Supplement zu L. Eulers Differenzialrechnung

Grüson, Johann Philipp

Berlin, 1798

Anmerkungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52957

$$\pi : x = \frac{B^n}{A^m} \cdot \frac{A^p C^r}{B^q X'} \cdot \frac{B^q D^r}{C^q X''} \cdot \frac{C^q E^r}{D^q X'''} \cdot \text{2c.}$$

7. Auf diese Weise hoffe ich, die Lehre von den inexplikabeln Funktionen, welche in der Differenzialrechnung nicht genau, und deutlich genung auseinandergesetzt worden, fast gänzlich erschöpft zu haben, so daß man nichts weiter verlangen wird; welches um so nöthiger schien, da dies Argument bisher, noch von niemanden abgehandelt worden war, und von äußerster Wichtigkeit, bey Interpolierung der Reihen ist, auch hieraus die Symptome der krummen Linien zu erforschen waren, deren Applikate, durch inexplicable Funktionen, ausgedrückt werden.

Anmerkungen.

Anmerkung nach Cap. II. Theil I.

1.

Es sey die Differenzialgleichung $dy + yXdx = Zdx$ gegeben, in welcher X u. Z jede Funktion, der veränderlichen x ausdrücken, so ist bekannt, daß man die Integration dieser Gleichung, erhalten kann, wenn man $y = uz$ setzt, woraus $udz + zdu + uzXdx = Zdx$ entstehet, und wo durch einen geschickten Werth, der Größe u, oder z, zwey Glieder gleich Null gesetzt werden können. Wir wollen daher $zdu + uzXdx = 0$ annehmen, so wird durch die Division mit z, du

$+ uXdx = 0$ werden, folglich $\frac{du}{u} = - Xdx$; nimmt man hiervon das Integral, so kommt $lu = -\int Xdx$, d. i. $u = e^{-\int Xdx}$, wenn nehmlich e, gleich der Basis der hyperbolischen Logarithmen, angenommen wird. Wenn dies geschehen, so wird die gegebene Gleichung in $udz = Zdx$ umgekehrt, und man erhält $dz = \frac{Zdx}{u}$ und durchs Integriren $z = \int \frac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx$, so wie endlich $y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}$

2. Wenn diese Methode, fleißig erwogen wird, so wird daraus deutlich erhellen, daß man dieselbe mit glüklichem Erfolge, auf jene Differenzialgleichungen übertragen könne, welche eben diese Form, als vorhergehende Gleichung haben, vorausgesetzt, daß sie mit endlichen Differenzen, gegeben werden.

Es sey folgende Gleichung $\Delta y + My\Delta x = N\Delta x$, oder $\Delta y + My = N$ (wenn nehmlich Δx für die Einheit genommen wird) in welcher die Größen M und N, die Funktionen jeder veränderlichen x bezeichnen. Es sey zuerst $y = uz$, so wird nach dieser Hypothese endlicher Differenzen, $\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z$ seyn; und daher gehet diese Gleichung über in:

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Muz = N.$$

Gesetzt daß vor zwey Gliedern $z\Delta u + Muz = 0$, so entstehet $\Delta u + Mu = 0$, oder $\frac{\Delta u}{u} = - M$. Für die

die Integration dieser Gleichung, nach dieser Hypothese der endlichen Differenz Δu, nehme ich $u = e^t$, so erhalte ich $u + \Delta u = e^{t + \Delta t}$, und $\Delta u = e^t \left(e^{\Delta t} - 1\right)$, woraus $\frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = - M$ oder $e^{\Delta t} = 1 - M$ wird; vermittelst der Logarithmen $\Delta t = l\,(1 - M)$ und hierauf erfolgter Integration, bekommen wir $t = \Sigma l(1 - M)$. Es ist aber, wie aus der Analysis bekannt, das Aggregat aus den Logarithmen mehrerer Zahlen, gleich dem Logarithmus des Produkts, aller dieser Zahlen; wenn wir also durch $\pi\,(1 - M)$ das stetige Produkt, aller in dieser Formel $1 - M$ enthaltenen Größen, ausdrücken, so entstehet $t = l\pi\,(1 - M)$ und deshalb $u = e^t = \pi\,(1 - M)$. Durch den bereits genannten beyden, in Nichts übergehenden Gliedern, wird die obere Gleichung in $u\Delta z + \Delta u \Delta z = N$ verändert, und man erhält $\Delta z = \frac{N}{u + \Delta u}$, so wie durch das Integriren $z = \Sigma \frac{N}{u + \Delta u}$. Da aber bereits $u = \pi\,(1 - M)$ und wenn das nach M nächstfolgende Glied, durch M' bezeichnet wird, so kommt $u + \Delta u = \pi\,(1 - M')$; also auch $z = \Sigma \frac{N}{\pi(1 - M')}$, und weil $y = zu$, so wird

$$y = \pi\,(1 - M)\,\Sigma \frac{N}{\pi(1 - M')},$$

oder wenn irgend eine beständige Größe A, addiret wird, so erhalten wir:

$y =$

$$y = *(1 - M)\left(A + \Sigma \frac{N}{*(1 - M')}\right).$$

Beyspiele.

Es sey die Gleichung $y + (x+1)\Delta y + a(2x+1) = 0$ gegeben, man soll den besondern Werth von y finden.

Diese Gleichung auf die allgemeine Form $\Delta y + My = N$ reducirt, giebt

$$\Delta y + \frac{1}{x+1} y = - \frac{a(2x+1)}{x+1}$$

folglich bekommen wir

$$M = \frac{1}{x+1};\ N = - \frac{a(2x+1)}{x+1};\ 1 - M = \frac{x}{x+1};$$

demnach wird das Produkt aller Werthe der Formel $\frac{x}{x+1}$, die man erhält, wenn in derselben statt x, nach und nach $x-1, x-2, \ldots 3, 2, 1$ substituiret werden; nehmlich $\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \ldots \frac{1}{2}$, seyn, also wird das durch $*(1-M)$ bezeichnete, $= \frac{1}{x}$; jener hingegen durch $*(1 - M')$ ausgedrückte, $= \frac{1}{x+1}$

Folglich bekommt man, durch diese substituirten Werthe, in der Gleichung

$$y = *(1 - M)\left(A + \Sigma \frac{N}{*(1 - M')}\right)$$

$$y = \frac{1}{x} [A - \Sigma a (2x + 1)] = \frac{A}{x} - 2a \frac{\Sigma x}{x} - a \frac{\Sigma 1}{x}.$$

Im

Im §. 60. aber ward gefunden

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x, \text{ und } \Sigma x = \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x$$

also wird $y = \frac{A}{x} - ax$ seyn.

3. Nun sey die Gleichung $y' = Ry + T$ gegeben, in welcher y' ein Glied bezeichnet, welches in der Reihe der Größen y zunächst auf y folget: folglich weil $y' = y + \Delta y$, so gehet die Gleichung über in $\Delta y + (1 - R)y = T$. Wird diese Gleichung, mit der vorhergehenden verglichen, so kommt

$$1 - R = M; \; T = N,$$

Man erhält demnach für den Werth der Größe y, folgenden Ausdruck:

$$y = \pi R \left(A + \Sigma \frac{T}{\pi R'} \right)$$

Wenn R eine beständige Größe ist, so erhellet, daß die Größen πR und $\pi R'$, nichts anders, als die Potenzen von R sind, deren Exponent mit der, in dieser Reihe y, den Ort oder Index bezeichnenden Zahl, der Glieder y und y', äquiret wird. Es sey also m diese Zahl, oder der Index des von y besetzten Orts, so daß y^m eben so viel als y' sey, so erhält man die Gleichung $y^m = R^m \left(A + \Sigma \frac{T}{R^{m+1}} \right)$. Ist T beständig, so wird $\Sigma \frac{T}{R^{m+1}} = T \Sigma \frac{1}{R^{m+1}}$, woselbst die durch $\frac{1}{R^{m+1}}$ dargestellten Glieder, eine geometrische Progression ausmachen, deren Summe sogleich gefun-

gefunden wird; diese Summe von $\frac{1}{R}$ anfangend, wird S genannt; nehmlich

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \ldots + \frac{1}{R^m} = S,$$

multiplizirt man mit R, so erhält man:

$$1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \ldots + \frac{1}{R^{m-1}} = SR = S + 1 - \frac{1}{R^m}$$

Aus dieser Gleichung entstehet

$$S = \frac{R^m - 1}{R^m (R - 1)};$$

und alsdann

$$y^m = R^m \left(A + T \cdot \frac{R^m - 1}{R^m (R - 1)} \right), \text{ oder}$$

$$y^m = AR^m + T \cdot \frac{R^m - 1}{R - 1}.$$

Damit wir nun auch zeigen, daß durch den gefundenen Werth von y, allen Bedingungen der gegebenen Gleichung $y' = Ry + T$, oder $y^{m+1} = Ry^m + T$ Genüge geleistet wird, so ist nichts weiter nöthig, als die gefundene Formel, durch R zu multipliziren, und die Größe T zu addiren, wodurch man den Ausdruck

$$AR^{m+1} + T \cdot \frac{R^{m+1} - R}{R - 1} + T$$

bekommt, welcher auf

$$AR^{m+1} + T \cdot \frac{R^{m+1} - 1}{R - 1}$$

gebracht wird, und dieser ist in der That der Werth, wel-

welcher die allgemeine Formel, für das Glied y^{m+1} gewähret.

4. Nach der nunmehr dargestellten Methode jede Differenzialgleichung, die aus endlichen Differenzen bestehet, zu integriren, welche unter der allgemeinen Form $\Delta y + My = N$ begriffen ist, ist bloß noch übrig, daß wir bis zur Integration anderer Gleichungen, die von eben derselben abhängen, fortschreiten. Es hat aber bereits d'Alembert, in den Memoiren der berlinischen Akademie bewiesen, daß alle Differenzialgleichungen, die aus den unendlich kleinen Differenzen dieser Form bestehen:

$$(A) \qquad y + \frac{Ady}{dx} + \frac{Bddy}{dx^2} + \frac{Gd^3y}{dx^3} + \text{etc.} = X.$$

wo A, B, C etc. beständige Größen sind, und X eine jede Funktion von x ist, auf diese einfachere Gleichung,

$$z + \frac{Hdz}{dx} = V,$$

wo H beständig, und V eine Funktion von x ist, gebracht und verwandelt werden können. Diese Gleichung ist in der That, mit jener einerley, welche wir ebenfalls unter vorausgesetzten, endlichen Differenzen, zu integriren gelehret haben. Wenn also die d'Alembertsche Methode auch auf die Gleichungen endlicher Differenzen, angewendet werden kann, so ist es gleichfalls erlaubt, jede Gleichung, unter eben dieser Hypothese endlicher Differenzen, zu integriren, als:

$$y + A\Delta y + B\Delta\Delta y + C\Delta^3 y + \text{etc.} = X,$$

und folglich auch die Gleichung dieser Form:

$$y' + Py'' + Qy''' \ldots + \text{etc.} = X.$$

welche

welche mit Recht, für eine allgemeine Formel, der wiederkehrenden Reihen, gehalten werden kann. Diese sinnreiche d'Alembertsche Methode, die man die Methode der unbestimmten Coeffizienten nennt, ist in dieser enthalten: man nimmt nehmlich:

$$\frac{dy}{dx} = p\,; \frac{dp}{dx} = q\,; \quad \frac{dq}{dx} = r\,; \text{ꝛc.}$$

so entstehen die Gleichungen:

$$p - \frac{dy}{dx} = 0\,; q - \frac{dp}{dx} = 0\,; r \frac{dq}{dx} = 0\,; \text{ꝛc.}$$

Alsdann werden diese einzelnen Gleichungen, auf unbestimmte Coeffizienten a, b, c, ꝛc. gebracht, damit daraus entstehe:

$$ap - \frac{ady}{dx} = 0\,; bq - \frac{bdp}{dx} = 0\,; cr - \frac{cdq}{dx} = 0\,; \text{ꝛc.}$$

Diese letztern hingegen, werden zur Gleichung (A) addirt, die, wenn sie nicht über die Differenzen, der Veränderlichen y hinausgehet, nach erfolgten Substitutionen, in folgende verwandelt wird;

$$(B) \ldots y + (A + a)p + (B + b)q - \frac{ady}{dx} - \frac{bdp}{dx} + \frac{Cdq}{dx} = X.$$

Auf der ersten Seite dieser Gleichung, wollen wir jetzt den einen Theil

$$y + (A + a)p + (B + b)q$$

unter a gebracht annehmen, und ihn als ein Multiplum des Integrals, des andern Theils $ady + bdp - Cdq$ betrachten, oder welches eben so viel ist, als

$$dy + (A + a)\,dp + (B + b)\,dq = dy + \frac{bdp}{a} - \frac{Cdq}{a}\,;$$

daher entspringen aus der Vergleichung, der einander entsprechenden Glieder, die Gleichheiten

$$A + a = \frac{b}{a}; B + b = -\frac{C}{a},$$

hieraus erhalten wir:

$$b = -\frac{C}{a} - B = Aa + a^2, \text{ und } a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung $a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0$, geben drey verschiedene Werthe von a, welche den erforderlichen Bedingungen, gleichfalls Genüge leisten. Nun sey

$$y + (A + a)\, p + (B + b)\, q = z,$$

alsdenn verändere man die gefundene Gleichung (B) in

$$z - \frac{a\,dz}{dx} = X, \text{ oder } dz - \frac{z\,dx}{a} = -\frac{X\,dx}{a}$$

so werden wir nach geschehener Vergleichung, der Gleichung §. 1. $dy + yPdx = Zdx$ (wo zur Vermeidung der Weitschweifigkeit, X in P verändert wird), erhalten:

$$y = z;\; P = -\frac{1}{a};\; Z = -\frac{X}{a};\quad e^{\int Pdx} =$$

$$e^{\int -\frac{dx}{a}} = e^{-\frac{x}{a}}, \text{ woraus alsdann folgt}$$

$$z = e^{\frac{x}{a}} \int \frac{-X\,dx}{ae^{\frac{x}{a}}}$$

Nun benenne ich a', a'', a''', als drey unterschiedene Werthe von a, und b', b'', b''', als andere Werthe von b, welche mit den erstern gleichnahmig sind; endlich Z', Z'', Z''' die Werthe der veränderlichen Größe z, welche durch die Stellen a', a'', a''' umfasset werden. Hieraus fließen folgende drey Gleichungen:

$$y + (A + a')\,p + (B + b')\,q = Z'$$
$$y + (A + a'')\,p + (B + b'')\,q = Z''$$
$$y + (A + a''')\,p + (B + b''')\,q = Z'''$$

Werden hierauf aus diesen drey Gleichungen, die Größen p und q eliminirt, so findet man den Werth von y, der in folgender Gleichung dargestellt wird:

$$y = FZ' + GZ'' + HZ'''$$

wo F, G, H, beständige Größen sind, die von jenen A, B, a', a'', ꝛc. abhangen.

5. Aus der bisher erwogenen Methode, erhellet deutlich, daß jede, aus weit mehrern Gliedern erwachsene Gleichung, als gegenwärtige:

$$y + \frac{Ady}{dx} + \frac{Bddy}{dx^2} + \frac{Cd^3y}{dx^3} + \frac{Dd^4y}{dx^4} + \frac{Ed^5y}{dx^5} = X$$

gleichfalls aufgelößt, und daraus erhalten werden können:

$$y = FZ' + GZ'' + HZ''' + JZ'''' + KZ''''',$$

wo die Größen Z', Z'', ꝛc. solche Funktionen von X u. x sind, so daß

$$Z = e^{\frac{x}{a}} \int \frac{-X\,dx}{ae^{\frac{x}{a}}}.$$

wenn für a die fünf Wurzeln a', a'', a''', a'''', a''''', folgender Gleichung substituiret worden:

$$a^5 + Aq^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = o.$$

Allein weit nützlicher und vortheilhafter ist es, wenn diese Methode, auch auf Gleichungen angewendet wird, die aus endlichen Differenzen bestehen.

6. Es sey also folgende, eine endliche Differenzialgleichung der fünften Ordnung, als

$$y + A\Delta y + B\Delta^2 y + C\Delta^3 y + D\Delta^4 y + E\Delta^5 y = X$$

man setze

$$\Delta y = p;\ \Delta p = q;\ \Delta q = r;\ \Delta r = s,$$

damit die Gleichheiten

$$p - \Delta y = o;\ q - \Delta p = o;\ r - \Delta q = o;\ s - \Delta r = o$$

herauskommen.

Diese mit den unbestimmten Coeffizienten a, b, c, d, multiplizirt, giebt

$$ap - a\Delta y = o;\ bq - b\Delta p = o;\ cr - c\Delta q = o;$$
$$ds - d\Delta r = o.$$

Zu dieser vorgegebenen Gleichung, werden nach Substituirung, der für die Differenzen von y, angenommenen Werthe, die jetzt gefundenen Gleichheiten addiret; wenn dies geschehen, so entstehet die Gleichung:

$$y + (A + a)\,p + (B + b)\,q + (C + c)\,r + (D + d)\,s$$
$$- a\Delta y - b\Delta p - c\Delta q - d\Delta r + E\Delta s = X$$

diesen Theil der Gleichung

$$y + (A + a)\,p + (B + b)\,q + (C + c)\,r + (D + d)\,s$$

setze man gleich dem andern differenziirt, Theile

$$a\Delta y + b\Delta p + c\Delta q + d\Delta r - E\Delta s$$

wenn man diesen durch $-a$ dividiret, so wird

$$\Delta y + (A + a)\Delta p + (B + b)\Delta q + (C + c)\Delta r + (D + d)\Delta s =$$
$$\Delta y + \frac{b\Delta p}{a} + \frac{c\Delta q}{a} + \frac{d\Delta r}{a} - \frac{E\Delta s}{a}$$

daher kommen durch Vergleichung der homologen Glieder, diese Gleichheiten:

$$A + a = \frac{b}{a};\ B + b = \frac{c}{a};\ C + c = \frac{d}{a};\ D + d = -\frac{E}{a},$$

aus denen, vermöge der gewöhnlichen Eliminirung, die Gleichung des fünften Grads entspringt:

a^5

$$a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0;$$

Diese Wurzeln, geben fünf unterschiedene Werthe von a

a', a'', a''', $a^{\prime v}$, a^{v}. Nun nehme man

$$y + (A + a)\, p + (B + b)\, q + (C + c)\, r + (D + d)\, s = z$$

desgleichen

$$\Delta z = \Delta y + (A + a)\, \Delta p + (B + b)\, \Delta q + (C + c)\, \Delta r + (D + d)\, \Delta s =$$

$$\Delta y + \frac{b}{a}\, \Delta p + \frac{c}{a}\, \Delta q + \frac{d}{a}\, \Delta r - \frac{E}{a}\, \Delta s$$

woraus die Gleichung:

$z - a\, \Delta\, z = X$, das ist $\Delta\, z - \frac{z}{a} = - \frac{X}{a}$,

und zwar von eben der Form $\Delta\, y + My = N$ als die vorhergehende entstehet, (§. 2.) wo aus der Vergleichung der homologen Glieder,

$M = - \frac{1}{a}$; $N = - \frac{X}{a}$, und folglich $1 - M = \frac{1 + a}{a}$,

hergeleitet wird. Weshalb $z = \pi \left(\frac{1 + a}{a}\right)$ mal

$$\left(\text{Const.} + \Sigma \frac{-X}{a . \pi \left(\frac{1 + a}{a}\right)} \right) \text{ erfolgt.}$$

Und weil a beständig ist, so wird gefunden

$$z^m = \left(\frac{1 + a}{a}\right)^m \left(\text{Const.} - \Sigma \frac{Xa^m}{(1 + a)^{m + 1}} \right)$$

hier bezeichnet m, wie vorher den Index des Orts, welcher von dem Gliede z, in der Reihe der Größen z, besetzt ist. Wenn X eine beständige Größe ist, so erhalten wir durch den Ausdruck der Summe, der geometrischen Progression.

$$\Sigma \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}$$

$$z^m = \left[\frac{1+a}{a}\right]^m \left(\text{Const.} - X \frac{(1+a)^m - 1}{(1+a)^m} . a^{m-1} \right)$$

Da aber a fünf verschiedene Werthe a', a'', a''', a'^v, a^v besitzt, so entstehen, wenn diese Werthe, in der gefundenen Formel, an deren Stelle gesetzt werden, eben so viele Werthe, von Z^m, welche sämmtlich hinreichen: vermöge dieses durch Z', Z'', Z''', Z'^v, Z^v bezeichneten, erhalten wir folgende fünf Gleichungen:

$$y + (A+a')p + (B+b')q + (C+c')r + (D+d')s = Z'$$
$$y + (A+a'')p + (B+b'')q + (C+c'')r + (D+d'')s = Z''$$
$$y + (A+a''')p + (B+b''')q + (C+c''')r + (D+d''')s = Z'''$$
$$y + (A+a'^v)p + (B+b'^v)q + (C+c'^v)r + (D+d'^v)s = Z'^v$$
$$y + (A+a^v)p + (B+b^v)q + (C+c^v)r + (D+d^v)s = Z^v$$

Alsdann werden hieraus, nach den bekannten Regeln, die Größen p, q, r, s eliminirt, worauf man zu der Gleichung dieser Form

$$y = FZ' + GZ'' + HZ''' + JZ'^v + KZ^v$$

gelangt, in welcher F, G, H, J, K beständige Größen sind, welche von den bekannten Größen, dieser Gleichungen abhängen,

7. Es sey folgende Gleichung gegeben:

$$y' + Ay'' + B''' + Cy'^v \ldots + \text{2c.} = X,$$

bey welcher y', y', y''', 2c. Glieder bezeichnen, die auf einander in der Reihe der Größen y, zunächst folgen, so ist klar, daß

y''

$$y'' = y' + \Delta y'$$
$$y''' = y'' + \Delta y'' = y' + \Delta y' + \Delta(y' + \Delta y') = y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y'$$
$$y^{\prime v} = y''' + \Delta y''' = y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y' + \Delta(y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y')$$
$$= y' + 3\Delta y' + 3\Delta^2 y' + \Delta^3 y',$$

und so ferner von den übrigen. Hieraus ergiebt sich, daß man die gegebene Gleichung, auf die Form derer, welche wir vorhin untersucht haben, zurückbringen könne. Um aber desto leichter, und geschwinder, diese Gleichung auf die wiederkehrenden Reihen, anzuwenden, so ist es vortheilhaft, die Glieder y', y'', y''', ꝛc. in verkehrter Ordnung zu betrachten, damit man erhalte $y'' + \Delta y'' = y'$; $y''' + \Delta y''' = y''$; $y^{\prime v} + \Delta y^{\prime v} = y'''$, ꝛc. und die Exponenten $'$, $''$, $'''$, ꝛc. die, die Entfernung jedes beliebigen Gliedes, vom letztern y' bezeichnen mögen. Man setze $y'' = p'$, so wird $y''' = p''$ seyn; es sey ferner $p'' = q'$, $p''' = q''$, $q'' = r'$, also auch $q''' = r'' = s'$. Hieraus entstehen die Gleichheiten $y'' = p'$; $y''' = q'$; $y^{\prime v} = r'$; $y^{v} = s'$; $y^{v\prime} = s''$. Wenn nun die Werthe, in der vorgegebenen Gleichung, an deren Stelle gesetzt werden, so gehet selbige in diese über:

$$(A) \ldots y' + Ap' + Bq' + Cr' + Ds' + Es'' = X.$$

Wenn nun die Gleichungen

$$p' - y'' = 0;\ q' - p'' = 0;\ r' - q'' = 0;\ s' - r'' = 0$$

mit den unbestimmten Coeffizienten a, b, c, d, einzeln multipliciret, und diese dem Gebrauch nach, zur Gleichung (A) hinzu addiret werden, so findet man folgende;

$$y' + (A + a)p' + (B + b)q' + (C + c)r' + (D + d)s' = X - ay'' - bp'' - cq'' - dr'' + Es''$$

Bey

Bey dem ersten Theil dieser Gleichung

$$y' + (A + a) p' + (B + b) q' + (C + c) r' + (D + d) s',$$

gehen die abwechselnden Glieder, in die nächst vorhergehenden über, so daß

$$y'' + (A + a) p' + (B + b) q'' + (C + c) r'' + (D + d) s''$$

wird; diese Größe setze man, gleich dem andern Theile, durch a dividirt, oder

$$y'' + \frac{b}{a} p'' + \frac{c}{a} q'' + \frac{d}{a} r'' - \frac{E}{a} s'',$$

so erhält man nach äquirten, homologen Coefficienten, die Gleichungen

$$A + a = \frac{b}{a};\ B + b = \frac{c}{a};\ C + c = \frac{d}{a};\ D + d = -\frac{E}{a},$$

aus denen, wie in der vorigen vom fünften Grade, die Gleichung:

$$a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$$

herausgebracht wird; deren Wurzeln durch a', a'', a''', $a^{\prime v}$, a^v, bezeichnet werden. Nimmt man nun

$$z^I = y^I + (A + a) p^I + (B + b) q^I + (C + c) r^I + (D + d) s^I,$$

so gehet die vorgegebene Gleichung, in diese über: $z^I - az^{II} = X$, welche (wegen $z^I = z^{II} + \Delta z^{II}$) $\Delta z^{II} + (1 - a) z^{II} = X$ wird. Vergleicht man nun diese, mit der Gleichung §. 3. so entstehet

$$y = z^{II},\ R = a,\ T = X,$$

folglich wird sie wegen

$$z^m = a^m \left(\text{Const.} + \Sigma \frac{X}{a^{m+1}}\right)$$

wo m den Ort bezeichnet, der von dem Gliede z^m, in der Reihe derselben z eingenommen ward. Da aber anstatt a, durch Stellvertretungen, die einzelnen

Wurzeln a^{I}, a^{II} ꝛc., substituiret werden können, so folgt hieraus, daß fünf verschiedene Werthe der Grösse z^m, welche durch Z', Z'', Z''', Z'^{v}, Z^{v} ausgedrückt sind, entspringen, und alsdann folgende fünf Gleichungen, hervorgebracht werden:

$$y^m + (A + a')\,p^m + (B + b')\,q^m + (C + e')\,r^m + (D + d')\,s^m = Z'$$
$$y^m + (A + a'')\,p^m + (B + b'')\,q^m + (C + c'')\,r^m + (D + d'')\,s^m = Z''$$
$$y^m + (A + a''')\,p^m + (B + b''')\,q^m + (C + c''')\,r^m + (D + d''')\,s^m = Z'''$$
$$y^m + (A + a'^{v})\,p^m + (B + b'^{v})\,q^m + (C + c'^{v})\,r^m + (D + d'^{v})\,s^m = Z'^{v}$$
$$y^m + (A + a^{v})\,p^m + (B + b^{v})\,q^m + (C + c^{v})\,r^m + (D + d^{v})\,s^m = Z^{v}$$

Wer=

Werden ferner die Größen p^m, q^m, r^m, s^m aus denselben eliminirt, so bekommt man die Formel: $y^m = FZ' + GZ'' + HZ''' + JZ^{IV} + KZ^V$, worinnen F, G, H ꝛc. beständige sind, welche durch Vergleichung, eben so vieler Glieder der Reihe derselben y, bestimmt werden müssen.

8. Wenn X eine beständige Größe ist, so wird die (§. 7.) durch

$$\Sigma \frac{X}{a^{m+1}}$$

ausgedrückte Summe,

$$= X \frac{a^m - 1}{a^m (a-1)},$$

und wenn die durch L benannte beständige Größe, der Integration, hinzu gefügt wird, so erlangen wir endlich

$$Z = L a^m + X \frac{a^m - 1}{a - 1},$$

woraus sogleich die Werthe Z', Z'', Z''', ꝛc. erhalten werden, wenn zum wenigsten statt a, die gefundenen Wurzeln a', a'', a''', ꝛc. substituiret werden.

9. Aus dem bisher gesagten, wird folgender, allgemeiner Lehrsatz abgeleitet:

In der Gleichung

$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} \ldots + \text{ꝛc.} = X$, wo die Exponenten y derselben, die von y besetzten Oerter bezeichnen, so wie durch die gefundenen Wurzeln, a', a'', a''' ꝛc. der Gleichung

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \text{ꝛc.} = 0,$$

erhält man überhaupt:

$$y^m = Fa'^m\left(\Psi + \Sigma\frac{X}{a^{'m+1}}\right) + Ga''^m\left(\Psi + \Sigma\frac{X}{a^{''m+1}}\right)$$
$$+ Ha'''^m\left(\Psi + \Sigma\frac{X}{a^{'''m+1}}\right) + Ja'^{vm}\left(\Psi + \Sigma\frac{X}{a^{ivm+1}}\right) +$$
$$\text{ꝛc.}$$

Wenn X eine beständige Größe war, so ergiebt sich die Gleichung:

$$y^m = \Psi\,(Fa'^m + Ca''^m + Ha'''^m + Ja'^{vm} + Ka^{vm} + \text{ꝛc.})$$
$$+ X\left[F\frac{a'^m - 1}{a' - 1} + G\frac{a''^m - 1}{a'' - 1} + H\frac{a'''^m - 1}{a'''' - 1} + J\frac{a'^{vm} - 1}{a'^{v} - 1}\right.$$
$$\left. + K\frac{a^{vm} - 1}{a^{v} - 1} + \text{ꝛc.}\right]$$

War hingegen X = o, so konnte die beständige Ψ, unterdrückt werden, und wir bekommen die einfachere Gleichung

$$y^m = Fa'^m + Ga''^m + Ha'''^m + Ja'^{vm} + Ka^{vm} + \text{ꝛc.}$$

welche das allgemeine Glied der Reihe dererselben y giebt, nehmlich der Reihe

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4}\,\text{ꝛc.} = o,$$

die in der That, nichts anders, als eine wiederkehrende Reihe, deren Beziehungs-Scale

$$- A - B - C - D - E - \text{ꝛc. ist.}$$

10. Dies ist also die Theorie der wiederkehrenden Reihen, in Beziehung auf die Fundamente, der Differenzialrechnung, welche aus den reinsten Grundsätzen, geradezu hergenommen ist, indem sie vorher, auf gänzlich indirekten Methoden, und fremden Notionen, beruhete, die von weitem her abgeleitet waren.

Dies-

Diese ganz vortrefliche Lehre, wollen wir wegen ihres großen Nutzens, und Gebrauchs in der gesammten Analysis, durch einige Beyspiele erläutern, und den Fähigkeiten der Anfänger angemessen, darstellen.

Erstes Beyspiel.

Es soll das allgemeine Glied einer wiederkehrenden Reihe, der zweiten Ordnung, $1 + 2u^2 + 2u^3 + 6u^4 + 10u^5 + 22u^6 + 42u^7 + 86u^8 +$ ꝛc. gefunden werden, welche aus der Entwickelung des Rationalbruches

$$\frac{1 - u}{1 - u - 2u^2},$$ entspringt.

Aus der Benennung des allgemeinen Gliedes durch y'', der Zahlenreihe 1, 0, 2, 2, 6, 10 ꝛc. und den zwey Gliedern y', y, welche demselben y'' nächst vorhergehen, erhält man $y'' = y' + 2y$, wenn nemlich $1 + 2$ als Beziehungs-Scale vorhanden ist. Nun wird wegen $y' = y + \Delta y$, und $y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, die Gleichung $y'' = y' + 2y$, in diese, $y + 2\Delta y + \Delta^2 y = 3y + \Delta y$ umgekehrt, woraus

$$\text{(A)} \qquad y - \tfrac{1}{2}\Delta y - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y = 0 \text{ entstehet.}$$

Alsdann nehme man $\Delta y = p$, und nach erfolgter Multiplikation, mit dem unbestimmten Coeffizienten a; verbinde man die Gleichheit $ap - a\Delta y = 0$, diese addire man zur Gleichung (A) wenn p statt Δy und Δp statt $\Delta^2 y$ substituiret worden, so bekommt man hieraus, die Gleichung

$$\text{(B)} \qquad y + (a - \tfrac{1}{2})p - a\Delta y - \tfrac{1}{2}\Delta p = 0.$$

Es

Es sey ferner, der Theil dieser Gleichung $y + (a - \frac{1}{2})p$, gleich dem Integral des andern Theils $- a \Delta y - \frac{1}{2} dp$, durch $- a$ dividirt, das ist, es sey

$$y + (a - \tfrac{1}{2})\, p = y + \frac{p}{2a},$$

daher erfolgt aus der Vergleichung der Glieder

$$a - \tfrac{1}{2} = \frac{1}{2a},$$

nemlich

$$a^2 - \frac{a}{2} - \tfrac{1}{2} = 0, \text{ ferner } a' = 1,\ a'' = \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man nun $z = y + (a - \frac{1}{2})\, p$, so gehet die Gleichung (B) in $z - a \Delta z = 0$, oder $\Delta z - \frac{z}{a} = 0$, über, die, wenn sie mit jener (§. 3.) $\Delta y + (1 - R)\, y = T$, verglichen wird,

$$T = 0,\ 1 - R = -\frac{1}{a}, \text{ oder } R = \frac{a+1}{a},\ y = z \text{ giebt.}$$

Folglich ist

$$z^m = R^m \left(A + \Sigma \frac{T}{R^{m+1}}\right) = \left(\frac{a'+1}{a'}\right)^m A = 2^m A,$$

und hinwiederum

$$z^m = \left[\frac{a''+1}{a''}\right]^m B = (-1)^m B.$$

Es ist aber $z^m = y^m + (a' - \frac{1}{2})\, p = y^m + \frac{1}{2} p$; und ferner $z^m = y^m + (a'' - \frac{1}{2})\, p = y^m - p$. Also wenn die zwey gefundenen Werthe, für z^m substituiret werden, so entstehen zwey Gleichungen

$$2^m A = y^m + \tfrac{1}{2} p,\quad (-1)^m B = y^m - p,$$

aus denen, wenn p eliminirt wird, diese erfolgt:

y^m

$$y^m = \frac{2^{m+1} A + (-1)^m B}{3}.$$

Alsdann bestimme man, je zwey willkührlich beständige Größen A, B, und zwar, daß nach der Hypothese $m = 0$, $y = 1$ und der Hypothese $m = 1$, $y = 0$ wird, so erlangen wir zwey Gleichungen

$$1 = \frac{2A + B}{3};\ 0 = \frac{4A - B}{3};$$

diese geben $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$. Mithin das verlangte allgemeine Glied

$$\frac{2^m + 2(-1)^m}{3} u^m \text{ seyn wird.}$$

Da die Aufgaben, welche zur Analyse der Glücksfälle oder zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, bey Spielen gehören, aus der Theorie dieser endlichen Differenzialgleichungen, fließen und direkte Auflösungen erhalten, so wollen wir nur zwey Beyspiele vortragen, welche aus dem Brettspiele hergenommen sind.

Zweytes Beyspiel.

A spielet mit B, das von den Franzosen sogenannte à Croix ou pile (im deutschen: Münz oder Flach, welches vermittelst einer, in die Höhe geworfenen Münze geschiehet, wovon die eine Seite derselben croix, die andere aber pile heißt.) unter folgenden Bedingungen: daß wenn A beym ersten Wurf, croix hat, derselbe von B zwey Gulden empfängt; fällt aber auf den andern

Wurf

Wurf croix, so bekommt er von B 4 Gulden, beym dritten 8; beym xten aber 2^x Gulden. Es frägt sich also, welche Erwartung A habe, d. i. wie viel A an B, vor dem Spiele geben müsse, wenn beyder Glück gleich sey.

Es bezeichne y_x die Anzahl der Gulden, welche A voraus bezahlen sollte, so wie x die Zahl der Würfe. Wenn x um die Einheit vermehret wird, so daß das von A, vor dem Spiel zu bezahlende Geld, oder die Erwartung von A, durch y_{x+1} ausgedrückt wird, so ist klar, daß das Geld y_x um der Zahl der Gulden 2^{x+1} nach der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^{x+1}}$, dasselbe nach dem (x + 1) ten Wurfe zu gewinnen, vermehrt werden muß. Wir bekommen daher die Gleichung:

$$y_{x+1} = y_x + \frac{2^{x+1}}{2^{x+1}} = y_x + 1;$$

diese zu integriren, nehmen wir die Formel $y' = Ry + T$, so bekömmt man durch die Verbindung der Glieder:

$$y' = y_{x+1}; \; y = y_x; \; R = 1; \; T = 1.$$

Daher das verlangte Integral, gefunden wird:

$$y = y_x = \pi R \left(A + \Sigma \frac{T}{\pi R}\right) = A + \Sigma.\, 1 = A + x.$$

Die willkührlich beständige Größe A, wird bestimmt, wenn x = 1 gesetzt wird, woraus man

augen=

augenscheinlich, die Erwartung $y_x = 1$ erhält und also ist $A + 1 = 1$ oder $A = 0$. Folglich ist $y_x = x$, nemlich die Zahl der von A zu bezahlenden Gulden $= x$. W. Z. E. W. An diesem weit berühmten Problem, haben die größten Mathematiker unseres Zeitalters, ein Daniel Bernoulli, la Fontaine, D'Alembert, La Place, um die Wette gearbeitet welche aus den hieraus abgeleiteten, sinnreichen Spekulationen, die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, bewundernswürdig erläutert haben.

Drittes Beyspiel.

Es greift jemand aus einem Haufen Münzen, oder kleiner Brettsteinchen, deren Anzahl x ist, eine unbekannte Menge derselben; es frägt sich also wie hoch die Wahrscheinlichkeit sey, ob diese gegriffene Menge, gerade oder ungerade war.

Man nenne y die Summe der Fälle, unter welchen die gegriffene Menge gerade, und z die Summe der Fälle, unter denen sie ungerade seyn könne. Gesetzt der Haufen x, werde um die Einheit vermehret, so giebt y', die Summe der geraden Fälle, und das wird $y' = y + z$ seyn, bis daß jeder ungerade Fall, mit einer neuen Zahl verbunden, einen geraden Fall angiebt. Ferner z' bedeute die Summe der ungeraden Fälle, und weil jeder gerade Fall, verbunden mit der hinzugefügten Zahl, ungerade wird, auch die dazu addirte Einheit ungerade ist, so wird

$z' =$

$z' = z + y + 1$ seyn. Die erste Gleichung aber, ist nichts anders, als $\Delta y = z$, die zweite nichts anders, als $\Delta z = y + 1$. Folglich $\Delta^2 y = + 1$ oder $y'' - 2y' + y = y + 1$, also $y'' = 2y' + 1$, oder welches auf eins hinausläuft $y' = 2y + 1$. Aus der Vergleichung dieser Gleichung, mit der allgemeinen $y' = Ry + T$, wird $R = 2$, $T = 1$ gefunden, daher man

$$y = AR^x + T\frac{R^x - 1}{R - 1} = A2^x + 2^x - 1 = (A + 1)2^x - 1$$

erhalten wird.

Da nun $x = 1$ so wird $y = 0$. Also $2A = 1 - 2$, und $A = -\frac{1}{2}$; und daher Itens $y = 2^{x-1} - 1$. IItens $z = \Delta y = y^1 - y = 2^{x-1} - 2^{x-1} + 1 = 2^x(1 - \frac{1}{2}) = 2^{x-1}$. Mithin die Summe aller wahrscheinlichen Fälle, $y + z = 2^{x-1} - 1 + 2^{x-1} = 2^x - 1$, also wird hieraus die Wahrscheinlichkeit der geraden Fälle

$$\frac{y}{y + z} = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1},$$

für die ungraden aber

$$\frac{y}{y + z} = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$$

gefunden. W. z. E. W.

Die Prüfung dieses Problems, welche Mairan in der Geschichte der Pariser Akademie, vom Jahr 1728 angestellt hat, ist zwar äußerst fein und sinnreich, allein in der genauern Untersuchung desselben, hat dieser sonst gelehrte Mann, nicht sorgfältig genung verfahren.

11. Außer der bisher dargestellten Methode, die Lehre der wiederkehrenden Reihen, auf die Integration der linearischen Gleichungen, die aus endlichen Differenzen bestehen, zurückzuführen, hat der scharfsinnige Geometer, de la Grange in den Memoiren der berlinischen Akademie, für das Jahr 1775, eine weit einfachere und vortreflichere angegeben, welche unter allen Methoden, in der That die bequemste und geschwindeste ist, besonders in den Beyspielen, in welchen die Wurzeln der Gleichung, unbestimmten Coeffizienten, als gleich gefunden werden, die ich kürzlich hier vorzutragen, am gelegentlichsten erachte.

Folgendes sey die wiederkehrende generische Reihe:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots y_{x+t};$$

deren allgemeines Glied y_x ist. Ich nehme an, daß die linearische Beziehungs-Gleichung zwischen den succeſſiven Gliedern $t+1$, diese sey:

$$\text{(A)}\quad Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} \ldots Ky_{x+t-1} + y_{x+t} = 0,$$

und zwar, daß t die Ordnung der wiederkehrenden Reihe, sey, und $A, B, C \ldots K$, hingegen, jede beständige Coeffizienten bedeuten. Hiermit ist bereits, die Sache so weit abgemacht, daß diese linearische, endliche Differenzialgleichung, integriret, oder welches eben so viel ist, daß der analytische Werth, des allgemeinen Gliedes y_x, in der gegebenen Reihe gegeben werden kann.

Um dies zu erreichen, sey $y_x = az^x$, wo a, z unbestimmte, beständige Größen sind; folglich wird

$$y_{x+1} = az^{x+1};\ y_{x+2} = az^{x+2};\ \text{ꝛc.}$$

woraus

woraus alsdenn, nach erfolgten Substitutionen, die Gleichung umgekehret wird in

$$Aaz^{x} + Baz^{x+1} + Caz^{x+2} \ldots + Kaz^{x+t-1} + az^{x+t} = 0,$$

oder (vermittelst der Division durch az^x) in

$$(B) \quad A + Bz + Cz^2 \ldots . + Kz^{t-1} + z^t = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist klar, Itens daß der Coeffizient a, welcher in derselben verlangt wird, willkührlich sey.

IItens daß sie so viele bestimmte Werthe, von z besitze, als Einheiten der Index t hat. Diese Werthe z, oder die Wurzeln der Gleichung, bezeichne ich durch α, β, γ rc.; werden nun auch unterschiedene, willkührliche Coeffizienten a, b, c rc. genommen, so entstehen ebensoviel, unterschiedene Werthe von y_x, nehmlich $a\alpha^x$, $b\beta^x$, $c\gamma^x$, rc., welche sowohl einzeln für sich, als alle zusammen, der linearischen Gleichung (A) Genüge leisten. Man erhält also in allem

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \text{rc.}$$

Und weil hier der Werth der Größe y_x, die beständigen willkührlichen a, b, c rc. unter der Zahl t umfaßt, so wird derselbe daher, das vollständige Integral, der endlichen Differenzialgleichung (A) seyn, welche zur Ordnung t gehöret. Die Werthe dieser beständigen Größen a, b, c rc. hingegen, werden gefunden, wenn man der veränderlichen x, die nach und nach folgende Werthe 0, 1, 2, 3, 4. rc. giebt, und sie mit dem angenommenen Ausdruck, des allgemeinen Gliedes y_x, nach den Hypothesen von x, mit den ersten Gliedern der Reihe, die stets bekannt seyn

müssen

müssen, vergleicht. Aus diesen Vergleichungen, entspringen alsdann, eben so viele Gleichungen, als beständige Größen, a, b, c ꝛc. sind, welche auf diese Art, durch die Funktionen y_0, y_1, y_2, ꝛc. und durch die Wurzeln α, β, γ ꝛc. zu finden sind.

12. In der Hypothese $t = 1$, darf nur eine Wurzel der Beziehungs-Gleichung, (B) seyn, so wird das allgemeine Glied, für diese Hypothese $y_x = a\alpha^x$, daher, wenn $x = 0$ genommen wird, $y_0 = a\alpha^0 = a$, und also $y_x = y_0\alpha^x$ herauskommt.

In der Hypothese $t = 2$, wird wegen der beyden Wurzeln der Gleichung α, β y_x, $= a\alpha^x + b\beta^x$. Weshalb wenn $x = 0$, und $x = 1$ genommen wird, zwey Gleichungen $y_0 = a + b$; $y_1 = u\alpha + b\beta$ erfolgen, aus denen die Werthe der unbestimmten Größen a, b, auf folgende Weise gefunden werden:

$$a = \frac{\beta y_0 + y_1}{\alpha - \beta}; \; b = \frac{-\alpha y_0 + y_1}{\beta - \alpha}$$

Es sey $t = 3$, dem in der Hypothese das allgemeine Glied $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$ entspricht. Nimmt man nun succeßiv $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, so erhält man drey Gleichungen:

$$y_0 = a + b + c; \; y_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma; \; y_2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2;$$

aus denen nach den bekannten Regeln der Algebra, endlich

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma) y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}; \; b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma) y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)};$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta) y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

hergeleitet wird. Auf gleiche Weise, wenn $t = 4$;

die

δ die vierte Wurzel, der Beziehungs-Gleichung (B) und f eine willkührlich beständige Größe ist, so wird dem allgemeinen Gliede entsprechend.

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x,$$

wird nun successiv

$$x = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3$$

genommen, so erhalten wir 4 Gleichungen

$$\begin{aligned}
y_0 &= a + b + c + f \\
y_1 &= a\alpha + b\beta + c\gamma + f\delta \\
y_2 &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + f\delta^2 \\
y_3 &= a\alpha^3 + b\beta^3 + c\gamma^3 + f\delta^3.
\end{aligned}$$

Aus diesen werden ferner die willkührlich, beständigen Größen a, b, c, f, wie folget, gefunden.

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)\, y_1 - (\beta + \gamma + \delta)\, y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)\,(\alpha - \delta)}$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta)\, y_1 - (\alpha + \gamma + \delta)\, y_2 + y_3}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma)\,(\beta - \delta)}$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\delta + \beta\delta + \alpha\beta)\, y_1 - (\alpha + \beta + \delta)\, y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)\,(\gamma - \beta)\,(\gamma - \delta)}$$

$$f = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\, y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)\, y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)\,(\delta - \beta)\,(\delta - \gamma)}$$

13. Die Rechnung, für die Bestimmung der Werthe, der willkührlich, beständigen Größen a, b, c, f x. zu vermeiden, dient folgendes: es sey:

(C) $z^t + pz^{t-1} + qz^{t-2} \ldots + fz^2 + gz + K = 0$

die Gleichung der ungleichen Wurzeln: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varphi$ welche deiser andere

$$(z - \alpha)\,(z - \beta)\,(z - \gamma)\,(z - \delta) \ldots (z - \varphi) = 0$$

gleich ist; das letztere Glied K äquire man, mit dem Produkt dieser Wurzeln, negativ genommen.

Ist

Ist $K = (-\alpha)(-\beta)\ldots(-\varphi)$ so wird das Produkt positiv seyn, wenn die Zahl der Wurzeln gerade, negativ, wenn sie ungerade ist. Wird hingegen dies Produkt, durch einen dieser Faktoren $-\alpha$, $-\beta$ ꝛc. es sey welcher es wolle, dividirt, so entsteht ein positiver Quotient, wenn die Zahl der Wurzeln ungerad war, ein negativer, wenn sie gerade ist. Nach erwägung der Coeffizienten des Gliedes y_0, in dem Werth von a, findet man für die verschiedenen Hypothesen, des Index t, die Sache nach folgenden Schema:

Indices,	Coeffizienten des Gliedes y_0,
$t = 1$	1
$t = 2$	$-\beta$
$t = 3$	$\beta\gamma$
$t = 4$	$-\beta\gamma\delta$
ꝛc.	ꝛc.

Deshalb wird der Coeffizient von y_0, nach dem Werth der willkührlich, beständigen Größe a, im Allgemeinen $\frac{k}{-\alpha}$ seyn, und wegen der Aehnlichkeit des Coeffizienten, von y_0, nach dem folgenden Werthe, der übrigen beständigen Größen b, c, f ꝛc. wird der Coeffizient selbst, im Werth von b durch $\frac{k}{-\beta}$; im Werth von c durch $\frac{k}{-\gamma}$ ausgedrückt. Man äquirt nehmlich demselben, mit dem Produkt aller Wurzeln der Gleichung (C), negativ genommen, mit Weglassung jener, die durch den zu findenden Coeffizienten, multiplizirt wird.

14. Die

14. Die oben angeführten Beyspiele, zeigen die Regel, deren die Coeffizienten der Glieder y_1, y_2, y_3 ꝛc. beständig unterworfen sind. Und zwar treten die Zeichen, wechselsweise hervor, so daß wenn der Coeffizient des Gliedes y_0, positiv, er negativ in y_1 wird; daher der positive in y_2 ꝛc. wieder zurückkehrt; das Gegentheil aber erfolgt, wo der Coeffizient des Gliedes y_0 als negativ existirt. Gesetzt es wäre z. B. der Coeffizient des Gliedes y_0, ein Produkt von drey Faktoren $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ im Werth der beständigen Größe a, so wird der Coeffizient des Gliedes y_1 das Aggregat je zwey und zwey, welche aus diesen drey Faktoren entstehen können, und der Coeffizient des Gliedes y_2, wird das Aggregat der Faktoren $-\beta, -\gamma, -\delta$, und endlich wird die Einheit, der Coeffizienten des letztern Gliedes, y_3 seyn. Auf diese Weise, wird nach die in der Gleichung (C) angenommenen, fünf ungleichen Wurzeln α, β, γ, δ, ε, der Coeffizient des Gliedes $y_0 = \beta\gamma\delta\varepsilon$, der Coeffizient des Gliedes

$$y_1 = -(\beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon)$$

der Coeffizient des Gliedes

$$y_2 = \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon;$$

der Coeffizient des Gliedes

$$y_3 = -(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon);$$

endlich aber der Coeffizient des letztern

$$y_4 = 1$$

seyn. Eben so werden wir, die Coeffizienten der Glieder y_0, y_1, y_2 ꝛc. für die Werthe der übrigen, beständigen Größen b, c, f ꝛc. bestimmen. Was hingegen die Nenner der Werthe a, b, c ꝛc. betrifft, so wird

wird alsbald erhellen, daß man den Nenner von a erhalte, wenn in der Gleichung (C) oder

$$(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(y-\delta)\ldots(y'-\varphi)=0$$

der Faktor $z-\alpha$ unterdrückt und $z=\alpha$ gesetzt wird, so daß

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\varphi)$$

hervorkommt, welches der verlangte Nenner seyn wird. Desgleichen für den Nenner von b, muß eben das ganze Produkt, durch $z-\beta$ dividirt, und zum Quotienten $z=\beta$, geschrieben werden, und es wird der Nenner von

$$b=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots(\beta-\varphi)$$

werden. Dieses trifft auch bey den Nennern, der übrigen beständigen Größen c, *f*, ꝛc. zu.

15. Diese vortrefliche Methode, soll durch folgende zwey Beyspiele, erläutert werden.

Erstes Beyspiel.

Es sey die Beziehungs-Scale $1 + 2$

Die Indices $0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ldots\ldots x$

die wiederkehrende Reihe $0, u, u^2, 3u^3, 5u^4, 11u^5 \ldots y_x u^x$

die endliche Differenzialgleichung

$$y_x = y_{x-1} - 1 + 2y_{x-2}, \text{ oder}$$

$$(A) \qquad y_x - y_{x-1} - 2y_{x-2} = 0$$

man nehme $y_x = az^x$; nach dessen Sustitution in (A) entstehet die Beziehungs-Gleichung

$$1 - \frac{1}{z} - \frac{2}{zz} = 0 \text{ oder } z^2 - z - 2 = 0,$$

deren Wurzeln $\alpha = 2$, $\beta = -1$ sind. Es ist also das vollständige Integral, nehmlich das allgemeine Glied

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x = a.2^x + b\,(-1)^x$$

Ite Hypothese. $x = 0;\ a + b = 0;\ a = \frac{1}{3}$

IIte Hypothese. $x = 1;\ 2a - b = 1;\ b = -\frac{1}{3}$

Nach deren Erfindung, entspringt

$$y_x = \tfrac{1}{3}\,[2^x - (-1)^x];$$

also ist das allgemeine Glied der Reihe

$$\tfrac{1}{3}\,[2^x - (-1)^x)\,u^x.$$

W. Z. Erfinden war.

Zweytes Beyspiel.

Es sey die Beziehungs-Scale $0 + 7 - 6$

Indices

$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8, \ldots x$

die wiederkehrende Reihe

$$0, u, u^2, 7u^3, u^4, 43u^5, -35u^6, 295u^7, -503u^8 \ldots y_x u^x$$

die endliche Differenz-Gleichung

$$y_{x+3} + 0.y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = 0;$$

es werde $y_x = az^x$, und die vorhergehende Gleichung, verändere man in die Beziehungs-Gleichung $z^3 * - 7.z + 6 = 0$, deren drey Wurzeln

$$z = \alpha = 1;\ z = \beta = 2;\ z = \gamma = -3 \text{ sind.}$$

Hierdurch erhält man, das vollständige Integral der Differenzial-Gleichung:

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x = a + b.\,2^x + c\,(-3)^x.$$

1ste Hypothese $x = 0;\ a + b + c = 0$

2te " " " $x = 1;\ a + 2b - 3c = 1$

3te " " " $x = 2;\ a + 4b + 9c = 1$

Aus diesen drey Gleichungen, findet man durch die bekannten, algebraischen Regeln:

$$a = -\tfrac{1}{2};\ b = \tfrac{3}{5};\ c = -\tfrac{1}{10};$$

und

und endlich

$$y_x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{5}.\, 2^x - \tfrac{1}{10}\,(-3)^x.$$

Mithin wird das allgemeine Glied $y_x\, u^x =$

$(\tfrac{3}{5}.\, 2^x - \tfrac{1}{10}\,(-3)^x - \tfrac{1}{2})\, u^x$. W. z. erf. w.

16. Bisher ward von uns, stillschweigend diejenige Bedingung angenommen, nach welcher alle Wurzeln α, β, γ ꝛc. unter sich ungleich sind. Wenn aber etliche Wurzeln, als gleiche angenommen worden, so werden einige, der willkührlich beständigen Größen a, b, c ꝛc. unendlich. Ist nun wirklich $t = 3$, so finden wir wie oben, §. 12.

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma)\, y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)};\ b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)\, y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma};$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta)\, y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)\,\gamma - \beta)}:$$

Deshalb werden, nach angenommenen beyden, gleichen Wurzeln α und β, die Größen a und b unendlich; die dritte c aber bleibt endlich. Eben dies wird auch, in andern Hypothesen von t gezeigt, wo einige Wurzeln unter sich gleich waren.

Bey dieser Unbequemlichkeit, welche sehr oft sich zuträgt, pflegt folgendes Hülfsmittel angewendet zu werden. Es wird nemlich, in dem allgemeinen Gliede, der wiederkehrenden Reihe $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x +$ ꝛc. wenn $\beta = \alpha$, dafür $\beta = \alpha + d\alpha$ gesetzt, so daß die Differenz zwischen beyden Wurzeln, unendlich klein ist. Z. B. in der wiederkehrenden Reihe der dritten Ordnung, deren allgemeines Glied, eine trinomische Größe, $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$ ist, so geht vermöge der Substitution, der zweytheiligen Größe $\alpha + d\,\alpha$ statt β, das allgemeine Glied in diesen an-

Glied in diesen andern über, $a\alpha^x + b(\alpha + d\alpha)^x + c\gamma^x$ welcher unendlich wenig vom wahren, unterschieden ist.

Hierauf verwandle man, nach der Neutonschen Formel, das Binomium $(\alpha + d\alpha)^x$ in eine Reihe, so entstehet

$$(\alpha + d\alpha)^x = a^x + x\,d\alpha.\,\alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2} d\alpha^2.\,\alpha^{x-2} + \text{etc.}$$

Daher ist das allgemeine Glied

$$\text{(D)}\quad (a+b)\alpha^x + c\gamma^x + bx\,d\alpha.\,a^{x-1} + \frac{bx(x-1)}{2}\, d\alpha^2.\,\alpha^{x-2} + \text{etc.}$$

Wir fanden oben

$$b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma) y_1 + y_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$

das ist, wenn $d\alpha$ statt $\beta - \alpha$ substituiret worden, so wird

$$b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma) y_1 + y_2}{d\alpha(\beta-\gamma)}, \text{ oder } \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma) y_1 + y_2}{d\alpha(\alpha-\gamma)}$$

folglich

$$b\,d\alpha = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma) y_1 + y_2}{\alpha-\gamma},$$

nunmehr ist, die Größe endlich. Ist hingegen $b\,d\alpha$ eine endliche Größe, so wird, $b\,d\alpha^2$, noch vielmehr aber $b\,d\alpha^3$ unendlich klein seyn etc. Daher wird das allgemeine Glied (D) =

$$\text{(E)}\qquad (a+b)\,\alpha^x + bx\,d\alpha.\,\alpha^{x-1} + c\gamma^x.$$

Und weil

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta+\gamma) y_1 + y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},$$

so entstehet durch die Substitution von $-d\alpha$, für $\alpha - \beta$,

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta+\gamma) y_1 + y_2}{-d\alpha(\alpha-\gamma)},$$

welche ebenfalls eine unendliche Größe ist. Wenn aber die zwey Werthe, der unendlichen Größen a und b, b, zugleich mit einander verbunden werden, so entspringt nach Anwendung ihrer allgemeinen Ausdrücke, ein endliches Aggregat. Und zwar:

$$a + b = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma) y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} - \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma) y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

werden die Brüche auf einerley Benennung gebracht, so findet man

$$a + b = \frac{(\beta^2\gamma - \beta\gamma^2 - \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2) y_0 + (\alpha^2 - \beta^2) y_1 - (\beta - \alpha) y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$$

und durch die Division mit $\alpha - \beta$, kommt

$$a + b = \frac{(\gamma^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma) y_0 + (\alpha + \beta) y_1 - y_2}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$$

hervor, welcher Ausdruck, von den Unendlichen frey ist. Mithin wenn $\beta = \alpha$ gemacht wird, so bekommen wir endlich

$$a + b = \frac{(\gamma^2 - 2\alpha\gamma) y_0 + 2\alpha y_1 - y_2}{(\alpha - \gamma)^2}$$

Bey dem allgemeinen Gliede (E) erhält man die Coeffizienten der Größen α^x und $x\alpha^{x-1}$, welche beyde endlich sind, nebst den existirenden Coeffizienten b d α^2, b d α^3, ꝛc. der Glieder

$$\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}, \quad \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3}\alpha^{x-3} \text{ ꝛc.}$$

welche dieserwegen weggelassen worden. Wenn daher $a + b = a'$; $bd\alpha = b'$ festgesetzt wird so erhält das allgemeine Glied die Form:

$$y_x = a'\alpha^x + b' x\alpha^{x-1} + c\gamma^x$$

17. Ich schreite nun zu jenen wiederkehrenden Reihen, bey denen die Beziehungs-Gleichung drey gleiche Wurzeln hat, und nehme als allgemeines Glied der Reihe

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x,$$

an, in welchen $\alpha = \beta = \gamma$. Damit aber die Gleichheit dieser Wurzeln, ohne Irrthum aus der Mitte weggenommen werde, so beobachte ich eine unendliche kleine Differenz unter ihnen, indem ich $\beta = \alpha + dx$; $\gamma = \alpha + d\beta$ setze; so wird das allgemeine Glied

$$y_x = a\alpha^x + b\,(\alpha + d\,\alpha)^x + c\,(\alpha + d\,\beta)^x + f\delta^x:$$

Durch Anwendung der Neutonschen Formel, und durch die Annahme dreyer Glieder für jedes Binomium, erhalten wir

$$(F)\ y_x = (a + b + c)\,\alpha^x + (b\,d\,\alpha + c\,d\,\beta)\,x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2)\,\frac{x\,(x-1)}{2}\,\alpha^{x-2} + f\delta^x$$

Im §. 12. haben wir gefunden

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)\,y_1 - (\beta + \gamma + \delta)\,y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)\,(\alpha - \delta)}$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\delta + \alpha\gamma + \gamma\delta)\,y_1 - (\alpha + \gamma + \delta)\,y_2 + y_3}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma)\,(\beta - \delta)}$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta)\,y_1 - (\alpha + \beta + \delta)\,y_2 + y_3}{\gamma - \alpha)\,(\gamma - \beta,\,(\gamma - \delta)}$$

$$f = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\,y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)\,y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)\,(\delta - \beta)\,(\delta - \gamma)}$$

Es werden daher wegen $\alpha = \beta = \gamma$, die Werthe der Coeffizienten a, b', c, unendliche, der zweyten Ordnung; nur der Werth des letztern f, ist bloß endlich. Obgleich die einzelnen Werthe a, b', c, eine unendliche Größe, der zweyten Ordnung ausmachen, so wird doch ihr Aggregat, als endlich genommen; denn nach geschehener Reduction der drey Werthe, auf einerley Nenner, und vermittelst der Division durch,

$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$ wird endlich gefunden

$$a + b + c = \frac{(\alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta - \alpha\delta^2 - \beta\delta^2 - \gamma\delta^2 + \delta^3)\,y_0 - (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)\,y_1 + (\alpha + \beta + \gamma)\,y_2 - y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}$$

die

die augenscheinlich eine endliche Größe ist; substituiret man α, statt β und γ, so entsteht eben dieselbe Summe:

$$a + b + c = \frac{(-3\alpha^2\delta + 3\alpha\delta^2 - \delta^3)\, y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3}{(\alpha - \delta)^3}$$

Desgleichen in den Werthen der Coeffizienten b, c, substituire man $\alpha + d\alpha$ für β, und $\alpha + d\beta$ für γ, sodann multiplizire man b mit $d\alpha$, und c mit $d\beta$; wenn dies geschehen, so findet man

$$bd\alpha = \frac{(-\alpha^2\delta - \alpha\delta d\beta)\, y_0 + [\alpha^2 + 2\alpha\delta + (\alpha + \delta)\delta\beta]\, y_1 - (2\alpha + \delta + d\beta)\, y_2 + y_3}{(d\alpha + d\beta)\,(\alpha - \delta + d\alpha)}$$

$$cd\beta = \frac{(\alpha^2\delta + \alpha\delta d\alpha)\, y_0 - [\alpha^2 + 2\alpha\delta + (\alpha + \delta)\, d\alpha]\, y_1 + (2\alpha + \delta + d\alpha)\, y_2 - y_3}{(d\alpha - d\beta)\,(\alpha - \delta + d\beta)}$$

Die-

Diese Werthe bringe man, unter gemeinschaftliche Benennung, und nehme deren Summe, welche nach geschehener Division, durch $d\alpha - d\beta$, mit Auslassung der Glieder, die durch die Vergleichung verschwinden, folgende ist:

$$bd\alpha + cd\beta = \frac{(2\alpha^2\delta - \alpha\delta^2)y_0 - (2\alpha^2 + 2\alpha\delta - \delta^2)y_1 + 3\alpha y_2 - y_3}{(\alpha - \delta)^2}$$

welche gleichfalls eine endliche Größe ist.

Zuletzt multiplizire man $bd\alpha$, mit $d\alpha$ und $cd\beta$ mit $d\beta$; die hieraus erfolgenden beyden Werthe, bringe man unter gleiche Benennung, und nehme deren Summe, die nach geschehener Division, mit $(d\alpha - d\beta)$ $(\alpha - \delta)$ und Auslassung der unendlich kleinen Glieder, seyn wird:

$$bd\alpha^2 + cd\beta^2 = \frac{-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3}{\alpha - \delta}$$

und zwar gleich einer endlichen Größe.

Wenn man also in dem allgemeinen Gliede (F) $a + b + c = \grave{a}$; $b\,d\alpha + c\,d\beta = b'$; $b\,d\alpha^2 + c\,d\beta^2 = c'$ nimmt, die zwar alle nach dem bisher erwiesenen, endliche Größen sind, so erhalten wir das allgemeine Glied

$$y_x = a'\alpha^x + x\,b'\alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}c'\alpha^{x-2} + f\delta^x.$$

Im vorhergehendem Calcul der Neutonschen Regel, nehmen wir drey Glieder, in jedem Binonium an, so daß die darauf folgenden Glieder, unendlich kleine, oder verschwindende sind, also würde das vierte

$$(b\,d\alpha^3 + c\,d\beta^3)\,\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\,\alpha^{x-3}$$

seyn;

seyn; wobey wegen b, c, als unendlichen Größen der zweyten Ordnung, der Coeffizient ($b\,d\,\alpha^3 + c\,d\,\beta^3$) ein unendlich kleines der ersten Ordnung wird, es kann also das vierte Glied, noch sichrer aber das fünfte und alle übrigen folgenden, wegbleiben.

18. Durch gleiche Art zu schließen, findet man das allgemeine Glied, der wiederkehrenden Reihe

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x + b\varepsilon^x + \text{etc.}$$

woselbst vier Wurzeln gleich sind, als

$$\alpha = \beta = \lambda = \delta;$$

folgendermaaßen ausgedrückt:

$$y_x = (a + b + c + f)\alpha^x + (bd\alpha + cd\beta + fd\gamma)\,x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2 + fd\gamma^2)\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2} + (bd\alpha^3 + cd\beta^3 + fd\gamma^3)\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2\cdot 3} + b\varepsilon^x + \text{etc.}$$

wo nicht allein der Coeffizient

$$a + b + c + f,$$

als absolut endlich gezeigt wird, sondern auch die übrigen endlichen, Trimonialcoeffizienten, dargethan werden; als

$$bd\alpha + cd\beta + fd\gamma,\ bd\alpha^2 + cd\beta^2 + fd\gamma^2,\ bd\alpha^3 + cd\beta^3 + fd\gamma^3,$$

obgleich die Art der unendlich kleinen Größen, fälschlich angegeben wird.

Bey der Hypothese der vier gleichen Wurzeln, wird nicht über das vierte Glied der Neutonschen Regel fortgeschritten, so daß das 5te, vorzüglich aber das 6te und alle folgenden Glieder, ihrer unendlichen Kleinheit wegen, verschwinden. Es kann daher des Gliedes α^x Coeffizient

a +

$$a + b + c + f = a';$$

des Gliedes $x\alpha^{x-1}$ Coeffizient

$$bd\alpha + cd\delta + fd\gamma = b';$$

des Gliedes

$$\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2} \text{ Coeffizient}$$

$$bd\alpha^2 + cd\delta^2 + fd\gamma^2 = c'$$

und endlich des Gliedes

$$\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2 \cdot 3} \text{ Coeffizient}$$

$$bd\alpha^3 + cd\delta^3 + fd\gamma^3 = f'$$

angenommen werden; hingegen das allgemeine Glied der Reihe y_x, kehre man um in diesen:

$$y_x = a'\alpha^x + xb'\alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2} c'\alpha^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} f'\alpha^{x-3} + h\varepsilon^x + \text{rc.}$$

Aus dem bisher gesagten, weiß jeder, was bey allen den Beyspielen geschehen müsse, wo mehr als vier gleiche Wurzeln, der Gleichung vorkommen; denn es verbleibt beständig, bey einerley Gesetz und der ganze Calcul, wird hierdurch sehr erleichtert. Diese besondere Hypothese der gleichen Wurzeln, durch ein Beyspiel zu zeigen, wird hier nicht an unrechtem Orte seyn.

Beyspiel.

Es sey die wiederkehrende Reihe

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots\ldots & x \\ 1 & + 8u & + 27u^2 & + 64u^3 & + 125u^4 & + 216u^5 & \ldots\ldots & y_x u^x \end{array}$$

welche aus dem Rationalbruche

$$\frac{x + 4u + u^2}{(1 - u)^4}$$

entwickelt wird. Hieraus erhellet, daß die Beziehungs-Scale $4 - 6 + 4 - 1$, und folglich das allgemeine Glied

$$y_x = 4y_{x-1} - 6y_{x-2} + 4y_{x-3} - y_{x-4}$$

seyn werde, woraus die endliche Differenzialgleichung

$$y_x - 4y_{x-1} + 6y_{x-2} - 4y_{x-3} + y_{x-4} = 0$$

erfolgt. Es sey $y_x = az^x$, die vorhergehende Gleichung aber verändere man, in die Beziehungs-Gleichung

$$1 - \frac{4}{z} + \frac{6}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^4} = 0 \text{ oder}$$

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = 0,$$

welche in der That, nichts anders ist, als $(z-1)^4 = 0$. Folglich hat die Beziehungs-Gleichung, vier gleiche Wurzeln, nehmlich

$$z = \alpha = \beta = \gamma = \delta = 1.$$

Daher ist in der jetzt gefundenen Formel des allgemeinen Gliedes:

$$y_x = a'\alpha^x + b'x\alpha^{x-1} + c'\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2} + f'\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\alpha^{x-3};$$

substituiret man die Einheit für α, so erhalten wir

$$y_x = a' + b'x + c'\frac{x(x-1)}{2} + f'\frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} =$$

$$a' + \left(b' - \frac{c'}{2} + \frac{f'}{3}\right)x + \left(\frac{c' - f'}{2}\right)x^2 + \frac{f'}{6}x^3;$$

nimmt man hinwiederum

$$b' - \frac{c'}{2} + \frac{f}{3} = b''; \frac{c' - f'}{2} = c''; \frac{f'}{6} = f''$$

so entstehet endlich das allgemeine Glied:

y_x

$$y_x = a' + b''x + c''x^2 + f''x^3$$

Es werden ferner vier willkührlich, beständige Größen a', b'', c'', f'' bestimmt, wenn man für x nach und nach, 0, 1, 2, 3 annimmt, woraus die Werthe erfolgen, die dem allgemeinen Gliede y_x entsprechen, als: 1, 8, 27, 64, so wie nachfolgende vier Gleichungen:

$$a' = 1$$
$$a' + b'' + c'' + f'' = 8$$
$$a' + 2b'' + 4c'' + 8f'' = 27$$
$$a' + 3b'' + 9c'' + 27f'' = 64,$$

aus denen

$$a' = 1 : b'' = 3;\ c'' = 3;\ f'' = 1$$

hergeleitet wird. Wenn dies geschehen, so erhält man

$$y_x = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1 + x)^3,$$

und folglich

$y_x\, u^x = (1 + x)^3\, u^x$. W. z. erfinden war.

Uebrigens wird in diesem Beyspiel, eben dasselbe auf eine andere, von unserem Autor angegebene Art, erhalten. Nehmlich wenn das allgemeine Glied der Reihe, Y genennet wird, die vier denselben vorhergehenden Glieder hingegen, ${}'Y$, ${}''Y$, ${}'''Y$, ${}''''Y$, so bekommt man unter besagter Bedingung, $Y = 4\,{}'Y - 6\,{}''Y + 4\,{}'''Y - {}''''Y$, d. i. ${}''''Y - 4\,{}'''Y + 6\,{}''Y - 4\,{}'Y + Y = 0$, oder wenn die einzelnen Glieder, auf jede vier folgende Stellen, übertragen werden, so ergiebt sich die Gleichung

$$Y - 4\,Y' + 6\,Y'' - 4\,Y''' + Y'''' = 0 = \Delta^4 X$$

(§. 22. Cap. I.). Daher die Sache darauf hinausläuft, daß die endliche Differenzialgleichung

$$\Delta^4 Y = 0,$$

nach

nach der Hypothese, integrirt werden müste, daß Δx beständig, und der Einheit gleich sey. Aus dem vorhergehenden aber, ist bekannt, daß

$$\Sigma\Delta^4 Y = \Delta^3 Y = a\ \Delta\ x$$

$$\Sigma\Delta^3 Y = \Delta^2 Y = \Sigma a\ \Delta\ x\ = ax + b\Delta x$$

$$\Sigma\Delta^2 Y = \Delta\ Y = \Sigma ax + bx + c\Delta x = \frac{ax^2}{2} - \frac{ax}{2} + bx + c\Delta x$$

$$\Sigma\Delta\ Y = \ Y = \Sigma\frac{ax^2}{2} - \Sigma\frac{ax}{2} + \Sigma bx + cx + f =$$

$$\frac{a}{6}x^3 + \frac{b-a}{2}x^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c\right)x + f$$

Nimmt man also

$$\frac{a}{6} = f''; \frac{b-a}{2} = c''; \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = b''; f = a',$$

so bekommt man wie vorhin, das allgemeine Glied der Reihe

$$Y = a' + b''x + c''x^2 + f''X^3.$$

Wer von der Integration, endlicher Differenzialformeln, mehr zu wissen verlangt, der halte sich an die berühmten Mathematiker La Grange, La Place, Monge, Condorcet ꝛc., welche in den akademischen Memoiren von Turin. Berlin, Paris, hiervon sehr häufig, und bündig gehandelt haben.

Anmerkungen zum III. Capitel des I. Theils.

Um die neue Theorie unseres Verfassers, von der Natur der unendlich kleinen, und unendlichen Größen, als auch deren wechselseitigem Verhältniß, gegeneinander, auf einen klaren Sinn zu bringen, und allen Schwierigkeiten und Streitigkeiten, den Zugang zu verschließen, welche sich gegen dieselbe noch stärker, als sie von unserem Autor, kaum hervorgebracht worden ist, von allen Seiten erhoben; so wird es der der Mühe werth seyn, sie dergestallt zu erklären, als wenn zwischen ihr, und der berühmten Neutonschen Lehre, von den ersten und letzten Verhältnissen oder Gränzen, beynahe ganz und gar, kein Unterschied wäre. Folgende Grundsätze müssen daher, besonders festgesetzt werden.

1) Wenn eine gewisse Größe A, entweder durch Anwuchs oder Abnahme, einer andern gegebenen L, ohne ihr je gleich zu werden, immer mehr und mehr näher kommt, so daß sie von ihr, nur um eine sehr geringe Größe, unterschieden ist, und zwar einer noch kleiner, als jede gegebene, so wird diese Größe L, die Gränze der erstern A genannet.

So ist I. die Tangente jeder Curve, die Gränze aller Sekanten.

II. Der Bruch $\frac{1}{3}$, ist die Gränze dieses Dezimalbuches

$$0,333333333 \text{ ꝛc.}$$

III. Die Einheit ist die Gränze der Summe, dieser geometrischen Progression:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \text{ u. s. w.}$$

bis ins Unendliche.

IV. Die Größe $a + \frac{1}{3} a$, ist die Gränze der Summe der Progression,

$$a + \frac{a}{4} + \frac{a}{16} + \frac{a}{64} + \frac{a}{256} + \text{ꝛc.}$$

bis ins unendliche,

V. Die Quadratwurzel aus 2 ist die Gränze des Verhältnisses, welches die Diogonallinie des Quadrats, zur Seite hat.

VI. Endlich die Summe der abnehmenden, geometrischen Progression

$$a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} + \text{ꝛc.}$$

bis ins Unendliche, hat zur Gränze $\frac{a^2}{a - b}$; nehmlich (wie aus den vorhergehenden Beyspielen zuersehen ist) die Summe der Progression, kommt dergestallt je mehr und mehr, dem Werthe $\frac{a^2}{a - b}$ näher, so daß ob sie gleich ihm niemals gleich wird, dennoch von demselben, um eine sehr geringe, und noch kleiner, als jede gegebene Größe, unterschieden seyn könne; dieß aber fließt daraus, daß wenn die Progression, nicht bis ins Unendliche fortgesetzt wird, und ihr letzteres Glied p ist, dieselbe eine allerdings genaue Summe $\frac{a^2 - bp}{a - b}$ erhält, die jederzeit weniger als $\frac{a^2}{a - b}$ ist, und deren Differenz so klein, als man verlangt werden kann, weil selbst das Glied p, auch bis zur äußersten Fortsetzung der Progression, klein wird. Gleichwie nun p dem Nichts oder o, immer näher kommt, und doch niemals gleich wird, so ist also o selbst, die Gränze des Gliedes p. Eben so ist auch der

der Bruch $\frac{a^2}{a-b}$, die Gränze des Bruches $\frac{a^2-bp}{a-b}$, welcher mit dem vorigen, nie vollkommen übereintrifft, wofern nicht $p = o$ wird d. i. wenn nicht für p, die Gränze derselben gesetzt wird.

2. Es sey y die Funktion der veränderlichen Größe x, welche durch $Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ ꝛc. vorgestellt ist, so daß wenn $x = o$, $y = o$ wird; so entspringt aus der Gleichung

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ꝛc.}$$

mit x dividirt:

$$\frac{y}{x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^2 + \text{ꝛc.}$$

Eben so ist $\frac{y}{x}$ ein veränderliches Verhältniß, weil der Exponent desselben, eine veränderliche Größe ist, d. i. die Funktion dieser veränderlichen x, ist dergestalt beschaffen, daß sie so lange abnimmt, als die veränderliche x vermindert wird. Wenn nun $x = o$, so ist die Funktion y auch $= o$, und der Exponent der Verhältniß $\frac{y}{x} = A$, oder vielmehr das Verhältniß selbst, ist $\frac{y}{x} = A$. Es scheint wiedersprechend zu seyn, wenn hier behauptet wird, daß $\frac{y}{x} = \frac{o}{o} = A$ sey, weil Nullen keine Größen sind, und weder die eine größer, noch kleiner als die anderer, genannt werden kann. Allein das Verhältniß $\frac{y}{x} = A$, ist in der That kein Verhältniß der Nullen, sondern eine Gränze, welcher $\frac{y}{x}$ sich unaufhörlich nähert, indem die veränderlichen x und y stets abnehmen, eine Gränze welche das Verhältniß $\frac{y}{x}$, nicht erreichen wird, so lange x und y wahre Größen sind, sie mögen so klein seyn, als sie wollen. Das Verhältniß $\frac{y}{x} = A$, ist dasjenige, vermöge welcher die veränderlichen x und y verschwinden, oder aufhören, Größen zu seyn. Hier ist also die Gränze der Gleichung, gewiß und bestimmt. Man kann also die Gränze der Verhältnisse $\frac{y}{x} = A$, das letzte Verhältniß der veränderlichen y und x nennen, und zwar in sofern, wenn y und x verschwinden, oder aufhören Größen zu seyn. Gedenket man sich die veränderliche $x = o$, als wieder zunehmend, so wird auch die Funktion y, mit derselben zugleich anwachsen, und also das Verhältniß $\frac{y}{x} = A$, hinwiederum diejenige seyn, mit welcher sie zu wachsen anfangen; Also kann die Gränze dieser Verhältnisse $\frac{y}{x}$, welche A ist, deshalb das erste Verhältniß, der veränderlichen Größen y und x, mit welcher sie zu wachsen anfangen, genannt werden. So wird auf diese Art, die Lehre unseres Autors: daß unendlich kleine Dinge, in der That Nichts sind, und daß zwischen zwey, unendlich kleinen Dingen, jede Verhältniß dazwischen treten können, auf einer wahren und deutschen Sinn gebracht. Das Verhältniß der unendlich kleinen Dinge, ist wirklich kein Verhältniß von Nichtsen, sondern das letzte Verhältniß, wodurch zwey veränderliche Größen erzeugt werden, oder anfangen Größen zu seyn. Oder mit andern Worten: das Verhältniß des unendlich Kleinen, ist nichts weiter, als diese Gränze, welcher sich das Verhältniß der veränderlichen Größen, immerfort nähert, die sie niemals erreichen, noch weniger überschreiten kann, sondern der sie, für jede gegebene Differenz, näher kommt. Mit einem Worte: die letzten Verhältnisse verschwindender, und die ersten entstehender Größen, sind keine Verhältnisse derselben, unter sich, sondern bloß allein die Gränze, aller veränderlichen Verhältnisse. In dem paradoxen Ausdruck $\frac{0}{0}$, kann die verborgene Gränze, durch folgenden Vernunftsschluß aufgedeckt werden; es ist nehmlich $\frac{0}{0} = \frac{a - a}{b - b}$, da aber $a : b = x : \frac{bx}{a}$, folglich verhält sich $a + x : b + \frac{bx}{a} = a : b$, und

$$a + x - a : b + \frac{bx}{a} - b = a : b.$$ Deshalb wird

$$\frac{a}{b} = \frac{a - a + x}{b - b + \frac{bx}{a}}.$$

Wenn daher x Null wird, so wird die Gränze der beständigen Verhältnisse, mit $\frac{a - a}{b - b} = \frac{0}{0}$ äquiret.

 3. Je-

3. Jede veränderliche Größe, kann nicht nur beständig abnehmen, und zuletzt gänzlich verschwinden, sondern auch beständig, und bis ins Unendliche, vermehret werden. Es sey:

$$y = A + Bx + Cx^2 \ldots + Hx^{n-1} + Kx^n,$$

so erhellet aus dieser Gleichung, daß wenn x unendlich vermehret wird, y auch bis ins Unendliche zunehmen werde. Daraus aber wird hergeleitet:

$$\frac{y}{x^n} = \frac{A}{x^n} + \frac{B}{x^{n-1}} + \frac{C}{x^{n-2}} + \ldots + \frac{H}{x} + K;$$

woraus folgt, daß das Verhältniß $\frac{y}{x^n}$, und deren Exponent, veränderlich sey, und zwar, daß wenn die veränderliche Größe x, nebst y unaufhörlich zunimmt, der Exponent derselben ebenfalls, beständig abnehmen werde, und zwar in allen abnehmenden Gliedern, außer dem letzten beständigen Gliede. Gesetzt $x = \infty$, so wird vermöge dieser Hypothese, auch $x = \infty$; der Exponent der Verhältnisse $\frac{y}{x^n}$, wird gleich der beständigen K; die übrigen Glieder gehen wegen $x = \infty$, in Null über. Dem zu Folge, was wir vorhin in Betreff, der unendlich kleinen Größen, erinnert haben, ist das Verhältniß $\frac{y}{x^n} = K$, eigentlich zu reden, kein Verhältniß, der unendlich Großen y und x^n unter sich; weil es nicht möglich ist, daß zwey unangebliche Größen, unter einander verglichen werden können, sondern die Gränze der Verhältnisse, welcher die veränderlichen unendlich zunehmenden Größen y und x^n, sich immerfort nähern, je-

doch

doch niemals erreichen, so lange selbige bestimmte, und angebliche Größen sind, folglich ist $\frac{y}{x^n} = K$ das letzte Verhältniß, wodurch die Größen y und x^n aufhören, angebliche zu seyn. Es wird daher der sehr gemeine Satz, des Infinitesimalcalculs, richtig verstanden, daß nehmlich die Größen und ihre Verhältnisse, wenn deren Unterschied gegeben ist, zuletzt gleich werden, wenn sie unaufhörlich fort zunehmen, so daß sie jede gegebene Größe übertreffen. Gesetzt A, B wären unendlich wachsende Größen oder Verhältnisse, deren gegebene Differenz D, jederzeit beständig sey. Man nehme daher eine andere gegebene, und beständige Größe a, und setze die Analogie $A : D = a : d$, so ist klar, daß wenn A zunimmt, d proportionirlich abnimmt, und zwar dergestalt, daß wenn A, jede gegebene Größe übersteiget, d unter jede gegebene, abnehmen werde. Da nun $A \pm D : D = a \pm d : d$, weil die zwey Größen a und $a \pm d$, wenn d unter jede gegebene herabsinkt, und zuletzt oder bey der Gränze verschwindet, gleich werden; so werden auch die Proportionalgrößen A und $A \pm D$ oder A u. B, die eine gegebene Differenz D haben, zuletzt zur Gleichheit gelangen. Folglich, gleichwie durch beständig abnehmende, gegebene Größen und Verhältnisse, die kleineren letzten Proportionen, bestimmt werden, welche an der Gränze, stets abnehmender Größen statt finden, so werden auch durch unendlich zunehmende, und jede gegebene Größen und Verhältnisse, die letzt größern Proportionen bestimmt, die an der Gränze immerwährend zunehmenmender, sich befinden. Zwischen diesen beyden äußersten Gränzen, ist es zwar erlaubt, die Gränze der Abnehmenden zu erreichen und zu entdecken; allein die Gränze der Wachsenden, erlangt man eigentlich niemals, denn obgleich die Größen, jeden gegebenen Terminum, zunehmend überschreiten können, so können sie doch nie, absolut unendlich werden.

4. Es bleibt daher in der Differenzialrechnung, unveränderlich fest, daß diejenigen Größen oder Verhältnisse, niemals angenommen werden, deren obschon kleine Differenz gegeben ist, sondern nur die, deren Differenz, über jeden angeblichen Terminum abnehmen, verschwinden und Null werden könne, so daß man die Gleichheit der Größen, und Verhältnisse, bloß an der äußersten Gränze erlangt, welches sie sich über jegliches Maas nähern, und ohnerachtet es sich öfters zuträgt, daß die Größen, deren Proportion an der Gränze erforscht wird, hinwiederum verschwinden, so bleibt nichts desto weniger, die Proportion der Gränze, die einzig und allein nur gesucht wird, stets unverändert.

5. Durch die Benennung: Differenzen, Fluxionen, Elemente, Incremente, Decremente, Infinitesimalgrößen, und wie sie immer genannt werden mögen, haben wir nichts anders, als die kleinern Differenzen, bezeichnen wollen, welche immerfort abnehmen, und deren sich selbst, die ältesten Mathematiker bedient haben, aus denen wir die Gleichheiten, und letzten Proportionen, die nur

an

an der Gränze statt finden, mit Sicherheit herleiten. Um der Kürze willen, eignen wir die Gleichheit der Gränze, nur denen Größen und Verhältnissen zu, welche eine stets abnehmende, und unangebliche Differenz besitzen, jedoch keinesweges, daß wir dieselben als gleich betrachteten, so lange sie noch, die kleinste Differenz behalten; sondern wie bekannt nur dann, wenn ihre letzte Differenz, an der Gränze Null wird, woselbst sie auf das genaueste, gleich werde. Es würde daher für den Differenzialcalcul, von größestem Nachtheil seyn, wenn sich jemand unterstehen wollte, Differenzen, die noch von einiger Bedeutung sind, zu vernachlässigen, und für nichts zu halten. In der Analysis des Unendlichen, wird nichts für gering geachtet; denn wenn wir Größen und Infinitesimalverhältnisse, die noch mit angeblichen Differenzen versehen sind, gleich nennen, so verstehen wir darunter nicht, daß sie gleich sind, so lange selbige noch eine, obschon kleine Differenz haben, sondern daß sie an der Gränze gleich sind, woselbst deren Differenz, Null ist. Wer also unendlich kleine Differenzen, weglassen und für Nichts halten will, hat bloß zur Absicht, die absolutesten Gleichheiten und Proportionen der Gränze, zu untersuchen und zu bestimmen. Hieraus ist folglich völlig einleuchtend, daß der Differenzialcalcul nichts anders sey, als eine analytische Methode, die Gränze der Verhältnisse zu erfinden, welche zwischen der endlichen Differenz, zweyer Größen und deren endlichen Differenz zweyer andern, innen steht, die zu den beyden erstern, eine Analogie und bekannte Beziehung haben.

6. Den

6. Den Beschluß dieser Anmerkungen, macht das wichtige Zeugniß Neutons, des großen Erfinders der Fluxionen, welcher hiervon so vortreflich handelt, (a) wenn er sagt: „Ich wollte lieber die Beweise, „auf die letzten Summen und Verhältnisse, der ver„schwindenden Größen, und auf die ersten entstehen„den, d. i. auf die Gränzen der Summen, und „Verhältnisse, hinführen, und deshalb die Beweise, „von den Gränzen derselben in möglicher Kurze vor„aus senden. Allein wenn ich in folgenden, die Grö„ßen aus beständigen Partikeln bestehend erwäge, „oder mich statt grader Linien, sehr kleiner krummen „bedienet habe, so war es meine Absicht nicht, die „untheilbaren, sondern die verschwindenden Theilba„ren, nicht die Summen und Verhältnisse von be„stimmten Theilen, sondern bloß allein, die Gränzen „der Summen und Verhältnisse, darunter zu ver„stehen.

„Man macht den Einwurf, daß es keine letzte „Proportion verschwinder Größen gebe; denn ehe „sie verschwunden sind, ist sie nicht die letzte, und „wo sie verschwunden sind, giebt es keine. Oder „auch so: Die letzte Geschwindigkeit, mit welcher „ein Körper, an einen gewissen Ort gelangt, wo des„sen Bewegung sich endet, sey Nichts; denn ehe der „Körper, diesen Ort erreiche, wäre jene noch nicht „die letzte, und wo er ihn erreicht, sey sie nichts. „Die Antwort hierauf ist leicht: Durch die letzte Ge„schwin-

a) (Phil. Not. Princ. Math. Lib. I. Sect. I. in fine.

„schwindigkeit, verstehe ich diejenige, mit welcher der „Körper bewegt wird, und zwar weder ehe er, den „letzten Ort erlangt und dessen Bewegung aufhört, „noch dann wenn er ihn erreicht, das ist, diejenige „Geschwindigkeit, mit welcher der Körper, den letz„ten Ort erreicht, und mit welchem seine Bewegung „aufhört. Eben so kann auch, durch das letzte Ver„hältniß verschwindender Größen, deren Verhältniß, „weder ehe, noch nachher, sondern mit welcher sie „verschwinden, verstanden werden. Auf gleiche Art, „ist das erste Verhältniß entstehender Größen, dieje„nige, wodurch sie erzeugt werden. Die erste und „letzte Summe hingegen, ist diejenige, mit welcher „sie (entweder vermehrt oder vermindert zu werden) „anfangen und aufhören. Noch ist die Gränze übrig, „welche die Geschwindigkeit, am Ende der Bewegung „erreichen, aber nicht überschreiten kann. Diese ist „die letzte Geschwindigkeit. Also ist das Verhältniß „der Gränze, aller anfangenden und aufhörenden „Größen, und Proportionen, gleich. Da nun diese „Gränze gewiß und bestimmt ist, so ist das Problem „dieselbe anzugeben, bloß geometrisch. Alle geometri„sche Aufgaben aber, können zur Bestimmung und „zum Beweise anderer, rechtmäßig angewendet wer„den.“

„Auch kann man behaupten, daß wenn die letz„ten Verhältnisse, verschwindender Größen, gegeben „werden zugleich die letzten Größen gegeben werden, „und also wird jede Größe, aus unheilbaren beste„hen, wie Euklid von den Incommensurabeln, im

„zehn=

„zehnten Buche seiner Elemente, das Gegentheil be-
„wiesen hat. Allein dieser Einwurf, beruhet auf ei-
„ner falschen Hypothese. Jene letzten Verhältnisse,
„mit denen die Größen aufhören, sind in der That
„nicht Verhältnisse der letzten Größen, sondern Grän-
„zen, denen sich die Verhältnisse, abnehmender Grö-
„ßen, beständig nähern, und denen sie näher kom-
„men können, als jede gegebene Differenz, ohne sie
„jemals zu überschreiten, oder früher zu erreichen,
„als die Größen bis ins Unendliche, vermindert wer-
„den. Dies wird aus dem unendlich Großen, deut-
„licher zu verstehen seyn. Wenn zwey, nebst ihrer
„Differenz gegebene Größen, unendlich vermehret wer-
„den, so wird deren letztes Verhältniß, nehmlich jene
„der Gleichheit gegeben, nicht minder auch deren letzte
„oder höchste Größen, welche dieses Verhältniß ist.
„Wenn ich also im folgenden, um des leichtern Be-
„griffs willen, von den kleinsten entweder verschwin-
„denden, oder letzten Größen, reden werde, so hüte
„man sich, Größen als Größe, bestimmt sich vorzu-
„stellen, sondern man gedenke sich darunter stets, ohne
„Einschränkung zu vermindernde Größen."

7. Es findet d'Alembert die neutonsche Art zu re-
den, welche jedoch auch von Andern angenommen wor-
den, anstößig; nehmlich: Ein Verhältniß mit
welches die Größen verschwinden; ein Ver-
hältniß mit welcher sie entstehen: Die Re-
densart tadelt derselbe, als mißtönend und absurd,
mit diesen Worten (a); Quelques mathématiciens ont
„défi-

(a) Mel. de Lit. d'Hié. et de Phil. Tom. V. Eclairc. sur les Elém. de Phil. §. XIV.

„défini la quantité infiniment petite celle qui, s'éva„nouit, considérée non pas avant qu'elle s'évanouisse, „non pas après qu'elle est évanouie, mais dans le mo„ment même où elle s'évanouit. Je voudrois bien sa„voir quelle idée nette et precise on peut espérer „de faire naitre dans l' esprit par une semblable défini„tion. Une quantité est quelque chose ou rien. Si „elle est quelque chose, elle n'est pas évanouie; si elle „est rien, elle est évanouie tout-à-fait. C'est une chi„mere que la supposition d'un état moyen entre ces „deux la."

Ich sehe aber nicht ab, weswegen der berühmte d'Alembert, hiermit so unzufrieden ist; denn obgleich diese Redensarten, nicht im strengsten Verstande, genau sind, so sind sie gleichwohl, nicht nur bey Mathematikern, sondern auch bey den Philosophen, im gemeinen Redegebrauch aufgenommen worden, um viele Wortumschweife zu vermeiden. Ja sogar d'Alembert, mißbilliget dieselbe anderwärts selbst nicht, sondern empfiehlt sie vielmehr der Kürze wegen; indem er sagt: (a) „Toutes les parties des mathématiques „font souvent usage d'expression de cette espece, qui „dans le sens metaphysique qu'elles presentent, paroissent d'abord peu exactes; mais qui ne doivent être re„gardées que comme des manieres abrégées de s'expri„mer, que les Mathématiciens ont inventées pour énon„cer une verité, dont le developpement et l'enoncé „exact auroit demandé beaucoup de mots."

(a) Mel. de Lit. d'Hist. &c. § XI. Tom. V.

Anno-

Anm. zum 214 §. I. Theils.

Weil der Beweis unseres Autors, bloß auf Induction beruhet, und demselben diejenige Strenge fehlt, welche Mathematiker, wo es nur immer möglich ist, fordern, so wollen wir den Beweis selbst, aus d'Alembert entlehnen, der im Tom. IV. Opusc. Mathem. pag. 5. denselben folgendermaaßen giebt.

„Si une quantité A contient tant de variables, „x, y, z &c. qu'on voudra, et qu'on la différentie en „faisant varier successivement x, y, z &c. en négligeant „les différences secondes, troisiémes &c. on aura le „même resultat dans quelqu'ordre qu'on différentie, „c'est-à-dire, que par exemple, $\frac{d^n A}{dx\,dy\,dz\,dt \text{ etc.}}$

„ $= \frac{d^n A}{dz\,dy\,dt\,dx \text{ etc.}}$ Mr. Euler a démontré cette pro„position dans son Analyse des infinement petits, „mais par une espece d'induction. Pour en donner une „démonstration générale et rigoureuse nous considérons, „I. que $\frac{ddA}{dx\,dy} = \frac{ddA}{dy\,dx}$, comme le savent les Géomé„tres. II. Nous allons démontrer que si en général les „quantités $\frac{d^n A}{dx\,dy\,dz}$, et $\frac{d^n A}{dz\,dx\,dy}$, sont égales, la mê„me égalité subsistera en faisant varier une nouvelle va„riable t; ce qu'il est aisé de voir en considérant I. que „la combinaison dz dy dx donne (hip.) le même résul„tat que la combinaison dz dx dy, la combinaison „dt dx dy dz donne évidemment le même résultat que dt „dz dx dy; II. que dt dx dy dz donne le mème résultat

„que

„que dx dt dy dz, puisque dt dx donne le même que dx „dt; III. que dx dt dy dz donne le même résultat que „dx dy dt dz, et par la même raison puisque dt dy don- „ne le même que dy dt &c. Donc, &c. Donc puisque le „théorême a lieu lorsque n = 2, il aura lieu lorsque „n = 3, et ensuite lorsque n = 4; &c. et ainsi de „suite."

Diesen Beweis wendet d'Alembert, auf die gemeinschaftliche Multiplikation, algebraischer Größen an, und erinnert die Verfasser von Elementen, vorsichtiger zu seyn, mit diesen Worten:

„Cette démonstration pourroit servir à prouver d'une „manière très-simple une proposition que la plus part „des Auteurs élémentaires négligent de prouver, savoir, „qu'en quelqu'ordre qu'on multiplie tant de quantités „a, b, c, d, e &c. qu'on voudra, les unes par les au- „tres, le résultat est toujours le même. On le démon- „tre bien pour les produits ab, et ba, de deux quanti- „tés, mais on néglige souvent de le prouver pour les „produits d'un plus grand nombre de quantités, quoi- „que la chose ne soit pas évidente par elle-méme. „C'est un avis qu'on donne ici aux Auteurs d'Elémens, „afin qu'ils y fassent attention à l'avenir."

Anm. zum VIII. Capitel I. Theils.

Der berühmte De la Grange, in seiner italienischen Epistel, an Fagan, welche 1754 gedruckt worden, trägt eine neue Reihe, für die Differenzialien, und

und Integralien von jedem Grade, vor, welche mit der Neutonschen Reihe, für die Potenzen und Wurzeln analog. ist. Diese Sache, welche ihrer Neuheit und Vortreflichkeit wegen, empfehlenswürdig ist, wollen wir kürzlich hier auseinander setzen: die erste von den zwey Reihen, mag daher von Neuton, die andern von la Grange seyn:

$$\text{I. } (a+b)^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} a^{m-3} b^3 + \text{etc.}$$

$$\text{II. } d^m(xy) = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} y^3 + \text{etc.}$$

I. Die erste Reihe, giebt die Evolution jeder Potenz, zu welcher die Summe zweyer Größen erhoben worden, als auch jeder gegebenen Größen, deren Exponent m für den Grad der gegebenen Potenz angenommen ist; also giebt die zweyte Reihe, das Differenzial eines jeden Grades, aus dem Produkte, von zweyen, so wie auch jeden der Veränderlichen, wenn ebenfalls m der Exponent des Grades, oder der Ordnung des vorgegebenen Differenzials ist.

II. Gleich wie die erste Reihe, die Glieder jeder Wurzel giebt, welche aus der Summe zweyer, oder jeder anderer Größen, ausgezogen wird, wofern nur der Exponent m gleich, der gebrochenen Zahl ist, die den Grad der Wurzel anzeigt, so enthält auch die zweyte Reihe, das Integral

tegral jeden Grades, aus dem Produkte von zweyen, sowohl jeder endlichen, als unendlichen Größe, jedoch mit der Bedingung, daß der Exponent m, der ganzen aber negativen Zahl gleich sey, welche den Grad des gegebenen Integrals, andeutet,

III. Endlich gleich wie in der ersten Reihe, der Exponent o, eine Größe anzeigt, die zu keiner Potenz erhoben, und also gleich der Einheit ist, so bedeutet auch eben dieser Exponent o, in der zweyten nichts weiter, als daß in der mit ihm behafteten Größe, keine Differenziation, noch Integration statt finde; daher muß man diese Größe so annehmen, als wenn sie in Beziehung des Exponenten, für Null zu halten sey.

So wie wir uns der Neutonschen Reihe, mit dem glücklichsten Erfolge, bey Erhebungen der Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln, jeden Grades, durch die ganze Analysis bedienen, eben so können wir auch die andere Reihe mit gleichem Vortheil, bey Differenziationen und Integrationen jeden Grades, gebrauchen. Es sey z. E. die Größe xy zu differenziiren. Da nun in diesem Fall, das gesuchte Differenzial, von der ersten Ordnung ist, so wird $m = 1$ seyn, folglich nimmt die zweyte Hauptreihe, diese Form an: $x^1y^0 + x^0y^1$, die, wenn sie auf die gemeinschaftliche Art gebracht worden, wie wir vorhin angezeigt haben, in diese verwandelt wird:

$$ydx + xdy$$

Wenn man das 2te 3te oder 4te Differenzial sucht, so wird $m = 2$ oder $m = 3$, $m = 4$ seyn, und die ver-

verlangten Differenzialien, werden nach gehörigen Substitutionen für m, folgende seyn:

$$d^2.xy = x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2 = yddx + 2dxdy + xddy$$

$$d^3.xy = x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + x^0y^3 = yd^3x + 3ddydy + 3dxddy + xd^3y;$$

$$d^4.xy = x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + x^0y^4 = yd^4x + 4d^3xdy + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y.$$

Eben so wird auch das Differenzial jeder Ordnung, auf die leichteste Weise erhalten werden, wenn nehmlich dx, als das erste veränderliche Differenzial angesehen

sehen wird, oder auch die Glieder weggestrichen werden, welche die Differenzialien von dx enthalten.

Uebrigens wird die Reihe II, auch auf die Erfindung der Integralien, die Neutonsche aber, auf die Ausziehung der Wurzeln, angewendet werden können z. B. Man soll durch die Integration des Elements ydx, einer krumlinigten Fläche, die unbestimmte Quadratur einer Curve finden. Man nehme also nach der allgemeinen Regel, $dx = x$ an, so wird nach dem, was wir vorhin angemerkt haben, $m = -1$ seyn, worauf wir nach geschehener Substitution der Werthe, nach der 2ten Regel, die besondere Reihe:

$$dx^{-1}y^0 - dx^{-2}y^1 + dx^{-3}y^2 - dx^{-4}y^3 + dx^{-5}y^4 \text{ ꝛc.}$$

erhalten werden. Es bedeutet aber dx^{-1}, das Integral von dx; dx^{-2} das Integral des Integrals von dx (d.i. das Integral der Größe x) welches ich das 2te Integral von dx nenne, und es durch das Symbol ${}^2\!\int dx$ bezeichne. Eben so drückt auch dx^{-3}, das dritte Integral von dx, nehmlich ${}^3\!\int dx$; dx^{-4} das vierte Integral oder ${}^4\!\int dx$ ꝛc. aus. Es ist nemlich

$$\int dx = x$$

$${}^2\!\int dx = \int x = \int \frac{x\,dx}{dx} = \frac{x^2}{2\,dx};$$

$${}^3\!\int dx = \int \frac{x^2}{2\,dx} = \int \frac{x^2\,dx}{2\,dx^2} = \frac{x^3}{2.3\,dx^2}$$

$${}^4\!\int dx = \int \frac{x^3}{2.3\,dx^2} = \int \frac{x^3\,dx}{2.3\,dx^3} = \frac{x^4}{2.3.4\,dx^3};$$

und Ueberhaupt

$${}^m\!\int dx = \frac{x^m}{2.3.4\,\ldots\,m\,dx^{m-1}}$$

Wenn

wenn nemlich dx, jederzeit als beständig angenommen wird. Wenn nun die Werthe, in der vorhergehenden Reihe, substituiret, und wie gebräuchlich dy, ddy, d^3y ꝛc. statt y^1, y^2, y^3, ꝛc. gesetzt werden, so erheller endlich

$$\int y dx = xy - \frac{x^2 dy}{2dx} + \frac{x^3 ddy}{2.3 dx^2} - \frac{x^4 d^3 y}{2.3.4 dx^3} + \frac{x^5 d^4 y}{2.3.4.5 dx^4} \text{ ꝛc.}$$

Diese ist also, die so sehr geschätzte Bernouillische Reihe (a) welche allen Geometern schon längst bekannt ist.

Uebrigens wird diese zweyte Regel, nicht allein auf die Integrirung, der Differenzialien des ersten Grades ausgedehnet, sondern sie leistet auch sehr geschwind, durch eine einzige Operation, die Integration der Differentialien, jedes noch weiter gehenden Grades. Man verlangt z. E. das zweyte Integral des Produkts $dy\,dx$; wenn nun $m = -2$, $x = dx$, und $y = dy$ gemacht worden, so erhalten wir:

$$^2\!\int dy\,dx = dx^{-2} dy^0 - 2dx^{-3} dy^1 + 3dx^{-4} dy^2 - 4dx^{-5} dy^3 + \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{x^2 dy}{2dx} - \frac{2x^3 ddy}{2.3 dx^2} + \frac{3x^4 d^3 y}{2.3.4 dx^3} - \frac{4x^5 d^4 y}{2.3.4.5 dx^4} + \text{ ꝛc.}$$

Weil aber dx beständig, so ist $^2\!\int dy dx = \int y dx$ und das vorhin gefundene Integral

$$\int y dx = xy - \frac{x^2 dy}{2dx} + \frac{x^3 ddy}{2.3 dx^2} - \frac{x^4 d^3 y}{2.3.4 dx^2} + \text{ ꝛc.};$$

so werden deshalb unter sich, je zwo Reihen äquiret, welche aber von unzählich verschiedener Art sind, d. i.

$$xy - \frac{x^2 dy}{2dx} + \frac{x^3 ddy}{2.3 dx^2} \text{ ꝛc.} = \frac{x^2 dy}{2dx} - \frac{2x^3 ddy}{2.3 dx^2} + \frac{3x^4 d^3 y}{2.3.4 dx^3} \text{ ꝛc.}$$

deren Gleichheit ein wenig verborgener ist, die aber auch erhalten wird, wenn auf beyden Seiten, alle Glie-

(a) Jo. Bern. Oper. Tom. I. N. XXI.

Glieder aufgehoben werden, so daß nur eins, auf beyden Seiten übrig bleibt, nemlich $dydx$.

Anm. zum 324. §. I. Theils.

Vermöge der gegebenen Differenzialgleichung, welche drey veränderliche Größen in sich enthält

$$(A) \qquad Pdx + Qdy + Rdz$$

und der daraus hergeleiteten Beziehungs-Gleichung, von der Beschaffenheit

$$(B)\; P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0,$$

setzt unser Autor überhaupt diese Regel fest, daß nehmlich da, wo die endliche Gleichung (B), weder identisch ist, noch diejenige Beziehung der veränderlichen Größen x, y, z, darbietet, welche der Differenzialgleichung (A) Genüge leistete, keine endliche Gleichung gefunden werden könne, die für dieselbe hinreichend wäre. Allein diese Regel, besitzt nicht diejenige Ausdehnung, welche Euler derselben zueignet, sondern sie muß, durch eine Umschreibung dahin gezwungen werde, wie zuerst der berühmte de la Place, scharfsinnig wahrgenommen hat, in seiner vortreflichen Dissertation sur les solutions particulieres des Equations différentielles, et sur les inégalités séculaires des Planetes. In Actis Reg. scint. Paris. Acad. an. 1772. Gesetzt es wäre die Differenzialgleichung:

$$dx = \left\{1 + \sqrt[3]{(x-z-y)}\left[z + a\sqrt[4]{(x-z-y)} + b\sqrt[3]{(x-z-y)}\right]\right\} dy + \left[1 + y\sqrt[3]{(x-z-y)}\right] dz;$$

diese giebt mit (A) verglichen

$$P = 1,\ Q = 1 + \sqrt[3]{(x-z-y)}\,[z + a\sqrt[4]{(x-z-y)} - b\sqrt[3]{(x-z-y)}],\ R = 1 + y\sqrt[3]{(x-z-y)};$$

Werden nun diese Werthe, in der Bedingungs-Gleichung (B) substituiret, so erhält man nach der beschwerlichsten, und weitläuftigsten Rechnung, die linearische Gleichung

$$y + z - x + \left(\frac{3a}{4b}\right)^{12} = 0,$$

welche weder identisch ist, noch der Differenzialgleichung Genüge thut. Nichts desto weniger giebt es dennoch, zwischen den veränderlichen Größen x, y, z, eine Beziehung, welche eben dieses leistet; so ist nemlich $x = y + z$, auf das augenscheinlichste, für die Differenzialgleichung hinreichend. Hieraus ist vollkommen klar, daß die Eulersche Regel, in kürzern Ausdrücken enthalten sey, als vom Autor gefodert wird.

Anm. zum 11 §. II. Theils.

Unser Autor versichert an diesem Orte, in der Einleitung gezeigt zu haben, daß beyde Reihen

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{rc.}$$

$$\text{und } \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2.4} + \tfrac{1}{3.8} + \tfrac{1}{4.16} + \tfrac{1}{5.32} + \tfrac{1}{6.64} + \text{rc.}$$

Den hyperbolischen Logarithmen von zwey, darstellen. Allein ich habe in der angeführten Einleitung, zur Analysis des Unendlichen, alles angewandten Fleißes ohngeachtet, diesen Beweis nicht finden können *), daher ich diesen Mangel hier ergänzen will. Aus der Theorie der Logarithmen ist bekannt, daß **)

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{ꝛc.}$$

setzt man daher $x = 1$ so wird

$$l\,2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{ꝛc. seyn.}$$

Wird $x = -\frac{1}{2}$ angenommen, so ist

$$l(1+x) = l\,\tfrac{1}{2} = -\frac{1}{1.2^1} - \frac{1}{2.2^2} - \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{4.2^4} - \text{ꝛc.}$$

folglich wird wegen $l\,2 = -l\,\frac{1}{2}$ entstehen, ***)

$$l\,2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{1.2^1} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{5.2^5} + \text{ꝛc.}$$

W. Z. E. W.

Anm. nach §. 45. und folgenden II. Theils.

Obgleich der bewundernswürdige, und vortrefliche Taylorsche Lehrsatz, unzählig in der gesammten Mathematik, angewendet wird, und die herrlichsten Auflösungen der schwersten Aufgaben, als auch die Beweise der erhabensten Lehrsätze darbietet, so muß man dennoch sehr behutsam, im Gebrauch desselben verfahren, um nicht zu Fehlern und Irrthümern, verleitet zu werden. Man würde daher sich sehr betrügen, wenn man allgemein behaupten wollte, daß

jeg-

*) Auch Hr. Prof. Michelsen sagt dieses, in seiner vortreflichen Uebersetzung 2ter Th. Seite 10. Note.

**) Einl. Th. 1. §. 123.

***) $l.2 = -l(0-2) = -l(l1 - l2) = -l\frac{1}{2}$.

jede Funktion der binomischen Größe $x + a$ d. i. $\Phi\,(x + a)$ durch den Taylorschen Lehrsatz, jederzeit in der unbestimmten Reihe:

$$\Phi\,(x) + \frac{a d.\Phi(x)}{dx} \quad \frac{a^2 dd.\Phi(x)}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3.\Phi(x)}{2.3dx^3} + \frac{a^4 d^4.\Phi(x)}{2.3.4dx^4} + \text{rc.}$$

als gleich angenommen werden könne. Da hingegen dieser Lehrsatz, in der ganz einfachen Hypothese, durch welche $\Phi\,(x + a) = [\text{Sin.}\,(x + a)]^{\frac{1}{3}}$, gesetzt wird, ganz unrichtig und falsch befunden wird, indem die Größe $[\text{Sin.}\,(x + a)]^{\frac{1}{3}}$, welche jederzeit in Beziehung, auf den Taylorschen Lehrsatz, endlich ist, oder im zweyten Gliede einen unendlichen Werth bekommt, wo $x = 0$; es wird nemlich die Reihe =

$$\text{Sin.}\,x^{\frac{1}{3}} + \frac{a d.\sin.\,x^{\frac{1}{3}}}{dx} + \text{rc.} = \text{Sin.}\,x^{\frac{1}{3}} + \frac{a\,\text{Cosin.}\,x}{3\sin.\,x^{\frac{2}{3}}} + \text{rc.} = \infty$$

in der Hypothese $x = 0$. Durch dies einzige Beyspiel, wird jeder vorsichtige Geometer, bey Anwendung dieses Lehrsatzes, gewarnet, sich desselben mit aller möglichen Behutsamkeit und Scharfsinnigkeit zu bedienen, indem sich oft die berühmtesten Mathematiker, dadurch haben irre führen lassen.

Es ereignet sich auch bisweilen, daß nach dem Taylorschen Lehrsatz, wenn derselbe auch nicht irrig gebraucht wird, die Auflösung eines vorgegebenen Problems, weit weniger offenbar ist, als sie wohl seyn sollte, und daß dieselbe durch eine andere, und sichere Methode, erhalten werden könne, wie aus folgenden Beyspiel deutlich erhellen wird. Es wird aufgegeben eine solche Funktion $\Phi\,(x)$ der veränderlichen

chen Größe x zu finden, vermittelst welcher $\Phi\,(x + a) = \Phi\,(x)$ erhalten wird, wenn die existirende Größe a, gegeben worden. Aus der Formel $\Phi\,(x)$ ist offenbar, daß man die Ordinate dieser Curve erhalte, in welcher, wenn die Segmente in der Axe = a, angenommen werden, die Ordinaten vermittelst dieser Größe, in gleicher Weite, gleich seyn werden. Dies geschiehet in der Cykloide, wenn a mit der Peripherie des erzeugenden Kreises, äquiret wird. Hieraus ist klar, daß die Größe $\Phi\,(x)$, mit unendlichen willkührlichen Werthen versehen sey, welche sämtlich dem Problem Genüge leisten, wofern $\Phi\,(x)$ die Ordinate vorbesagter Curve, darbietet. Wir wollen jetzt $\Phi\,(x + a)$ nach dem Taylorschen Satz, in eine Reihe verwandeln, so ist $\Phi\,(x) = \Phi\,(x + a) =$

$$\Phi\,(x) + \frac{ad.\Phi\,(x)}{dx} + \frac{a^2dd.\Phi(x)}{2dx^2} + \frac{a^3d^3.\Phi(x)}{2.3dx^3} + \text{rc.}$$

Hierdurch erhält man die Gleichung:

$$\frac{ad.\Phi(x)}{dx} + \frac{a^2dd.\Phi\,(x)}{2dx^2} + \frac{a^3d^3.\Phi\,(x)}{2.3dx^3} + \text{rc.} = 0.$$

Es sey e die Basis hyperbolischer Logarithmen, und $\Phi\,(x) = Ae^{hx}$; diesen Werth substituire man in vorhergehender Gleichung, so erfolgt nach geschehener Division, durch Ae^{hx}, die Gleichung

$$a\,h + \frac{a^2h^2}{2} + \frac{a^3h^3}{2.3} + \text{rc.}$$

folglich wird $e^{ah} - 1 = 0$ seyn; gehet man nun von den Zahlen, auf Logarithmen zurück, so entstehet $a\,h = l\,1$. Nach Eulers Erfindung hingegen, ist

$l\,1$

$l\,1 = \pm\, m\pi\sqrt{-1}$, wenn m als jeder ganzen Zahl, zugleich mit o vorhanden ist. Also

$ah = \pm\, m\pi\sqrt{-1}$, und $h = \pm \frac{m\pi\sqrt{-1}}{a}$, und folglich

$$\Phi(x) = Ae^{\pm\frac{m\pi x}{a}\sqrt{-1}} = A\left(\text{Cos.}\frac{m\pi x}{a} \pm \text{Sin.}\frac{m\pi x}{a}.\sqrt{-1}\right),$$

oder gesetzt $A\sqrt{-1} = B$, so erhält man endlich:

$$\Phi\,(x) = A\ \text{Cos.}\ \frac{m\pi x}{a} \pm B\ \text{Sin.}\ \frac{m\pi x}{a}$$

Allein es scheint, als wenn die Form dieser Funktion $\Phi\,(x)$, nicht diejenige Allgemeinheit besäße, die sie haben sollte. Man nehme daher, den Kreisbogen v, und des Diameters Abscisse $1 - \text{Cos. } v$; man ziehe die ordinate x, bis zu derselben Curve, in welcher man $x = v - \sin v$ bekommt; es sey ferner die Abscisse der Curve $1 - \text{Cos. } v$, gleich der Funktion der Ordinate x, oder $\Phi\,(x)$, so wird

$$x = v - \text{Sin. } v = Cv^3 + Dv^5 + Ev^7 + \text{ꝛc.}$$

seyn, und man findet durch die Umkehrung der Reihen, $v = Fx^{\frac{1}{3}} + \text{ꝛc.}$; folglich $\Phi\,(x) = 1 - \text{Cos. } v = 1 - \text{Cos.}\ (F x^{\frac{1}{3}} + \text{ꝛc.})$. Wenn nun der oben gefundene Werth

$$\Phi\,(x) = A\ \text{Cos.}\ \frac{m\pi x}{a} \pm B\,\text{Sin.}\ \frac{m\pi x}{a}$$

mit der gehörigen Allgemeinheit, versehen würde, so enthielte derselbe, den andern Werth

$$1 - \text{Cos.}\ (Fx^{\frac{1}{3}} + \text{ꝛc.})$$

oder welches einerley ist, die Größe

$$1 - \text{Cos.}\ (Fx^{\frac{1}{3}} + \text{ꝛc.}),$$

könnte in die Reihe dieser Form: $A'\ \text{Sin.}\ \pi' x + B'$

sin.

sin. $2\pi x$ † C′ sin. $3\pi x$ † rc. . . . † H′ Cos. πx † J′ Cos. $2\pi x$ † rc. umgekehret werden, so wie auch (durch die bekannten analytischen Lehrsätze der Trigonometrie) in die Reihe

$$A'' + B''\pi x + C''\pi^2 x^2 + D''\pi^3 x^3 + E''\pi^4 x^4 + \text{rc.}$$

in welcher nur ganze Potenzen, der veränderlichen Größe x, vorhanden sind. Dies widerspricht aber der Evolution der Formel

$$1 - \text{Cos.}\,(Fx^{\frac{1}{3}} + \text{rc.}),$$

die wie bekannt

$$A''' x^{\frac{2}{3}} + B''' x^{\frac{4}{3}} + \text{rc.}$$

giebt, wo die gebrochenen Potenzen von x, keineswegs vermieden werden können. Hieraus ist also klar, daß von der Funktion Φ (x), deren Werth

$$A\ \text{Cos.}\ \frac{m\pi x}{a} + B\ \text{sin.}\ \frac{m\pi x}{a}$$

nicht auf alle Fälle, der vorgegebenen Frage passend ist, und weniger generisch sey, als er seyn sollte.

Wenn jemand einwenden wollte; die Größe

$$A''' x^{\frac{2}{3}} + B''' x^{\frac{4}{3}} + \text{rc.}$$

könne auf die Form

$$\alpha + \beta\ \text{Cos.}\ 2x + \gamma\ \text{Cos.}\ 4x + \text{rc.}$$

gebracht werden, weil

$$x = \text{Sin.}x + a\ \text{Sin.}:x^3 + b\ \text{Sin.}:x^5 + \text{rc.} = \text{Sin.}:x(1 + a\ \text{Sin.}:x^2 + b\ \text{Sin.}:x^4 + \text{rc.}) = \text{Sin.}\,x(a' + b'\ \text{Cos.}2x + c'\ \text{Cos.}\ 4x + \text{rc.})$$

also

$$x^2 = \frac{1 - \text{Cos.}2x}{2}(a'' + b''\text{Cos.}\ 2x + c''\text{Cos.}\ 4x + \text{rc.});$$

und endlich

$$x^{\frac{2}{3}} = a''' + b'''\ \text{Cos.}\ 2x + c'''\ \text{Cos.}\ 4x + \text{rc.}$$

so

so würde er aus dem Grunde, eine falsche Einwendung machen, weil aus der Gleichung:

$$x^{\frac{2}{3}} = a''' + b''' \text{ Cos. } 2x + c''' \text{ Cos. } 4x + \text{ꝛc.}$$

wenn selbige differentiirt, und durch dx dividirt wird, eine andere:

$$\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = -2b''' \text{ Sin. } 2x - 4c''' \text{ Sin. } 4x - \text{ꝛc.}$$

entstehet, welche nach der Hypothese $x = 0$, die ungereimteste Gleichheit $\infty = 0$ hervorbringt. Ueberdieß wenn folgender Gegensatz gemacht würde, daß auch der Sinus x, in

$$f + g \text{ Cos. } 2x + h \text{ Cos. } 4x + \text{ꝛc.}$$

verwandelt werden könne, so würde es nehmlich erlaubt seyn, festzusetzen, daß

$$\text{Sin.}: x = \sqrt{\text{Sin.} x^2} = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cos.} 2x}{2}\right)} = f + g \text{ Cos.} 2x + h \text{ Cos.} 4x + \text{ꝛc.},$$

aber diese Gleichung hat, einen doppelten Fehler,

I. Weil

$$\frac{d . \text{Sin.}: x}{dx} = 1 \text{ wenn } x = 0.$$

und im Gegentheil

$$\frac{d(f + g \text{ Cos. } 2x + h \text{ Cos. } 4x + \text{ꝛc.})}{dx} = 0 \text{ wenn } x = 0;$$

II. Weil $y = \text{Sin. } x$ eine Curve bezeichnet, die aus entgegengesetzten Aesten gebildet ist, die sowohl ober- als unterhalb der Axe, befindlich sind; wogegen

$$y = f + g \text{ Cos. } 2x + h \text{ Cos. } 4x + \text{ꝛc.}$$

eine Curve andeutet, deren Aeste den Abscissen, x und

— x

— x entsprechen, welche auf demselben Theil der Axe liegen.

Anm. zum 69. §. Theil II.

Die meisten Anwendungen des Taylorschen Lehrsatzes, auf die Evolution der Funktionen, jeder veränderlichen Größe, wie unser Autor gezeigt hat, gehen bloß auf diejenigen Fälle, in denen die veränderliche Größe selbst, eine gewisse Zu- und Abnahme erhält; er erwägt aber keines weges, die Evolution, in der die veränderliche Größe, unverändert bleibe, obgleich die Taylorsche Formel, auch in diesen Fällen, eine außerordentliche Hülfe leistet. Zu mehrerer Erweiterung dieser bewundernswürdigen Formel wird es glaube ich, nicht überflüssig seyn, dieß hier kürzlich anzuführen. Es sey also z eine Funktion des Binomiums $x + \omega$, und y eine ähnliche Funktion von x, d. i. $z = \varphi(x + \omega)$ und $y = \varphi(x)$; so wird

$$\text{(A)} \quad z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{2.2dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{2.3.4dx^4} + \text{rc.}$$

seyn welche jederzeit, eine wahre Gleichung seyn wird, man mag eine Größe, welche man immer will, für ω annehmen, und die veränderliche x mag seyn, welche es wolle. Folglich bestehet die Gleichung (A) auch alsdann, wenn sie in allen ihren gegebenen Gliedern x und ω, $x = 0$, und sodann $\omega = x$ gesetzt worden. Wenn daher die Werthe, in welche die Glieder übergehen,

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4} \text{ rc.}$$

durch

durch die Substitution $x = 0$, K, A, B, C, D rc. genennet werden, so erhalten wir die Formel:

$$(B)\quad \varphi(x) = K + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Dx^4}{2.3.4} + \text{rc.}$$

Erstes Beyspiel.

Es sey die Exponenzialgröße a^x zu evolviren, vorgegeben.

Nimmt man $x = 0$, so findet man:

$$K = 1,\ C = la,\ B = (la)^2,\ C = (la)^3,\ D = (la)^4,\ \text{rc.}$$

Deswegen wird nach gehörigen Substitutionen, in der Gleichung

$$(B)\quad a^x = 1 + xla + \frac{x^2(la)^2}{2} + \frac{x^3(la)^3}{2.3} + \frac{x^4(la)^4}{2.3.4} + \text{rc.}$$

seyn.

Zweytes Beyspiel.

Es soll der Sinus x, durch die Reihe der Potenzen des Bogens x, gesucht werden.

Es wird folglich

$$\text{Sin.}:x = K + Ax + \frac{Bx2}{2} + \frac{Cx3}{2.3} + \frac{Dx4}{2.3.4} + \text{rc. seyn;}$$

da aber

$$K = 0,\ A = 1,\ B = 0,\ C = -1,\ D = 0,\ E = 1\ \text{rc.}$$

so ist also

$$\text{Sin.}:x = x - \frac{x^3}{2.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{rc.}$$

Anm.

Anm. nach §. 151. Theil II. *)

In den reciproken Potenzenreihen natürlicher Zahlen, die überhaupt dargestellt werden, durch

$$(\mathrm{A})\quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \text{2c.}$$

bis ins unendliche wird man es in der That, sonderbar finden, daß die Summe aller Glieder in ungeraden Stellen, sich verhält zur Summe der Glieder in geraden Stellen, wie $2^m - 1$ zu 1. Dividirt man nehmlich die Reihe (A) durch 2^m, so entstehet diese

$$(\mathrm{B})\quad \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{12^m} + \text{2c.}$$

welche die Glieder der Reihe (A) in geraden Stellen enthält. Es ist aber $\frac{(\mathrm{A})}{2^m} = (\mathrm{B})$, und folgendes

$$(\mathrm{A}) : (\mathrm{B}) = 2^m : 1. \text{ Also}$$

$$(\mathrm{A}) - (\mathrm{B}) : (\mathrm{B}) = 2^m - 1 : 1, \text{ d. i.}$$

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \text{2c.} : \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \text{2c.} = 2^m - 1 : 1,$$

nehmlich die Summe der Glieder in ungeraden Stellen, hat eben dasselbe Verhältniß, zur Summe der Glieder in geraden, wie $2^m - 1$ zu 1 hat. Nimmt man daher den Exponenten $m = 1$, so findet man die reciproke Reihe der ungeraden, gleich jener der geraden und zwar

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{2c.} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \text{2c.};$$

wird $m = 2$ gesetzt, so findet man

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} \text{ 2c.} : \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{64} \text{ 2c.} = 3 : 1.$$

nimmt

*) In der deutschen Uebersetzung steht §. 132. statt §. 151.

nimmt man m = 3, so bekommt man

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{125} + \tfrac{1}{343} + \tfrac{1}{729} + \text{ꝛc.} :$$
$$\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{216} + \tfrac{1}{512} + \tfrac{1}{1000} + \text{ꝛc.} = 7 : 1;$$

und überhaupt in Reihen, welche aus reciproken Potenzen, natürlichen Zahlen entstehen, übersteigt die Summe der Glieder, in ungeraden Stellen, um so vielmal die Summe jener in geraden Stellen, als um so vielmal die gleichnahmige Potenz von zweyen, um die Einheit vermindert, die Einheit übertrift.

Allein hier gerathen wir, auf einen unerwarteten, und ganz besondern paradoxen Satz, daß nemlich, so oft der Exponent der Potenz, nicht um die Einheit größer ist, die Summe der Glieder in ungeraden Stellen, dem bewiesenen Lehrsatz zufolge, kleiner seyn müsse, als die Summe der Glieder in geraden Stellen, da doch hingegen, die Glieder der ungeraden, mit jenen der geraden Stellen, einzeln verglichen, jederzeit größer gefunden werden, und zwar nach vorhergehender Analogie:

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \text{ꝛc.} :$$
$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \text{ꝛc.} = 2^m - 1 : 1,$$

ist das Verhältniß der kleinern Ungleichheit, oder ein Verhältniß des Kleinern zum Größern, so oft der Exponent m, um die Einheit kleiner ist; hingegen ist das andere Verhältniß

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \text{ꝛc.} :$$
$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \text{ꝛc.}$$

ein

ein Verhältniß der größern Ungleichheit, oder ein Verhältniß des Größern zum Kleinern, weil jedes Glied, im vorhergehenden offenbar jedes Glied, das demselben im Nachfolgenden entspricht, übertrift.

Dies Paradoxon nun, hebt selbst der scharfsinnige Jakob Bernoulli nicht, welcher in der Abhandlung von den unendlichen Reihen §. XXIV. folgendes sagt: „Es ist bewundernswürdig, daß in der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \text{ꝛc.}$$

„deren Summe unendlich, oder größer ist, als die „Reihe

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{ꝛc.}$$

„der kleinern Nenner wegen, die Glieder der ungeraden Stellen, zu den Gliedern der geraden, der „Regel nach ein Verhältniß wie $\sqrt{2} - 1$ zu 1 „d. i. des Kleinern zum Größern haben, wogegen jene mit diese einzeln verglichen, dennoch größer sind, „deren entgegengesetztscheinende (εναντιοφανειας) Verhältniß, ob sie gleich aus der Natur des Unendlichen, „mit endlichem Verstande, nicht faßlich zu seyn scheint, „dennoch von uns deutlich eingesehen worden. Ein „gleiches ist auch von andern, ähnlichen Reihen zu „verstehen, die eine unendliche Summe haben.“ Da aber Bernouilli, die wahre und verständliche Erläuterung, dieses paradoxen Satzes, niemals öffentlich bekannt gemacht hat, auch dieselbe vergeblich, in der Sammlung seiner Werke gesucht wird; so glaube ich, daß es nicht undienlich seyn wird, selbige hiermit zu erörtern. Wenn also in der Reihe

$$(A) \quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m} + \text{rc.}$$

alle Glieder durch 2^m dividirt werden, so daß daraus die andere Reihe entsteht nehmlich:

$$(B) \quad \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{12^m} + \frac{1}{14^m} + \frac{1}{16^m} + \text{rc.}$$

so ist es sicher, daß die Glieder dieser Reihe (A), in geraden Stellen, gefunden werden, so wie ebenfalls, die Glieder der dritten Reihe *)

$$(C) \quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{1}{11^m} + \text{rc.}$$

in ungraden Stellen; demohngeachtet übertrift die Zahl der Glieder, in der Reihe (B), zweymahl die Zahl der Glieder der Reihe (C), weil die einzelnen Glieder der Reihe (B), aus den einzelnen in (A), durch 2^m dividirt erfolgen, da hingegen die einzelnen Glieder der Reihe (C), bloß den abwechselnden Gliedern der erstern (A) entsprechen, deren Zahl zum wenigsten, die Hälfte der Zahl der Glieder in (A) und daher auch die Hälfte jener in (B) ist. Hieraus folgt, daß in der gegenseitigen Vergleichung der Reihen (C) und (B), nicht einzelne Glieder, mit einzelnen zu vergleichen sind; sondern daß nach geschehener Vergleichung des 1ten Gliedes, mit dem ersten Gliede, jedes Glied der Reihe (C) allezeit zugleich mit zweyen der Reihe (B) verglichen werden müsse; so wird alsdann nach der Hypothese $m < 1$ erhalten, daß jedes Glied der Reihe (C) kleiner sey, als

*) Es ist nehmlich $C = A - B$.

als das Aggregat zweyer in (B) sich entsprechender. Es sey nehmlich $\frac{1}{a^m}$, ein beliebiges Glied der Reihe (C), so werden zwey mit demselben übereinstimmende in (B) $\frac{1}{(2a-2)^m}$, und $\frac{1}{(2a)^m}$ seyn, und das Verhältniß zum Aggregat derselben, ist

$$\frac{1}{a^m} : \frac{1}{(2a-2)^m} + \frac{1}{(2a)^m}$$

Multiplicirt man ferner, das Vorangehende, und Nachfolgende Glied der Verhältniß, durch $(2a)^m$; so entstehet die Analogie:

$$\frac{1}{a^m} : \frac{1}{(2a)^m} + \frac{1}{(2a-2)^m} = 2^m : 1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m,$$

in welcher das andere Verhältniß

$$2^m : 1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m,$$

augenscheinlich ein Verhältniß des Kleinern, zum Größern ist; denn wegen $m < 1$, wird $2^m < 2$, und wegen $\frac{a}{a-1} > 1$, wird $\left(\frac{a}{a-1}\right. > 1$ folglich

$$1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m > 2 > 2^m.$$

Also werden die einzelnen Glieder der Reihe (C) (ausgenommen das erste) zugleich mit zweyen der Reihe (B) verglichen, stets kleiner seyn, so oft nehmlich der Exponent m, kleiner als die Einheit ist; folglich ist die Reihe (C) kleiner als jene (B), wie deren wechselseitige Proportion $2^m - 1 : 1$, darthut.

Hingegen in der harmonischen Reihe:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{rc.}$$

ist dieß bemerkungswerth, daß wenn nehmlich die Glieder ungerader Stellen (ausgenommen das erste) immer von zweyen einander entsprechenden, und zugleich vereinigten Gliedern gerader Stellen, weggenommen werden, daraus eine neue Reihe entspringt, welche eine endliche Summe hat, die sie zwar in andern Reihen, wo eben dies Parodoxon sich ereignet, nicht erhält, indem in denselben, die Summe der Reihe, die auf besagte Art erzeuget wird, unendlich ist. Wird in der harmonischen Reihe, von dem Aggregat zweyer Glieder $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, weggenommen $\frac{1}{3}$, so entstehet

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3} = \frac{1}{2.6};$$

desgleichen

$$\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{5} = \frac{1}{4.10}$$

und hinwiederum

$$\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{7} = \frac{1}{6.14}; \text{ u.s.f.}$$

man erhält also die neue Reihe:

$$\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.10} + \frac{1}{6.14} + \frac{1}{8.18} + \frac{1}{10.22} + \text{rc.}$$

bis ins Undendliche deren Summe endlich ist, weil sie die Hälfte dieser

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10.11} + \text{rc.}$$

weit kleinern, als jener andern

$$\frac{1}{2.2} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{8.8} + \frac{1}{10.10} + \text{rc.}$$

deren

deren Summe endlich, obschon klein ist. Hieraus ist begreiflich, warum in der harmonischen Reihe, die Summe der Glieder in ungeragen Stellen, nicht kleiner sey, als jene in geraden, obgleich jedes Glied ungerader Stellen (ausgenommen das erste) kleiner ist, als iwey zugleich genommen entsprechende, von geraden Stellen, welches daher kommt, daß die erstern Summe, bloß um eine endliche Größe, in Ansehung der andern fehlt, ohnerachtet die Summe beyder, unendlich ist.

Auf nicht unähnliche Weise, wird auch der Grund eines andern Paradoxums angegeben, daß nehmlich in der Reihe natürlicher, zu irgend einer Potenz erhobener Zahlen,

$$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + 5^m + 6^m + \text{rc.}$$

bis ins Unendliche die Summe der Glieder in geraden Stellen, zur Summe aller Glieder der Reihe, ein Verhältniß haben, wie 2^m zur doppelten Einheit, in der Reihe natürlicher Zahlen; zur vierfachen, in der Reihe der Quadrate; zur achtfachen, in der Reihe der Würfel hat rc., obschon die Glieder in geraden Stellen, als Theile der ganzen Reihe, deren vielfache Größe, auf keine Weise auszumachen scheinen. Es würde daher äußerst falsch und ungereimt seyn, wenn man in dem Wahn stände, daß die Reihe der Quadrate, der Würfel und anderer höhern Potenzen, aus den natürlichen Zahlen, kleiner seyn müsse, als die Reihe der natürlichen Zahlen selbst, in welcher sie gleichsam, als Theile vom Ganzen enthalten würden.

Anm. zum 159. §. II. Theils.

Aus der vortreflichen Gleichung unseres Autors,

$$l1 + l2 + l3 \ldots + lx = \tfrac{1}{2} l2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) lx - x + \frac{A}{1.2x} - \frac{B}{3.4x^3} + \frac{C}{5.6x^5} - \frac{D}{7.8x^7} + \text{etc.}$$

fließen einige Lehrsätze, die ihres ganz besondern Nutzens wegen, sich empfehlen, und hier bewiesen zu werden verdienen.

Erster Lehrsatz.

Man nehme x für unendlich groß an, und e für die Basis der hyperbolischen Logarithmen. So ist

$$1.2.3.4 \ldots x = \frac{x^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{e^x}.$$

Die Eulersche vorbenannte Gleichung, wenn $x = \infty$ angenommen wird, und $-x = -le^x$ ist, geht in diese über:

$$\text{(A)} \quad l1 + l2 + l3 \ldots + lx = \tfrac{1}{2} l2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) lx - le^x.$$

Ist dieser Uebergang von Logarithmen, auf Zahlen erfolgt, so wird diese Gleichung ungestaltet in

$$1.2.3.4 \ldots x = \frac{x^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{e^x}. \text{ W. Z. E. W.}$$

Zweyter Lehrsatz.

Wenn man x und p, als unendlich groß annimmt, so wird:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+2)(x-p+1) = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}.$$

Man substituire in der Gleichung (A) $x - p$ für x, so bekommt man

$$l1 + l2 + l3 \ldots + l(x-p) = (x-p+\tfrac{1}{2})l(x-p) - le^{x-p} + \tfrac{1}{2}\,l2\pi.$$

Diese Gleichung ziehe man, von der ersten (A) ab, so findet man:

$$lx + l(x-1) + l(x-2)\ldots + l(x-p+2) + l(x-p+1) = (x+\tfrac{1}{2})\,lx - (x-p+\tfrac{1}{2})\,l(x-p) + le^{-p}.$$

Man erhält daher, durch Fortschreitung von Logarithmen auf Zahlen:

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+2)(x-p+1) = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}.$$

W. Z. E. W.

Dritter Lehrsatz.

Nimmt man x und p, für sehr große Zahlen an (denn würden sie als unendliche genommen, so wäre die Gleichheit absolut) so wird der Coeffizient des $(p+1)$ten infinitesimal-Gliedes, welcher im Binomium zur Potenz x erhoben worden, mit dem nächsten Ausdruck äquiret,

$$x^{x+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}.$$

Aus der gemeinen Algebra ist bekannt, daß wenn das Binomium zur Potenz x, erhoben wird, der Coeffizient des (p + 1)ten infinitesimimal-Gliedes, nichts anders sey als:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots p}.$$

Allein da nach der Hypothese, x und p unendliche, oder auch sehr große Zahlen sind, so ist der Zähler dieses Bruches, vermöge des zweyten Lehrsatzes

$$=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}},$$

und der Nenner nach den ersten Lehrsatz.

$$=\frac{p^{p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{p}}.$$

Also wird vorbenannter Bruch d. i. der Coeffizient des (p + 1)ten infinitesimal-Gliedes im Binomium zur Potenz x erhoben, mit der Größe

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

äquiret, W. Z. E. W.

Zusatz I. Wäre $p = nx$, so entstünde:

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{(nx)^{nx+\frac{1}{2}}\; x-nx)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{n^{nx+\frac{1}{2}}x^{x+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{n^{nx+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{n^{nx}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{1-n}\right)^{nx}(1-n)^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}.$$

Zusatz II. Daher wird der Werth, der größten oder mittlern Coeffizienten, welcher im Binonium, zu einer unermeßlichen Potenz x erhoben werden, gefunden; gesetzt es sey $p = \frac{1}{2}x$ oder $n = \frac{1}{2}$, und substituirt man dies, im vorhergehenden Ausdruck, so wird jener in diesen verwandelt,

$$\frac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}},$$

welcher den Werth des größten Coeffizienten, darstellt.

Zusatz III. Wenn das Binomium, zu einer unendlichen Potenz x erhoben worden, so wird das Verhältniß des größten Coeffizienten, mit der Größe $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ äquirt; denn es ist die Summe aller Coeffizienten $= 2^x$, mithin das obengenannte Verhältniß:

$$= \frac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} : 2^x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

Anm.

Anm. zum 185. §. II. Theils.

1) Es wird vielen der Beweis unsers Autors, verdächtig scheinen, welcher bloß auf dem Grundsatze beruhet, den er mit folgenden Worten vorträgt: Wenn also κ eine unendlich große Zahl ist, so fällt diese Unterscheidung (Erwägung) weg, weil eine unendlich große Zahl weder gerade noch ungerade genannt werden kann, und es müssen also dabey die zweifelhaften Glieder weggelassen werden. Hieraus folgt, daß die Summe von Reihen dieser Art, wenn sie ohne Ende fortlaufen, bloß in der hinzuzufügenden beständigen Größe bestehe. Jedermann begreift es, wie unzureichend und nachtheilig dieser Satz sey, welcher aus der dunkeln und geheimnißvollen Art, der unendlichen Zahl hergenommen ist. Dieserhalb wird es sich der Mühe lohnen, die Eulerschen Formeln, mit einem neuen, und unumstößlichen Beweise zu versehen. *)

I $1 - 2 + 3 - 4 +$ ꝛc. $= \frac{1}{4}$

II $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 +$ ꝛc. $= 0$

III $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 +$ ꝛc. $= - \frac{2}{16}$

IV $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 +$ ꝛc. $= 0$

V $1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 +$ ꝛc. $= \frac{16}{64}$

VI $1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 +$ ꝛc. $= 0$

VII $1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 +$ ꝛc. $= - \frac{272}{256}$

VIII $1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 +$ ꝛc. $= 0$

IX $1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 +$ ꝛc. $= \frac{7936}{1024}$

u. ꝛc.

2)

*) Siehe Greg. Fontana Dissrt. von den Reihen im ersten Bande ersten Theils: Memorie di Matematica e Fisica della societa italiana 1784.

2) Folgende zwey Lehrsätze, müssen deshalb vorausgeschickt werden.

Erster Lehnsatz.

Vermittelst des Bogens x der durch irgend einen Radius 1, des Creises beschrieben worden, bekommt man die Gleichung

$$\text{Cos. } x + \text{Cos. } 2x + \text{Cos. } 3x + \text{Cos. } 4x + \text{rc.}$$

bis ins Unendliche $= -\frac{1}{2}$. Es sey

$$S = \text{Cos. } x + \text{Cos. } 2x + \text{Cos. } 3x + \text{Cos. } 4x + \text{rc.}$$

diese multiplizire man durch Cos. x, so bekommt man:

$$S\,\text{Cos. } x = \text{Cos. } x\,\text{Cos. } x + \text{Cos. } x\,\text{Cos. } 2x + \text{Cos. } x\,\text{Cos. } 3x + \text{Cos. } x\,\text{Cos. } 4x + \text{rc.}$$

Aus der Trigonometrie ist bekannt daß das Produkt aus denen Cosinussen zweyer Winkel, mit der halben Summe und der halben Differenz dieser Cosinusse gleich ist. *) Wird daher jedes Produkt besagter Gleichung, in zwey Glieder aufgelößt, so erfolgt:

$$S\,\text{Cos. } x = \tfrac{1}{2}(\text{Cos. } 2x + 1) + \tfrac{1}{2}(\text{Cos. } 3x + \text{Cos. } x) + \tfrac{1}{2}(\text{Cos. } 4x + \text{Cos. } 2x) + \text{rc.} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\text{Cos. } x + \text{Cos. } 2x + \text{Cos. } 3x + \text{Cos. } 4x + \text{rc.} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\text{Cos. } x + S.$$

Daher wird

$$S(1 - \text{Cos. } x) = \tfrac{1}{2}\text{Cos. } x - \tfrac{1}{2},\ \text{d. i. } S = -\tfrac{1}{2}$$

seyn. W. Z. E. W.

Zweyter

*) Es ist nemlich aus der Trigonometrie bekannt daß $\text{Cos. } x\ \text{Cos. } y = \frac{1}{2}(\text{Cos. } x + y) + \frac{1}{2}(\text{Cos. } x - y)$. Hiernach ist also das erste Glied $\text{Cos. } x^2 = \frac{1}{2}(\text{Cos. } 2x + \text{Cos. } 0) = \frac{1}{2}(\text{Cos. } 2x + 1)$, und so findet sich jedes folgende Glied.

Zweyter Lehnsatz.

Die unendliche Reihe

$$S = \text{Sin. } x + \text{Sin. } 2x + \text{Sin. } 3x + \text{Sin. } 4x + \text{etc.}$$

bis ins Unendliche ist gleich diesem Ausdruck:

$$\frac{\text{Sin. } x}{2(1 - \text{Cos. } x}$$

Wird die vorgegebene Reihe in den Cos. x, multiplizirt, so erhält man

$$S \text{ Cos. } x = \text{Sin. } x \text{ Cos. } x + \text{Sin. } 2x \text{ Cos. } x + \text{Sin. } 3x \text{ Cos. } x + \text{Sin. } 4x \text{ Cos. } x + \text{etc.}$$

Werden nun zwey Winkel φ, θ gegeben, so wird, wie aus der Theorie der Winkelfunktionen bekannt ist,

$$\text{Sin. } \varphi \text{ Cos. } \theta = \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } (\varphi + \theta) + \tfrac{1}{2} (\varphi - \theta)$$

Deshalb findet man, nach geschehener zerlegung jedes Gliedes in zwey,

$$S \text{ Cos. } x = \tfrac{1}{2} (\text{Sin } 2x + 0) + \tfrac{1}{2} (\text{Sin. } 3x + \text{Sin. } x) + \tfrac{1}{2} (\text{Sin. } 4x + \text{Sin } 2x) + \tfrac{1}{2} (\text{Sin. } 5x + \text{Sin. } 3x) + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } x + \text{Sin. } 2x + \text{Sin. } 3x + \text{Sin. } 4x + \text{etc.} = S - \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } x.$$

Daher wird durch die Versetzung

$$S - S \text{ Cos. } x = \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } x,$$

und zuletzt

$$S = \frac{\text{Sin. } x}{2(1 - \text{Cos } x)} \text{ seyn.}$$

W. Z. E. W.

3. Mittelst dieser Prämissen ergiebt sich der Beweiß der Eulerschen Formeln, von selbst.

I. Man differenziire die Reihe des zweyten Lehnsatzes, und dividire selbige durch $-dx$, so entstehet hieraus

(M) $-\text{Cos.}\,x - 2\,\text{Cos.}\,2x - 3\,\text{Cos.}\,3x - 4\,\text{Cos.}\,4x$ — ꝛc. bis ins Unendliche

$$= \frac{1}{2(1-\text{Cos.}\,x)}\;{}^{*)} = \frac{1}{4\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,x^2}.$$

Nimmt man x für die halbe Peripherie, so wird

$\text{Cos.}\,x = -1$, $\text{Cos.}\,2x = 1$, $\text{Cos.}\,3x = -1$, $\text{Cos.}\,4x = 1$, ꝛc, und also geht die gefundene Reihe, in die Ite über:

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ ꝛc. .... $= \frac{1}{4}$. W. Z. E. W.

II. Man differenziire die Reihe des ersten Lehrsatzes, zweymal, und dividire selbige durch dx^2, so findet man:

(N) $-\text{Cos.}\,x - 2^2\,\text{Cos.}\,2x - 3^2\,\text{Cos.}\,3x - 4^2\,\text{Cos.}\,4x - 5^2\,\text{Cos.}\,5x$ — ꝛc.

wird daher x, für die halbe Peripherie genommen, so entsteht die IIte Reihe:

$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 +$ ꝛc. .... $= 0$

III. Man nehme aus der Gleichung (M), das zweyte Differenzial, dividire es durch $-dx^2$, so giebt selbiges die Gleichung:

(O)

*) Es ist nemlich

$$d\left(\frac{\text{Sin.}\,x}{2(1-\text{Cos.}\,x)}\right) = \frac{2(1-\text{Cos}x)dx\,\text{Cos.}\,x}{4(1-\text{Cos.}\,x)^2}$$

$$- \frac{2dx\,\text{Sin.}\,x^2}{4(1-\text{Cos.}\,x)^2} = \frac{dx\,\text{Cos.}\,x}{2(1-\text{Cos.}\,x)} -$$

$$- \circ\frac{dx(1+\text{Cos.}\,x)}{2(1-\text{Cos.}\,x)} = \frac{-dx}{2(1-\text{Cos.}\,x)};$$

wird nun hierin mit $-dx$ dividirt, so entstehet

$$\frac{1}{2(1-\text{Cos.}\,x)}.$$

$$(O)\ -\mathrm{Cos.}\,x - 2^3\,\mathrm{Cos.}\,2x - 3^3\,\mathrm{Cos.}\,3x \ldots\ldots - \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{-1-2\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x^2}{8\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x^4}$$

die vermittelst vorgedachter Annahme von x, in die IIIte Reihe verwandelt wird:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3\,\text{ꝛc.} \ldots\ldots = -\tfrac{1}{8}$$

IV. Nimmt man auf gleiche Weise, die zweyte Differenz der Gleichung (N), und dividirt selbige durch $-dx^2$, so entstehet diese

$$(P)\ -\mathrm{Cos.}\,x - 2^4\,\mathrm{Cos.}\,2x - 3^4\,\mathrm{Cos.}\,3x -$$
$$4^4\,\mathrm{Cos.}\,4x - 5^4\,\mathrm{Cos.}\,5x \ldots\ \text{ꝛc.} = 0,$$

welche nach der Hypothese $x = 180°$, in die IVte Formel übergeht

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ꝛc.} = 0.$$

V. Die zweymal differenziirte, und durch $-dx^2$ dividirte Gleichung (O), giebt:

$$(Q)\ -\mathrm{Cos.}\,x - 2^5\,\mathrm{Cos.}\,2x - 3^5\,\mathrm{Cos.}\,3x -$$
$$4^5\,\mathrm{Cos.}\,4x - \text{ꝛc.} = \frac{2\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x^2 + 13\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x^2 + 2\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x^4}{8\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x^5}$$

Wird daher wie gebräuchlich $x = 180°$ genommen, so geht gedachte Gleichung, in die Vte Formel über:

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 \ldots + \text{ꝛc.} = \tfrac{1}{4}.$$

VI. Man nehme die zweyte Differenz der Gleichung (P), dividire selbige durch $-dx^2$, so erhält man die Gleichung:

$$-\mathrm{Cos.}\,x - 2^6\,\mathrm{Cos.}\,2x - 3^6\,\mathrm{Cos.}\,3x -$$
$$4^6\,\mathrm{Cos.}\,4x \ldots\ldots - \text{ꝛc.} = 0.$$

Deswegen artet selbige, durch die Substitution der halben Peripherie für x in die VIte Formel aus:

$1^6 -$

$$1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 \ldots\ldots + \text{rc.} = 0.$$

W. Z. E. W.

Auf eben diese Art, können alle Eulerschen Lehr- Lehrsätze, der Reihen ganzer positiver Potenzen, aus natürlichen Zahlen, mit abwechselnden Zeichen bestehend, bewiesen werden, und man kann überhaupt festsetzen, daß die Reihen grader Größen, mit einer uneigentlichen genannten Summe, oder vielmehr mit einer erzeugenden Größe, versehen sind, welche stets dem Nichts gleich ist; dahingegen die Reihen ungerader Potenzen, mit einer Summe, oder erzeugenden Größe die allezeit von dem Nichts verschieden ist, versehen werden müssen.

Eben so können auch andere, den Eulerschen ähnlichen Lehrsätzen, von den Reihen der Potenzen ungerader Zahlen, die mit abwechselnden Zeichen versehen sind, bewiesen werden.

$$1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \text{rc.}$$

Sowohl in diesen Reihen ungerader, als auch in jenen gerader Zahlen, kann man überhaupt festsetzen: daß die ungeraden Potenzen aus einer erzeugenden Größe, die dem Nichts gleich ist, die geraden hingegen aus einer bestimmten Größe, entspringen.

Anm. zum 208. §. II. Theils.

Durch die Differenzialrechnung, können mit besonderer Kürze, auch auf folgende Art, die Coeffizienten der Formel, welche das allgemeine Glied, jeder zurückkehrenden Reihe ausdrückt, gefunden wer-

werden. Es sey also, die aus der zurückkehrenden Reihe, der Ordnung t,

$$y_x,\ y_{x+1},\ y_{x+2}, \ldots y_{x+t-1},\ y_{x+t},$$

entstandene Gleichung,

$$Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} \ldots + My_{x+t} = 0,$$

aus welcher, wenn $y_x = az^x$ gemacht worden, durch die Substitution (nach geschehener Division durch az^x) die Beziehungs-Gleichung hervorgehet

$$(A) \quad A + Bz + Cz^2 \ldots + Mz^{t-1} + z^t = 0.$$

Man gedenke sich α, β, γ, δ als Wurzeln dieser Gleichung; diese Wurzeln seyen $= \alpha$ in der Zahl n, so wird gedachte Gleichung, diese Gestalt annehmen:

$$(B) \quad (z-\alpha)^n(z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots + fz^2 + gz + k) = 0 = P$$

wenn $m + n = t$ angenommen worden. Man bestimme

$$z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots fz^2 + gz + k = Z,$$

so wird

$$(z-\alpha)^n Z = P$$

Es sey ferner:

$$dZ = Z' dz,\ ddZ = Z'' dz,\ d^3 Z = Z''' dz \text{ ꝛc.}$$

hieraus bekommt man

$$\frac{dP}{dz} = n(z-\alpha)^{n-1} Z + (z-\alpha)^n Z',$$

so erfolgt, wenn

$$n = 1,\ z = \alpha$$

gemacht worden,

$$\frac{dP}{dz} = Z.$$

Die zweyte Differenziirung giebt:

$$\frac{ddP}{dz^2} = n(n-1)(z-\alpha)^{n-2}Z + 2n(z-\alpha)^{n-1}Z' + (z-\alpha)^n Z'';$$

und

und wenn $n = 2$, $z = \alpha$ gesetzt worden, so erhält man:

$$\frac{ddP}{2d\alpha^2} = Z.$$

Durch gleiche Art zu schließen wird gefunden,

$$\frac{d^nP}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots n d\alpha^n} = Z,$$

wenn $z = \alpha$, und n, irgend eine Zahl der natürlichen Reihe 1, 2, 3, ꝛc. ist. Da nun

$$Z = (z - \beta)\, z - \gamma)\, z - \delta) \text{ ꝛc.}$$

und α für z gesetzt worden, so wird

$$Z = (\alpha - \beta)\, (\alpha - \gamma)\, (\alpha - \delta) \text{ ꝛc.}$$

Wenn also in der Gleichung (B), die Wurzel α einzig, oder wenn $n = 1$ ist, so erhalten wir

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha - \beta)\, (\alpha - \gamma)\, (\alpha - \delta) \text{ ꝛc.};$$

sind aber zwey gleiche Wurzeln α, dergestallt daß $\beta = \alpha$, so ist

$$\frac{d^2P}{2da^2} = (\alpha - \gamma)\, (\alpha - \delta) \text{ ꝛc.};$$

sind drey gleiche Wurzeln d. i. $\alpha = \beta = \gamma$, so erlangen wir:

$$\frac{d^3P}{2.3d\alpha^3} = (\alpha - \delta)\, (\alpha - \varepsilon) \text{ ꝛc. u. s. f.}$$

2) Es sey $B + Cz + Cz^2 \ldots\ldots + z^{t-1} = Q$, und wegen

$$A + Bz + Cz^2 \ldots\ldots + Mz^{t-1} + z^t = (z - \alpha)^n\, (z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots\ldots + fz^2 + gz + k),$$

desgleichen $A = k\,(-\alpha)^n$, so ergiebt sich, wenn A weggenommen, und mit z dividirt worden

$$Q = \frac{(z - \alpha)^n Z - k\,(-\alpha)^n}{z};$$

ist

ist aber $n = 1$, und $z = \alpha$ gesetzt worden, so entspringt $Q = k$. Aus der Differenziazion aber, wird weggelassen

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{n(z-\alpha)^{n-1}Z + (z-\alpha)^n Z'}{z} - \frac{(z-\alpha)^n Z + (k-\alpha)^n}{z^2},$$

und da, wo $n = 2, z = \alpha$ angenommen worden, erfolgt

$$\frac{dQ}{dz} = k.$$

Differenziirt man nun zum dritten, viertenmal ꝛc., so wird

$$\frac{ddQ}{2d\alpha^2} = k$$

gefunden, wenn $n = 3$, $z = \alpha$, desgleichen auch

$$\frac{d^3Q}{2 \cdot 3d\alpha^3} = k,$$

wenn $n = 4$, $z = \alpha$ und überhaupt

$$\frac{d^{n-1}Q}{1.2.3....(n-1)\,dx^{n-1}} = k,$$

wenn n irgend eine Zahl der natürlichen Reihe 2, 3, 4, ꝛc. ist, die mit der Zahl zwey anfängt. k hingegen, mit dem Produkt aus $-\beta X - \gamma X - \delta$ ꝛc. gleich ist müssen mit diesem Produkt, vorbenannte Differenzialien gleich werden.

Man bestimme daß

$$R = C + Dz + Ez^2 .... + z^{t-2},$$

so wird weil

$$A = k(-\alpha)^n, B = nk(-\alpha)^{n-1} + g(-\alpha)^n$$

nach Weglassung des Gliedes $A + Bz$, aus der Gleichung (A) und geschehener Division durch z^2,

$$R = \frac{(z-\alpha)^n Z - z[nk(-\alpha)^{-1} + g(-\alpha)^n]}{z^2}$$

seyn;

seyn; also geht in der That, der Ausdruck in der Hypothese $n = 1$, $z = \alpha$, in $R = g$ über. Wird das Differenzial genommen u. $n = 2$, $z = \alpha$ gemacht, so findet man $\frac{dR}{d\alpha} = g$; nimmt man hinwiederum $n = 3$, $z = \alpha$ so entdeckt man $\frac{d^2R}{2d\alpha^2} = g$, rc. nach eben der Weise und Ordnung, wie vorhin. Es ist aber g, ein Aggregat der Produkte, aus den Wurzeln $-\beta, -\gamma, -\delta$, rc. welche Produkte ihre Benennung, von der Zahl $n - 1$ entlehnen, folglich werden mit dem Aggregat der Produkte, alle vorbesagte Differenzialien äquirt.

Gleicherweise, wenn

$$S = E + Cz \ldots + a^{t-3}$$

gesetzt wird, so findet man

$$\frac{d^{n-1}S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, d\alpha^{n-1}} = f,$$

d. i. dem Aggregat der Produkte, aus den Wurzeln $-\beta, -\gamma, -\delta$, rc. Diese Produkte erhalten ihre Benennung, vom Exponenten $n - 2$. Und so jederzeit von den übrigen.

3) Es sey zum Beyspiel, das allgemeine Glied der rückkehrenden Reihe

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x,$$

wo (Anm. nach den IIten Cap.)

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma) y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}; b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma) y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)};$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta) y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Weil aber nach dieser Hypothese, drey ungleiche Wurzeln α, β, γ, herauskommen, so wird

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma); Q = \beta\gamma; R = -\beta - \gamma$$

seyn. Deshalb giebt

$$a = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{dP}{d\alpha}},$$

welcher Werth in b übergeht, indem α in β und β in α verwandelt wird. Eben so gehet er auch in c über, indem α mit γ, und γ mit α vertauschet wird.

4) Man gedenke sich jetzt, nach angeführtem Beyspiel, als wenn die beyden gleichen Wurzeln $\alpha = \beta$, wären, so nimmt nach dieser Hypothese, das allgemeine Glied, diese Form an $a'\alpha^x + b'\alpha^{x-1} + c\gamma^x$, wo (im ange. Ort §. 16.)

$$a' = \frac{-y_2 + 2\alpha y_1 + (\gamma^2 - 2\alpha\gamma)y_0}{(\alpha - \gamma)^2}; b' = \frac{y_2 - (\alpha + \gamma)y_1 + \alpha\gamma y_0}{\alpha - \gamma};$$

$$c' = \frac{y_2 - 2\alpha\, y_1 - \alpha\alpha y_0}{(\gamma - \alpha)^2}.$$

Den Werth von a', bringe man auf diese Form zurück

$$\frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha - \gamma} + \frac{-y_2 + (\alpha + \gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha - \gamma)^2}.$$

die von der vorhergehenden, wie hieraus erhellet, nicht verschieden ist.

Vermöge der Hypothese, nach welcher $n = 2$, wird

$$Q = \frac{-k\alpha^2}{\alpha} = -\alpha k = \alpha\gamma,$$

wegen $k = -\gamma$ gefunden. Macht man gleichfalls $n = 2$, so ergiebt sich:

$$R = \frac{-\alpha^2 k - g\alpha^3 + 2\alpha^2 k}{\alpha^2} = k - \alpha g = -\gamma - \alpha,$$

weil

weil $k = -\gamma$, $g = 1$. Daher ist

$$b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}.$$

Es ist aber

$$\frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha - \gamma} = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}},$$

und hinwiederum

$$\frac{-\gamma y_2 + (\alpha + \gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha - \gamma)^2} = \frac{-b'}{\alpha - \gamma} = -\frac{b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$$

folglich

$$a' = \frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha - \gamma} + \frac{-y_2 + (\alpha + \gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha - \gamma)^2} = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 - b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$$

Dieserwegen werden die Werthe, der unbestimmten Coeffizienten, folgendermaaßen ausgedrückt:

$$\text{I. } c = \frac{y_2 - 2\alpha y_1 + \alpha\alpha y_0}{(\gamma - \alpha)^2}; \text{ II. } b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}};$$

$$\text{III. } a' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 - b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}.$$

5) Wenn drey gleiche Wurzeln vorhanden, und im allgemeinen Gliede der Reihe c'', b'', a'', unbestimmte Coeffizienten, gleichen Wurzeln vorgesetzt sind (welche von den übrigen Wurzeln, auch immer un-

gleiche seyn mögen) so erhalten wir jederzeit, nach eben dieser Art zu schließen, folgende Formeln:

$$\text{I. } c'' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + Sy_2 + Ty \text{ ꝛc.}}{\frac{d^3P}{2 \cdot 3d\alpha^3}};$$

$$\text{II. } b'' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha} y_0 + \frac{dR}{d\alpha} y_1 + \frac{dS}{d\alpha} y_2 \text{ ꝛc.} - c''}{\frac{d^3P}{2 \cdot 3d\alpha^3}};$$

$$\text{III. } a'' = \frac{\frac{ddQ}{2d\alpha^2} y_0 + \frac{ddR}{2d\alpha^2} y_1 + \frac{ddS}{2d\alpha^2} y_2 \text{ ꝛc.} - b''}{\frac{d^3P}{2 \cdot 3d\alpha^3}}.$$

Hieraus kann man auf das deutlichste, den Fortgang auf andere Fälle folgern, wo vier, fünf, sechs ꝛc. gleiche Wurzeln, vorhanden sind.

Anm. zum XI. Capitel II. Theils.*)

1. Eine Funktion irgend einer veränderlichen Größe, wird dann allezeit ein Größtes oder Kleinstes wenn die verschwindenden Differenzialien der Funktion, auf einander folgender Ordnungen, von ungerader Zahl sind; ein Größtes hingegen so oft deren übrig bleibendes Differenzial, nach dem zuletzt verschwindenden, negativ ist; ein Kleinstes aber, wenn es positiv ist. Dies wird sowohl von unserem Autor, als von andern, hin und wieder bewiesen.

2) Nach Erwägung dessen, sey Z eine algebraische Funktion, der veränderlichen Größen $t, u, x, y,$ ꝛc. deren größte und kleinste Werthe, erforscht werden

*) Nach der deutschen Uebersetzung 2ter Theil.

den müssen; aus dem Bewiesenen also ist

$$dZ = pdt + qdu + rdx + sdy + \text{rc},$$

woraus alsdann diese Gliechung fließt:

$$pdt + qdu + rdx + sdy + \text{rc.} = 0.$$

Da ferner die Beziehung, zwischen den veränderlichen Größen t, u, x rc. so wie auch unter ihren Differenzialien dt, du, dx rc noch unbestimmt ist, ihre Beziehung mag seyn welche sie wolle, so folgt augenscheinlich, wenn vorbesagte Gleichung, statt haben soll, daß die einzelnen Glieder pdt, qdu, rdx rc. gleich Null gesetzt werden müssen. Hieraus entstehen nun, so viele Gleichungen, als veränderliche Größen vorhanden sind, nehmlich:

$$\text{I. } p = 0;\ \text{II. } q = 0;\ \text{III. } r = 0;\ \text{rc.}$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen, werden die Werthe der unbekannten Größen t, u, α, rc. gefunden, die wenn sie in der Funktion Z, an deren Stelle gesetzt werden, dieselbe entweder zum G r ö ß t e n oder K l e i n s t e n machen.

3) Nun wollen wir zum zweiten Differenzial schreiten. Wenn, wie es erlaubt ist, als erste beständige Differenzialien dt, du, dy rc. angenommen werden, so erfolgt:

$$d^2Z = dpdt + dqdu + drdx + dsdy + \text{rc.}$$

Es sey:

$$dp = Adt + Bdu + Ddx + Gdy$$
$$dq = Bdt + Cdu + Edx + Hdy$$
$$dr = Ddt + Edu + Fdx + Jdy$$
$$ds = Gdt + Hdu + Jdx + Ldy.$$

Daraus wird nun gefunden:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2 + 2Ddtdy + 2Hdudy + 2Jdxdy + Ldy^2.$$

Da-

Damit wir aber, unter allen vom einfachsten Fall anfangen, so wollen wir annehmen, daß eine der veränderlichen Größen, t sey, und also $d^2Z = Adt^2$, wobey wegen des allezeit bejahenden Werthes dt^2, das Differenzial d^2Z, stets mit demselben Zeichen, versehen seyn muß, womit die Größe A begabt ist; deshalb wird Z, die kleinste seyn, wenn A positiv; die größeste aber, wenn A negativ ist. Wenn nun $A = 0$ gefunden worden, so kann von den darauf folgenden Differenzialien von Z, das Kennzeichen des Maximum und Minimum, hergeholet werden.

4 Gesetzt nun, es wären in der Funktion Z, zwey veränderliche Größen t und u enthalten; so erfolgt nach dieser Hypothese:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Ddu^2 = A(dt + \frac{Bdu}{A})^2 + (C - \frac{B^2}{A})du^2.$$

Da in dieser Gleichung die Quadrate

$$\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2,$$

und du^2 stets positiv sind, so muß das zweyte Differenzial d^2Z, nothwendig positiv seyn, so oft nehmlich je zwey Coeffizienten A und $C - \frac{B^2}{A}$ bejahend waren; negativ hingegen ist es, wenn dieselben beyde verneinend sind, die wechselseitige Beziehung der Differenzialien dt, und du mag seyn, welche sie wolle. Daher wird für den kleinsten Werth der Funktion Z, gehalten werden

$$A > 0, C - \frac{B^2}{A} > 0,$$

nehm-

nehmlich

$$C > \frac{B^2}{A}, \text{ oder } CA > B^2,$$

weshalb $C > o$. Die vorgegebene Funktion Z, kann dieserwegen, nicht die kleinste, als nur unter folgenden drey Bedingungen seyn:

$$\text{I. } A > o; \text{ II. } C > o; \text{ III. } AC > B^2$$

Auf eben diese Art zu schließen, finden wir, daß der größte Werth von Z, sey

$$A < o; C - \frac{B^2}{A} < o, \text{ oder } C < \frac{B^2}{A};$$

desgleichen $CA > B^2$, weil A negativ, also auch $C < o$; deshalb kann die Funktion Z, nicht das Maximum erlangen, als unter diesen drey Bedingungen:

$$\text{I. } A < o; \text{ II. } C < o; \text{ III. } CA > B^2.$$

Hieraus erhellet ferner, daß die Bedingungen des Maximums, theils übereintreffen, theils den Bedingungen des Minimum, entgegen sind.

5) Wenn entweder A, oder C, oder beyde zugleich $= o$ sind, oder auch $B = o$, so kann die vorhergehende Bedingung $AC > B^2$, keinesweges statt haben, folglich erlangt die vorgegebene Größe, niemahls den Werth des Maximum oder Minimum. Eben dieses wird sich ereignen, wenn A und C, entgegengesetzte Zeichen haben sollten, weil alsdann wegen des allezeit positiven Werthes B^2 die Bedingung $AC > B^2$ unmöglich wird. Wenn aber B, zugleich mit A oder C verschwindet, so hängt der Werth des zweyten Differenzials d^2Z, blos allein von der veränderlichen Größe ab, welcher diesem zufolge, entweder Maximus,

mus, oder Minimus oder keines von beyden, wäre, und zwar nach denen, vom Autor angegebenen Kennzeichen, für die Funktionen einer veränderlichen Größe. Wenn endlich die ganze Größe $d^2Z = 0$, nehmlich $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, so muß man zum dritten Differenzial d^3Z, seine Zuflucht nehmen; verschwindet dieses nicht, so kann die Funktion Z, weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn; sollte es aber verschwinden, so muß man das vierte Differenzial d^4Z, suchen, wo man alsdann, nach der hier dargestellten Methode, leicht erkennen wird, ob der Werth desselben positiv, oder negativ sey, und hieraus wird sich hinwiederum, der größte oder kleinste Werth, der vorgegebenen Funktion, ergeben.

6) Ist Z eine Funktion, von drey veränderlichen Größen t, u, x, so nimmt das Differenzial d^2Z, diese Form an:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2$$
$$= A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2$$
$$+ 2\left(E - \frac{BD}{A}\right)dudx + \left(F - \frac{D^2}{A}\right)dx^2$$

Es werde

$$C - \frac{B^2}{A} = a;\ E - \frac{BD}{A} = b;\ F - \frac{D^2}{A} = c,$$

so geht die Gleichung in diese über:

$$d^2Z = A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + adu^2 + 2bdudz + cdx^2$$

$$= A\left(dt \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + a\left(du + \frac{bdx}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)dx^2$$

Da aber wegen des Werthes der Quadrate,

(dt

$$\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2, \left(du + \frac{bdx}{a}\right)^2, \text{ und } dx^2$$

welcher stets positiv ist, so wird auch das Differenzial d^2Z, gleichfalls positiv seyn, wenn die Coeffizienten A, a, und $c - \frac{b^2}{a}$, mit dem Zeichen + versehen worden, folglich finden für den kleinsten Werth der Funktion Z, folgende Bedingung statt

$$A > o; a > o; ca > b^2,$$

oder wenn deren Werthe, a, b, c dafür in die Stelle gesetzt werden:

$$A > o; C - \frac{B^2}{A} > o; \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\left(F - \frac{D^2}{A}\right) > \left(E - \frac{BD}{A}\right)^2,$$

nehmlich

$$A > o; CA > B^2 \text{ und } (CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2;$$

woraus abermals

$$C > o, F > o, \text{ und } FA > D^2$$

entstehet. Deshalb wird das Minimum der Funktion Z, unter folgenden fünf Bedingungen, bestimmt werden:

I. $A > o$; II. $C > o$; III. $F > o$; IV. $CA > B^2$; V. $FA > D^2$.

Gleicherweise wird der größte Werth von Z, unter diesen Bedingungen gefunden werden:

$$A < o, CA > B^2, \text{ und } (CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2;$$

denn I. muß $a < o$ seyn, nehmlich:

$$C - \frac{B^2}{A} < o, \text{ oder } C < \frac{B^2}{A};$$

es ist aber A negativ, folglich

$CA > B^2$. II. ist $c - \frac{b^2}{a} < o$; d. i. $c < \frac{b^2}{a}$;

weshalb, weil a negativ $ca > b^2$, d. i.

$$\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\left(F-\frac{D^2}{A}\right) > \left(E-\frac{BD}{A}\right)^2 \text{ oder}$$

$$(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$$

woraus $FA > D^2$, und $F < o$ entsteht. Es sind daher die Bedingungen des Maximum folgende:

$$\text{I.}A < o;\ \text{II.}C < o;\ \text{III.}F < o;\ \text{IV.}CA > B^2;\ \text{V.}FA > D^2.$$

7. Wenn die Größen A oder C einzeln, oder beyde verschwinden, so wird die IVte Bedingung unmöglich. Verschwindet F, so fällt die Vte Bedingung weg. Hieraus folgt, daß die Funktion Z, weder Maxima, noch Minima seyn könne, wenn die Größen A, C, F sowohl einzeln, als alle verschwinden.

Aus dem Gesagten erhellet deutlich, daß die Theorie auf vier Funktionen, oder auch auf mehrere veränderliche Größen, anzuwenden sey.

8. Da diese neue Theorie, von Eulern nicht berühret worden ist, so wird es nicht unnütz seyn, folgendes zu bemerken.

Von welcher Zahl auch, die veränderlichen Größen seyn mögen, welche in die angegebene Funktion Z eintreten, wenn jede derselben, für sich betrachtet, und das Maximum oder Minimum gesucht wird, welcher derselben zukommt, während die übrigen stets dieselben bleiben, so werden einzeln, die ersten Differenzialien pdt, qdu, rdx, sdy ꝛc. gefunden werden, deren jedes gleich Null gesetzt die §. 2. dargestellten Gleichungen, liefern wird, nehmlich

$$p = o,\ q = o,\ r = o,\ s = o \text{ ꝛc.}$$

Auf eben diese Art werden die für sich, bis auf die zweyten Differenzialien, fortgehenden Größen

$$Adt^2,\ Cdu^2,\ Fdx^2,\ Ldy^2 \text{ ꝛc.}$$

ge-

gefunden, wobey, wenn A, C, F, L ꝛc. entweder sämmtlich positiv, oder negativ wären, jeder leicht einsehen wird, daß die Werthe derselben t, u, x ꝛc., die aus den Gleichungen $p = 0$, $q = 0$ ꝛc. herausgeworfen worden, nothwendig der vorgegebenen Funktion Z, entweder der größte oder kleinste Werth, beylegen werden. Und so ist in der That ausgemacht, daß diese Funktion Z, wenn sie nur das Verhältniß, einer der vorgedachten veränderlichen Größen hat, entweder Maxima oder Minima seyn müsse. Allein wird wohl jemand mit Sicherheit, das Urtheil fällen können: daß dasjenige, was für irgend eine veränderliche Größe, für sich betrachtet, behauptet werden könne, für alle zugleich genommen, gelten müsse. Dies wollen wir aufs genaueste untersuchen.

9. Es sey also Z, die Funktion zweyer veränderlichen Größen t und u, die zugleich die Ordinate sind, so daß die Coordinate dieser Fläche, drey veränderliche Größen Z, t, und u, derselben. Die Frage wird also darauf ankommen, daß man die größte Ordinate der Fläche, finden müße, deren Gleichung $dZ = pdt + qdu$ sey. Wenn u zu einer beständigen Größe gemacht wird, so geht die Gleichung in $dZ = pdt$ über, und sie drückt alsdann, alle mit der Axe dieser Fläche, parallel gehenden Schnitte, der Größe t aus, je nachdem die Größe u, verschiedene Werthe annimmt. Man setze $p = 0$, und nehme aus dieser Gleichung, den Werth der Größe t, welcher in jeglichen Parallelschnitten, die Ordinate Z entweder wieder Maximam oder Minimam machen

wird.

wird. Weil nun u als beständig angenommen wird, so ist das zweyte Differenzial $d^2Z = Adt^2$, folglich kann man billig, aus dem bloßen Werth von A, auf die existenz des Maximum oder Minimum schließen, wofern nur der begehrte Werth t, aus der Gleichung $p = 0$, substituirt wird. Wenn also für jeden Werth von u, die Größe A entweder negativ, oder positiv gefunden wird, so bekommen alle vorgedachte Schnitte, entweder Maximum oder Minimum, und wenn für den verschiedentlichen Werth von u, die Größe A mit verschiedenen Zeichen, versehen wird, so erhalten diese Schnitte, unter gewissen festgesetzten Einschränkungen, das Maximum oder Minimum. Wäre $A = 0$, es sey der Werth der beständigen Größe, welcher er wolle, dann wird keiner jener Schnitte, weder das Maximum oder Minimum haben. Ist hingegen A allein $= 0$, wenn u bestimmte Werthe hat, dann werden diese Schnitte, welche vorgedachten Werthen von u entsprechen, sowohl das Maximum als Minimum, nach dieser Hypothese beraubt. Der geometrische Ort, aller dieser Ordinaten, ist in der Gleichung $p = 0$, in bloßer Erwägung der Veränderlichkeit von u, enthalten; daher bilden die Ordinaten in dieser Fläche, einen Schnitt, der entweder von einfacher, oder doppelter Krümmung ist, und der durch je zwey verbundene Gleichung,

$dZ = pdt + qdu$ und $p = 0$ oder $dZ = qdu$ und $p = 0$, bestimmt werden wird. Woraus es deutlich ist, daß man bey Erfindung des Maximum oder Minimum, der ganzen Fläche, die größte oder kleinste Ordinate, die diesem Schnitt gemäß ist, suchen müße; dadurch bekommt man wiederum $q = 0$, welche

che Gleichung, den Werth der andern veränderlichen Größe u, darbieten wird.

10. Nun wollen wir, zum Differenzial von q, nehmlich zur vorhin gefundenen Gleichung $dq = Bdt + Cdu$, übergehen. Da also aus der Gleichung $p=0$, t durch u bestimmt wird, oder im Differenzial dieser Gleichung $Adt + Bdu = 0$ also $dt = -\frac{Bdu}{A}$ wenn man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung substituirt, so ist; $dq = (-\frac{B^2}{A} + C)\, du$ woraus sich ergiebt, daß die Ordinate Minima seyn werde, wenn die Größe $-\frac{B^2}{A} + C$ positiv, d. i. $C > \frac{B^2}{A}$ war; Maxima hingegen, wenn $C < \frac{B^2}{A}$ ist, endlich aber weder Maxima noch Minima, wenn $C = \frac{B^2}{A}$, in sofern die übrigen höhern Differenzialien, unter den oben angezeigten Bedingungen, behauptet werden. Wenn wir nun solchergestalt, das Maximum und Minimum reiflich erwägen, so werden wir finden, daß die Ordinate Z, unter allen übrigen, nicht ein Größtes seyn könne, die in der Durchschneidung, vermöge der Gleichung $dZ = qdu$ enthalten, wofern nicht alle Ordinaten, die diesen Schnitt ausmachen, eben so viele Maxima, in homologen Parallelschnitten sind. Aus gleichem Schluße, kann auch die Größe Z, nicht Minima seyn, wofern sie nicht gleichfalls Minima, in dem Schnitte ist, der alle Minima umfaßt. Hieraus kann man ferner schließen, daß die Werthe von t und u, welche

aus den Gleichungen $p = o$, $q = o$ hergeleitet, und die in den Größen A, und $C - \frac{B^2}{A}$ substituiret worden, den größten Werth der Ordinate Z, annehmen, wo A negativ und $C < \frac{B^2}{A}$, d. i. $CA > B^2$ war, so wie hingegen die Ordinaten Z, durch jene Substitution, den kleinsten Werth bekommen, wenn A bejahend, und $C > \frac{B^2}{A}$, oder $CA > B^2$ ist; welches alles mit der oben erklärten, allgemeinen Theorie, übereinstimmt.

11. Die vorerwähnten Bedingungen finden statt, wenn u zuerst als beständig betrachtet wird, t aber als veränderlich; geschiehet aber das Gegentheil, und man nimmt u als veränderlich, t hingegen als beständig an, so ereignen sich folgende Bedingungen: $C < o$ und $AC > B^2$, fürs Maximum: $C > o$ und $AC > B^2$ fürs Minimum; welches in der That aufeins hinausläuft. Uebrigens wird diese andere Methode, die Bedingungen derer Maximum und Minimum, bey Erfindung der Funktionen, zweyer veränderlicher Größen, gleichfalls auf andere, mehr komplexe Funktionen, angewendet. Diese Methode ist mehr direkt, und analytisch, als die erstere, weshalb wir dieselbe, hier überhaupt entwickeln wollen.

12. Gesetzt es wären in der Funktion Z, so viele veränderliche Größen enthalten, als man deren wolle, die übrigen hingegen, würden als beständige betrachtet, so erwäge ich eine derselben, bloß als veränderliche Größe, und leite aus der Differenziation, die Gleichung für das Maximum oder Minimum ab; wird

wird nun nach dieser Hypothese, das zweyte Differenzial genommen, so können die Bedingungen bestimmt werden, welche der Funktion Z, entweder den größten, oder kleinsten Werth, oder keinen von beyden, beylegen. Vermöge dieser ersten, absoluten Operation, substituire man in der Funktion Z, oder deren Differenzialien, den gefundenen Werth, der ersten veränderlichen Größe. Eben so stelle man auch, die Rechnung bey der andern, veränderlichen Größe an, und substituire deren hervorgebrachten Werth, in der Funktion Z; endlich gehe man zur Untersuchung, der 3ten veränderlichen Größe u. s. w. fort. Betrachtet man t, als die erste veränderliche in Z, so ist $dZ = pdt$, $d^2Z = Adt^2$, woraus sich $p = 0$, und $A > 0$ für das Maximum ergiebt. Wären t und u beyde veränderlich, so würde $dZ = pdt + qdu$ erfolgen, und diese Gleichung, wegen $p = 0$, in $dZ = qdu$ übergehen, woraus folgt, daß $d^2Z = (Bdt + Cdu)\, du$; da nun $p = 0$, so ist auch $dp = 0$, und $Adt + Bdu = 0$, oder $dt = -\frac{Bdu}{A}$; substituirt man diesen Werth, in der vorigen Gleichung, so erhält man

$$d^2Z \left(-\frac{B^2}{A} + C\right) du^2.$$

Folglich wird $q = 0$ und $-\frac{B^2}{A} + C > 0$ für das Minimum, $-\frac{B^2}{A} + C < 0$ für das Maximum seyn. Weil nun A positiv beym Minimum, negativ beym Maximum ist, so entspringt für beyde, die Bedingung $AC > B^2$.

Ist

Ist außer den vorhergehenden, zwey veränderliche Größen, auch die dritte x, zu erwägen, so wird der Werth von dZ, in Ansehung der drey veränderlichen t, u, x gesucht, und man erhält

$$dZ = pdt + qdu + rdx,$$

welche Gleichung wegen $p = 0$, $q = 0$ in $dZ = rdx$ übergeht; daher bekommt man das zweyte Differenzial $d^2Z = (Ddt + Edu + Fdx)\, dx$; alsdann suche man aus den Gleichungen $p = 0$, $q = 0$ oder $dp = 0$, $dq = 0$, d. i, $Adt + Bdu + Ddx = 0$, und $Bdt + Cdu + Edx = 0$, die durch dx ausgedrückten Werthe, von dt und du, so findet man:

$$dt = \frac{BE - CD}{AC - B^2} dx \,;\; du = \frac{BD - AE}{AC - B^2} dx.$$

Nach deren Substituirung, in dem Ausdruck d^2Z, gelangt man auf die Gleichung

$$d^2Z = \left(\frac{BE - CD}{AC - B^2} D + \frac{BD - AE}{AC - B^2} E + F.\right) dx^2,$$

woraus folgt, daß man für das Maximum oder Minimum, zuerst $r = 0$ bekommen werde, sodann aber

$$\frac{BE - CD}{AC - B^2} C + \frac{BD - AE}{AC - B^2} E + F > 0$$

für das Minimum, und < 0 für das Maximum. Wenn nun der Nenner $AC - B^2$, der jederzeit positiv ist, weggenommen wird, so erfolgt

$$2BDE - CD^2 - AE^2 - FB^2 + ACF > 0,$$

für das Minimum, und < 0 für das Maximum. Diesen Ausdruck multiplizire man in A, welcher im ersten Fall positiv, und im andern negativ ist, so erhält man:

2ABDE

$$2ABDE - ACD^2 - A^2E^2 - AB^2F + A^2CF > 0,$$

sowohl für das Maximum, als Minimum, d. i.

$$(CA - B^2)(FA - D^2) > (AE - BD)^2.$$

Wie groß auch immer die Zahl, der veränderlichen Größen gewesen seyn mag, so wird dennoch immer die Sache, nach eben dieser Methode bewerkstelliget.

Diese neue Theorie, erläutert der berühmte de la Grange, von welchem wir selbige hergenommen haben, durch folgende Beyspiele:

Erstes Beyspiel.

Wenn eine beliebige Anzahl, vollkommen elastischer Kugeln, in gerader Linie, jede von der Andern abgesondert, sich befinden, von denen die erste, mit der gegebenen Geschwindigkeit c, sich zur andern, diese mit der erlangten Geschwindigkeit, sich zur dritten, die dritte zur vierten und so fort, bis zur letzten bewegt; und der ersten und letzten Masse gegeben worden, die Masse aller mittlern zu finden, so daß die letzte Kugel, die größte Geschwindigkeit unter allen, durch den Anstoß erhält.

Es sey der ersten Masse a, der letztern b, und t, u, x, y 2c. die mittlern unbekannten Massen, so wird nach den bekannten Gesetzen des Stoßes, die Geschwindigkeit, welche die erste Kugel a, der andern t mittheilt, gefunden $= \frac{2ac}{a + t}$; ferner die Geschwindigkeit, welche die zweyte der 3ten u giebt, ist $= \frac{2act}{(a+t)(t+u)}$;

jener der 4ten x, durch den Anstoß der 3ten ist

$$= \frac{2actu}{(a + t)\ (t + u)\ (u + x)} \text{ u. s. f.}$$

Es kam daher die Geschwindigkeit der letzten b, ausgedrückt werden durch:

$$\frac{2catuxy \ldots\ldots b}{(a + t)(t + u)\ (u + x)\ (x + y) \ldots\ldots},$$

folglich muß diese Größe, ein Maximum seyn. Man setze diese $= Z$, und nehme auf beyden Seiten Logarithmen, so erhält man

$$l2ca + lt + lu + lx + ly + \text{rc.} - l(a + t) - l(t + u) - l(u + x) \\ - l(x + y) - \text{rc.} = lZ,$$

hieraus entsteht durch die Differenziation

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \text{rc.} \\ - \frac{dt}{a + t} - \frac{dt + du}{t + u} - \frac{du + dx}{u + x} - \frac{dx + dy}{x + y} - \text{rc.} \end{array}\right\} = \frac{dZ}{Z};$$

werden nun die Glieder, mit eben demselben Differenzial verbunden, und auf einerley Benennung gebracht, so bekommt man:

$$dZ = \frac{Z(au - t^2)dt}{t(a + t)\ (t + u)} + \frac{Z(tx - u^2)du}{u(t + u)(u + x)} + \frac{Z(uy - x^2)dx}{u(u + x)\ (x + y)} + \text{rc.}$$

worauf für das Maximum und Minimum, folgende Gleichungen sich ergeben:

$au = t^2$; $tx = u^2$; $uy = x^2$ rc. welche die Analogien

$a : t = t : u = u : x = x : y$ rc. darbieten, und zwar

$$\div\div\ a : t : u : x : y : \ldots\ldots b;$$

es bilden daher die Massen aller Kugeln, eine geometrische Progression, aus den beyden äußersten Gliedern a und b bestehend. Damit wir aber auch das

Ma-

Maximum, vom Minimum unterscheiden können, so sey der Kürze wegen:

$$\frac{Z}{t(a+t)(t+u)} = \alpha; \frac{Z}{u(t+u)(u+x)} = \beta; \frac{Z}{x(u+x)(x+y)} = \gamma \text{ ꝛc.}$$

folglich, wenn die Gleichung §. 2, hiermit verglichen wird, so ist

$$p = \alpha(au - t^2); \; q = \beta(tx - u^2); \; r = \gamma(uy - x^2); \text{ ꝛc.}$$

also

$$dp = (au - t^2)\,d\alpha + \alpha(adu - 2tdt); \; dq = (tx - u^2)\,d\beta + \beta(xdt + tdx - 2udu); \; dr = (uy - x^2)\,d\gamma + \gamma(ydu + udy - 2x\,dx); \text{ ꝛc.}$$

Da aber die Glieder a, t, u, x, y ꝛc. stetig proportional sind, in Rücksicht der beständigen Verhältniß 1 : m, einer jeden vorhergehenden, zu seinem nachfolgenden Gliede, so werden wir

$$t = ma, \; u = m^2a, \; x = m^3a, \; y = m^4a \text{ ꝛc.}$$

finden, desgleichen

$$\beta = \frac{\alpha}{m^3}, \; \gamma = \frac{\alpha}{m^6} \text{ ꝛc.};$$

diese in den vorigen Ausdrücken, substituirten Werthe, geben:

$$dp = \alpha a\,(du - 2mdt)$$

$$dq = \alpha a\left(dt - \frac{2du}{m} + \frac{dx}{m^2}\right)$$

$$dr = \alpha a\left(\frac{du}{m^2} - \frac{2dx}{m^3} + \frac{dy}{m^4}\right); \text{ u. s. f.}$$

folglich wird, wie oben bewiesen worden

$$A = -2m\alpha a; \; B = \alpha a; \; C = -\frac{2\alpha a}{m}; \; D = 0; \; E = \frac{\alpha a}{m^2};$$

$$F = -\frac{2\alpha a}{m^3}; \; G = 0; \; H = 0; \; J = \frac{\alpha a}{m^4}; \text{ ꝛc.}$$

seyn. Hieraus erhellet sogleich, daß A negativ, und werden die übrigen Bedingungen erfüllt, so ist die Größe

$$\frac{2\,catuxy\ \ldots\ldots\ b}{(a + t)\,(t + u)\,(u + x)\,(x + y)\ \ldots\ldots}$$

oder die Geschwindigkeit, welche der letzten Kugel mitgetheilet worden, ein Maximum. Da nun

$$AC = 4\alpha^2 a^2,\ \text{u.}\ B^2 = \alpha^2 a^2,$$

so wird deshalb I. $AC > B^2$ gefunden. Es ist ferner

$$AC - B^2 = 3\alpha^2 a^2\,;\ FA - D^2 = \frac{4\alpha^2 a^2}{m^2}\,;\ EA - BD = -\frac{2\alpha^2 a^2}{m}\,;\ (AC - B^2)(FA - D^2) = \frac{12\alpha^4 a^4}{m^2}\,;\ \text{u.}\ (EA - BD)^2 = \frac{4\alpha^4 a^4}{m^2}\,;$$

hieraus erfolgt

$$\text{II.}\ (AC - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2.$$

Wären blos zwey Kugeln, so ist es genung, wenn man nur die erste, dieser Bedingungen erfüllt, und wenn drey Kugeln dazwischen sind, so ist die zweyte Bedingung hinreichend, folglich vermehrt sich die Vielheit, nach der Zahl der veränderlichen Bedingungen. Wird nun unverdrossen, die Rechnung noch weiter fortgesetzt, so werden alle Bedingungen dieses Problems, erfüllt werden, und man wird behaupten können, daß in jeder Reihe, stetig proportionirlicher Kugeln, die der letztern mitgetheilten Geschwindigkeit, durch die Mitwirkung der dazwischen befindlichen, unter allen möglichen die größte sey.

Diese Aufgabe ward zuerst von Ugenius, hernach aber von andern Geometern behandelt; allein es herr-

herrscheten in derselben, keine zuverlässige Bestimmungen, welche wir hier als nothwendig, für die Existenz und Unterscheidung des Maximum, und Minimum erfunden haben.

Zweytes Beyspiel.

Es sey die Allgemeinegleichung der Flächen, von der zweyten Ordnung:

$$z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy;$$

man soll den Punkt der Fläche finden, wo die Ordinate z, unter allen die Größte oder die Kleinste wird.

Nach genommenem Differenzial der Gleichung, entdeckt man:

$$2zdz = (2ax + 2by - e)dx + (2bx + 2cy - f)dy;$$

hieraus bekommt man folgende zwey Gleichungen:

$$2ax + 2by - e = 0; \; 2cy + 2bx - f = 0,$$

welche

$$x = \frac{ec - bf}{2(ac - b^2)}; \; y = \frac{af - eb}{2(ac - b^2)}$$

geben. Man nehme das zweyte Differenzial, so wird man wegen $dz = 0$,

$$2zd^2z = 2adx^2 + 4bdxdy + 2cdy^2$$

finden. Damit aber die Ordinate z, unter allen die größte sey, so müssen die Größen a und c, beyde negativ seyn, hingegen positiv, damit sie die kleinste sey. Wenn aber unter Voraussetzung dieser Bedingung, die andere $ca > bb$ mangelte, so würden die gefundenen, und in der Gleichung der Fläche substituirten Werthe x und y, die Ordinate z keinesweges ein Größtes oder ein Kleinstes machen. Es hat daher unser Autor, im Anhange

der

der Einleitung, zur Analysis des Unendlichen im 2ten Theil, aus andern Grundsätzen, deutlich gezeigt, daß wofern ca nicht $>$ b^2 ist, die gegebene Fläche, ins Unendliche ausgedehnt, und der konischen Assymptote, beygelegt werden könne. Dies aber ist gänzlich, dem Begriff des Maximum und Minimum, zuwider.

13. Hieraus erhellet, daß die gemeine Methode des Maximum und Minimum, sehr oft viele Unbequemlichkeiten, und Irrthümern unterworfen sey, wenn man nicht, in sofern die Rede von mehreren, veränderlichen Größen, einzeln für sich betrachtet, die ungetheilteste Aufmerksamkeit anwendet. Gleich wie im vorhergehenden Beyspiel, wenn wir bloß x, als eine veränderliche Größe, betrachten, so finden wir das erste Differenzial $2(ax + by - \frac{e}{2})dx$, und das zweyte $2adx^2$; desgleichen wenn y, als veränderlich angesehen wird, so bekommt man für das erste Differenzial $2(cy + bx - \frac{f}{2})\,dy$, und für das zweyte $2cdy^2$. Werden diese beyden ersten Differenzialien, gleich Null gesetzt, so geben sie diejenigen Gleichungen, welche wir im vorhergehenden §., gefunden haben. die beyden zweyten Differenzialien hingegen, deuten den größten oder kleinsten Werth, der Ordinate z an, so oft nehmlich beyde a und c, entweder negativ oder positiv waren; allein dies Kennzeichen, in sofern demselben die andere Bedingung $ca > bb$ mangelt, ist wie wir bewiesen haben, unvollständig und fehlerhaft.

Anm.

Anm. zum XVI. Capitel. II. Theils.

In diesem Capitel, welches die Bernouillische Regel, von Erfindung des Werthes des unbestimmten Bruches $\frac{0}{0}$ enthält, geschiehet von unserem Autor, keine Erwägung irgend eines denkwürdigen Falles, in welchem diese Regel zu fehlen schien, wenn man nehmlich, nach unendlicher Wiederholung der Differenziationen, immer wieder auf denselben unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, kommt. Ein Beyspiel hiervon, haben wir in der Formel $\frac{1+x}{1:l(1+x)}$, die, wo $x = -1$ in $0.l0$, oder da $l0 = -\infty = -\frac{1}{0}$ in $-\frac{0}{0}$, oder $\frac{0}{0}$ übergeht. Denn wenn die Differenzialien, des Zählers und Nenners der gedachten Formel $\frac{1+x}{1:l(1+x)}$, genommen werden, so kommt

$$\frac{d(1+x)}{d[1:l(1+x)]} = -(1+x)[l(1+x)]^2 = -0.\infty^2$$

und kehrt man hinwiederum $-(1+x)[l(1+x)]^2$, um in

$$\frac{-(1+x)}{1:[l(1+x)]^2},$$

so erhält man

$$\frac{d[-(1+x)]}{d[1:(l(1+x))^2]} = \frac{(1+x)[l(1+x)]^3}{2} = -\frac{0.\infty^3}{2},$$

welches wenn man bis ins Unendliche fortfährt, stets einen unbestimmten Werth hervorbringt.

Wir wollen daher diese Klippe vermeiden, und ich werde zeigen, daß der Ausdruck $0l0$, welcher der Gestalt nach, unbestimmt, in der That aber bestimmt ist,

ist, gleich Null sey, welches folgendermaßen geschiehet. Man setze olo = x = x le = le^{x} (wenn man nehmlich e für die Basis, hyperbolischer Logarithmen annimmt) so ist lo° = le^{x}; gehet man von Logarithmen auf Zahlen zurück, so wird $o^{\circ} = e^{x}$ seyn. Es ist aber, wie bekannt

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Also ist

$$o^{\circ} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Da nun $o^{\circ} = 1$; denn es ist

$$o^{\circ} = (a - a)^{n-n} = \frac{(a - a)^n}{(a - a)^n} = 1$$

folglich ist

$$1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

welcher Gleichung auf keine Art, genüge geleistet werden kann, wofern nicht $x = o$. Hieraus folgt, daß die Größe olo, gleich Null sey. Eben so kann auch gezeigt werden, daß das Produkt, aus irgend einer Infinitesimalgröße, multiplizirt in den Logarithmum, jeder andern Infinitesimalgröße, nichts anders als unendlich sey. a)

Wem der Beweis von der Größe $o^{\circ} = 1$, nicht anstehen sollte, der könnte folgenden Vernunftschluß, an dessen Stelle setzen. Es sey ω, desgleichen λ eine Infi-

a) Von der bewundernswürdigen Art der Größen, lo, l ∞ etc. S. des G. Fontana philosophisch. mathematischen Untersuchungen. Die XIII.te Untersuchung von dem logarithmischen Unendlichen.

Infinitesimalgröße, so wird $\omega^\lambda = 1 + z$, wenn z eine unendlich kleine Größe, von einer unbestimmbaren Ordnung ist. Denn es kann nicht $\omega^\lambda = 1$ seyn, sonst wäre $\omega = 1$, welches ungereimt ist. Eben so kann nicht $\omega^\lambda = 1 + a$ seyn (wenn a für eine endliche, positive Größe genommen wird) sonst wäre $\omega = (1 + a)^{\frac{1}{\lambda}}$ $=$ dem Unendlichen der höchsten Ordnung, welches gleich,alls widersprechend ist; ferner kann auch nicht $\omega^\lambda = 1 - a$ seyn (wenn $a < 1$), sonst wäre $\omega = (1 - a)^{\frac{1}{\lambda}}$, nehmlich gleich dem ächten Bruche $\frac{f}{f + g}$, zur unendlichen Potenz erhoben d. i.

$$\omega = \left(\frac{f}{f + g}\right)^n = \frac{f^n}{f^n + \frac{n f^n g}{f} + \frac{n^2 f^n g^2}{2f^2} + \frac{n^3 f^n g^3}{2 \cdot 3 f^3} + \text{ꝛc.}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{ng}{f} + \frac{n^2 g^2}{2f^2} + \frac{n^3 g^3}{2 \cdot 3 f^3} + \frac{n^4 g^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 f^4} + \text{ꝛc.}}$$

Diese Größe ist augenscheinlich, eine unendlich kleine, der höchsten Ordnung, und dividirt man durch ω, so würde man die Einheit, gleich der unendlich kleinen Größe, der höchsten Ordnung, dividirt durch die Infinitesimale der ersten Ordnung, erhalten, d. i. jederzeit gleich dem Infinitesimalquotienten, welches jedoch gegen die Hypothese streitet. Es ist daher $\omega^\lambda = 1 + z$, und z kann nichts anders, als eine unendlich kleine Größe seyn, weshalb ω^λ und folglich 0^0, von der Einheit nur, um eine unendlich kleine, ne, oder verschwindende Größe, verschieden ist, die für nichts geachtet werden kann.

Wenn jemand aus den Gleichungen $0^0 = 1^0 = a^0$, folgern wollte, daß nach geschehenem Zurückgang, von Zahlen auf Logarithmen, $0l0 = 0l1 = 0la$, und vermittelst der Division durch 0, auch $l0 = l1 = la$ seyn werde, nehmlich daß das unendliche, negative mit dem Endlichen äquiret, und sogar nichts werden könne, der würde sich selbst, in die betrüglichste Spitzfindigkeit verstrikken.

Wer würde wohl zugeben, daß jede gegebene Größe, durch das absolute Nichts, dividirt werden können, besonders wenn das Dividendum selbst, ein absolutes Nichts ist, die eine Größe $\frac{0}{0}$ d. i. eine unbestimmte und schwankende darböte, und keinen Werth gäbe? — Dies sind Hirngespinnste unseres Verstandes, welche die unauflöslichsten Verwirrungen erzeugen.

Ende der Anmerkungen.