Mathematik.
 a. Bestimmte.
  α. Geometrie.
  β. Arithmetik.
  γ. Vermischte Geometrie.
 b. Unbestimmte.
  α. Sogenannte höhere Geometrie.
  β. Unbestimmte Analytik.
  γ. Vermischte höhere Geometrie.
2. Allgemeine Mathematik.
 a. Gemeine Mathematik,
  α. in so fern sie die Größe überhaupt,
  β. in so fern dieselbe in ihren Hauptarten, oder
   aa. die continuirlichen, und
   bb. die discreten Größen betrachtet.
 b. Unbestimmte Mathematik, mit ähnlichen Abtheilungen.
 c. Höhere Mathematik.
  α. Höhere Mathematik in möglichster Allgemeinheit.
   aa. Differenzial-Rechnung.
   bb. Integral-Rechnung.
  β. Anwendungen der Differenzial- und Integral-Rechnung,
   aa. bey continuirlichen, und
   bb. bey discreten Größen.

Unter vermischter Geometrie verstehe ich die Anwendungen der Arithmetik auf die Geometrie, und habe übrigens deswegen allemal die Theile, welche sich mit den continuirlichen Größen beschäftigen, denen, welche die discrete Größe zum Gegenstande haben, vorgesetzt, weil sie sich bey der Behandlung der Mathematik als reine Vernunftwissenschaft zuerst darbieten.

Und

Und nun ist klar:

1. Daß die Mathematik kein anderes unendlich Große anerkenne, als dasjenige, über welches oder jenseits dessen nichts mehr statt findet, und dessen Zeichen [∞] ist; so wie auch, daß das unendlich Kleine, welches sie braucht, diesem unendlich Großen im strengsten Verstande gegenüberstehe, und nichts anders als o sey. Denn

a. kommt in der bestimmten Elementar-Mathematik das unendlich Große und unendlich Kleine entweder gerade so vor, oder es sind zugleich Bedingungen hinzugefügt, welche, bey einiger Aufmerksamkeit, nicht übersehen lassen, daß nicht absolut, sondern relativ geredet werde. In diesem Falle hat man es aber nicht mit dem Unendlichen, sondern nur mit dem uns Unbestimmbaren zu thun.

b. findet auch in den übrigen Theilen der reinen Mathematik kein anderes reelle unendlich Große oder unendlich Kleine statt. Denn wollte man darin von andern unendlich großen und unendlich kleinen Größen ausgehen, so trüge man dieselben in die Mathematik hinein, fände sie aber nicht darin. Braucht man ferner die Zeichen [∞] und o während der Untersuchung, als wenn es Verschiedenheiten und Ordnungen unter den dadurch ausgedruckten Größen gäbe: so hat man deswegen eben so wenig reelle unendlich Große und unendlich Kleine in der Mathematik, als man mögliche unmögliche, oder rationale Irrational-Zahlen hat, weil man Zeichen von unmöglichen und Irrational-Zahlen wie die Zeichen der reellen und der Rational-Zahlen braucht. Findet man endlich unendlich große oder unendlich kleine Größen durch die mathematischen Operationen und aus

endlichen

endlichen Größen, ohne daß dieselben in der Form [∞] a, und o.a erscheinen: so entdeckt man bey genauerer Ueberlegung, entweder, daß die Aufgabe zu den unmöglichen gehöre, oder es ist die Abweichung von der gedachten Form nur scheinbar.

c. Was insbesondere die Differenzial- und Integral-Rechnung betrifft, so darf man bey der Festsetzung ihrer Hauptregeln nur den Weg einschlagen, den ich oben S. 308 f. gegangen bin, um auch darin auf kein anderes unendlich Große und unendlich Kleine zu stoßen. Doch hiervon werde ich noch nachher reden.

2. Daß die Mathematik alle Verschiedenheit sowohl unter mehrern unendlich großen als unendlich kleinen Größen Einer Art, und also noch mehr unendliche Ordnungen bey denselben durchaus verwerfe. Dieses folgt aus dem Vorhergehenden nothwendiger Weise, und so sehr, daß es demjenigen, der die Natur der willkührlichen Constructionen und der allgemeinen mathematischen Operationen nicht kennt, befremden kann, im Calcul die Zeichen verschiedener unendlicher Größen und selbst Ordnungen derselben zu erblicken. Man braucht sich indeß nur die sogenannte Multiplication und Erhebung zu Dignitäten als das, was sie wirklich sind, nemlich als bloße Combinationen, und die Division und Extraction der Wurzeln als Trennung gegebener Combinationen gedenken, um das eben so thunlich und nützlich zu finden, als den Gebrauch der imaginären Wurzelgrößen.

3. Daß das unendlich Große und unendlich Kleine, im wahren Sinne genommen, ganz und gar nicht bloß der Differenzial- und Integral-Rechnung eigenthümlich sey, sondern eben so in andern Theilen der Mathematik gebraucht werde. Hier setze ich weiter nichts

dazu,

dazu, als daß ich unter den andern Theilen der Mathematik diejenigen verstehe, welche zusammen die unbestimmte allgemeine Mathematik ausmachen.

4. Daß alle Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung gefunden, bewiesen und gebraucht werden können, ohne das Unendliche im eigentlichen Sinne im geringsten zu Hülfe zu nehmen. Sobald bewiesen ist, daß die Differenzialien an sich genommen, nicht $= 0$ gesetzt werden dürfen, sobald fallen auch alle unendlich große Größen, von welchen so oft in der Differenzial- und Integral-Rechnung geredet wird, von selbst weg; und daß jenes nicht erlaubt sey, ist hoffentlich durch das Obige hinlänglich dargethan worden. Ferner kommt es bey der Erfindung und dem Beweise der Regeln der Differenzial Rechnung in Ansehung des Punkts, wovon hier die Rede ist, nur auf folgende drey Regeln an: $d.(x + y + z) = dx + dy + dz$; $d.xy = xdy + ydx$; und $d.x^m = mx^{m-1}dx$; und dabey braucht man kein unendlich Kleines und noch weniger ein unendlich Großes zu Hülfe zu nehmen; was aber die Integral-Rechnung betrifft, so ist sie die umgekehrte Methode der Differenzialien, und also in der jetzigen Rücksicht von der Differenzial-Rechnung nicht verschieden. Endlich wäre es warlich keine preißwürdige Art, das Unendliche zu untersuchen, um das Endliche zu finden, und es kontrastirt sehr, wenn man behauptet, die höhere Analyse dringe in das Unendliche, ja selbst in das Unendliche vom Unendlichen, und doch am Ende dadurch nichts als das Verhältniß endlicher Größen findet.

5. Daß die aus $[\infty]$, 0, und endlichen Größen zusammengesetzten Größen in der ganzen Mathematik nicht anders gebraucht werden müssen, als solches darin entweder mit den imaginären oder auch mit den irrationalen

Größen

Größen geschieht. Dies fließt aus dem unter den vorhergehenden Nummern Gesagten hinlänglich.

6. Daß also die Entfernung, in welcher die Mathematik öfters von ihrer Schwester der Philosophie hat stehen müssen, nicht von der Denkungsart dieser beyden Schönen selbst, sondern von den Hindernissen herrühre, welche ihre Liebhaber denselben in den Weg gelegt haben. Ich habe in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik und die Art, die Vollkommenheit und Brauchbarkeit derselben zu vergrößern, Berlin 1789. S. 137. die Kenntniß der Formen, oder die reine Vernunftkenntniß, eingetheilt in mathematische, in philosophische, und in mathematische durch die philosophische erhöhte Kenntniß Auf diese letzte Stufe der Formen-Kenntniß erhebt man sich durch das Studium der allgemeinen Mathematik, und man kann also dabey die Hülfe der Philosophie nicht entbehren, wenigstens insofern nicht, als man dazu eine Fertigkeit, aus Begriffen zu schließen, haben muß. Wenn die allgemeine Mathematik mit der Philosophie, auch nur in Ansehung des Unendlichen wirklich im Widerspruche stände, auf welche Seite sollte der Vorwurf fallen? Sollte die Philosophie in dem, was die Mathematik von ihr bedarf, irrig seyn; wie traurig stünde es dann mit ihr? sollte aber vollends die Mathematik bey gehöriger Unterstützung von Seiten der Philosophie, in ihrem Gebiete Widersprüche wider den gesunden Verstand als unwiderleglich zurücklassen müssen; was sollte man dann überhaupt von der Gewißheit unserer Kenntnisse, wenn sie nicht unmittelbar auf sinnliche Wahrnehmungen sich stützen, urtheilen? Doch es läßt sich alles erklären, wenn man annimmt, daß die Mathematiker bisweilen die Philosophie zu wenig gebraucht,

braucht, und die Philosophen auf der andern Seite die Nothwendigkeit ihrer Wissenschaft zu einem vollkommenen Mathematiker nicht einleuchtend genug dargestellt haben. Schwesterlich vereint, erklimmen Mathematik und Philosophie den höchsten Gipfel menschlicher Kenntnisse; getrennt, sind beyde in Gefahr, bald hier bald da zu straucheln, und erreichen ihr Ziel nie ganz und immer spät.

Und nun noch ein Paar Worte zur Erläuterung der Endlichkeit der unbestimmbaren Größen. Es bedeute x irgend eine endliche Größe, z. B. eine gerade Linie, und dx ein Element derselben, oder eine Größe von eben der Art, die aber kleiner sey, als jede gleichartige Größe, die gegeben werden kann, und gleichwohl weder o noch einfach. Dann ist $\frac{x}{dx} = \infty$ eine unbestimmbar große Zahl, und $x = \infty . dx$. Da x eine endliche Größe ist, so sind auch x^2; x^3; x^4; x^5; rc. endliche Größen, und darunter, wenn x eine gerade Linie bedeutet, x^2 und x^3 reell. Nun ist aber, weil $x = \infty . dx$ gesetzt werden kann, $x^2 = \infty^2 . dx^2$; und $x^3 = \infty^3 dx^3$; ja wenn x eine absolute Zahl bedeutet, so sind auch $x^4 = \infty^4 dx^4$; $x^5 = \infty^5 dx^5$; rc. reelle endliche Größen. Mit was für einem Rechte könnte man also behaupten, daß ∞ in diesen Beyspielen eine unendlich große Zahl bedeute, da jede endliche Größe, sie mag bestimmbar oder unbestimmbar seyn, mit einer unendlichen Zahl multiplicirt, keine endliche Größe geben kann? Oder soll $dx = o$ seyn? Wem dieses bey dem, was dawider nicht nur von mir, sondern von so vielen andern von jeher gesagt worden ist, noch annehmungswerth scheint, dem wäre es vergebliche Mühe, weiter zu widersprechen, denn Er kann aus Nichts hervorbringen, was er will.

Inhalt
des
fünften Capitels.

Von der Differenziation der algebraischen Funktionen einer veränderlichen Größe.

1. Wenn die gegebene algebraische Funktion die Form x^n hat, §. 152 - 157. Hier werden folgende Fälle betrachtet.
   a. Wenn n unbestimmt genommen wird, oder jede Zahl bedeutet, §. 152. 153.
      α. Erfindung des ersten Differenzials, §. 152.
      β. Erfindung des zweyten und der übrigen Differenzialien, §. 153.
   b. Wenn n eine positive Zahl vorstellt, §. 154; wo aber nur nöthig war, von dem zweyten und den folgenden Differenzialien zu reden.
   c. Wenn n eine negative Zahl ist, §. 155.
   d. Wenn n eine gebrochene Zahl ist, §. 156. 157.
2. Wenn die gegebene veränderliche Größe irgend eine algebraische Funktion ist, §. 158 - 177.
   a. Wenn dieselbe irgend eine ganze rationale Funktion ist, §. 158 - 168.

α. Wenn

α. Wenn dieselbe die Form $p + q + r + s +$ ꝛc. oder $ap + bq + cr + f$ hat, §. 158.

β. Wenn darin Potestäten der veränderlichen Größe vorkommen, §. 159 ≠ 161.

aa. Wenn die Exponenten dieser Potestäten ganze und positive Zahlen sind, §. 159. 160.

bb. Wenn dieselben negative oder gebrochene Zahlen sind, §. 161.

γ. Wenn sie Potestäten von solchen Funktionen sind, deren Differenzial nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann, §. 162.

δ. Wenn sie Produkte aus zweyen oder mehrern Funktionen einer veränderlichen Größe, und die Differenzialien dieser Funktionen bekannt sind, §. 163.

ε. Besondere Regeln für die Fälle, wenn Brüche in den Faktoren vorkommen, §. 164.

b. Wenn dieselbe irgend eine gebrochene Funktion ist, §. 165 ≠ 168.

α. Allgemeine Regel, §. 165.

β. Besondere Regeln, §. 166.

c. Noch einige Regeln, um das Differenzial bequemer auszudrucken, §. 167. 168.

α. wenn die gegebene Funktion ein Produkt, §. 167.

β. wenn dieselbe ein Bruch ist, deren Zähler oder Nenner einen Faktor hat, der eine Potestät ist, §. 168.

3. Wenn die gegebene Funktion irgend eine algebraische Funktion ist, §. 169 ≠ 177.

a. Wie man die irrationalen Funktionen durch Reduction auf rationale unter die vorhergehenden Regeln bringe, §. 169.

b. Allgemeine Regel der Differenziation jeder algebraischen Funktion, §. 170 ≠ 177.

α. Diese Regel selbst, §. 170.

β. Erläuterung derselben durch Beyspiele, §. 171 ⸗ 173.

aa. Wo $y = p \pm q$ ist, §. 171.

bb. Wo $y = pq$ ist, §. 172.

cc. Wo $y = \frac{p}{q}$ ist, §. 173.

c. Noch einige allgemeine Betrachtungen, § 174 ⸗ 177.

α. über die ersten, §. 174, 175.

β. über die zweyten und übrigen Differenzialien aller algebraischen Funktionen, §. 176. 177.

Anmerkungen und Zusätze
zum
fünften Capitel.

Es würde eine sehr überflüssige Sache seyn, die Vortreflichkeit des Ganges, welchen Euler in diesem Capitel genommen, und der Art, wie er darin seinen Gegenstand behandelt hat, zu rühmen, sie giebt sich selbst zu empfinden. Eben so wenig bedarf dieses Capitel, wegen der darin durchaus herrschenden großen Deutlichkeit, Erläuterungen; und ich setze daher bloß zu dem 152sten §. ein Paar Worte hinzu.

Euler setzt darin den Binomischen Lehrsatz, oder daß

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \text{etc.}$$

sey, in der Allgemeinheit voraus, wobey n jede ganze und gebrochene, positive und negative Zahl bedeuten kann. Er hatte dazu ein Recht, ob er gleich selbst die Richtigkeit des gedachten Lehrsatzes, in dem gedachten Umfange, erst geraume Zeit nach der Herausgabe der Differenzial-Rechnung elementarisch bewiesen hat, nemlich im neunzehnten Bande der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften, vom Jahr 1774. (Die Besitzer meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, finden seinen Beweis in dem Anhange zum ersten Theile, unter den Zusätzen zum achten Capitel. S. 460 f.) Will man indeß, so kann man die Erfindung der Differenzialien der Funktionen, die unter die Form x^n gehören, von dem Binomischen Lehrsatze ganz unabhängig machen, und zwar auf folgende Art.

Wenn x eine veränderliche Größe bedeutet, so ist, unabhängig von dem Binomischen Lehrsatze,

$$d.x^2 = 2xdx; \text{ und } d.x^3 = 3x^2dx.$$

Ferner läßt sich beweisen, daß wenn, für irgend einen Werth für n, $d.x^n = nx^{n-1}dx$ ist, auch allemal $d.x^{n+1} = (n+1)x^n dx$ sey. Denn es ist

$$x^{n+1} = x^n.x; \text{ also}$$

$$d.x^{n+1} = d.x^n.x = (x^n + nx^{n-1}dx)(x+dx) - x^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \left.\begin{matrix} nx^n \\ x^n \end{matrix}\right\} dx + nx^{n-1}dx^2 - x^{n+1}$$

$$= (n+1)x^n dx.$$

Nun ist aber aus $d.x^2 = 2xdx$, und $d.x^3 = 3x^2dx$ die Formel $d.x^n = nx^{n-1}dx$ wahr für $n = 2$, und $n = 3$; also nach dem geführten Beweise nunmehr auch für $n = 4$; $n = 5$; $n = 6$; $n = 7$; u. s. f. ohne Ende. Hat man auf diese Weise die Richtigkeit der Formel, $d.x^n = nx^{n-1}dx$, für jeden ganzen positiven Werth von n dargethan, so findet man die Richtigkeit derselben für die übrigen Werthe nach der gewöhnlichen und bekannten Methode ebenfalls, ohne den Binomischen Lehrsatz im geringsten zu gebrauchen.

Wenn man daher den Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Binomischen Lehrsatzes mit Hülfe der Differen-

zial-

zial-Rechnung führen will: so ist es nicht einmal nöthig, die Wahrheit dieses Satzes für die ganzen positiven Werthe von n zuvor auf andere Art außer Zweifel zu setzen. Allein die Erfindung der zweyten und folgenden Differenzen von x^n muß bekannt seyn, wenigstens für den Fall, wenn dx beständig ist. Nun findet man nach Regeln, die den Binomischen Lehrsatz gar nicht voraussetzen,

$$d \,.\, x^n = n x^{n-1} dx; \quad d^2 \,.\, x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2;$$

$$d^3 \,.\, x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Ferner ist klar, daß jederzeit, wenn

$$d^m \,.\, x^n = A x^{n-m} dx^m$$

ist,

$$d^{m+1} \,.\, x^n = (n-m) A x^{n-m-1} dx^{m+1}$$

seyn müsse. Da also die Formel $d^m \,.\, x^n = A x^{n-m} dx^m$ wahr ist, wenn man $m = 2$ und $A = n(n-1)$, desgleichen, wenn man $m = 3$, und $A = n(n-1)(n-2)$ setzt: so muß sie auch wahr seyn, wenn man $m = 4$, und $A = n(n-1)(n-2)(n-3)$, desgleichen, wenn man $m = 5$, und $A = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ und überhaupt, wenn man, für jeden Werth von m,

$$A = n(n-1)(n-2)(n-3) \,.\,.\,.\,.\,.\, (n-m+1)$$

setzt. Dieses und daß $d^{n+1} \,.\, x^n$, wenn dx beständig ist, allemal $= 0$ sey, vorausgesetzt, ist der Beweis des Binomischen Lehrsatzes mit Hülfe der Differenzial-Rechnung folgender. Es sey

$$(1+x)^n = 1 + A^I x + A^{II} x^2 + A^{III} x^3 + \,.\,.\, + A^m x^m + A^{m+1} x^{m+1} + \text{ꝛc.}$$

so ist

$$n(1+x)^{n-1} dx = A^I dx + 2 A^{II} x dx + 3 A^{III} x^2 dx + \text{ꝛc.}$$

und daher

$$n(1+x)^{n-1} = A^I + 2 A^{II} x + 3 A^{III} x^2 + \text{ꝛc.}$$

Soll nun x jeden Werth haben können, so muß dieses alles auch gelten, wenn man $x = 0$ setzt. Und da hiedurch

$n(1^{n-1}) = n = A^{I}$ wird, so erhellet, daß in der angenommenen Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + A^{I}x + A^{II}x^2 + A^{III}x^3 + \ldots + A^{m}x^{m} + A^{m+1}x^{m+1} + \text{ꝛc.}$$

A^{I} nichts anders bedeuten könne als n. Ferner ist

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}dx^2 = 2A^{II}dx^2 + 6A^{III}xdx^2 + \text{ꝛc.}$$

oder

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2A^{II} + 6A^{III}x + \text{ꝛc.}$$

und es kann daher aus ähnlichen Gründen, wie vorhin, A^{II} nichts anders als $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ bedeuten. Ueberhaupt aber ist

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(1+x)^{n-m}dx^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1).A^{m}dx^m + \text{ꝛc.}$$

oder

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(1+x)^{n-m} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1).A^{m}$$

und also

$$A^{m} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)m}.$$

Man hat also für die Werthe von A^{I}; A^{II}; A^{III}; ꝛc. in der Formel $(1+x)^n = 1 + A^{I}x + A^{II}x^2 + A^{III}x^3 + \text{ꝛc.}$

$$A^{I} = n$$

$$A^{II} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$A^{III} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$A^{IV} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\vdots$$

$$A^{m} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-1)m}.$$

Inhalt

Inhalt
des
sechsten Capitels.

Von der Differenziation der transcendenten Funktionen.

2) wenn die zweyten und folgenden Differenzialien gesucht werden, §. 184.

γ. Die Differenziation solcher Funktionen, welche aus algebraischen und logarithmischen Größen bestehen, §. 185.

b. der Exponential-Größen, §. 186 - 193.

α. wenn d. a^x gesucht wird, §. 186 - 188.

β. wenn $y = p^q$ ist, und dy gesucht wird, §. 189 - 192.

γ. wenn die Exponenten ebenfalls Exponential-Größen sind, §. 193.

c. derjenigen transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen, §. 194 - 207.

α. Von der Erfindung der ersten Differenzialien dieser Größen, §. 194. 200.

1. wenn dieselben unter die Form A. sin. x, §. 194. 195.
2. wenn sie unter die Form A. cos. x, §. 196;
3. wenn sie unter die Form A. tang. x, §. 197;
4. wenn sie unter die Formen A. cot. x, A. sec. x, A. cosec. x, gehören, §. 198.
5. Beyspiele, §. 199.

β. Von der Erfindung der zweyten und folgenden Differenzialien der betrachteten Größen, §. 200.

d. derjenigen transcendenten Größen, die sich aus der Umkehrung der vorhergehenden ergeben, §. 201 - 207.

α. Von der Erfindung der ersten Differenzialien dieser Größen, §. 201 - 205, und zwar

1. des sin. x, §. 201.
2. des cos. x, §. 202.
3. der tang. x, §. 203.
4. der cot. x, §. 204.
5. der sec. x, und der cosec. x, §. 205.

β. Von

β. Von der Erfindung der zweyten und folgenden Differenzialien dieser Größen, §. 205. 206.

1. der Sinus und Cosinus, §. 205.
2. der Tangente, §. 206.

γ. aller derjenigen Größen, in welchen Sinus und Cosinus vorkommen, §. 207.

Wegen der Erläuterungen, welche der 180ste und 181ste §. nöthig haben, verweise ich auf meine Zusätze zu dem siebenten und achten Capitel der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, im Anhange zu meiner Uebersetzung des ersten Theils dieses Werkes.

Inhalt
des
siebenten Capitels.

Von der Differenziation der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

bb. Funkbb. Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, §. 224. 225.

β. Allgemein, §. 226 – 239.

aa. Funktionen zweyer veränderlichen Größen, §. 226 – 233.

αα. Merkwürdige Eigenschaft derselben, §. 226 – 228.

ββ. Erläuterung dieser Eigenschaft an Beyspielen, §. 229.

γγ. Andere Methoden, dieselbe zu beschreiben und anzuzeigen, §. 230 – 232.

δδ. Uebereinstimmung zwischen dieser und der vorhin von den homogenen Funktionen bewiesenen Eigenschaft, §. 233.

bb. Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, §. 234. 241.

αα. Merkwürdige Eigenschaft derselben, §. 234. 235.

ββ. Grund davon, und weitere Erläuterung, §. 236 – 239.

c. Gebrauch des Bisherigen, §. 240. 241.

Inhalt
des
achten Capitels.

Von der fernern Differenziation der Differenzial-Formeln.

Inhalt
des
neunten Capitels.

Von den Differenzial-Gleichungen.

7. Von