# Supplement zu L. Eulers Differenzialrechnung

Grüson, Johann Philipp

Berlin, 1798

Beleuchtungen der letztern Kapitel meiner Differenzialrechnung.

# Beleuchtungen
## der letztern Kapitel meiner Differenzialrechnung.

### Von den inexplicabeln Funktionen.

#### 1.

Da dieses Argument, welches in Ansehung der Analysis, gänzlich neu ist, noch niemals deutlich genung, zergliedert worden ist, so habe ich beschloßen, dasselbe mit größerem Fleiß zu behandeln, und alle Momente, aus denen es entspringt, aus den ersten Prinzipien herzuleiten, wobey es vorzüglich, von großem Nutzen seyn wird, wenn man sich geschikter Zeichen, im Kalkul bedienet. Wäre demnach irgend eine Reihe gegeben, deren Glieder mit den Anzeigern 1, 2, 3, 4 2c. übereinkommen, so werde ich selbige mit diesen Zeichen (1), (2), (3), (4), 2c. darstellen. Es würde daher, das Hauptglied dieser Reihe, welche mit dem unendlichen Anzeiger x, übereintrift, bey mir (x) seyn, und also für jede Reihe, x die Funktion derselben, die ich als gänzlich bekannt annehme, und zwar dergestalt gegen einander gehalten, daß die Werthe derselben, nicht allein für ganze Zahlen, statt x angenommen, sondern auch für gebrochene, und selbst für irrationale gelten können.

2. Ferner bedeutet $\Sigma : x$, ein summatorisches Glied eben dieser Reihe. welches die Summe der Glieder, vom ersten an, bis zum letzten (x) ausgedrückt, so daß $\Sigma : x = (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots\ldots\ldots + (x)$,

deren sämmtliche Werthe also, so oft x eine ganze positive Zahl wird, aus dieser Reihe, sogleich dargestellt werden können, und zwar wie hier folgt:

$$\Sigma : 1 = (1)$$
$$\Sigma : 2 = (1) + (2)$$
$$\Sigma : 3 = (1) + (2) + (3)$$
$$\Sigma : 4 = (1) + (2) + (3) + (4) \text{ u. s. w.}$$

Daß dergleichen Werthe aber, auch unter der Formel $\Sigma : x$ vorgestellt werden könnten, wenn man statt x gebrochene, oder irrationale Zahlen, sowohl positive, als negative gebrauchet, erhellet dieserhalb keineswegs; daher rechne ich diese Werthe, zu einem besondern Geschlecht von Funktionen, welche ich die inexplicabeln genannt habe. Auf welche Art nun dergleichen, durch analytische Formeln bestimmter Funktionen, ausgedrükt werden können, will ich hier zuförderst darthun.

3. Dieses ganze Geschäft aber, kann am bequemsten, durch stetige Differenzen, aus einer vorgegebenen Reihe hergeleitet, verrichtet werden, wenn nehmlich jedes Glied, vom folgenden abgezogen wird; hieraus entstehet sodann, die Reihe der ersten Differenzen, auf gleiche Weise die der andern, dritten, vierten u. s. f. Alle diese Differenzen, bezeichne ich auf folgende Art.

| Ite Differenzen | IIte Differenzen | IIIte Differenzen |
|---|---|---|
| $(2) - (1) = \Delta 1$ | $\Delta 2 - \Delta 1 = \Delta^2 1$ | $\Delta^2 2 - \Delta^2 1 = \Delta^3 1$ |
| $(3) - (2) = \Delta 2$ | $\Delta 3 - \Delta 2 = \Delta^2 2$ | $\Delta^2 3 - \Delta^2 2 = \Delta^3 2$ |
| $(4) - (3) = \Delta 3$ | $\Delta 4 - \Delta 3 = \Delta^2 3$ | $\Delta^2 4 - \Delta^2 3 = \Delta^3 3$ |
| $(5) - (4) = \Delta 4$ | $\Delta 5 - \Delta 4 = \Delta^2 4$ | $\Delta^2 5 - \Delta^2 4 = \Delta^3 4$ |
| u. s. w. | u. s. w. | u. s. w. |

4. Nach-

4. Nachdem diese Bezeichnung festgesetzt worden, konnten die einzelnen Glieder der Reihe aus dem ersten (1) und dessen Differenzen $\Delta^1$, $\Delta^2 1$, $\Delta^3 1$, $\Delta^4 1$, ꝛc. ausgedrükt werden. Denn da $(2) = (1) + \Delta 1$, und $\Delta 2 = \Delta 1 + \Delta^2 1$, auch $(3) = (2) + \Delta 2$, so wird $(3) = (1) + 2 \Delta 1 + \Delta^2 1$, daher fließt hieraus schon jene Gleichheit $\Delta 3 = \Delta 1 + 2 \Delta^2 1 + \Delta^3 1$. Weil jetzt $(4) = (3) + \Delta 3$, so wird man haben $(4) = (1) + 3 \Delta 1 + 3 \Delta^2 1 + \Delta^3 1$. Hieraus fließt ferner: $\Delta 4 = \Delta 1 + 3 \Delta^2 1 + 3 \Delta^3 1 + \Delta^4 1$, da auch $(5) = (4) + \Delta 4$, so wird $(5) = (1) + 4 \Delta 1 + 6 \Delta^2 1 + 4 \Delta^3 1 + \Delta^4 1$, und so ferner seyn. Aus der Bildung dieser Formeln selbst erhellet, daß hier eben die Coeffizienten vorkommen, die man in der Binomialpotenz erhält, deren Exponent um die Einheit kleiner, als der Index des vorgegebenen Gliedes ist, folglich wird

$$(n) = (1) + \frac{n-1}{1} \Delta 1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \Delta^2 1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \Delta^3 1 + \text{ꝛc.}$$

5. Vermehren wir hier diese Zahl n, um die Einheit, so bekommen wir $(n+1) = (1) + \frac{n}{1} \Delta 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \Delta^2 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \Delta^3 1 + \text{ꝛc.}$ Da nun bereits dieser letzte Ausdruck, dasjenige Glied ausdrückt, welches von dem ersten, durch n Stuffen x entfernt ist, so wird auf ähnliche Weise, auch das Glied, welches vom zweyten, durch eben so viele Stuffen vorgerückt ist $(n+2)$ aus dem andern, und dessen Differenzen, bestimmt; denn es wird:

$(n+2) = (2) + \frac{n}{1}\Delta 2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot$ $\frac{n-2}{3}\Delta^3 2 +$ ꝛc. seyn. Auf eben diese Art ist es augenscheinlich, daß auch seyn werde $(n+3) = (3) + \frac{n}{1}\Delta$ $3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\Delta^3 3 +$ ꝛc.

$(n+4) = (4) + \frac{n}{1}\cdot\Delta 4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot$ $\frac{n-2}{3}\Delta^3 4 +$ ꝛc.

6. Hieraus ist klar, daß wir das allgemeine Glied $(x)$ unserer Reihe, aus dem ersten und dessen Differenzen, auf folgende Art erklären können:

$$(x) = (1) + \frac{x-1}{1}\Delta 1 + \frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}\Delta^2 1 + \frac{x-1}{1}\cdot \frac{x-2}{2}\cdot\frac{x-3}{3}\Delta^3 1 + \text{ꝛc.}$$

daher wird das, dem letzten folgende Glied $(x+1)$, dieses seyn:

$$(x+1) = (1) + \frac{x}{1}\Delta 1 + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-2}{1}\Delta^2 1 + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-3}{3}\cdot \Delta^3 1 + \text{ꝛc.};$$

Da dieser Ausdruck im folgenden am öftern vorkommt, so wollen wir der Kürze wegen, folgende Bezeichnung einführen:

$$\frac{x}{1} = x$$

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} = x'$$

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} = x''$$

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} \cdot \frac{x-3}{4} = x''' \text{ u. s. w.}$$

nach deren Anwendung, werden wir folgende Gleichungen haben:

$$
\begin{array}{l}
(x+1) = (1) + x\,\Delta\,1 + x'\,\Delta^2\,1 + x''\,\Delta^3\,1 + \text{ꝛc.} \\
(x+2) = (2) + x\,\Delta\,2 + x'\,\Delta^2\,2 + x''\,\Delta^3\,2 + \text{ꝛc.} \\
(x+3) = (3) + x\,\Delta\,3 + x'\,\Delta^2\,3 + x''\,\Delta^3\,3 + \text{ꝛc.} \\
(x+4) = (4) + x\,\Delta\,4 + x'\,\Delta^2\,4 + x''\,\Delta^3\,4 + \text{ꝛc.} \\
- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\
- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\
(x+n) = (n) + x\,\Delta\,n + x'\,\Delta^2\,n + x''\,\Delta^3\,n + \text{ꝛc.}
\end{array}
$$

7. Hierauf werden auch die Summen, jeglicher Glieder unserer Reihe, aus dem alleinigen ersten Gliede, und dessen Differenzen, bestimmt werden können, wie folgendes Täfelchen zeigt:

$$
\begin{array}{ll}
 & \Sigma : 1 = (1) \\
\text{add:} & (2) \;=\; (1) + \Delta\,1 \\
\hline
 & \Sigma : 2 = 2\,(1) + \Delta\,1 \\
 & (3) \;=\; (1) + 2\,\Delta\,1 + \Delta^2\,1 \\
\hline
 & \Sigma : 3 = 3\,(1) + 3\,\Delta\,1 + \Delta^2\,1 \\
 & (4) \;=\; (1) + 3\,\Delta\,1 + 3\,\Delta^2\,1 + \Delta^3\,1 \\
\hline
 & \Sigma : 4 = 4\,(1) + 6\,\Delta\,1 + 4\,\Delta^2\,1 + \Delta^3\,1 \\
 & (5) \;=\; (1) + 4\,\Delta\,1 + 6\,\Delta^2\,1 + \Delta^3\,1\;\Delta^4\,1 \\
\hline
 & \Sigma : 5 = 5\,(1) + 10\,\Delta\,1 + 10\,\Delta^2\,1 + 5\,\Delta^3\,1 + \Delta^4\,1
\end{array}
$$

Hier

Hier ist wiederum augenscheinlich, daß die Coeffizienten, eben diejenigen sind, welche in der Binomialpotenz, in eben dieser Ordnung vorkommen.

8. Nach dem wir nun, die vorhin festgesetzten Bezeichnungen in Gebrauch aufgenommen haben, so wollen wir auch dieses summatorische Glied unserer Reihe $\Sigma : x$, im Ausdruk gelten lassen. Es wird daher

$\Sigma : x = x(1) + x' \Delta 1 + x'' \Delta^2 1 + x''' \Delta^3 1 +$ ꝛc. seyn, welche Form schon dergestalt verglichen ist, so daß statt $x$, nicht nur ganze Zahlen, sondern auch gebrochene, und selbst irrationale, sie mögen positive oder negative seyn, angenommen werden können, in welchen Fällen, dieser Ausdruck sogar, bis ins Unendliche fortgehen würde, wofern nicht die vorgegebene Reihe, endlich bis auf verschwindende Differenzen leitete. Diese Reihen pflegt man algebraische zu nennen, wo man in diesen Fällen, nicht auf inexplicable Funktionen gelangt. Unterdessen gewährt dieser, für das summatorische Glied, erfundene Ausdruk, wenn er ins Unendliche fortgeführet wird, keine Unterstützung, in sofern Differenziationen, oder Summationen anzuordnen sind; weshalb man es hierbey beruhen läßt, gleichwie, wenigstens in gewissen Fällen, das erfundene, summatorische Glied in andere Formen übergehen kann, welche weder der Differenziation, noch Integration widersprechen; auch gehören hieher, alle diejenigen Hülfsmittel, welche ich bey der Differenzialrechnung, weitläuftiger gezeigt habe, deren Erfindung nicht wenig verworren war. Auf folgende Art aber, wird das ganze Verfahren sehr leicht seyn.

9. Zu dem vorhin erfundenen Ausdruck, des summatorischen Gliedes, $\Sigma : x$, addire man mehrere, unter folgender Gestalt enthaltene Formeln.

$(n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n +$ ꝛc. ... $- (x+n)$
obgleich deren Summen gleich Null sind, so drücken dennoch alle, so viel deren auch sind, wenn sie mit $\Sigma : x$, in eins verbunden sind, das summatorische Glied aus. Man summire also für n nach und nach, alle Zahlen 1, 2, 3, 4, ꝛc. so wird der ganze Ausdruck, nach den Vertikalcolumnen, mit den einzelnen Werthen $x$, $x'$, $x''$, ꝛc. übereinstimmend, auf folgende Weise angeordnet werden:

## Allgemeiner Ausdruck für das summatorische Glied.

$$x(1) + x'\Delta 1 + x''\Delta^2 1 + x'''\Delta^3 1 + \text{ꝛc.}$$
$$(1) + x\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x''\Delta^3 1 + x'''\Delta^4 1 + \text{ꝛc.} \ldots - (x+1)$$
$$(2) + x\Delta 2 + x'\Delta^2 2 + x''\Delta^3 2 + x'''\Delta^4 2 + \text{ꝛc.} \ldots - (x+2)$$
$$(3) + x\Delta 3 + x'\Delta^2 3 + x''\Delta^3 3 + x'''\Delta^4 3 + \text{ꝛc.} \ldots - (x+3)$$
- - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - -
$$(n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + x'''\Delta^4 n + \text{ꝛc.} \ldots - (x+n)$$

10. Obschon die Wahrheit dieses Ausdrucks, keinem Zweifel mehr unterworfen ist, so wird es dem ohngeachtet nicht wenig helfen, denselben aus der Form selbst, bestätiget zu haben. Man sammle nehmlich, unter eine Summe die einzelnen Vertikalcolumnen, so wird die erste folgende seyn:

$$(1) + (2) + (3) + \ldots\ldots\ldots + (n) = \Sigma : n$$

Die andere Columne giebt:

$$x[(1) + \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \ldots\ldots + \Delta n]$$

Wenn nun

$$\Delta 1 = (2) - (1); \Delta 2 = (3) - (2); \Delta 3 = (4) - (3); \text{ꝛc.}^{*}$$

so wird diese ganze Summe verkürzt in $x(n+1)$.

Auf

* $\Delta n = (n+1) - (n)$.

Auf gleiche Weise, wird auch die Summe der 3ten Columne seyn

$$x'[\Delta 1 + \Delta^2 1 + \Delta^2 2 + \Delta^2 3 + \Delta^2 4 + \ldots\ldots + \Delta^2 n]$$

und weil

$$\Delta^2 1 = \Delta 2 - \Delta 1;\ \Delta^2 2 = \Delta 3 - \Delta 2 \ldots\ldots \Delta^2 n = \Delta (n+1) - \Delta n.$$

so wird jene Summe zusammengezogen $= x' \Delta (n+1)$. Auf eben diese Art erhellet, daß die Summe der vierten Columne, seyn wird $x'' \Delta^2 (n+1)$ die der 5ten $= x''' \Delta^3 (n+1)$, u. s. f. Die Summe der abzuziehenden letzten Columne ist:

$$(x+1) + (x+2) + (x+3) + \ldots\ldots + (x+n) = \Sigma : (x+n) - \Sigma : x.$$

11. Die Summe aller mittlern Vertikalcolumnen, außer der ersten und letzten, ist also wie wir gesehen haben,

$$x(n+1) + x'\Delta(n+1) + x''\Delta^2(n+1) + x'''\Delta^3(n+1) + \text{ꝛc.}$$

Da aber $x(1) + x'\Delta 1 + x''\Delta^2 1 + x'''\Delta^3 1 + \text{ꝛc.} = \Sigma : x$, wenn nun die einzelnen Glieder, um die Zahl $n$ vermehret worden, so wird die Summe unserer Reihe seyn:

$$x(n+1) + x'\Delta(n+1) + x''\Delta^2(n+1) + \text{ꝛc.} = \Sigma : (x+n) - \Sigma : n;$$

folglich ist die Summe aller Columnen, außer der letzten $= \Sigma : (x+n)$; wenn daher die Summe der letzten Columne, $\Sigma : (x+n) - \Sigma : x$, abgezogen wird, so bleibt die Summe der ganzen Figur $= \Sigma : x$, übrig, nehmlich das verlangte summatorische Glied.

12. Am wunderbahrsten wird es scheinen, daß wir den Werth der Formel $\Sigma : x$, welche durch eine einfache Reihe, genugsam ausgedrückt werden kann, durch eine Nebenreihe unzählbarer Reihen, dargestellt, und

so

so verdeckt gegeben haben; allein bald wird der Gebrauch, dieser äußerst verwickelten Formel, deutlicher werden, wenn wir die Zahl der Horizontalreihe, sogar bis ins Unendliche fortsetzen, welches geschehen wird, wenn wir für n, eine unendliche Zahl annehmen, wie jetzt deutlicher erkläret werden soll.

13. Bezeichnet man also, durch n eine unendliche große Zahl, so wird die Summe der zweiten Vertikalcolumne, welche x (n + 1) ist, das unendlichste Glied unserer Reihe enthalten, und sollte dasselbe auch verschwinden, so werden um so viel mehr, die Summen der folgenden Vertikalcolumnen, sich verlieren, weshalb es in diesem Fall genung ist, bloß die erste Columne mit der letzten, im Calcul beybehalten zu haben. Verschwinden hingegen die unendlichsten Glieder nicht, sondern wären sie unter sich gleich, alsdenn ist es erlaubt, die dritte Columne, nebst den folgenden wegzuwerfen. Sollten aber die zweiten, unendlichen Differenzen verschwinden, so müssen die drey ersten Vertikalcolumnen, in der Rechnung beybehalten werden, und eben so auch vier, wenn erst die dritten, unendlichen Differenzen verschwinden. Vermöge der Unterscheidung dieser Reihen, wollen wir dieselben, in folgende Arten vertheilen.

## Erste Art der Reihen

### deren unendlichste Glieder verschwinden.

14. So oft also solche Reihen vorgegeben werden, so ist es genung, für deren summatorisches Glied, die Glieder der ersten und letzten Vertikalcolumne, im

Cal-

Calcul beyzubehalten, denn auf diese Weise erhalten wir für das summatorische Glied folgenden Ausdruck:

$$\Sigma : x = (1) + (2) + (3) + (4) + \text{rc.}$$
$$- (x+1) - (x+2) - (x+3) - (x+4) - \text{rc.}$$

welcher unendlich fortgehet, und zwar um so mehr, je kleiner der Index war; verschwindet derselbe aber, so geht die ganze Reihe, in Null über, oder sie wird $\Sigma : 0 = 0$, welche mit der Natur der Sache, vollkommen zutrifft; denn wenn die Zahl der zu addirenden Glieder, Null ist, so muß auch nothwendig, die Summe Null seyn.

15. Wenn aber der Index x, eine sehr große Zahl ist, so nähert sich gewiß diese Reihe auch, nur wenig dahin, weshalb jederzeit dergleichen Fälle, auf einem kleinern Index gebracht werden können; denn da

$\Sigma : (x+1) = \Sigma : x + (x+1)$ so wird auf gleiche Art

$\Sigma : (x+2) = \Sigma : x + (x+1) + (x+2)$ seyn, und also überhaupt, wenn i eine ganze Zahl bedeutet

$$\Sigma : (x+i) = \Sigma : x + (x+1) + (x+2) + \ldots + (x+i)$$

Wenn man daher die Summe der Glieder $x+i$ begehret, so ist es hinreichend, die Summe x der Glieder, d. i. $\Sigma : x$ erfunden zu haben. Auf diese Art, können dergleichen Fragen alle, auf die Fälle eingeschränkt werden, in welchen der Index x, sogar um die Einheit vermindert ist, in welchem Falle, die für $\Sigma : x$, vorhin gegebene Reihe, sich außerordentlich der Verschwindung nähert.

16. Eine dergleichen Reduktion, ist dann zuförderst nothwendig, wenn der Index x, eine negative Zahl ist; denn, wenn

Σ:

$$\Sigma : x = \Sigma : (x - 1) + (x),$$ so wird

$$\Sigma : (x - 1) = \Sigma : x - (x)$$ seyn, eben so auch

$$\Sigma : (x - 2) = \Sigma : x - (x) - (x - 1),$$ und

$$\Sigma : (x - 3) = \Sigma : x - (x) - (x - 2)$$ und überhaupt

$$\Sigma : (x - i) = \Sigma : x - (x) - (x - 1) \ldots - (x - i + 1)$$

und auf diese Art, als so viel die negative Zahl $x - i$, größer war, kann die Auflösung jederzeit auf $\Sigma : x$, gebracht werden, so daß $x < 1$ sey.

## Beyspiel.

17. Es sey folgende Reihe gegeben:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x} = \Sigma : x$$

Es wird die Summe der Glieder $x$, in dieser harmonischen Reihe verlangt, wofür $x$ jede, ganze positive Zahl, angenommen werden, und zwar hat alsdann für die Fälle, wo $x$ keine ganze positive Zahl ist, die ganze Sache, keine weitern Schwierigkeiten. Es wird daher in diesem Fall, nach vorhin gegebener Form seyn:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{rc.} \\ - \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{1}{x + 4}\ \text{rc.} \end{array} \right.$$

werden diese beyden Reihen, in eine zusammengezogen

$$\Sigma : x = \frac{x}{x + 1} + \frac{x}{2(x + 2)} + \frac{x}{3(x + 3)} + \frac{x}{4(x + 4)} + \text{rc.}$$

so ist alsdann, die Summe der Reihe, von selbst klar, so oft nehmlich $x$, eine ganze positive Zahl war; also auch:

Wenn

Wenn

| | |
|---|---|
| $x=1$ | $1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+$ ꝛc. |
| $x=2$ | $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{4.6}+$ ꝛc. |
| $x=3$ | $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{1.4}+\frac{3}{2.5}+\frac{3}{3.6}+\frac{3}{4.7}+$ ꝛc. |
| $x=4$ | $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{1.5}+\frac{4}{2.6}+\frac{4}{3.7}+\frac{4}{4.8}+$ ꝛc. |
| u. s. w. | |

welches die merkwürdigsten Reihen sind.

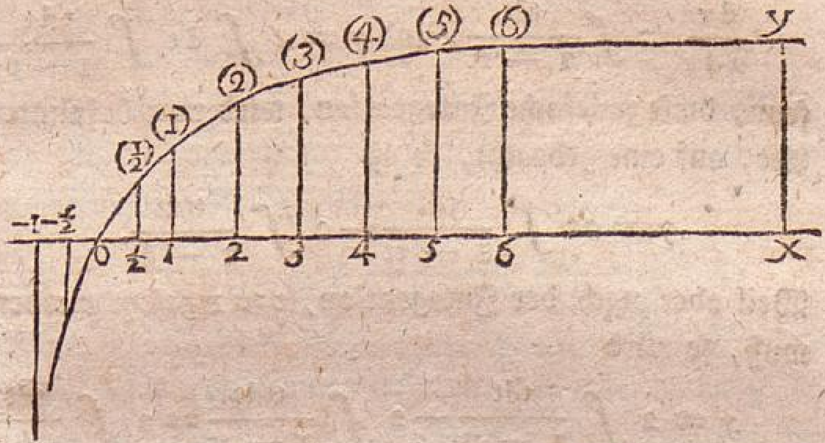
18. Damit dieses deutlicher verstanden werde, wollen wir eine Curve bilden, deren Abscissen $o\,x = x$, mit der Applikate $x\,y = y = \Sigma : x$ übereintreffen, so daß nach denen, über der Axe $o\,x$, angenommenen Intervallen, welche um die Einheit gleich, 0, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4, ꝛc. die folgenden Applikaten seyn mögen.

$$1 \ldots\ldots (1) = 1$$
$$2 \ldots\ldots (2) = 1 + \tfrac{1}{2}$$
$$3 \ldots\ldots (4) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}$$
$$4 \ldots\ldots (4) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \text{ ꝛc.}$$

also wird die Gleichung unter je zween Coordinaten, seyn:

$$y = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2(x+x)} + \frac{x}{3(x+3)} + \frac{x}{4(x+4)} + \text{ꝛc.}$$

Aus




Aus dieser Gleichung können also, alle mittlern Applikaten erkläret werden, und so ist es hinreichend für x, die um die Einheit kleinern Werthe, angenommen zu haben. Daher wenn die Applikate $\frac{1}{2} \ldots (\frac{1}{2})$ der Abscisse $0 \ldots \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ verlanget würde, so findet man

$$\frac{1}{2} \ldots (\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{4.9} + \frac{1}{5.11} + \text{ꝛc}$$

deren Summe auf diese Art, durch Logar thmen bezeichnet werden könnte. Man bilde diese Reihe:

$$y = \frac{t^3}{1.3} + \frac{t^5}{2.5} + \frac{t^7}{3.7} + \frac{t^9}{4.9} + \text{ꝛc.}$$

welche, wenn $t = 1$ angenommen wird, den gesuchten Werth giebt. Durchs Differenziiren aber, bekommt man:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{tt}{1} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{4} + \text{ꝛc.}$$

und wenn von neuem Different: wird

$$\frac{ddy}{2dt^2} = t + t^3 + t^5 + t^7 + \text{ꝛc.} = \frac{t}{1-tt}.$$

Daher wird wechselsweise,

dy

$$\frac{dy}{2dt} = \int \frac{tdt}{1-tt}, \text{ und } y = 2 \int dt \int \frac{tdt}{1-tt}$$

seyn, diese zwiefache Integration, wird nach bekannter Art, auf eine gebracht, so ist

$$y = 2t \int \frac{tdt}{1-tt} - 2 \int \frac{ttdt}{1-dt}.$$

Weil aber nach der Integration, $t = 1$ gesetzt werden muß, so wird

$$y = 2 \int \frac{tdt}{1-tt} - 2 \int \frac{ttdt}{1-tt} = 2 \int \frac{tdt}{1+t}$$

seyn; deswegen wird durchs Integriren $y = 2t - 2l(t+1)$ entstehen, in unserem Fall aber $y = 2 - 2l2$, dessen Werth der nächstwahre 0,61370564 ist.

19. Nachdem nun die Applikate der Abscisse, die mit $\frac{1}{2}$ übereinkommt, erfunden worden, nehmlich $\Sigma : \frac{1}{2} = 2 - 2l2$, so können aus derselben, folgende durch die oben gegebenen Formeln, leicht abgeleitet werden, als:

$$\Sigma : (1 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \Sigma : \tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma : (2 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \Sigma : \tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma : (3 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{7} + \Sigma : \tfrac{1}{2} \text{ ꝛc.}$$

Damit nun auch die vorhergehenden Applikaten, die in der Figur nicht ausgedrückt sind, aus der Formel $\Sigma : (x - i)$ bestimmt werden können, welche wir fanden $\Sigma : (x - i) = \Sigma : x - (x) - (x - 1) - (x - 2) \ldots - (x - i + 1)$ weil in unserem Fall $x = \frac{1}{2}$, so wird die Applikate $\Sigma : (-\frac{1}{2}) = \Sigma : \frac{1}{2} - 2 = -2l2$, und zwar negativ seyn, welche sogar, wenn $x = -1$ genommen wird, unendlich ist. Die unendliche aber, entspringet auch aus den Fällen $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$ ꝛc. innerhalb diesen Intervallen aber, wird

$$\Sigma : -(1 + \tfrac{1}{2}) = \Sigma : \tfrac{1}{2} - 2 + 2$$
$$\Sigma : -(2 + \tfrac{1}{2}) = \Sigma : \tfrac{1}{2} - 2 + 2 - \tfrac{2}{3}$$
$$\Sigma : -(3 + \tfrac{1}{2}) = \Sigma : \tfrac{1}{2} - 2 + 2 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} \text{ seyn ꝛc.}$$

20. Differenziiren wir jetzt, die für die Applikate y, erfundene Reihe so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \text{ꝛc.}$$

Daher drückt diese Reihe, die Tangente des Winkels aus, unter welchem das Element der Curve, in y sich zur Axe neiget; woraus erhellet daß diese Neigung, für die unendliche Abcisse, null werde, das ist, der Zug der Curve, gehet in Unendlichen parallel mit der Axe, folglich wenn $x = 0$ angenommen wird, so bekömmt man die Neigung der Curve selbst, bis zum Unendlichen =

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{6} = 1,\ 644,$$

daher der Winkel $= 58^\circ,\ 42'$. Wird aber $x = 1$ angenommen, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{6} - 1 = 0,$ 644, wo die Neigung $= 32^\circ,\ 48'$ seyn wird. Fährt man nun noch weiter fort, so nimmt die Neigung beständig ab.

21. Gehet man aber rükwärts, bis zu den negativen Abcissen, so haben wir bereits oben gesehen, daß unter denen Fällen, unter welchen $x = -1$, oder $x = -2$, oder $x = -3$, die Applikate unendlich groß werden, und eben so viele Curven, Assymptoten machen. Jetzt aber wird es sich zeigen, daß an diesen Orten $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird, und daselbst die Neigung der Curve $90^\circ$, oder die Tangenten perpendikular nach der Axe gehen werden.

den. Weil nun überdies, die für $\frac{dy}{dx}$ gefundene Reihe, allezeit eine positive Summe hat, so folgt hieraus, daß alle Theile zur Rechten der Curve, anwachsen, die zur Linken hingegen, abnehmen.

22. Eben so auch werden wir, die Integration anwenden, und die Fläche der Curve, vom Anfang bis zum Applikate $xy$, bezeichnen können. Denn aus der erstern Form, zu welcher wir geleitet würden, folgt unmittelbar:

$$\int y\,dx = -\begin{array}{ccccccc} x & + & \tfrac{1}{2}x & + & \tfrac{1}{3}x & + & \text{ꝛc.} \\ l(1+x) & - & l(2+x) & - & l(3+x) & - & \text{ꝛc.} \end{array} + \text{der}$$

Const. welche immer dergestallt bestimmt werden muß, daß in dem Fall $x = 0$, die ganze Fläche verschwindet, daher sie richtig folgendermaaßen auszudrüken ist:

$$\int y\,dx = -\begin{array}{ccccccc} x & + & \tfrac{1}{2}x & + & \tfrac{1}{3}x & + & \text{ꝛc.} \\ l(1+x & - & l(1+\tfrac{1}{2}x) & - & l(1+\tfrac{1}{3}x) & - & \text{ꝛc.} \end{array}$$

Da nun

$$l\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \text{ꝛc.} - \text{ꝛc.}$$

so kann der obere Ausdruck, durch folgende Reihen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \int y\,dx = {} & \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \text{ꝛc.} \\ & + \frac{x^2}{2.4} - \frac{x^3}{3.8} + \frac{x^4}{4.16} - \frac{x^5}{5.32} + \frac{x^6}{6.64} - \text{ꝛc.} \\ & + \frac{x^2}{2.9} - \frac{x^3}{3.27} + \frac{x^4}{4.81} - \frac{x^5}{5.243} + \frac{x^6}{6.729} - \text{ꝛc.} \\ & + \frac{x^2}{2.16} - \frac{x^3}{3.64} + \frac{x^4}{4.256} - \frac{x^5}{5.1224} + \frac{x^6}{6.4896} - \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

23. Nehmen wir nun alle diese Reihen, vertikal zusammen, so bekommen wir:

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\,(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{ꝛc.}) = +0{,}822467.x^2$$
$$-\ \tfrac{1}{3}x^3\,(1 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{243} + \text{ꝛc.}) = -0{,}400685.x^3$$
$$+\ \tfrac{1}{4}x^4\,(1 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{256} + \tfrac{1}{625} + \text{ꝛc.}) = +0{,}270581.x^4$$
$$-\ \tfrac{1}{5}x^5\,(1 + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{243} + \tfrac{1}{1224} + \quad + \text{ꝛc.}) = -0{,}207385.x^5$$

Nun nehme man $x = 1$ an, damit die Fläche o1 (1) herauskomme, und weil die hier gegebenen Dezimalbrüche, sich nur wenig nähern, so bemerke man in jeder Reihe, wo die Zeichen abwechseln, nehmlich:

$$S = a - b + c - d + e - \text{ꝛc.}$$

daß die Summe, sich durch fortgehende Differenzen, so ausdrücken lassen:

$$S = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\Delta a + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a - \tfrac{1}{16}\Delta^3 a + \text{ꝛc.};$$

alsdann kann durch Hülfe der Regel, die Rechnung folgendermaaßen eingerichtet werden:

| | $-\Delta$ | $+\Delta^2$ | $-\Delta^3$ |
|---|---|---|---|
| a) 0,822467 | 0,421782 | 0,291678 | 0,224770 |
| b) 0,400685 | 0,130104 | 0,066908 | 0,041540 |
| c) 0,270581 | 0,063169 | 0,025368 | 0,013047 |
| d) 0,207385 | 0,037828 | 0,012321 | 0,005355 |
| e) 0,169557 | 0,025507 | 0,006966 | 0,002600 |
| f) 0,144050 | 0,018541 | 0,004366 | 0,001426 |
| g) 0,125509 | 0,014175 | 0,002940 | |
| h) 0,111334 | 0,011235 | | |
| i) 0,100099 | | | |

| $+\Delta^4$ | $-\Delta^5$ | $+\Delta^6$ | $-\Delta^7$ | $+\Delta^8$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,183230 | 0,154737 | 0,133936 | 0,118072 | 0,105564 | ꝛc. |
| 0,028493 | 0,020801 | 0,015864 | 0,012508 | | |
| 0,007692 | 0,004973 | 0,003356 | | | |
| 0,002755 | 0,001581 | | | | |
| 0,001174 | | | | | |

24. Von diesen Columnen, deren erste aus der Differenzialrechnung Cap. VI. Theil II. Seite 365 *) erkläret worden ist, geben die obern Zahlen das erste Glied $a$ nebst seinen stetigen Differenzen, die andern aber in absteigender Linie, bringen das Glied $b$, nebst seinen Differenzen, und die dritten das Glied $c$, nebst seinen Differenzen. Da nun die obern Glieder, nur wenig convergiren, so nehmen wir die zwey ersten $a - b$ jetzt wirklich zusammen verbunden, und dann wird $a - b = 0,\ 421782$ seyn: Die Summe der folgenden aber $c - d + e - f +$ 2c.

$$= \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4} \Delta c + \tfrac{1}{8} \Delta^2 c - \tfrac{1}{16} \Delta^3 c + \text{2c.}$$

Verfahren wir nun in der Rechnung, nach dem gegebenen Gesetz, so wird

$$\begin{array}{rl}
\tfrac{1}{2}\, c & = 0,\ 135290 \\
- \tfrac{1}{4}\, \Delta\, c & = 0,\ 015799 \\
+ \tfrac{1}{8}\, \Delta^2 c & = 0,\ 003171 \\
- \tfrac{1}{16}\, \Delta^3 c & = 0,\ 000815 \\
+ \tfrac{1}{32}\, \Delta^4 c & = 0,\ 000220 \\
- \tfrac{1}{64}\, \Delta^5 c & = 0,\ 000077 \\
+ \tfrac{1}{128}\, \Delta^6 c & = 0,\ 000026 \\
\text{und folgenden} & = \underline{0,\ 000010} \\
\text{Summa} & = 0,\ 155408 \\
a - b & = \underline{0,\ 421782} \\
\text{Fläche} & = 0,\ 577190
\end{array}$$

Ich hoffe, daß eine weitere Entwickelung, dieser so merkwürdigen krummen Linie, niemanden mißfällig ist, besonders da die Gleichung für diese Curve, zu den inexplicabeln Funktionen gehört, und ich glaube, daß eine Ueberschreitung unseres Ziels, um eines besonderen Falls willen, nicht unangenehm seyn wird.

Zweyte

*) Der deutschen Uebersetzung. S. 174.

## Zweyte Art der Reihen

### deren erste Differenzen im Unendlichen verschwinden.

25, Zu dieser Art, gehören alle Reihen, deren unendlichsten Glieder unter sich, gleich sind. Damit wir also das summatorische Glied dieser Reihen $\Sigma : x$, ausdrücken können, so ist nichts anders nöthig, als daß die Glieder der zweyten Vertikalcolumne der allgemeinen Form, welche § 9. dargestellt, zum Ausdruck der vorhergehenden Reihe, hinzugefügt werden, deren höchstes Glied besonders anzugeben ist; und weil die einzelnen Horizontalcolumnen, schon aus drey Gliedern bestehen, so wird das begehrte, summatorische Glied $\Sigma : x$, in folgender dreyfachen Reihe erörtert:

$$\left.\begin{array}{lccccc} & +(1) & -(2) & +(3) & -(4) & \\ \Sigma : x = x(1) & +x\Delta 1 & +x\Delta 2 & +x\Delta 3 & +x\Delta 4 & \\ & -(x+1) & -(x+2) & -(x+3) & -(x+4) & \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

welche Form wegen $\Delta 1 = (2) - (1)$; $\Delta 2 = (3) - (2)$; $\Delta 3 = (4) - (3)$; ꝛc. in diese umgeändert werden kann:

$$\left.\begin{array}{lccc} & +\overline{1-x}(1) & +\overline{1-x}(2) & +\overline{1-x}(3) \\ \Sigma : x = x(1) & +x(2) & +x(3) & +x(4) \\ & -(x-1) & -(x+2) & -(x+3) \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe convergirt um desto mehr, je kleiner man x annimmt. Oben ist bereits gelehret worden, daß alle Fälle, dahin reduciret werden können, in welchen x ein Bruch sey, der um die Einheit kleiner ist.

26. Nun wollen wir den allereinfachsten Fall, zuerst erwägen, in welchem alle Glieder der Reihe, unter sich gleich sind, nehmlich $(x) = a$; denn es ergiebt sich von selbst, daß deren summatorisches Glied $a\,x$ sey, dessen Werth unser Ausdruck, jetzt darthun wird.

Denn es wird $\Sigma\, x = x\, a$ seyn:

27. Jetzt erwäge man auch den Fall, wo $(x) = \frac{x+1}{x}$, so daß unsere Reihe $\Sigma : x = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{x+1}{x}$ sey; davon die unendlichsten Glieder, alle um die Einheit äquiret werden müssen. Folglich wird uns unsere Formel geben

$$\Sigma : x = 2x + \left.\begin{array}{lll} + \overline{1-x}\,\frac{2}{1} & + \overline{1-x}\,\frac{3}{2} & + \overline{1-x}\,\frac{4}{3} \\ x \quad \frac{3}{2} & + x \quad \frac{4}{3} & + x \quad \frac{5}{4} \\ \frac{(x+2)}{x+1} - & \frac{(x+3)}{x+2} - & \frac{(x+4)}{x+3} \end{array}\right\} \text{rc.}$$

Hieraus erhellet, wenn $x = 1$ betrachtet wird, $\Sigma : x = \frac{2}{1}$ sey; nimmt man aber $x = 2$, so wird:

$$\Sigma : x = 4 \left.\begin{array}{lll} - 1.\,\frac{2}{1} & - 1.\,\frac{3}{2} & - 1.\,\frac{3}{4} \\ + 2.\,\frac{3}{2} & + 2.\,\frac{4}{3} & + 2.\,\frac{5}{4} \\ - \quad \frac{4}{3} & - \quad \frac{5}{4} & - \quad \frac{6}{5} \end{array}\right\} \text{rc.} = 4 - \frac{2}{1} + \frac{1}{2}$$

28. Dieser Fall aber, kann leicht auf vorhergehende Art, reduciret werden; denn da das Hauptglied $(x) = \frac{x+1}{x}$, so wird dasselbe in Theile aufgelöset, geben $(x) = 1 + \frac{1}{x}$; dieserwegen bilde man zwey Reihen, und zwar die erste aus dem allgemeinen Gliede $1$, die andere aber aus dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{x}$; werden sodann, diese beyden Reihen vereint genommen, so geben sie die verlangte Summe $\Sigma : x$; es wird nehmlich

$$\Sigma : x = \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots + x \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x} \end{array}$$ seyn.

Da nun bereits, der obern Reihe Summe $x$ ist, die

unter

untere hingegen, durch die erste Art, entwickelt werden kann, so bekommt man:

$$\begin{array}{l} \qquad\quad x. + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{ꝛc.} \\ \Sigma : x = -\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+4} - \text{ꝛc.} \end{array}$$

obgleich dieser Ausdruck, viel einfacher ist, als der vorherhergehende, so liefert derselbe nichts desto weniger, gleichen Werth, so daß wenn $x = \frac{1}{2}$ genommen wird, so giebt uns der erstere Ausdruk

$$\Sigma : x = 1 \left. \begin{array}{l} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{1} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{5}{4} \\ + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{6}{5} \\ - \tfrac{5}{3} - \tfrac{7}{5} - \tfrac{9}{7} - \tfrac{11}{9} \end{array} \right\} \text{ꝛc.}$$

Werden nun diese Glieder nach der Ordnung verbunden, so wird

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.24} + \frac{1}{9.40} + \frac{1}{11.60} + \text{ꝛc.}$$

dessen Ordnung, aus folgender Form deutlicher seyn wird:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1.3.4} + \frac{1}{2.5.6} + \frac{1}{3.7.8} + \frac{1}{4.9.10} + \frac{1}{5.11.12} + \text{ꝛc.}$$

Der andre Ausdruck aber, giebt folgende Reihen:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \begin{array}{l} + 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{ꝛc.} \\ - \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{7} - \tfrac{2}{9} - \text{ꝛc.} \end{array}$$

welche zusammen geben werden:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{4.9} + \text{ꝛc.}$$

29. Aus diesem Beyspiele erhellet, daß die aus der zweiten Art, hergeleitete Reihe, mehr als die letztere aus der erstern, convergire, weshalb es der Mühe werth seyn wird, die Convergenz der erstern Reihe, auf das aufmerksamste zu erwägen. Es entstehet nehmlich,

lich, jedes Glied dieser Reihe, aus diesen drey Theilen:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}-\frac{2n+3}{2n+1},$$

da sich selbige nun zunächst aufheben, so wird die Summe der beyden erstern, am nächsten der dritten gleich seyn, woher diese bemerkenswerthe Formel erfolgt:

$$\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}=\frac{2(n+3)}{2n+1},$$

welches um so näher der Wahrheit kommt, je größer die Zahl n war. Ziehet man nun beiderseits 2 ab, so wird zunächst

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{4}{2n+1} \text{ seyn.}$$

30. Eine solche Reduction, kann jederzeit nach der ersten Art statt finden, wenn die vorgegebene Reihe, zuletzt mit einem endlichen Werth convergirt; wenn aber die Glieder der Reihe, zuletzt unendlich zunehmen, so kann diese Reduction nicht weiter statt haben; und man muß sich nothwendig, an die zweite Art halten. Ein solcher Fall ist, wo $(x)=\sqrt{x}$, denn wenn n eine unendliche Zahl bezeichnet, so werden je zwey benachbarte unendliche Glieder, $\sqrt{n}$ und $\sqrt{n+1}$ seyn, deren Differenz $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ist, und also verschwindet. In diesem Fall also, ist unsere Reihe

$$\Sigma : x=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots\ldots+\sqrt{x}$$

folglich erhalten wir nach den gegebenen Vorschriften, diesen Ausdruck:

$$\Sigma : x = x + \left.\begin{array}{cccc} & +\,\overline{1-x}\sqrt{1} & +\,\overline{1-x}\sqrt{2} & +\,\overline{1-x}\sqrt{3} \\ & x\sqrt{2}\,+ & x\sqrt{3}\,+ & x\sqrt{4} \\ & -\sqrt{x+1} & -\sqrt{x+2} & -\sqrt{x+3} \end{array}\right\}\text{ꝛc.}$$

wie sehr nun diese Reihe convergirt, sehen wir in dem Falle $x = \frac{1}{2}$, also wird

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \left.\begin{array}{cccc} +\frac{1}{2}\sqrt{1} & +\frac{1}{2}\sqrt{2} & +\frac{1}{2}\sqrt{3} & +\frac{1}{2}\sqrt{4} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,+ & \frac{1}{2}\sqrt{3}\,+ & \frac{1}{2}\sqrt{4}\,+ & \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{5}{2}} & -\sqrt{\frac{7}{2}} & -\sqrt{\frac{9}{2}} \end{array}\right\}\text{ꝛc. seyn}$$

davon jedes Glied $\frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n+1} - \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ seyn wird, daß also um so mehr, dem Nichts näher kommen muß, je größer die Zahl $n$ war, weshalb am nächsten $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = \sqrt{2(2n+1)}$. Werden hiervon die Quadrate genommen, so erhalten wir

$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} = 2\,(2n+1)$, also auch

$2\sqrt{n(n+1)} = 2n + 1$. Nimmt man hiervon, von neuem die Quadrate, so wird $4nn + 4n = 4nn + 4n + 1$, welches Verhältniß also, der Gleichheit am nächsten kommt. Uebrigens verdient hier bemerkt zu werden, daß die wahren Werthe, der statt $x$ angenommenen Brüche, dergestallt transcendent seyn werden, so daß man sie durch keine algebraischen Formeln, auszudrücken, vermögend ist. Also wird auch jeder für $x$ angenommene Werth, zu einem besondern Geschlecht, von Transcendenten gehören.

31. Ehe wir diese Art verlassen, wollen wir noch einen äußerst wichtigen Lehrsatz, die Convergenz der Formeln betreffend, beyfügen, der noch weit allgemeiner ist, als das, was wir kurz vorher angeführet haben.

Lehr-

## Lehrsatz.

Folgende Gleichheit:

$$(\beta - \alpha)\sqrt[\mu]{n^\nu} + \alpha\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu} = \beta\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$$

nähert sich um so mehr der Wahrheit, je größer die Zahl $n$ genommen, und zugleich je kleiner der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ war, wenn nur der Exponent $\frac{\nu}{\mu}$, um die Einheit kleiner ist. Es kommt aber diese Gleichheit, wenn $\nu$ negativ genommen wird

$$\frac{\beta - \alpha}{\sqrt[\mu]{n^\nu}} + \frac{\alpha}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}} = \frac{\beta}{\sqrt[\mu]{\left(n + 1\,\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}}$$

der Wahrheit, ohne die letztere Bedingung, um so mehr näher, je größer die Zahl $n$, und je kleiner der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ war. Dieselbe kann auch, unter eben diesen Bedingungen, auf Logarithmen übergetragen werden, und zwar, daß theils:

$$(\beta - \alpha)\, l\, n + \alpha\, l\,(n+1) = \beta\, l\left(n + \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

als $\frac{\beta - \alpha}{l\, n} + \frac{\alpha}{l\,(n+1)} = \frac{\beta}{l\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ sey.

Be-

## Beweis.

32. Dieser Lehrsatz folgt aus der, für diese Art gegebene allgemeine Auflösung, deren jedes Glied, aus diesen Theilen $\overline{1-x}(n) + x(n+1) - (n+x)$ bestehet, und um so kleiner wird, je größer man die Zahl $n$ nimmt, die aus dem Bruche $x$, welcher um die Einheit kleiner ist, entstehet. Setzen wir nun $x = \frac{\alpha}{\beta}$ und $(x) = \sqrt[\mu]{x^\nu}$, als auch $(n) = \sqrt[\mu]{n^\nu}$, so ist nothwendig daß $\frac{\mu}{\nu} < 1$ sey, weil sonst die unendlichsten Glieder, keine verschwindenden Differenzen haben würden. Diese Substitutionen aber, liefern jene erstern Formeln, welche im Lehrsatz gegeben würden. Wenn man hingegen den Bruch $\frac{\mu}{\nu}$, negativ annimmt, so wird die vorgegebene Reihe, alsdann in der ersten Art enthalten seyn, und also werden die unendlichsten Glieder selbst, in Nichts übergehen.

33. Damit nun der Sinn dieses Lehrsatzes, deutlicher verstanden werde, so muß bemerkt werden, daß diese Formeln genau, in vier Fällen mit der Wahrheit übereinkommen; nehmlich 1.) wenn $\alpha = 0$, 2.) wenn $\alpha = \beta$; 3.) wenn $\nu = 0$; 4) wenn für $n$ eine unendliche Zahl gesetzt wird; außerdem aber giebt es noch, einen 5ten Fall, wo in der erstern Form $\mu = \nu$ oder $\sqrt[\mu]{n^\nu} = n$ ist.

## Dritte Art der Reihen,

### deren zweyte Differenzen erst im Unendlichen verschwinden.

34. Dies ereignet sich, so oft die unendlichsten Glieder, eine arithmetische Progression machen, daher man die vorhin für $\Sigma : x$, in der erstern Art gefundene Formel, auf diesen Fall anwenden kann, wenn noch überdies, die einzelnen Glieder der dritten Vertikalcolumne, hinzugefüget werden. Auf diese Weise kann das summatorische Glied, folgendermaaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \Sigma : x = {} & x(1) + (1) + (2) + (3) \ldots\ldots + (n) \\ & + x\Delta 1 + x\Delta 2 + x\Delta 3 \ldots\ldots + x\Delta n \\ & x'\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x'\Delta^2 2 + x'\Delta^2 3 \ldots\ldots + x'\Delta^2 n \\ & -(x+1) - (x+2) - (x+3) \ldots\ldots - (x+n) \end{aligned}$$

35. Jetzt wollen wir diesen Ausdruck, in eine zum Gebrauch mehr bequemere Form, verwandeln, und zwar statt $x$, den Werth desselben $\frac{xx - x}{2}$ schreiben, alsdann aber wegen $\Delta n = (n + 1) - (n)$ und $\Delta^2 n = (n + 2) - 2(n + 1) + (n)$ setzen. Wenn nun diese Werthe substituiret worden, so gehet die letztere Columne, der vorhergehenden Formel, in diese Form über:

$$(n) + x(n + 1) + \frac{xx - x}{2}(n + 2)$$

$$- x(n) - \overline{xx - x}(n + 1)$$

$$+ \frac{xx - x}{2}(n)$$ diese Glieder zusammengenommen, geben:

$$\frac{xx - 3x + 2}{2}(n) - \overline{xx - 2x}(n + 1) + \frac{xx - x}{2}(n + 2).$$

Se-

Setzen wir nun der Kürze wegen, $\frac{xx - 3x + 2}{2} = p$; $xx - 2x = q$ und $\frac{xx - x}{2} = r$, so kann das verlangte summatorische Glied, in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\Sigma : x = \frac{3x - xx}{2}(1) + \frac{xx - x}{2}(2)$$
$$+ p(1) - q(2) + r(3) - (x + 1)$$
$$+ p(2) - q(3) + r(4) - (x + 3)$$
$$+ p(3) - q(4) + r(5) - (x + 3)$$

daher convergirt diese Reihe außerordentlich.

36. Hieraus können wir nun einen neuen Lehrsatz, der dem vorhergehenden ähnlich, aber weit deutlicher ist, herleiten, indem wir wie vorher $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $(n) = \sqrt[\mu]{n^\nu}$ setzen, wo es schon genug ist, wenn der Exponent $\frac{\nu}{\mu}$ zwiefach kleiner; um so mehr aber stehet es frey, diesen Exponenten als negativ zu nehmen. Dieser Lehrsatz lautet:

Diese Gleichheit

$$(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + 2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu} - (2\alpha\alpha - 4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n + 1)^\nu} +$$
$$(\alpha\alpha - \alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n + 2)^\nu} = 2\beta\beta\sqrt[\mu]{\left(n + \frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$$

wird der Wahrheit desto näher kommen, je größer die Zahl n, und der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$, nur wenig von der Einheit unterschieden, und $\frac{\nu}{\mu}$

zwie-

zwiefach kleiner ist. Wird aber $\mu$ negativ genommen, so ist selbige weit genauer.

$$\frac{\alpha\alpha - 3\alpha\beta + 2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{n^\nu}} - \frac{2\alpha\alpha - 4\alpha\beta}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}} + \frac{\alpha\alpha - \alpha\beta}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}} = \frac{2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}}$$

Auch können statt der Wurzelformeln, Logarithmen angenommen werden.

37. Die Wahrheit dieses Lehrsatzes, wird auch durch folgende vier Fälle bestätiget: I. $\alpha = 0$; II. $\alpha = \beta$; III. $\nu = 0$. IV. $n = \infty$. Welches überdies ebenfalls geschiehet, wenn nach der erstern Form, entweder $\nu = \mu$, oder $\nu = 2\mu$, so daß $\sqrt[\mu]{n^\nu}$ entweder $n$ oder $nn$. Folglich bekommen wir sechs Fälle, nach denen dieser Lehrsatz, nicht im geringsten von der Wahrheit abweicht, woraus leicht zu verstehen ist, daß unter allen übrigen Fällen, der Irrthum nicht merklich seyn könne.

38. Diesen Lehrsatz können wir noch allgemeiner machen, indem wir statt $n$, $\frac{n}{c}$ setzen, und allenthalben mit der gehörigen Potenz $c$, multipliziren, wodurch die Brüche gehoben werden. Auf diese Art wird die erstere Form seyn:

$$(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + 2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu} - (2\alpha\alpha - 4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu}$$
$$+ (\alpha\alpha - \alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu} = 2\beta\beta\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha c}{\beta}\right)^\nu}$$

Die andere Form aber, weicht von dieser nicht ab, als in sofern, daß die Wurzelausdrücke in den Nenner übergehen, welches auch von den Logarithmen zu verstehen ist.

39. Diesen Lehrsatz wollen wir, mit einem Beyspiel erläutern. Es sey also $\alpha = 1$ und $\beta = 2$, so werden

die

die in jenem Lehrsatz enthaltenen Gleichheiten, folgende seyn.

$$3\sqrt[\mu]{n^{\nu}} + 6\sqrt[\mu]{(n+c)^{\nu}} - \sqrt[\mu]{(n+2c)^{\nu}} = 8\sqrt[\mu]{(n+\tfrac{1}{2}c)^{\nu}}$$

$$\frac{3}{\sqrt[x]{n^{\nu}}} + \frac{6}{\sqrt[\mu]{(n+1)^{\nu}}} - \frac{1}{\sqrt[\mu]{(n+2)^{\nu}}} = \frac{8}{\sqrt[\mu]{(n+\frac{1}{2})^{\nu}}}$$

Wenden wir die erstere Form, auf Logarithmen an, so wird $3\,l\,n + 6\,l(n+c) - l(n+2c) = 8\,l(n+\tfrac{1}{2}c)$; nun sey $n = 10$ und $c = 2$, so bekommt man:

$$3\,l\,10 + 6\,l\,12 - l\,14 = 8\,l\,11.$$

Nach geschehener Entwickelung erfolgt:

$$\begin{aligned} 3\,l\,10 &= 3{,}0000000 \\ 6\,l\,12 &= \underline{6{,}4750872} \\ &\phantom{=}\ 9{,}4750827 \\ l\,14 &= 1{,}1461280 \\ 8\,l\,11 &= \underline{8{,}3311416} \\ &\phantom{=}\ 9{,}4772696 \end{aligned}$$

Also ist die Differenz von $l\,14 + 8\,l\,11$ u. $3\,l\,10 + 6\,l\,12 =$ 0,0021824, die um so kleiner herauskommen würde, wenn man der Zahl $n$, einen größern Werth beylegen wollte.

40. In Ansehung des summatorischen Gliedes, der vorgegebenen Reihe, verdient zuförderst bemerkt zu werden, daß sowohl die Differenziation, als Integration leicht geschehen könne, wenn ein veränderlicher Index $x$, angenommen wird, wie dies bereits in der ersten Art, hinlänglich gezeigt worden ist, wo das summatorische Glied $\Sigma : x$, als eine Applikate einer Curve betrachtet ward, indem der Index $x$, sich auf die Abscisse bezog, weshalb ich in der Differenzialrechnung, vorzüglich die inexplicabeln Funktionen, erforscht habe.

41. Aus der allgemeinen Formel, für das gegebene summatorische Glied $\Sigma : x$, wollen wir hier ebenfalls, den Fall der harmonischen Reihe entwickeln, woselbst

$$\Sigma : x = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x} \text{ ist,}$$

und den Werth derselben, für den Index $x = \frac{1}{2}$ suchen, also wegen

$$(x) = \frac{1}{x};\ p = \tfrac{7}{8};\ q = -\tfrac{3}{4};\ r = -\tfrac{1}{8}$$

erhalten wir:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8} - \tfrac{1}{16} \left.\begin{array}{l} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} \\ + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{20} \\ - \frac{1}{24} - \frac{1}{32} - \frac{1}{40} - \frac{1}{48} \\ - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \frac{2}{9} \end{array}\right\} \text{rc.}$$

$$\text{oder } 8\,\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{2} \left.\begin{array}{l} + \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} \\ + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{6}{5} \\ - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ - \frac{16}{3} - \frac{16}{5} - \frac{16}{7} - \frac{16}{9} \end{array}\right\} \text{rc.}$$

Ziehen wir die einzelnen Columnen, in eine Summe zusammen, so wird $8\,\Sigma : \frac{1}{2} = \frac{6}{1.2.3.5} + \frac{6}{2.3.4.5} + \frac{6}{3.4.5.7} + \frac{6}{4.5.6.9} +$ seyn und zwar convergirt diese Reihe, weit mehr, als diejenige, welche wir in der zweyten Art fanden.

42. Wenn wir aber die Glieder, nicht zusammen ziehen, sondern nur die verbinden, welche einerley Nenner haben, und zwar mit Weglassung der untersten Reihe, so bekommen wir

$$8\,\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{2} + \tfrac{3}{1} + \tfrac{9}{2} \begin{array}{l} + 8\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{2c.}\right. \\ - 16\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{2c.}\right) \end{array}$$

oder schreiben wir, statt der obern Reihe

$$16\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} + \text{2c.}\right)$$

so haben wir

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma : \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} + \text{2c.}$$

addiren wir beyderseits

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{2c. so wird}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma : \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} + l2 = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4};\ \text{folglich}$$

$\Sigma : \frac{1}{2} = 2 - 2\,l2$ deren Werth vorzüglich, mit jenem übereinkommt, welcher in der ersten Art gegeben worden ist.

# Supplement.

## Von den inexplikabeln Funktionen der Form. $\pi : x = A \,.\, B \,.\, C \,.\, D \,.\, E \ldots\ldots X.$

1. Hier sind die Faktoren $A \,.\, B \,.\, C \,.\, D$ 2c. Glieder einer gewissen Reihe, mit den Anzeigern 1, 2, 3, 4, 2c. übereinstimmend, und $X$ das Glied, welches mit dem Index $x$ übereintrifft; die Faktoren hingegen, welche den folgenden Anzeigern $x + 1$; $x + 2$; $x + 3$; 2c. entsprochen, will ich mit $X'$, $X''$, $X'''$ 2c. bezeichnen. Hieraus erhellet sogleich, daß $\pi : (x + 1) = X' \,.\, \pi : x$, und $\pi : (x + 2) = X' \,.\, X'' \,.\, \pi : x$, seyn wird, und so ferner. Die vorhergehenden aber, werden $\pi : (x - 1) = \frac{\pi : x}{X'}$ seyn, 2c. Hieraus ist zu ersehen, daß es hinreichend sey, wenn man nur diese Formeln, für die um die Einheiten kleineren Werthe, von $x$, bezeichnet.

2. So

2. So oft nun x, eine ganze positive Zahl war, so ergeben sich die Werthe von $\pi : x$ von selbst. Es wird nemlich

$$\pi : 1 = A;\ \pi : 2 = AB;\ \pi : 3 = ABC;\ \text{ꝛc.}$$

Wenn aber x keine ganze, positive Zahl ist, so wird das Produkt, welches wir mit $\pi : x$ bezeichnen, eine inexplikable Funktion von x, wofern nicht etwan die Faktoren A, B, C, D ꝛc. so beschaffen wären, daß die vorhergehende, durch die nachfolgenden aufgehoben würden, so wie sich dies in dieser Form ereignet:

$$\pi : x = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{5} \cdot \ldots \ldots \frac{x}{x + 1}$$

Wenn demnach $\pi : x = \frac{1}{x + 1}$ bekannt geworden, oder auch in diesem Beyspiel:

$$\pi : x = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{15}{16} \cdot \tfrac{24}{25} \ldots \ldots \frac{xx + 2x}{(x + 1)^2};$$ so wird

$$\pi : 1 = \frac{3}{2.2};\ \pi : 2 = \tfrac{2}{3} = \frac{4}{2.3};\ \pi : 3 = \tfrac{5}{8} = \frac{5}{2.4}$$

$$\pi : 4 = \tfrac{3}{5} = \frac{6}{2.5};\ \pi : 5 = \frac{4}{2.6}$$

seyn, woraus erhellet, daß überhaupt $\pi : x = \frac{x + 2}{2(x + 1)}$ seyn werde.

3. Die inexplikabeln Fälle, mit Logarithmen hingegen, gehören zur vorhergehenden Dissertation; denn es wird

$$l\pi : x = lA + lB + lC \ldots + lX$$ seyn,

also giebt diese Form, wenn sie mit jener abgehandelten verglichen wird, folgende Werthe:

$$\Sigma : x = l\pi : x;\ (1) = lA;\ (2) = lB;\ (3) = lC;\ \text{ꝛc.}$$

und

und $(x) = 1X$, alsdann aber ist $(x + 1) = 1X'$; $(x + 2) = 1X''$; ꝛc., also können wir nach beobachteter Uebereinkunft, die bereits abgehandelten Arten, auf gegenwärtigen Fall anwenden.

## Erste Art,

### in der die Logarithmen der unendlichsten Faktoren verschwinden, oder diese Faktoren mit der Einheit äquiret worden.

4. Da wir also für diese Art, nach eingeführten Werthen erhalten:

$$1\pi : x = 1A + 1B + 1C + 1D + \text{ꝛc.}$$
$$- 1X' - 1X'' - 1X''' - 1X^{IV} - \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn wir bis auf Zahlen hinaufgehen,

$$\pi : x = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X^{IV}} \cdot \text{ꝛc. seyn.}$$

weshalb hier keine Beyspiele gegeben werden, weil bereits mehrere in der Differenzialrechnung, sind entwickelt worden.

## Zweyte Art,

### in der die unendlichsten Faktoren unter sich, gleich sind.

5. Da die Logarithmen derselben, ebenfalls unter sich gleich seyn werden, so verschwinden auch alle ersten Differenzen, folglich wollen wir die §. 25. gefundene Form, hierauf anwenden, so wird:

$$l\pi : x = \left.\begin{array}{rrrr} + \overline{1 - xlA} & + \overline{1 - xlB} & + \overline{1 - xlC} & \\ xlA + & xlB + & xlC + & xlD \\ - & lX' - & lX'' - & lX''' \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

und wenn man bis auf Zahlen hinaufgehet, so werden wir haben:

$$\pi : x = A^x \cdot \frac{A^{1-x} B^x}{X'} \cdot \frac{B^{1-x} C^x}{X''} \cdot \frac{C^{1-x} D^x}{X'''} \cdot \text{ꝛc.}$$

## Dritte Art,

### in der die unendlichsten Glieder, eine geometrische Progreßion ausmachen.

6. Da die Logarithmen dieser Glieder, eine geometrische Progreßion ausmachen, so verschwinden deren zweyte Differenzen. Damit wir nun den §. 35. gefundenen Ausdruck, auf diesen Fall anwenden können, so ist der Kürze wegen zu bemerken, das angesetzt war

$$p = \frac{xx - 3x + 2}{2};\ q = xx - 2x;\ \text{und } r = \frac{xx - x}{2}$$

daher wir erhalten

$$l\pi : x = \left.\begin{array}{l} + plA + plB + plC \\ \frac{3x - xx}{2} lA - qlB - qlC - qlD \\ \frac{xx - x}{2} lB + rlC + rlD + rlE \\ - lX' - lX'' - lX''' \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

Setzen wir hier ferner Kürze halber,

$$\frac{xx - 3x}{2} = m, \text{ und } \frac{xx - x}{2} = n,$$

so werden wir, bis auf Zahlen aufsteigend, diesen Ausdruck erhalten:

$\pi$ :

$$\pi : x = \frac{B^n}{A^m} \cdot \frac{A^p C^r}{B^q X'} \cdot \frac{B^q D^r}{C^q X''} \cdot \frac{C^q E^r}{D^q X'''} \cdot \text{rc.}$$

7. Auf diese Weise hoffe ich, die Lehre von den inexplikabeln Funktionen, welche in der Differenzialrechnung nicht genau, und deutlich genung auseinandergesetzt worden, fast gänzlich erschöpft zu haben, so daß man nichts weiter verlangen wird; welches um so nöthiger schien, da dies Argument bisher, noch von niemanden abgehandelt worden war, und von äußerster Wichtigkeit, bey Interpolierung der Reihen ist, auch hieraus die Symptome der krummen Linien zu erforschen waren, deren Applikate, durch inexplicable Funktionen, ausgedrückt werden.

---

# Anmerkungen.

## Anmerkung nach Cap. II. Theil I.

### I.

Es sey die Differenzialgleichung $dy + yXdx = Zdx$ gegeben, in welcher $X$ u. $Z$ jede Funktion, der veränderlichen $x$ ausdrücken, so ist bekannt, daß man die Integration dieser Gleichung, erhalten kann, wenn man $y = uz$ setzt, woraus $udz + zdu + uzXdx = Zdx$ entstehet, und wo durch einen geschickten Werth, der Größe $u$, oder $z$, zwey Glieder gleich Null gesetzt werden können. Wir wollen daher $zdu + uzXdx = 0$ annehmen, so wird durch die Division mit $z$, $du$