# Supplement zu L. Eulers Differenzialrechnung

Grüson, Johann Philipp

Berlin, 1798

System der allgemeinen Differenzen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52957

# System der allgemeinen Differenzen.

## Erklärung einiger Hindenbürgische Zeichen.

### §. 1.

${}^{m}\mathfrak{A}$, ${}^{m}\mathfrak{B}$, ${}^{m}\mathfrak{C}$, . . . . . ${}^{m}\mathfrak{N}$, bezeichnen die Binomialcoeffizienten, der mten Potenz eines Binomium vom 2ten Gliede an; unter ${}^{m}\mathfrak{N}$ wird nicht etwa der 13te Coeffizient, sondern der allgemeine unbestimmte nte Coeffizient verstanden.

Es ist daher

$${}^{m}\mathfrak{A} = \frac{m}{1}$$

$${}^{m}\mathfrak{B} = \frac{m \,.\, \overline{m-1}}{1 \,.\, 2}$$

$${}^{m}\mathfrak{C} = \frac{m \,.\, \overline{m-1} \,.\, \overline{m-2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$\vdots$$

$${}^{m}\mathfrak{N} = \frac{m \,.\, \overline{m-1} \,.\, \overline{m-2} \ldots \overline{m-(n-1)}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)\, n}$$

Den $(n \pm 1)$ten, $(n \pm 2)$ten, $(n \pm r)$, $2n$ten, $(2n \pm r)$ten zum Exponenten m gehörigen Binomialmialcoeffizienten, bezeichnet Herr Professor Hindenburg mittelst seinen Distanzexponenten sehr glücklich folgendergestalt

$\overset{\pm 1}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, $\overset{\pm 2}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, $\overset{\pm r}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, $\overset{n}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, $\overset{n \pm r}{{}^{m}\mathfrak{N}}$ .... (Hindenburg. Novi Syst. Perm. 1781. S. XL, 9. ferner S. XXXVII. XXXIX: LXV, LXVI.). $\overset{\pm rn}{{}^{m}\mathfrak{M}}$ $\overset{\pm r}{{}^{m}\mathfrak{P}}$ u. s. w. haben ähnliche Bedeutung.

## §. 2.

Formeln wodurch nicht die Werthe der Coeffizienten, oder Glieder irgend einer geordneten Reihe, selbst angegeben, sondern nur ihre Stellen nachgewiesen werden, nennt Hr. Hindenburg, lokalformeln, für Coeffizienten dient der Buchstabe $\mathfrak{z}$, für ganze Glieder, $7$ auf folgende Art.

$$(a + b)^m \mathfrak{z} n = {}^{m}\mathfrak{N} \text{ oder } = {}^{m}\overset{0}{\mathfrak{N}}, \text{ ferner}$$

$$(a + b)^m \mathfrak{z}(n \pm 1) = \overset{\pm 1}{{}^{m}\mathfrak{N}}$$

$$(a + b)^m \mathfrak{z}(n \pm r) = \overset{\pm r}{{}^{m}\mathfrak{N}}$$

$$(a + b)^m \mathfrak{z}(2n \pm r) = \overset{n \pm r}{{}^{m}\mathfrak{N}}$$

Eben so bedeutet

$(a + b)^m\, 7\,(n + 1)$ das $(n + 1)$te Glied der $m$ten Potenz von $(a + b)$ z. B.

$(a + b)^3\, \mathfrak{z}3$ ist $= 3$ und $(a + b)^3\, 7\, 3 = 3ab^2$. Allgemein, wenn $\mathfrak{p}$ irgend eine geordnete Reihe bedeutet so ist $p\,\mathfrak{z}(r \pm s)$ der $(r \pm s)$te Coeffizient der Reihe $p$ ferner wird, wenn $q$, auch eine wohlgeordnete Reihe bedeutet $p^m . q^n\, \mathfrak{z}(r \pm s)$ der $(r \pm s)$te Coef-

Coeffizient des Produkts $p^m q^n$ andeuten. Nach derselben Analogie bedeuten

$$p\rceil(r \pm s),\quad p^m\rceil(r \pm s),\quad p^m . q^n\rceil(r \pm s)$$

das (r ± ste Glied, von p, von $p^m$ und von $p^m . q^n$ (Nov. Syst. Perm. S. XXXIII, 2.)

## Lehnsätze welche vorausgeschickt werden müssen.

### §. 3.

### I. Lehnsatz.

Es ist $\pm\, {}^m\mathfrak{N} . n = \pm\, {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . m$

oder welches einerley

$$\pm\, n\,[(a + b)^m \varkappa n] = \pm\, m[(a + b)^{m-1} \varkappa (n - 1)]$$

#### Beweis.

Nach §. 1. ist

$$\pm\, {}^m\mathfrak{N} . n = \pm \frac{m . m-1 . m-2 \ldots m-(n-1)}{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)n} . n$$

$$\pm\, {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . m = \pm \frac{(m-1)\ (m-2) \ldots [m-(n-1)]}{1 . 2 \ldots (n-1)} . m$$

also offenbar

$$\pm\, {}^m\mathfrak{N} . n = \pm\, {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . m$$

### §. 4.

### 1. Zusatz.

Aus §. 3. folgt unmittelbar daß

$$- {}^m\mathfrak{A} . 1 + {}^m\mathfrak{B} . 2 - {}^m\mathfrak{C} . 3 \ldots \mp {}^m\mathfrak{N} . n \ldots = p$$

$$= -m[1 - {}^{m-1}\mathfrak{A} + {}^{m-1}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \ldots] = -m\beta =$$

$$- m(1-1)^{m-1} = -m . (0)^{m-1}$$

also

also auch

$$\pm\, {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . m = 0 \mp m[(1 - 1)^{m-1} \rceil (n - 1)].$$

## §. 5.

### 2. Zusatz.

Da aus §. [illegible] hellet, daß nicht nur die Summen aus den be[illegible] Reihen des §. 4, sondern auch die gleichvielsten [illegible] aus beyden Reihen, einzeln genommen einande[illegible] sind, d. h. daß nicht allein $p = -mq$ sondern a[illegible] $\rceil r = -m\beta \rceil r$, so bleibt auch

$$-{}^{m}\mathfrak{A} . 1 . A + {}^{m}\mathfrak{B} . 2 . B . - {}^{m}\mathfrak{C} . 3 . C + \ldots \mp {}^{m}\mathfrak{N} . nN \ldots$$

$$= -m[1 . A - {}^{m-1}\mathfrak{A} . B + {}^{m-1}\mathfrak{B} . C \ldots \pm {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . O \ldots]$$

was für Größen auch A, B, C u. s. w. bedeuten mögen.

## §. 6.

### II. Lehnsatz.

In §. 4. war

$\beta = (1 - 1)^{m-1} = 0^{m-1}$ also ist

$\beta = 0$ für $m - 1 > 0$ d. i. für $m > 1$.

und $\beta = 1$ nur für $m - 1 = 0$, d. i. für $m = 1$.

Setzt man

$\alpha = 1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} \ldots \mp {}^{m}\mathfrak{N} \ldots = (1 - 1)^{m}$

so ist auch $\alpha = 0$ nur für $m > 0$

und $\alpha = 1$ nur für $m = 0$.

### Beweis.

Wenn $m - 1 = 0$ ist, so ist $(a - x)^{m-1}$, auch für jeden Werth von $(a - x)$ gleich 1, wie aus der Lehre von den Potenzen bekannt ist, also auch wenn

$x = a$

$x = a$, mithin $a - x = 0$ ist, so daß $0^0$ nichts anders als 1 bedeuten kann, nur für jeden andern Werth von $m - 1$ (nur nicht unendlich groß) ist $0^{m-1} = 0$. Das $0^0 = 1$ erhellet auch so

$$0^0 \text{ ist} = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1^n = 1$$

## §. 7.
## III. Lehnsatz.

Es sey

$$\gamma = 1 \,.\, q - {}^m\mathfrak{A}(q-a) + {}^m\mathfrak{B}(q-2a) \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}(q-na) \ldots$$

so ist $\gamma = 0$ nur für $m > 1$

und $\gamma = ma$ nur für $m = 1$

wenn m, q und a jede Größen, nur nichts unendlich Großes bedeuten.

### Beweis.

Von der Reihe $q.\alpha$ (§. 6.) ziehe man die Reihe $\delta$ ab; so erhält man die Reihe $\gamma$ des Lehnsatzes wie folget: von

$$\begin{array}{rl} q.\alpha = & 1.q - {}^m\mathfrak{A}q \quad + {}^m\mathfrak{B}q \ldots\ldots\ldots \mp {}^m\mathfrak{N}.q \ldots\ldots \\ \delta = & \quad\;\; - {}^m\mathfrak{A}.1.a + {}^m\mathfrak{B}.2a \ldots\ldots \mp {}^m\mathfrak{N}.na \ldots\ldots \\ \hline \end{array}$$

mithin

$$q\alpha - \delta = 1.q - {}^m\mathfrak{A}(q-a) + {}^m\mathfrak{B}(q-2a) \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}(q-na) \ldots$$

Nun ist (§. 6.) $\delta = - ma\,(1-1)^{m-1}$, folglich muß (§. 6) seyn

$$\delta = - ma \,.\, 0 \text{ nur für } m > 1$$

$$\delta = - ma \,.\, 1 \text{ nur für } m = 1$$

ferner ist $\alpha = 0$ nur für $m > 0$.

Da nun $\gamma = q.\alpha - \delta$ gefunden ist; so wird

$$\gamma = q.0 + ma.0 \text{ nur für } m > 1 \text{ und}$$

$$\gamma = q.0 + ma.1 \text{ nur für } m = 1$$

und

und diese beyden Gleichungen geben den Lehrsatz mit seiner Einschränkung, daß m, q, a eigentlich nur im ersten Satze, nichts unendlich Großes bedeuten. Der Beweis hätte auch können folgendergestalt geführt werden.

$$q\alpha - \delta = q(1-1)^m + ma(1-1)^{m-1}$$
$$= [q(1-1) + ma]\,[1-1]^{m-1} = + ma(1-1)^{m-1},$$

woraus aus §. 6. sogleich folgt daß

$\gamma = ma.0$ für $m > 1$ und $\gamma = ma.1$ für $m = 1$;

## §. 8.

## IV. Lehnsatz.

Wenn m, a und q, wie vorhin, nichts unendlich Großes bedeuten, $\pi$ aber eine ganze und positive Zahl ist, die übrigens auch ins Unendliche wachsen kann: so ist die Reihe

$$1 . q^\pi - {}^m\mathfrak{A}(q-a)^\pi + {}^m\mathfrak{B}(q-2a)^\pi \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}(q-na)^\pi \ldots\ldots = \iota$$

hier ist $\iota = 0$ nur für $m > \pi$ und dagegen

$$= a^\pi . m . m-1 \ldots 2 . 1 \text{ nur für } m = \pi$$

Be-

## Beweis.

$$q^{\varepsilon} = 1 \cdot q^{\pi + 1} - m\mathfrak{A}(q - a)^{\pi} \cdot q + m\mathfrak{B}(q - 2a)^{\pi} \cdot q \ldots \mp m\mathfrak{N}(q - na)^{\pi} \cdot q \ldots$$

$$\zeta = \qquad - m\mathfrak{A}(q - a)^{\pi}\, a + m\mathfrak{B}(q - 2a)^{\pi}\, 2a \ldots \mp m\mathfrak{N}(q - na)^{\pi} \cdot na \ldots$$

---

$$q^{\varepsilon} - \zeta = 1 \cdot q^{\pi + 1} - m\mathfrak{A}(q - a)^{\pi + 1} + m\mathfrak{B}(q - 2a)^{\pi + 1} \ldots \mp m\mathfrak{N}(q - na)^{\pi + 1} \ldots = 0$$

Nach (§. 5.) ist die abgezogene Reihe

$$\xi = -ma[1.(q-a)^{x} - {}^{m-1}\mathfrak{A}(q-2a)^{x} \ldots \mp {}^{m-1}\mathfrak{N}(q-(n+1)a)^{x}]$$

Vorausgesetzt also, der Lehnsatz gelte wirklich für irgend einen bestimmten Werth von $x$, so hätte man, weil $q$ und $m$ im Lehnsatze jede Größe, folglich auch $q - a$ und $m - 1$ bedeuten können, daß $\zeta = -ma.0$ nur für $m - 1 > x$ d. i. nur für $m > x + 1$ und

$$= -ma.a^{x}.m-1.m-2\ldots2.1 \text{ nur für } m - 1 = x \text{ d. i. nur für } m = x + 1.$$

Da nun im Anfange dieses Beweises $\eta = q^{x} - \xi$ gefunden worden, so wäre unter der gemachten Voraussetzung $\eta = 0.q + ma.0$ nur für $m > x + 1$

und $= 0.q + ma.a^{x}.m-1.m-2\ldots2.1$, nur für $m = x + 1$ oder

$$\eta = 0, \text{ nur für } m > x + 1$$

$$\text{und} = a^{x+1}.m.m-1\ldots2.1, \text{ nur für } m = x+1.$$

Betrachtet man die gleich Anfangs durch $\eta$ benannte Reihe so sieht man, daß diese beyden letzten Gleichungen nichts anders als den Lehnsatz selbst darstellen, indem man $(x + 1)$ statt $x$ darein schreibt. Es ist also erwiesen: wenn der Lehnsatz für irgend einen bestimmten Werth von $x$ gelten sollte, der $b$ heißen mag; so würde er auch für $x = b + 1$ gelten. Da nun der Lehnsatz, nach (§. 7.) für $b = 1$ wahr ist; so gilt es nach diesem Beweise auch für $x = 1 + 1 = 2$. Also kann man $b = 2$ voraussetzen, und es folgt daraus durch wiederholte Anwendung des Be-

Beweises, daß er auch für $\pi = 2 + 1 = 3$ gelte u. s. w. für jede ganze positive Zahl statt $\pi$ gesetzt. W. Z. E.

Anm. Diese Lehrsätze finden sich in Herrn Professor Busse, vortrefliche kleine Beyträge zur Mathematik u. s. w ster Theil. S. 36 — 40, nur einige unter einer andern Form, für $\overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, steht bey Busse $^{m}\mathfrak{N} - 1$. Die hier gebrauchte Hindenburgische Bezeichnung ist offenbar weit bequemer.

## Fortsetzung der Hindenburgischen Benennungen.

### §. 9.

$\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots \overset{r}{y}$ seyn Glieder einer, nach einem bestimmten Gesetze fortgehenden Haupt- oder Grundreihe (series proposita, primitiua). Es stellt nehmlich hier y jedes unbestimmte Glied der Reihe, und, mit den Distanzexponenten o, 1, 2, ... r verbunden, dieser Glieder Folge dar. Auch sey $\overset{0}{y}$ d. i. y das erste, $\overset{1}{y}$ das zweyte, $\overset{2}{y}$ das dritte, u. s. w. $\overset{r}{y}$ das (r + 1)te Glied der Hauptreihe.

### §. 10.

$\Delta^{1}, \Delta^{2}, \Delta^{3} \ldots \Delta^{m}$, ohne Beyfügung von $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots$ sollen überhaupt Reihen, der ersten, zweyten, dritten . . mten Differenzen der Hauptreihe (die Differenzen wie in Eulers Differenzialrechnung erster Theil §. 7, oder Kästners Analysis endlicher Größen die 3te Auflage §. 724. S. 505 genommen und verstanden) und $\Delta^1 \rceil 1, \Delta^1 \rceil 2 \ldots \Delta^2 \rceil 3 \ldots \Delta^3 \rceil 4 \ldots \Delta^m \rceil r$ u. s. w. dieser Reihen 1stes, 2tes, 3tes, 4tes ... rtes Glied bedeuten. Folglich ist $\Delta^m \rceil (r + 1)$ das $(r+1)$te Glied in der Reihe der mten Differenzen der Hauptreihe.

## §. 11.

$\Delta^1 y, \Delta^1 \overset{1}{y} \ldots \Delta^2 y, \Delta^2 \overset{1}{y} \ldots \Delta^3 y, \Delta^3 \overset{1}{y} \ldots \Delta^m y, \Delta^m \overset{1}{y} \ldots$ bedeutete erste, zweyte, dritte ... mte Differenzen der Glieder $\overset{0}{y}, \overset{1}{y} \ldots$ der Hauptreihe. Also ist $4^m \overset{r}{y}$ die mte Differenz von $\overset{r}{y}$, und $\Delta^{m+n} \overset{r+s}{y}$ die $(m + n)$te Differenz von $\overset{r+s}{y}$, dem $(r + s + 1)$ten Gliede (§. 9.) der Hauptreihe.

Anm. Die Benennungen in §. 9, 10 und 11 giebt Hindenburg im ersten Stücke des Archiv der reinen und angewandten Mathematik S. 93 — 95. Eulers Zeichnung stehet im ersten Theile seiner Differenzialrechnung §. 2. und 23, die von Kästners stehet in seiner Anal. endl. Gr. §. 724. II. Karsten, Busse und andere, zeichnen nach Euler. Folgendes dient zur Vergleichung ner verschiedenen Bezeichnungen.

Nach Hindenburg ... $\overset{-2}{y}, \overset{-1}{y}, \overset{0}{y}, \overset{+1}{y}, \overset{+2}{y} \ldots \overset{r}{y}$

Taylor ..... $\grave{\grave{y}}, \grave{y}, y, \underset{'}{y}, \underset{''}{y} \ldots y_{(r)}$ *)

Cousin ..... $''y, 'y, y, y', y'' \ldots y^{(r)}$ **)

Euler ....... $y_{II}, y_{I}, y, y^{I}, y^{II} \ldots y^{R}$

Kästner ..... $y-2, y-1, y, y1, y2 \ldots y^{r}$ ***)

Nach

*) Taylor Meth. Increm. p. 2.

**) Cousin Leçons de Calc. diff. et int. Paris 2 Theile in gr. Oct. 1778. eine neue vermehrte Auflage in 2 Quart-

Nach Hindenburg $\Delta^{1}\eta 1, \Delta^{1}\eta 2 \ldots \Delta^{2}\eta 3 \,.\,. \Delta^{3}\eta 4 \,.\,. \Delta^{m}\eta r$
Kästner ... $1\Delta 1, 2\Delta 1 \ldots 3\Delta 2 \,.\,. 4\Delta 3 \,.\,. r\underline{\Delta}m$

| | |
|---|---|
| Nach Hindenb. | $\Delta^{1}y, \Delta^{1}\overset{1}{y} \ldots \Delta^{2}y; \Delta^{2}\overset{1}{y} \ldots \Delta^{3}y, \Delta^{3}\overset{1}{y} \ldots \Delta^{m}y, \Delta^{m}\overset{1}{y} \ldots \Delta^{m}\overset{r}{y}$ |
| Euler | $\Delta^{1}y, \Delta^{1}y^{1} . \Delta^{2}y; \Delta^{2}y^{1} \ldots \Delta^{3}y, \Delta^{3}y^{1} \ldots \Delta^{m}y, \Delta^{m}y^{1} \,.\,. \Delta^{m}y\mathrm{R}$ |
| Kästner. | $\Delta 1y, \Delta 1y1 . \underline{\Delta}2y; \Delta 2y1 . \Delta 3y, \Delta 3y1 \,.\,. \Delta my, \Delta my1 . \Delta myr$ |

Euler

Quartbände erschien 1796 unter dem Titel Traité &c. wofür ich in Berlin 10 rthl. bezahlt habe. Eben diese Bezeichnung hat auch La croix Traité du Calc. diff. et int. 1797 2 starke Quartbände, die ich in Berlin mit 12 Thl. bezahlt habe.

***) $y - 2$, $y - 1$, habe ich nach der Analogie selbst geformt.

Euler schreibt auch im ersten Theile der Diff. (§. 23.) $y^{(n)}$.*)

Solche willkührliche Bezeichnungen wie bey Taylor und Cousin, hat Hindenburg durch den Gebrauch seiner Distanzexponenten in eine Wissenschaftliche verwandelt. Ueberhaupt ist das Hindenbürgische combinatorische-analytische System von Zeichen durch und durch vortreflich (Nov. Syst. Comb. p. XXXII. — XLIX. — LVI.). Noch muß ich erinnern daß Busse $\overset{t}{y}$, $\Delta^m \overset{t}{y}$, zu (t)ten Gliedern rechnet, welches nicht so bequem, als nach Euler und Kästner sie zu (t + 1)ten zu rechnen, ist. Diese letztere Zählung hätte Herr Busse, in seiner sonst sehr lehrreichen Schrift, manche Zurechtweisung erspart, und überflüssig gemacht.

## §. 12.
## Uebersicht des folgenden.

Der folgende erste Lehrsatz enthält die Formeln, wonach jedes beliebige (t + 1)te Glied der mten Differenzreihe aus den Gliedern der Hauptreihe ausgedrückt wird. Dieses (t)te Glied der mten Differenzreihe ist zugleich die mte Differenz des Gliedes $\overset{t}{y}$, des (t+1). Gliedes in der Hauptreihe, und wird deshalb durch $\Delta^m \overset{t}{y}$ bezeichnet.

In Eulers Differenzialrechnung ersterl Theil §. 10. wird die Induction für diese Formel nur bis auf $\Delta^5 y$ fortgeführt.

*) Lagrange, Cousin, Prony, Lacroix u. s. w. haben auch in ihren Schriften $y^{(n)}$

§. 13.

In folgendem Schema

| | Haupt-reihe | Reihe der 1sten Differenzen | Reihe der 2ten Differenzen | Reihe der 3ten Differenzen. | Reihe der 4ten Differenzen |
|---|---|---|---|---|---|
| x | $y$ | | | | |
| x+w | $\overset{1}{y}$ | $\Delta^1 y = \overset{1}{y} - y$ | $\Delta^2 y = \overset{2}{y} - 2\overset{1}{y} + y$ | | |
| x+2w | $\overset{2}{y}$ | $\Delta^1 \overset{1}{y} = \overset{2}{y} - \overset{1}{y}$ | $\Delta^2 \overset{1}{y} = \overset{3}{y} - 2\overset{2}{y} + \overset{1}{y}$ | $\Delta^3 y = \overset{3}{y} - 3\overset{2}{y} + 3\overset{1}{y} - y$ | $\Delta^4 y = \overset{4}{y} - 4\overset{3}{y} + 6\overset{2}{y} - 4\overset{1}{y} + y$ |
| x+3w | $\overset{3}{y}$ | $\Delta^1 \overset{2}{y} = \overset{3}{y} - \overset{2}{y}$ | $\Delta^2 \overset{2}{y} = \overset{4}{y} - 2\overset{3}{y} + \overset{2}{y}$ | $\Delta^3 \overset{1}{y} = \overset{4}{y} - 3\overset{3}{y} + 3\overset{2}{y} - \overset{1}{y}$ | |
| x+4w | $\overset{4}{y}$ | $\Delta^1 \overset{3}{y} = \overset{4}{y} - \overset{3}{y}$ | | | |
| . | . | . | | | |
| . | . | . | | | |
| . | . | . | | | |
| x+tw | $\overset{t}{y}$ | | | | |
| x+(t+1)w | $\overset{t+1}{y}$ | $\Delta^1 \overset{t}{y} = \overset{t+1}{y} - \overset{t}{y}$ | | | |

be=

bedeutet y eine beliebige Funktion von x, welches beständig um einerlei Größe wächset; so, daß die Wachsthümer w; 2w; 3w u. s. w. eine arithmetische Reihe ausmachen, übrigens aber jede beliebige endliche und unendliche Größe statt n gedacht werden kann

$\overset{1}{y}$ bedeutet die Funktion von x, welche man aus y erhält, wenn man darin $x + w$ statt eines jeden x schreibt. $\overset{2}{y}$ bedeutet diejenige Funktion, welche eben so aus $\overset{1}{y}$ entsteht, indem man wiederum $x + w$ statt eines jeden x in $\overset{1}{y}$ schreibt. Eben so entstehen $\overset{3}{y}$, $\overset{4}{y}$ u. s. w. (vergl. §. 9.)

Hieraus erhellet sogleich, daß die Funktion $\overset{2}{y}$ auch unmittelbar aus y entstehen muß, wenn man sogleich $x + 2w$ statt eines jeden x in y schreibt. Und so entstehet nun überhaupt $\overset{t+1}{y}$, das $(t + 2)$te Glied der Hauptreihe, entweder aus dem $(t + 1)$ten Gliede $\overset{t}{y}$, indem man darin $x + w$ statt x schreibt, oder unmittelbar aus dem ersten Gliede y, indem man darin sogleich $x + (t + 1)\, w$, statt eines jeden x schreibt.

## §. 14.

Zur Erklärung der Differenzen-Säulen in diesem Schema gehören noch folgende Sätze.

1) Die Gleichung $\Delta\overset{t}{y} = \overset{t+1}{y} - \overset{t}{y}$ in der Säule d. R. der ersten Differenzen stellt im allgemeinen das Ge-

Gesetzt dar, wonach ein jedts Glied der ersten Differenzenreihe aus zwey Gliedern der Hauptreihe entsteht, welches schon bey den ersten drey Gliedern ganz deutlich in die Augen fällt.

2) die Gleichung $\Delta^{m+1}\overset{t}{y} = \Delta^{m}\overset{t+1}{y} - \Delta^{m}\overset{t}{y}$ d. i.

$$\Delta^{m+1}y(t+1) = \Delta^{m}y(t+2) - \Delta^{m}y(t+1),$$

bedeutet demnach in Vergleichung mit (No. 1.) nichts anders, als daß das nehmliche Gesetz für das ganze Schema gelte, oder das die (m + 1)ten Differenzen aus den nächst vorhergehenden mten Differenzen eben so entstehen sollen, wie die 1sten Differenzen aus der nächst vorhergehenden Hauptreihe. Daher ist im Schema (hier fortgesetzt bis $\Delta^6 y$) z. B.

$\Delta^2 y$, als $\Delta\overset{1}{y} - \Delta y$, $= \overset{2}{y} - 2\overset{1}{y} + y$

$\Delta^3 y$, als $\Delta^2\overset{1}{y} - \Delta^2 y$, $= \overset{3}{y} - 3\overset{2}{y} + 3\overset{1}{y} - y$

$\Delta^4 y$, als $\Delta^3\overset{1}{y} - \Delta^3 y$, $= \overset{4}{y} - 4\overset{3}{y} + 6\overset{2}{y} - 4\overset{1}{y} + y$

$\Delta^5 y$, als $\Delta^4\overset{1}{y} - \Delta^4 y$, $= \overset{5}{y} - 5\overset{4}{y} + 10\overset{3}{y} - 10\overset{2}{y} + 5\overset{1}{y} - y$

$\Delta^6 y$, als $\Delta^5\overset{1}{y} - \Delta^5 y$, $= \overset{6}{y} - 6\overset{5}{y} + 15\overset{4}{y} - 20\overset{3}{y} + 15\overset{2}{y} - 6\overset{1}{y} + y$

u. s. w. geschrieben.

3) Aus der Gleichung in (No. 2.) folgt unmittelbar

$$\Delta^{m}\overset{t+1}{y} = \Delta^{m+1}\overset{t}{y} + \Delta^{m}\overset{t}{y} \text{ d. i.}$$

$$\Delta^{m}y(t+2) = \Delta^{m+1}y(t+1) + \Delta^{m}y(t+1)$$

diese Gleichung zeigt das Gesetz der Glieder jeder Reihe der Differenzen, aus der Summe der um eins niedrigern Gliedes derselben und der um eins hö-

höhern Differenzreihe. Z. B. Es sey $m = 2$ und $t = 1$; so ist

$$\Delta^2 \overset{2}{y} = \Delta^3 \overset{1}{y} + \Delta^2 \overset{1}{y} \text{ d. i.}$$

$$\Delta^2 73 = \Delta^3 72 + \Delta^3 72$$

Aus dem Schema hat man

$$\Delta^3 \overset{1}{y} = \overset{4}{y} - 3\overset{3}{y} + 3\overset{2}{y} - \overset{1}{y}$$

$$\Delta^2 \overset{1}{y} = \overset{3}{y} - 2\overset{2}{y} + \overset{1}{y} \text{ addirt, giebt}$$

$$\Delta^2 \overset{2}{y} = \overset{4}{y} - 2\overset{3}{y} + \overset{2}{y},$$

wie es sich gehört.

## §. 15.

## Zusatz.

Wenn man $\Delta^0$ der Analogie nach bildet, dabey aber überlegt daß dieses Zeichen dem Ausdruck vor dem es stehet, unbeschadet stehen oder wegbleiben kann, so umfaßt die Gleichung unter (§. 14. No. 2) wenn man $m = 0$ setzt zugleich auch die (§. 14. No. 1) nehmlich

$$\Delta^{0+1} \overset{t}{y} = \Delta^1 \overset{t+1}{y} - \Delta^0 \overset{t}{y},$$

oder wenn wir $\Delta^0$ gänzlich weglassen

$$\Delta^1 \overset{t}{y} = \overset{t+1}{y} - \overset{t}{y}.$$

## §. 16.

Daß m und t, nach dem eben erklärten Entstehungsgesetze des Schematis, keine negative oder gebrochene Zahlen, sondern nur die ganzen Ordnungszahlen

zahlen bedeuten könne, ist daraus klar, weil die angegebene Entstehungsart nur auf 1ste, 2te 3te u. s. w. mte Differenzenreihe, und deren 1ste, 2te, 3te u. s. w. (t + 1)te Glfede führen kann.

Sollte der Werth von m oder t auf negative Zahlen ausgedehnt werden, oder verlangt man für gebrochene Zahlen zu interpoliren; so muß dies erst besonders gerechtfertiget werden. Wir verstehen hier unter m und t alle ganze positive Zahlen und, wie §. 15 angemerkt ist, auch 0.

## §. 17.

Im Schema sind die Werthe einiger Differenzen durch **Glieder der Hauptreihe** ausgedrückt. Frägt man nun, **wie man den Werth eines beliebigen (t + 1)ten Gliedes in einer beliebigen** mten **Differenzenreihe durch Glieder der Hauptreihe ausdrücken** könne; so hat man dafür den folgenden Lehrsatz.

§. 18.

Lehrsatz.

Es ist

$$\frac{\Delta^m \overset{t}{y}}{\Delta^m \overline{(t+1)}} = \left\{ 1 \cdot \overset{m+t}{y} - {}^m\mathfrak{A} \cdot \overset{m+t-1}{y} + {}^m\mathfrak{B} \cdot \overset{m+t-2}{y} \ldots \mp {}^m\overset{-1}{\mathfrak{N}} \cdot \overset{m+t-(n-1)}{y} \ldots \pm {}^m\overset{n-1}{\mathfrak{N}} \cdot \overset{m+t-(2n-1)}{y} \mp {}^m\overset{n}{\mathfrak{N}}\, \overset{m+t-2n}{y} \ldots \mp 1 \cdot \overset{t}{y} \right.$$

Diese Reihe hat $(m + 1)$ Glieder, deren Zeichen vor dem 1sten, 2ten . . . $(n - 1)$ten $(2n - 1)$ten, 2nten Binomialcoefficienten von Exponenten m, d. i. vor ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$ . . . ${}^m\overset{-1}{\mathfrak{N}}$ . . . ${}^m\overset{n-1}{\mathfrak{N}}$, ${}^m\overset{n}{\mathfrak{N}}$. wie hier steht, abwechseln. Das letzte Glied $\mp 1 \cdot y$ hat das obere oder untere Zeichen, nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist. Eben so verhält es sich mit dem $(n - 1)$ten Gliede.

Beweis.

Vorausgesetzt, es gelte der Lehrsatz für irgend einen bestimmten Werth von m; so wird hierdurch, weil t im Lehrsatze jede positive Zahl, also auch $(t + 1)$ bedeutet, zugleich vorausgesetzt, daß auch

$\Delta^m$

$$\Delta^m y^{t+1} = 1 . y^{m+t+1} - {}^m\mathfrak{A} y^{m+t} + {}^m\mathfrak{B} y^{m+t-1} \ldots \pm {}^m\mathfrak{N} . y^{m+t-(n-1)} \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}^{n} y^{m+t-(2n-1)} \pm \mathfrak{N}^{n+1} y^{m+t-2n} \ldots \mp 1 . y^{t+1}$$

dazu addirt $-\Delta^m y^t = -1 . y^{m+t} + {}^m\mathfrak{A} y^{m+t-1} \ldots \pm {}^m\mathfrak{N}^{-1} y^{m+t-(n-1)} \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}^{n-1} y^{m+t-(2n-1)} \pm {}^m\mathfrak{N}^{n} y^{m+t-2n} \ldots + {}^m\mathfrak{A} . y^{t+1} \pm 1 . y^{t}$

giebt $\Delta^{m+1} y^t = 1 . y^{m+t+1} - {}^{m+1}\mathfrak{A} y^{m+t} + {}^{m+1}\mathfrak{B} y^{m+t-1} \ldots \pm {}^{m+1}\mathfrak{N} y^{m+t-(n-1)} \ldots \mp {}^{m+1}\mathfrak{N}^{n} y^{m+t-(2n-1)} \pm {}^{m+1}\mathfrak{N}^{n+1} y^{m+t-2n} \ldots \mp {}^{m+1}\mathfrak{A} y^{t+1} \pm 1 . y^{t}$

Die zweyte Gleichung ist nehmlich nichts anders als der für einen bestimmten Werth von m vorausgesetzte Lehrsatz mit gerade entgegengesetzten Zeichen geschrieben; und die Richtigkeit der Addition erhellet bey der Linken Seite aus §. 14. No. 2. Bey der rechten Seite überzeugt man sich durch folgende Schlüsse.

In mei=

In meiner Ausgabe von Eulers Algebra, habe ich im ersten Theile §. 361. Zus. 1. bewiesen das

$${}^{m}\mathfrak{N} = {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . \frac{m-(n-1)}{n} \text{ ist}$$

$$\text{also } {}^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\left[\frac{m-(n-1)}{n}+1\right] = {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\frac{m+1}{n}$$

$$= \frac{m.m-1\ldots.[m-(n-2)]}{1.2\ldots.(n-1)} . \frac{m+1}{n}$$

$$= \frac{(m+1)n.m-1\ldots.[(m+1)-(n-1)]}{1.2.3\ldots(n-1).n}$$

dieser letzte Ausdruck ist aber der nte Coeffizient von $(a+b)^{m+1}$; also gleich ${}^{m+1}\mathfrak{N}.$, mithin auch

$${}^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}$$

Ferner ist ${}^{m}\mathfrak{A} = \frac{m}{1}$ daher auch

$${}^{m}\mathfrak{A} + 1 = \frac{m}{1} + 1 = \frac{m+1}{1} = {}^{m+1}\mathfrak{A}.$$

Die erwiesene Gleichung

$${}^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}.$$

gilt für jedes Glied der addirten Reihen, denn wenn ${}^{m}\mathfrak{N} = {}^{m}\mathfrak{B}$ gesetzt wird, so ist ${}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m}\mathfrak{A}$; für ${}^{m}\mathfrak{N}.$ $= {}^{m}\mathfrak{C}$ ist ${}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m}\mathfrak{B}$. u. s. w. — Wollte man ${}^{m}\mathfrak{N}$ $= {}^{m}\mathfrak{A}$ setzen, so würde ${}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$, der vor dem als ersten gezählten Coeffizienten ${}^{m}\mathfrak{A}$, nächst vorhergehenden bedeuten, im binomischen Lehrsatz, hat aber das erste Glied keinen andern Coeffizienten als 1, also in diesem Falle ist ${}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = 1$, mithin erstreckt sich auch die Gleichung

$$^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}. \text{ auf dem Fall}$$

$$^{m}\mathfrak{A} + 1 = {}^{m+1}\mathfrak{A}. \text{ den wir vorhin schon}$$

bewiesen haben.

Betrachtet man nun die letzte Gleichung, so sieht man, daß sie gerade zu aus der vorausgesetzten Gleichung für den bestimmten Werth von m entstehen würde, wenn man darein $(m + 1)$ statt m schriebe. Folglich gilt der Lehrsatz für $m = a + 1$, wenn er für $m = a$ kann vorausgesetzt werden. Da nun dies nach §. 14. No. 1. geschehen kann für $a = 1$; so gilt er für $m = 1 + 1 = 2$. Dies vorausgesetzt gilt er demnach für $m = 2 + 1 = 3$ u. s. w., daß m jede ganze positive Zahl bedeuten kann.

**Anm.** Wenn der Herr Professor Busse in seinen obengenannten Beyträgen. 1ster Theil S. 34. §. 24, behauptet daß die Gleichung $^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}$ nicht aber dem Fall $^{m}\mathfrak{A} + 1 = {}^{m+1}\mathfrak{A}$ angewendet werden könnte, weil $\mathfrak{N}$ nicht $= 1$ gesetzt werden dürfte, so liegt der Irrthum bey Hrr. Busse offenbar darin, daß er nicht an der richtigen Bedeutung von $^{m}\mathfrak{A}$, $^{m}\mathfrak{B}$, $^{m}\mathfrak{C} \ldots {}^{m}\mathfrak{N}$, denkt. Denn da $\mathfrak{A}$ mit einem oben linker Hand geschriebenen kleinen Buchstaben oder Zahl, als erster Binomialcoeffizient angesehen wird, und $\mathfrak{N}$ mit einer oben linker Hand beygeschriebenen Buchstaben überhaupt ein allgemeines ntes Glied dieser Binomialcoeffizienten vorstellen soll, so kann ja $\mathfrak{N}$, wohl $= \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, u. s. w. gesetzt werden, aber nie $= 1$, da 1 kein Glied der Reihe ist zu der $\mathfrak{N}$ als allgemeines Glied gehört.

Wird $m = 1$ gesetzt, so ist für diesen Fall $(a + b)^{m} = (a + b)^{1} = a + \frac{1}{1}.b = 1.a + {}^{1}\mathfrak{A}b$; und $^{m}\mathfrak{N}$ ist alsdann $= {}^{1}\mathfrak{N} = {}^{1}\mathfrak{A} = \frac{1}{1} = 1$ ferner

$$^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = 1.$$

folglich $^{1}\mathfrak{N} + {}^{1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{1}\mathfrak{A} + 1 = 1 + 1 = 2 = {}^{2}\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{N}$ kann

$\mathfrak{N}$ kann also nur in dem besondern Falle $= 1$ gesetzt werden, wenn $\mathfrak{A} = 1$ wird. Vielleicht ist Herr Busse selbst durch seiner Art dem $(n - 1)$ten Binomialcoeffizienten darzustellen, zu dieser unrichtigen Behauptung verführt worden, den er so angiebt $^{m}\mathfrak{N} - I$, wird hier $\mathfrak{N} = 1$ so ist $\mathfrak{N} - I = 0$. Zu diesen falschen Folgerungen verleiten die Hindenbürgischen vortreflichen wissenschaftlichen Bezeichnungen nie, und wer erkennt hier nicht die wesentlichen Vorzüge der Hindenburgischen Distanzexponenten, vor jeder andern willkührlichen Bezeichnung.

## §. 19.

Schreibt man die Reihe §. 18 für $\Delta^{m}\overset{t}{y}$ rückwärts, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^{m}\overset{t}{y}\\ \Delta^{m}\gamma(t+1)\end{array}\right\} = \left\{\mp 1.\overset{t}{y} \pm {}^{m}\mathfrak{A}.\overset{t+1}{y} \mp {}^{m}\mathfrak{B}\overset{t+2}{y} \ldots \pm {}^{m}\overset{n-1}{\mathfrak{N}}\;\overset{t+2n-1}{y} \pm {}^{m}\overset{n}{\mathfrak{N}}\;\overset{t+2n}{y} \ldots + 1.\overset{t+m}{y}\right.$$

nehmlich die Reihe §. 18. für $\Delta^{m}\overset{t}{y}$ hat vor und rückwärts geschrieben einerley Binomialcoeffizienten. Das letzte oder $(m + 1)$te Glied dieser Reihe ist immer positiv. Bey den übrigen Gliedern gelten abwechselnd, die obern oder untern Zeichen, nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist.

§. 20.

## §. 20.

### Zusatz.

Für m = n und t = o, erhält man aus §. 18.

$$\frac{\Delta^{n} y}{\Delta^{n}\rceil 1} = \left\{ 1.\overset{n}{y} - {}^{n}\mathfrak{A}.\overset{n-1}{y} + {}^{n}\mathfrak{B}\overset{n-2}{y} \ldots \pm {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}\,\overset{1}{y} \mp 1.y \right.$$

Diese Reihe rückwärts geschrieben, oder in §. 19; m = n und t = o gesetzt, giebt

$$\frac{\underline{\Delta}^{n} y}{\underline{\Delta}^{n}\rceil 1} = \left\{ \mp 1.y \pm {}^{n}\mathfrak{A}.\overset{1}{y} \mp {}^{n}\mathfrak{B}\overset{2}{y} \ldots - {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}\,\overset{n-1}{y} + 1.\overset{n}{y} \right.$$

diese zwey Reihen stimmen genau, mit denen überein, welche der Herr Hofrath Kästner, in seiner vortreflichen Anal. endl. Gr. §. 724. IV. und in XI. nach seiner Art zu zeichnen für $1\Delta n$ giebt. Die Reihen, welche er noch in IV. für $2\Delta n$ und $1\Delta(n + 1)$ giebt, erhält man aus unsere allgemeine Formel §. 18, wenn man einmal m = n und t = 1 setzt, und dann wieder m = n + 1; und t = o. Im ersten Fall erhält man

$$\frac{\Delta^{n} \overset{1}{y}}{\Delta^{n}\rceil 2} = \left\{ 1.\overset{n+1}{y} - {}^{n}\mathfrak{A}.\overset{n}{y} + {}^{n}\mathfrak{B}.\overset{n-1}{y} \ldots \pm {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}.\overset{2}{y} \mp 1.\overset{1}{y} \right.$$

oder rückwärts gelesen wie man solche aus §. 19 erhält

$$\frac{\underline{\Delta}^{n} \overset{1}{y}}{\Delta^{n}\rceil 2} = \left\{ \mp 1.\overset{1}{y} \pm {}^{n}\mathfrak{A}\overset{2}{y} \mp {}^{n}\mathfrak{B}\overset{3}{y} \ldots - {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}\,\overset{n}{y} + 1.\overset{n+1}{y} \right.$$

M Im

Im zweyten Fall ist

$$\begin{array}{l} \Delta^{n+1} y \\ \\ \Delta^{n+1}\,7\,1 \end{array} = \left\{ 1.\overset{n+1}{y} - {}^{n+1}\mathfrak{A}.\overset{n}{y} + {}^{n+1}\mathfrak{B}.\overset{n-1}{y} \ldots \pm {}^{n+1}\mathfrak{N}\overset{1}{y} \mp 1.y \right.$$

oder rückwärts gelesen wie man solche aus §. 19. erhält

$$\begin{array}{l} \Delta^{n+1} y \\ \\ \Delta^{n+1} y \end{array} = \left\{ \mp 1.y \pm {}^{n+1}\mathfrak{A}\overset{1}{y} \mp {}^{n+1}\mathfrak{B}\overset{2}{y} \ldots - {}^{n+1}\mathfrak{N}\overset{n}{y} + 1.\overset{n+1}{y} \right.$$

Anm. Aus §. 18. und 19. erhellet daß die Reihen für $\Delta^n y$; $\Delta^n \overset{1}{y}$ und für $\Delta^{n+1} y$ vorwärts und rückwärts geschrieben, einerley Binomialcoeffizienten haben und daß also in $\Delta^n y$ und in $\Delta^n \overset{1}{y}$; ${}^n\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^n\mathfrak{A} = n$ und ${}^n\mathfrak{N} = 1$ ist, ferner muß in $\Delta^{n+1} y$; ${}^{n+1}\mathfrak{N} = {}^{n+1}\mathfrak{A} = n + 1$ und ${}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}} = 1$ seyn.

## §. 21.
## Uebersicht des folgenden.

$y$, welches im Schema (§. 13.) und im Lehrsatze (§. 18.) eine jede Funktion von $x$ bedeutet, sey nun eine beliebige nte Potenz von $x$, also $x^n = y$ und $(x + w)^n = \overset{1}{y}$; $(x + 2w)^n = \overset{2}{y}$ und überhaupt $(x + tw)^n = \overset{t}{y}$: so lehrt die Formel im nächsten §. das $(t + 1)$ Glied der mten Differenzenreihe aus Potenzen von $x$ und aus $w$, dem Wachsthum des $x$, bestimmen. In Eulers Differenzialrechnung wird dieses im ersten Theile §. 13. durch Induktion bis für

$y = x^2$,

$y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$, und zuletzt auch für $y = x^n$ bis auf $\Delta^4 y$ gezeigt. Aus dieser letzten bis auf $\Delta^4 y$ festgesetzten Induktion wird das allgemeine Gesetz für $\Delta^m y$ bey $y = x^n$ geschlossen und am Ende des 15. Paragragh in einer allgemeinen Formel ausgedrückt.

Diese trift aber mit derjenigen nicht überein, die nach (§. 23.) für $\Delta^m y$ aus der im nächsten §. 22. für $\overset{t}{\Delta}{}^{m}y$ erwiesenen folgt; welche übrigens auch für alle Werthe von n gelten muß, wofür der Binomialsatz erwiesen ist, ohne daß man um ihre Gültigkeit bey negativen und gebrochenen Werthen von n zu zeigen, solche einzele Beyspiele nöthig hat, wie in Eulers Differenzialrechnung §. 17. gegeben werden.

## §. 22.
### Lehrsatz II.

Es sey im Schema (§. 13.), $y = x^n$, wobey $\Delta^m \overset{t}{y} = \Delta^m (x + tw)^n$ wird, und n jede mögliche oder unmögliche Größe bedeuten soll; so wird $\Delta^m \overset{t}{y} = \Delta^m 7(t + 1)$, als $= \Delta^m (x + tw)^n =$

$$
\begin{array}{l}
+1.[(m+t)^m.{}^n\mathfrak{M}.x^{n-m}.w^m + (m+t)^{m+1}\,{}^n\overset{+1}{\mathfrak{M}}.x^{n-(m+t)}.w^{m+1} \ldots + (m+t)^{m+s}.{}^n\overset{+s}{\mathfrak{M}}.x^{n-(m+s)}.w^{m+s} \quad \ldots\ldots] \\
-{}^m\mathfrak{A}.[(m-1+t)^m \;\text{〃 〃 〃}.\; +(m-1+t)^{m+1} \;\text{〃 〃 〃}\; \ldots + (m-1+t)^{m+s} \;\text{〃 〃 〃}\; \ldots\ldots] \\
+{}^m\mathfrak{B}.[(m-2+t)^m \;\text{〃 〃 〃}.\; +(m-2+t)^{m+1} \;\text{〃 〃 〃}\; \ldots + (m-2+t)^{m+s} \;\text{〃 〃 〃}\; \ldots\ldots] \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\pm{}^m\mathfrak{R}.[(m-r+t)^m \;\text{〃 〃 〃}.\; +(m-r+t)^{m+1} \;\text{〃 〃 〃}\; \ldots + (m-r+t)^{m+s} \;\text{〃 〃 〃}\; \ldots\ldots] \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

wo $+ {}^m\mathfrak{R}$ wenn r gerade und $- {}^m\mathfrak{R}$ wenn r ungerade ist.

Beweis.

Beweis.

Da nach der Voraussetzung $y = x^n$, also $\overset{t}{y} = (x + tw)^n$; $\overset{m+t}{y} = [x + (m + t)w]^n$ wird, u. s. w., so setze man diese Werthe für $\overset{t}{y}, \overset{m+t}{y}$, u. s. w. in der Reihe für $\Delta^m \overset{t}{y}$ (§. 18.), so erhält man $\Delta \overset{t}{y} = \Delta^m(x + tw)^n =$

$$+1.[x+(m+t)w]^n - {}^m\mathfrak{A}.[x+(m-1+t)w]^n \ldots \pm {}^m\mathfrak{R}[x+(m-r+t)w]^n \ldots$$

Nun entwickele man die einzele Glieder als nte Binomialpotenzen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\Delta^m(x+tw)^n = +1.[x+(m+t)w]^n &= +1.[x^n + {}^n\mathfrak{A}x^{n-1}.(m+t).w \ldots + {}^n\mathfrak{P}.x^{n-\pi}.(m+t)^\pi.w^\pi \ldots] \\
-{}^m\mathfrak{A}.[x+(m-1+t)w]^n &= -{}^m\mathfrak{A}[x^n + \,\text{"}\;\text{"}\,.(m-1+t)\,\text{"}\ldots + \,\text{"}\;\text{"}\,.(m-1+t)^\pi\,\text{"}\;\ldots] \\
+{}^m\mathfrak{B}[x+(m-2+t)w]^n &= +{}^m\mathfrak{B}[x^n + \,\text{"}\;\text{"}\,.(m-2+t)\,\text{"}\ldots + \,\text{"}\;\text{"}\,.(m-2+t)^\pi\,\text{"}\;\ldots] \\
&\;\;\vdots \\
\pm {}^m\mathfrak{R}[x+(m-r+t)w]^n &= \pm {}^m\mathfrak{R}[x^n + \,\text{"}\;\text{"}\,.(m-r+t)\,\text{"}\ldots + \,\text{"}\;\text{"}\,.(m-r+t)^\pi\,\text{"}\;\ldots] \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

das Aggregat aller derjenigen Glieder, worin $\pi$ vorkommt, ist also =

$$[1.(m+t)^\pi - {}^m\mathfrak{A}.(m-1+t)^\pi + {}^m\mathfrak{B}(m-2+t)^\pi \ldots \pm {}^m\mathfrak{R}(m-r+t)^\pi \ldots].{}^n\mathfrak{P}.x^{n-\pi}.w^\pi$$

Da

Da man in diesem Aggregat für ${}^{n}\mathfrak{P}$ setzen darf, ${}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\mathfrak{B}$ u. s. w. und $\pi = 1, 2, 3 \ldots m$ u. s. w. seyn kann, so gilt was von diesem Aggregat bewiesen wird, offenbar auch für jedes andere von den hier unter einander stehenden Glieder. Nun ist aber bey dem hier dargestellten $(p + 1)$ten Aggregate, der erste in Klammern geschlossene Faktor nach §. 8. (dort $q = m + t$ und $a = 1$ gesetzt) $= 0$ so lange $m > \pi$ folglich $\pi < m$ ist. Also verschwinden alle Aggregate der entwickelten Reihe welche vor dem $(m+1)$ten Aggregate vorhergehen, (den auch das erste Aggregat $(1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} \ldots \mp {}^{m}\mathfrak{R} \ldots) x^{n}$ ist nach §. 6. ebenfalls $= 0$), und können deshalb auf die bestimmung des Werthes von $\Delta^{m}(x + tw)^{n}$ gar keinen Einfluß haben. Daher ist der Werth im Lehrsatze, die jetzt eben entwickelte Reihe, von dem $(m + 1)$ten Aggregate an. Der erste Theil der Reihe im Lehrsatze wird sogleich erhalten, wenn man in vorstehenden $(p + 1)$ten Aggregate ${}^{n}\mathfrak{P} = {}^{n}\mathfrak{M}$ und $\pi = m$ setzt.

§. 23.

## §. 23.
### Zusatz. 1.

Setzt man im Lehrsatz (§. 22.) $t = 0$, so erhält man $\Delta^m y = \Delta^m 1 = \Delta^m x^n =$

$$
\begin{array}{llll}
1.[m^m . {}^n\mathfrak{M} . x^{n-m} . w^m & + m^{m+1} . {}^n\overset{+1}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+1)} . w^{m+1} & + \ldots m^{m+1} . {}^n\overset{+s}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+s)} . w^{m+s} & \ldots] \\
-{}^m\mathfrak{A}[(m-1)^m \;\;''\;\;''\;\;'' & + (m-1)^{m+1} . \;\;''\;\;''\;\;'' & + \ldots (m-1)^{m+s} . \;\;''\;\;''\;\;'' & \ldots] \\
+{}^m\mathfrak{B}[(m-2)^m \;\;''\;\;''\;\;'' & + (m-2)^{m+1} . \;\;''\;\;''\;\;'' & + \ldots (m-2)^{m+s} . \;\;''\;\;''\;\;'' & \ldots] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\pm{}^m\mathfrak{R}[(m-r)^m \;\;''\;\;''\;\;'' & + (m-r)^{m+1} . \;\;''\;\;''\;\;'' & [\ldots + (m-r)^{m+s} . \;\;''\;\;''\;\;'' & \ldots] \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Anm.

**Anm.** Vergleicht man diese Reihe mit derjenigen, so im im ersten Theile von Eulers Differenzialrechnung zu Ende des 15ten §. gegeben wird

$$\Delta^{m}y = \alpha . \mathrm{I} . x^{n-m} . w^{m} + \beta . \mathrm{K} . x^{n-(m+1)} . w^{m+1} + \gamma . \mathrm{L} x^{n-(m+2)} . w^{m+2} + \ldots$$

wo I, K, L u. s. w. die binomischen Coeffizienten ${}^{n}\mathfrak{M}$, ${}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$, ${}^{n}\overset{+2}{\mathfrak{M}}$ u. s. w. vorstellen; so siehet man leicht, daß $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, u. s. w. hier das Aggregat der in ${}^{n}\mathfrak{M} x^{n-m} w^{m}$ in ${}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+1)} . w^{m+1}$, in ${}^{n}\overset{+2}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+2)} . w^{m+2}$ multiplizirten Theile, vorstellen müssen. Diese $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ u. s. w. hat aber Euler gerade so bestimmt, als sie sich aus dem hier §. 22 erwiesenen Lehrsatze für $\Delta^{m}\overset{1}{y} = \Delta^{m}\urcorner 2$ ergeben würden.

Die richtigen Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ u. s. w. wie sie unsere Formel fur $\Delta^{m}y$ giebt, sind es übrigens, welche bis $\Delta^{7}y$ berechnet, die im Eulerischen Werke, §. 14. abgedruckte Tafel geben.

## §. 24.

### Zusatz. 2.

Einige Beyspiele mögen zur Erläuterung der §. 23. gefundenen Formel dienen. Man setze $m = 3$ und $n = 4$; so erhält man

$$\Delta^{3}x^{4} = \Delta^{3}y = \Delta^{3}\urcorner 1 =$$

$$\begin{array}{ll}
1 . 3^{3} . \dfrac{4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3} . x^{1} . w^{3} & + 1 . 3^{4} . \dfrac{4 . 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 . 4} . x^{0} . w^{4} + 0 \\
- 3 . 2^{3} & - 3 . 2^{4} \\
+ 3 . 1^{3} & + 3 . 1^{4} \\
- 1 . 0^{3} & - 1 . 0^{2} \\
\hline
= 6 . \quad 4 \quad . x^{1} . w^{3} & + 36 . \quad 1 \quad | . x^{0} . w^{4} + 0
\end{array}$$

## §. 25.

## Zusatz 3.

Setzt man in §. 23. $m = 1$; so wird ${}^{n}\mathfrak{M} = {}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = {}^{n}\mathfrak{B}$ u. s. w. Man hat daher $\Delta^{1}y = \Delta^{1}\Pi$, als $= \Delta^{1}x^{n}, = 1 . {}^{n}\mathfrak{A}\, x^{n-1} . w + {}^{n}\mathfrak{B}\, x^{n-2} . w^{2} + {}^{n}\mathfrak{C} . x^{n-3}\, w^{3}$

$$\ldots + {}^{n}\mathfrak{R} . x^{n-r} . w^{r} \ldots .$$

denn wenn $m = 1$ ist, so verschwinden alle Glieder, die $m - 1$, oder ${}^{m}\mathfrak{B}$, oder die hierauf folgende Binomialcoeffizienten zu Faktoren haben, weil diese Faktoren jeder für sich = Null ist.

## §. 26.

## Zusatz. 4.

Es kommt hierbey die wichtige Frage vor, unter welchen Umständen irgend ein $(s + 1)$ter Theil (ich zähle den zu $w^{m}$ gehörigen Theil, wie immer als erster Theil) der Reihe im Lehrsatze (§. 22.) ein letzter, die Reihe abbrechender Theil sey, und unter welchen Umständen hingegen diese Reihe ins Unendliche fortgehe.

Was wir hier $(s + 1)$te Theil nennen, ist eigentlich von der Reihe im Beweise wovon der Lehrsatz abgeleitet worden, der $(m + s + 1)$te Theil, soll dieser Theil verschwinden, so kann es nicht anders geschehen, als es muß wenigstens eines von seinen vier Faktoren $= 0$ werden. Diese wollen wir deshalb in dieser Hinsicht einzeln betrachten.

## §. 27.

Der erste Faktor bestehet aus der Reihe

$$(m+t)^{m+s} - {}^{m}\mathfrak{A}(m-1+t)^{m+s} + {}^{m}\mathfrak{B}(m-2+t)^{m+s} \ldots\ldots$$
$$\ldots \pm {}^{m}\mathfrak{R}(m-r+t)^{m+s} \pm \ldots$$

also aus der Reihe • in §. 8., wenn man dort

$q = m + t$, $a = 1$ und $\pi = m + s$ setzt;

kann also nur $= 0$ werden, für $m > m + s$. Dies findet nun nicht Statt; sondern es kann $s$ aufs kleinste nur $= 0$ gesetzt werden, indem alsdann der $(m + s + 1)$te schon dem $(m + 1)$ten Theil der Reihe im Beweise des Lehrsatzes, also im Lehrsatze selbst dem 1sten Theile gleich wird. Wer $s$ negativ setzen wollte, der würde Theile bezeichnen, die vor dem 1sten im Lehrsatze, also vor dem $(m + 1)$ten Theile im Beweise des Lehrsatzes vorhergehen, von diesen ist aber im Lehrsatze nicht mehr die Rede, weil sie alle wie aus dem dortigen Beweise erhellet, verschwinden.

Weder der dritte Faktor $x^{n-(m+s)}$, noch der vierte $w^{m+s}$, kann jemals $= 0$ werden; da natürlich weder $x$ noch $w$ selbst $= 0$ gesetzt werden soll. Und wenn man übrigens, auch z. B. $w$ unendlich klein annimmt; so kann doch $w^{m+s}$ nur in Vergleichung mit niedrigern Potenzen von $w$ verschwinden.

## §. 28.

Es bleibt also nur noch der zweyte Faktor ${}^{n}\mathfrak{M}^{+s}$ zu betrachten übrig. Dieser kann nun niemals $= 0$ werden, wenn $n$ keine ganze und positive Zahl ist, wie ich solches in meiner Ausgabe von Eulers Algebra.

gebra. 1ster Theil. Berlin bey Nauk. 1796. im 1sten Zusatz §, 362. erwiesen habe.

## §. 29.

Ist daher n keine ganze positive Zahl, so läuft die nach den Potenzen w geordnete Reihe des Lehrsatzes ins Unendliche fort, und enthält nach und nach alle Potenzen $w^m$, $w^{m+1}$, $w^{m+2}$ u. s. w. ohn Ende.

## §. 30.

Ist aber n eine ganze und positive Zahl; so wird die Reihe im Lehrsatze niemals unendlich werden, es mag 1) $m > n$; 2) $m = n$ oder 3) $m < n$ werden.

## §. 31.

1. Im ersten Falle, für $m > n$, wird schon der erste Theil und eben so jeder folgende Theil $= 0$, weil jeder der Faktoren ${}^n\mathfrak{M}$; $\overset{+1}{{}^n\mathfrak{M}}$; ... $\overset{+s}{{}^n\mathfrak{M}}$ ... $= 0$ wird. (Meine Ausg. v. Eulers Alg. 1ster Theil. §. 374. 1. Zus.). Daher ist $\Delta^m(x+tw)^n = \Delta^m\gamma(t+1)$ $= \Delta^m\overset{t}{y} = 0$ für $m > n$.

## §. 32.

2. sey $m = n$. Wenn das ist, so muß $m+1 < n$ seyn, also sogleich der Coeffizient $\overset{+1}{{}^n\mathfrak{M}}$ und jeder folgende $\overset{+2}{{}^n\mathfrak{M}}$; $\overset{+3}{{}^n\mathfrak{M}}$ u. s. w. verschwinden (meine Ausg.

v. Eu-

v. Eulers Alg. 1ster Theil. §. 361. 3. Zus.), und die Reihe bis auf das erste Glied verschwinden, worin dann ${}^{n}\mathfrak{M}$ als $= {}^{n}\mathfrak{N}$ vorkömmt: ist also

$$\Delta^{n}(x + tw)^{n} =$$
$$[(n+t)^{n} - {}^{n}\mathfrak{A}(n-1+t)^{n} + {}^{n}\mathfrak{B}(n-2+t)^{n} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm {}^{n}\mathfrak{R}(n-r+t)^{n} \ldots\ldots]\, {}^{n}\mathfrak{N} \,.\, x^{*} \,.\, w^{n};$$

also nach §. 8., indem dort

$$q = n + t,\ a = 1,\ m = n,\ \varpi = n$$

gesetzt wird und ${}^{n}\mathfrak{N} = 1$ ist (m. A. v. Eulers Alg. 1ster Theil §. 351. Zus.)

$$\Delta^{m}(x + tw)^{n} = n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2 \ldots\ldots 2 \,.\, 1 \,.\, w^{n}.$$

## §. 33.

Daß dieser Werth constant, für alle Glieder in der nten Differenzenreihe einerley sey, erhellet schon daraus, daß $t$ in diesem Werthe gar nicht vorkömmt, und man doch das erste, 2te, 3te u. s. w. Glied erhält, je nachdem man $t = 0, = 1, = 2, = 3$ u. s. w. setzt.

Ueberdieß aber weiß man aus §. 31. daß $\Delta^{n+1}(x + tw)^{n} = 0$; oder jedes Glied der auf der nten zunächst folgenden $(n + 1)$ten Differenzenreihe $= 0$ werde; weil $n + 1 = m >$ den $n$ ist. Nun giebt aber die $(n + 1)$te Differenzenreihe, nach dem Schema §. 13. die Unterschiede zwischen jeden zwey nächsten Gliedern der nten Differenzenreihe an: und Größen deren Unterschiede $= 0$ sind, müssen ohne Zweifel gleich groß seyn.

## §. 34.

### Anmerkung.

Man übersieht auch hieraus, daß man etwas übereilt schließt, wenn man behauptet, daß alle Glieder der $n$ten Differenzenreihe einerley Werth haben, sobald man nur erwiesen hat, daß das erste Glied der $(n + 1)$ten Differenzenreihe, $\Delta^{n+1} x^n = 0$ sey. Da dieses erste Glied nur den Unterschied zwischen dem ersten und 2ten der nächst vorhergehenden $n$ten Differenzenreihe angiebt; so folgt aus seiner Verschwindung nur so viel daß die beyden genannten Glieder, das erste und 2te der $n$ten Differenzenreihe gleich groß sind.

## §. 35.

3) Ist endlich $m < n$;

so wird etwa $m + 1$ oder $m + 2$ oder überhaupt $m + s = n$ folglich $m + s + r > n$ werden, indem $r$ irgend eine ganze positive Zehl bedeutet. Der Theil der Reihe im Lehrsatze, worin nun $w^{m+s+r}$ vorkommt, d. i. der $(r + s + 1)$te Theil hat auch den Faktor ${}_{n}^{+s+r}\mathfrak{M}$ und wird deshalb $= 0$. (m. A. v. Eulers Alg. 1ster Theil. §. 361. 3 Zus.). Dieser Theil ist für den kleinsten Werth von $r$, nehmlich $r = 1$, der $(s+2)$te, und dies ist demnach der erste verschwindende Theil der Reihe.

Der letzte von den nicht verschwindenden Theilen ist daher der $(s + 1)$te für $m + s = n$, folglich $s = n - m$: oder es besteht die Reihe für $\Delta^m (x + tw)^n$

aus

aus $(n - m + 1)$ Theilen, worin nach und nach die Faktoren $x^{n-m} . w^m ; x^{n-(m+1)} . w^{m+1}$ u. s. w.; bis auf $x^{\circ} . w^n$ vorkommen, also die Potenzen des $w$ von $w^m$ bis $w^n$ wachsen, diejenigen des $x$ aber von $x^{n-m}$ bis auf $x^{\circ}$ abnehmen.

## §. 36.

### Anwendung auf die Differenzialen.

Keiner der bisherigen Schlüsse ist auf einen besondern Werth von $w$ eingeschränkt, sondern es kann dabey $w$ jeden möglichen oder unmöglichen, endlichen oder unendlichen Werth haben. Will man nun z. B. den Lehrsatz §. 22. mit seinen Zusätzen auf den besondern Werth $dx$ für $w$ anwenden; so hat man nur noch auf den Vortheil zu achten, daß jede Potenz $dx^{\varpi}$ gegen die Potenz $dx^{\nu}$ verschwindet, sobald $\varpi > \nu$ ist.

Diesem nach gibt der Lehrsatz mit allen seinen Zusätzen die folgenden Formeln, welche in den Vten Kapitel der Eulerschen Differenzialrechnung, theils aufs neue erwiesen, theils aber wiederum nur aus unvollständigen Inductionen hergeleitet werden; die aber dennoch, wie jede Eulersche Rechnung, sehr lehrreich und wichtig bleiben.

## §. 37.

Setzt man im Lehrsatze $w = dx$ und $t = 0$; oder im §. 23. nur $w = dx$ so erhält man daraus, $d^m . x^n = .$ *).

$+ 1$

*) Der Punkt (.) nach $d$, $d^2$, $d^3$ . . . $d^n$ fordert das Differenzial der ganzen nach dem Punkte folgende Größe, Eu-

lers

$$
\begin{array}{lllll}
+ \; 1. & [m^m \, . \, {}^n\mathfrak{M} x^{n-m} dx^m & + \; m^{n+1} \, . \, {}^n\mathfrak{M}^{+1} . x^{n-(m+1)} . dx^{m+1} & & + \ldots] \\
- \; {}^m\mathfrak{A} & [(m-1)^m \; " \; " \; " & + \; (m-1)^{m+1} \; " \; " & " & + \ldots] \\
+ \; {}^m\mathfrak{B} & [(m-2)^m \; " \; " \; " & + \; (m-2)^{m+1} \; " \; " & " & + \ldots] \\
\cdot \; \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & & \cdot \\
\pm \; {}^m\mathfrak{R} & [(m-r)^m \; " \; " \; " & + \; (m-r)^{m+1} \; " \; " & " & + \ldots] \\
\cdot \; \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot & & \cdot
\end{array}
$$

n mag seyn was für eine Größe es will, wie im Binominalsatze.

1) In so fern nun jede höhere Potenz $dx^{m+1}$; $dx^{m+2}$ u. s. w. gegen die niedere Potenz $dx^m$ verschwindet, in so fern besteht jedes mte Differenzial der Potenz $x^n$, n mag seyn was es will, nur aus einem

lers Diff. 1 Theil. §. 146. also bedeutet $d^m . x^n$ so viel als $d^m . (x^n)$. mithin etwas ganz anders als $d^m x^n = (d^m x)^n$.

nem Theile, dessen Factor $dx^m$ ist, und dessen übrige Factoren alle endlich sind.

Der erste Factor, nemlich die Reihe.

$1 . m^m - {}^m\mathfrak{A}(m-1)^m + {}^m\mathfrak{B}(m-2)^m \ldots \pm {}^m\mathfrak{M}(m-m)^m$, bricht wegen des Factors $(m-m)^m$ noch um ein Glied eher ab, als es wegen der binomischen Coeffizienten geschehen würde, wodurch erst die $(m+1)$ten, $(m+2)$ten, d. i. die Glieder mit ${}^m\mathfrak{M}^{+1}$, ${}^m\mathfrak{M}^{+2}$ u. s. w. verschwinden; und der Werth dieses ersten Factors ist $= m . m-1 \ldots . 2 . 1$, (nach §. 8. wenn $\pi = m$; $q = m$ und $a = 1$ gesetzt wird); daher $d^m . x^n = m . m-1 \ldots 2.1 . {}^n\mathfrak{M} x^{n-m} dx^m$ also auch $= n . n-1 \ldots [n-(m-1)]. x^{n-m} . dx^m$, weil ${}^n\mathfrak{M} = \frac{n . n-1 \ldots n-(m-1)}{1 . 2 \ldots . n}$ ist.

2) Wofern man aber auf die Glieder mit den höhern Potenzen von $dx$ Rücksicht nimmt; so ist es ausgemacht, daß die angegebene Reihe für $d^m . x^n$ ins Unendliche fortgeht, wenn $n$ keine ganze und positive Zahl ist §, 29.

3) Ist aber $n$ eine ganze und positive Zahl, so ist

1) wenn $m > n$ ist, jedes $d^m . x^n = 0$. §. 31. folglich z. B. $d^{n+1} . x^n = 0$; $d^{n+2} . x^n = 0$ u. s. w.

2) Wenn $m = n$ ist, so hat man nach §. 32. $d^n . x^n = n . n-1 \ldots 2 . 1 . dx^n$ (Eulers Diff. 1 Th. §. 154.) und dieser Werth ist constant, man sehe §. 33. u. 34.

3) Ist endlich $m < n$, so besteht die Reihe für $d^m . x^n$, aus $(n-m+1)$ Theilen, und diese enthalten nach und nach $dx^m$; $dx^{m+1}$ u. s. w. endlich $dx^n$. §. 35.

§. 38.

## §. 38.

Setzt man in der Formel
$d^m . x^n = n . n-1 .... [n-(m-1)] . x^{n-m} . dx^m$
nach und nach für m; 1, 2, 3, 4 u. s. w. so erhält man sogleich

$d . x^n = n\ x^{n-1} . dx$

$d^2 . x^n = n . n-1 . x^{n-2} . dx^2$

$d^3 . x^n = n . n-1 . n-2 . x^{n-3} . dx^3$

$d^4 . x^n = n . n-1 . n-2 . n-3 . x^{n-4} . dx^4$

u. s. w.

wie Euler in seiner Diff. 1 Th. §. 152. aus andern Gründen findet. — Anfänger die sich der deutschen Ausgabe von Euler bedienen, erinnere ich, die übel gedruckten $d . {}^3x^n$, $d . {}^4x^n$; $d . {}^5x^n$ u. s. w. nicht für etwas anderes als $d^3 . x^n$, $d^4 . x^n$; $d^5 . {}^4x^n$; u. s. w., zu halten

$n.n-1.....[n-(m-1)]$ kann ich auch so schreiben
$1.n.n-1.....[n-(m-1)]$
wird die 1 mitgezählt, so sind hier $(m+1)$ Factoren welches die $(m-1)$ anzeigt. $m=0$ gesetzt, kann also wohl nichts anders heißen, als es ist nur ein Factor nemlich 1 vorhanden, mithin ist richtig
$d^0 . x^n = 1 . x^{n-0} . dx^0 = x^n$; und $d^0$ ist nicht $= 1$ denn 0 ist hier kein Exponent einer Größe sondern es kann nichts anders heißen, als es soll kein Differenzial genommen werden: m negativ nehmen, hat hier keinen Sinn, n darf wie bekannt negativ seyn, auch sonst was es will.

Die Formel

$d^n \,.\, x^n = n \,.\, n-1 \ldots 2 \,.\, 1 \,.\, dx^n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \,.\, dx^n$

giebt wenn man für n, nach u. nach setzt, 0, 1, 2, 3, 4 u. s. w. folgende Formeln

$$d^0 \,.\, x^0 = d^0 \,.\, 1 = 0 \,.\, dx^0 = 0 \,.\, 1 = 0,$$

Man schließe hieraus ja nicht $d^0 = 0$, denn $d^0$ ist nur ein Operationszeichen

$$d \,.\, x = dx$$
$$d^2 \,.\, x^2 = 2dx^2$$
$$d^3 \,.\, x^3 = 6dx^3$$

u. s. w.

## §. 39.

### Noch einige Relationen und Hauptsätze.

Das allgemeine Gesetz in dem folgenden Schema

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\Delta^1 y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | . | $\Delta^m y$ | $\Delta^{m+1}$ |
| $y_1$ | $\Delta^1 y_1$ | $\Delta^2 y_1$ | . | . | $\Delta^m y_1$ | . |
| $y_2$ | $\Delta^1 y_2$ | . | . | . | . | . |
| $y_3$ | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| $y_t$ | $\Delta^1 y_t$ | $\Delta^2 y_t$ | . | | $\Delta^m y_t$ | $\Delta^{m+1} y_t$ |
| $y_{t+1}$ | $\Delta^1 y_{t+1}$ | | | | $\Delta^m y_{t+1}$ | |
| $y_{t+2}$ | | | | | | |
| . | | | | | | |
| . | | | | | | |

wonach jedes beliebige $(t+1)$te Glied einer jeden $(m+1)$ten Differenzenreihe aus dem $(t+2)$ten Gliede der nächst vorhergehenden mten Differenzenreihe entsteht, wird durch die Gleichung

$$\Delta^{m+1}\overset{t}{y} = \Delta^{m}\overset{t+1}{y} - \Delta^{m}\overset{t}{y}$$

oder

$$\Delta^{m+1}\mathfrak{y}(t+1) = \Delta^{m}\mathfrak{y}(t+2) - \Delta^{m}\mathfrak{y}(t+1)$$

dargestellt. Dies Gesetz umfaßt auch die nemliche Entstehung der ersten Differenzenreihe aus der Hauptreihe, wenn man sich erlaubt, statt m und t auch o zu schreiben, d. i. beyde Größen ganz wegzulassen. Denn wie schon oben erinnert worden, daß $\Delta^{m}$ keine Größe, sondern nur ein Operationszeichen bedeutet, daß die mte Differenz bezeichnet, so sagt $\Delta^{o}$ oder die ote Differenz nichts anders als es soll gar keine Differenz genommen werden, also ist es ganz gleichgültig ob ich $\Delta^{o}\overset{t}{y}$ oder bloß $\overset{t}{y}$ schreibe. $\overset{t}{y}$ deutet wie bekannt das $(t+1)$te der Hauptreihe an, hiernach ist also $\overset{o}{y} = y$ nichts anders als das erste Glied der Hauptreihe. Man merke sich also das o bey $\Delta^{o}$ und $\overset{o}{y}$ nicht ganz einerley sagt, auch daß beyder Bedeutung von o als Exponent einer Potenz ganz verschieden ist, denn im letztern Fall ist $a^{o}$ allemal $= 1$.

## §. 40.

### Anmerkung.

Aus diesem Entstehungsgesetze folgt sogleich, daß

z. B. ☿) $\Delta^{m} \overset{1}{y} = \Delta^{m} y + \Delta^{m+1} y$

♀) $\Delta^{m} \overset{2}{y} = \Delta^{m} \overset{1}{y} + \Delta^{m+1} \overset{1}{y}$.

überhaupt ♁) $\Delta^{m} \overset{t+1}{y} = \Delta^{m} \overset{t}{y} + \Delta^{m+1} \overset{t}{y}$ ist.

(Vergl. S. 169. No. 3.)

## §. 41.

Betrachtet man die Gleichung ☿); so ist darin der Werth von $\Delta^{m} \overset{1}{y}$ durch lauter erste Glieder der Differenzenreihen ausgedrückt, denn es kommt in ihm nur $y$ und kein $\overset{1}{y}$, $\overset{2}{y}$ u. s. w. vor.

Der Werth von $\Delta^{m} \overset{2}{y}$ hingegen bestehet aus zwey Theilen, wovon jeder schon $\overset{1}{y}$ enthält. Indessen ist der Werth des ersten Theiles schon bey ☿) durch lauter erste Glieder ausgedrückt; und da man in dieser nemlichen Gleichung statt $m$ auch $m+1$ schreiben darf, indem hier $m$ jede positive Zahl bedeuten soll; so giebt sie zugleich $\Delta^{m+1} \overset{1}{y} = \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+2} y$, welches auch den zweyten Theil in ♀) durch lauter vorangehende Glieder ausdrücken lehrt; so daß man schreiben kann

$\Delta^{m}$

$$\Delta^m \overset{2}{y} = \Delta^m y + \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+2} y$$

oder

$$♂)\ \Delta^m \overset{2}{y} = \Delta^m y + 2\Delta^{m+1} y + \Delta^{m+2} y$$

## §. 42.

### Lehrsatz.

Ueberhaupt ist

$$\Delta^m \overset{t}{y} = 1.\Delta^m y + {}^t\mathfrak{A}.\Delta^{m+1} y + {}^t\mathfrak{B}.\Delta^{m+2} y + \ldots$$
$$\ldots + {}^t\mathfrak{N}.\Delta^{m+n} y + \ldots + {}^t\mathfrak{T}.\Delta^{m+t} y.$$

$$\text{d.i. } \Delta^m \urcorner(t+1) = \Delta^m \urcorner 1 + {}^t\mathfrak{A}\,\Delta^{m+1} \urcorner 1 + {}^t\mathfrak{B}.\Delta^{m+2} \urcorner 1 + \ldots$$
$$\ldots + {}^t\mathfrak{N}\,\Delta^{m+n} \urcorner 1 + \ldots + {}^t\mathfrak{T}.\Delta^{m+t} \urcorner 1$$

worin m und t jede positive ganze Zahl, und (nach §. 15.) auch = o seyn kann.

Beweis.

Angenommen, es sey für irgend einen bestimmten Werth von t, welcher a heißen mag, der Lehrsatz wahr, also

$$\overset{a}{\Delta^m y} = 1.\Delta^m y + {}^a\mathfrak{A}.\Delta^{m+1} y + {}^a\mathfrak{B}.\Delta^{m+2} y + \dots$$

so wird damit zugleich auch angenommen, daß auch

$$\overset{a}{\Delta^{m+1} y} = \quad 1.\Delta^{m+1} y + {}^a\mathfrak{A}.\Delta^{m+2} y + \dots$$

sey; weil m im Lehrsatze jede ganze positive Zahl, also auch $m+1$ bedeuten soll. Diese beyden Gleichungen zu einander addirt, ihre linken Seiten, (nach §. 40.), ihre rechten, (nach §. 18. Beweis) geben die Gleichung

$$\overset{a+1}{\Delta^m y} = 1.\Delta^m y + {}^{a+1}\mathfrak{A}\,\Delta^{m+1} y + {}^{a+1}\mathfrak{B}\,\Delta^{m+2} y + \dots$$

den zu dem $(n+1)$ten Gliede der obern Reihe das $(n-2)$te der untern addirt giebt.

$${}^a\mathfrak{N}\,\Delta^{m+n} y + {}^a\overset{-1}{\mathfrak{N}}\,\Delta^{m+n} y = ({}^a\mathfrak{N} + \overset{-1}{\mathfrak{N}})\Delta^{m+n} y$$

$$= {}^{a+1}\mathfrak{N}.\Delta^{m+n} y \text{ (§. 18. Beweis).}$$

Vergleicht man nun die Reihe für $\Delta^m y$ mit dem Lehrsatze, so folgt daß der Lehrsatz auch für $t = a+1$ gelten müsse, so bald er für $t = a$ als gültig angenommen werden kann.

Nun gilt aber der Lehrsatz für $t = 1$, nach ☿) §. 40. auch schon für $t = 2$, nach ♂) §. 41. Folglich gilt er nach den eben angeführten Schlüssen auch für $t = 2 + 1 = 3$; folglich durch wiederholte Anwendung dieser Schlüsse auch für $t = 3 + 1 = 4$ u. s. w. für jede positive ganze Zahl.

§. 43.

## §. 43.

### Zusatz. 1.

Setzt man im Lehrsatze (§. 42.) $t = 0$, so wird $\overset{t}{y}$ zu $y$ oder deutet das erste Glied an, und da für $t = 0$ alle folgende Binomialcoeffizienten ${}^t\mathfrak{A}$, ${}^t\mathfrak{B}$ u. s. w. $= 0$ werden; (den die ote Potenz einer zweytheiligen Größe ist $= 1$, hat also gar keine Binomialcoefficienten, eben dies sagen die Darstellungen ${}^0\mathfrak{A}$, ${}^0\mathfrak{B}$ u. s. w.) so giebt der Lehrsatz bey diesem Werthe von $t$ daß $\Delta^m y = 1 . \Delta^m y + 0$, welches freylich schon von selbst klar ist und nicht anders seyn kann. Der Lehrsatz bestimmt nemlich $\Delta^m \overset{t}{y}$ aus den ersten Gliedern der Reihe $\Delta^m$ und der folgenden Reihen der $\Delta^{m+1}$, $\Delta^{m+2}$ u. s. w. Wählt man nun zu $\Delta^m \overset{t}{y}$ selbst das erste Glied der Reihe der $\Delta^m$, so kann der Lehrsatz nichts anders angeben, als daß dies Glied durch sich selbst allein bestimmt werde.

## §. 44.

### Zusatz. 2.

Man setze im Lehrsatze (§. 42.) $m = 2$ so hat man

$$\Delta^2 \overset{t}{y} = 1 . \Delta^2 y + {}^t\mathfrak{A}\,\Delta^3 y + {}^t\mathfrak{B}\,\Delta^4 y + \ldots + {}^t\mathfrak{T} . \Delta^{2+t} y.$$

Man setze $m = 1$; so hat man

$$\Delta^1 \overset{t}{y} = 1 . \Delta y + {}^t\mathfrak{A}\,\Delta^2 y + {}^t\mathfrak{B}\,\Delta^3 y + \ldots + {}^t\mathfrak{T} . \Delta^{1+t} y.$$

und

und in dem Sinne des §. 15. $m = 0$ gesetzt, giebt,

$$\Delta^m \overset{t}{y} = \Delta^0 \overset{t}{y} =$$

$$\overset{t}{y} = 1 . y + {}^t\mathfrak{A} \Delta y + {}^t\mathfrak{B} \Delta^2 y + \ldots + {}^t\mathfrak{T} . \Delta^t . y.$$

das ist:

$$y \rceil (t+1) = 1 . y + {}^t\mathfrak{A} \Delta \rceil 1 + {}^t\mathfrak{B} \Delta^2 \rceil 1 + \ldots + {}^t\mathfrak{T} . \Delta^t . \rceil 1.$$

Anm. Der Lehrsatz (§. 42.); giebt also das allgemeine Glied jeder Reihe der Unterschiede, durch erste Glieder der Differenzreihen ausgedrückt. Die Reihe für $y$, giebt das allgemeine Glied der Hauptreihe, durch die ersten Glieder, der Hauptreihe und der Differenzreihen, ausgedrückt. In beyden Reihen §. 42. u. 44. sind die $(t - 1)$ten und $(t)$ten, zum Exponenten $t$ gehörigen Binominalcoeffizianten ${}^t\overset{-1}{\mathfrak{T}} = t = {}^t\mathfrak{A}$, ${}^t\mathfrak{T} = 1$, daß also diese Reihen, vorwärts und rückwärts geschrieben, einerley Binominalcoeffizienten haben.

Setzt man in der Reihe für $\overset{t}{y}$; $t = n$, so kommt die Reihe $\overset{n}{y}$, wie bey Kästner Anal. endl. Gr. §. 725. II.

## §. 45.

## Reihen der nten Ordnung und ihre Glieder.

Die bewiesenen Sätze gelten, was auch $y$ für eine Funktion einer veränderlichen Größe ist, und nach welchem Gesetze auch die Hauptreihe $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots$ fortgehen mag. Hierbey schreiten im Allgemeinen die Differenzreihen, wenn die Gliederzahl der Hauptreihe nicht beschränkt ist, ohne Ende fort. Es giebt aber mehrere Reihen (Kästn. Anal. endl. Gr. §. 310.–312. §. 727, u. a.) deren Differenzen irgend einmal abbrechen, d. i. deren 1ste, 2te, 3te .... oder nte Differenzen constant sind. Man nennt sie Reihen

der

der 1sten, 2ten, 3ten .... nten Ordnung (Eulers Diff. 1ster Theil §. 37.) und sollen hier durch $_1y$, $_2y$, $_3y$ ... $_ny$ bezeichnet werden.

Will man die folgenden Formeln mit denen in Eulers Differenzialrechnung 1ster Theil, 2tes Kap. vergleichen, so hat man nur noch zu merken, daß Euler x geschrieben hat, wo hier t steht.

## §. 46.

### Aufgabe.

Das allgemeine (t+1)te Glied einer Reihe der nten Ordnung, als Grundreihe, durch die ersten Glieder, derselben Reihe und ihrer Differenzreihen, auszudrücken.

### Auflösung.

Es ist

$${}_{n}\overset{t}{y} = 1.y + {}^{t}\mathfrak{A}\Delta^{1}y + {}^{t}\mathfrak{B}\Delta^{2}y + {}^{t}\mathfrak{C}\Delta^{3}y1 \ldots + {}^{t}\mathfrak{N}\Delta^{n}y.$$

das ist:

$${}_{n}y\rceil(t+1) = y\rceil 1 + {}^{t}\mathfrak{A}\Delta^{1}\rceil 1 + {}^{t}\mathfrak{B}\Delta^{2}\rceil 1 + {}^{t}\mathfrak{C}\Delta^{3}\rceil 1 \ldots + {}^{t}\mathfrak{N}\Delta^{n}\rceil 1.$$

Diese Reihe erhält man, wenn man die Reihe §. 44. bis auf $\Delta^{n}$ oder die nte Differenzreihe, fortsetzt, mit welcher sie abbricht (§. 45.). Für eine Grundreihe der (n+m)ten Ordnung, oder für $_{n+m}y$, müßte man die Reihe bis auf das Glied ${}^{t}\overset{+m}{\mathfrak{N}}\,\Delta^{n+m}y$ also für $_{n+1}y$ bis auf ${}^{t}\mathfrak{N}\,\Delta^{n+1}y$ fortsetzen.

## §. 47.

### Aufgabe.

Das allgemeine $(t+1)$te Glied einer Reihe der erstern Ordnung, aus lauter Gliedern der Hauptreihe auszudrücken.

### Auflösung.

Nach §. 46. ist

$$\overset{t}{{}_1 y} = {}_1 y \urcorner (t+1) = 1 \cdot y + {}^t\mathfrak{A} \cdot \Delta^1 y,$$

also weil ${}^t\mathfrak{A} = t$, und nach §. 39. ferner

$\Delta^1 y = \overset{1}{y} - y$ ist,

auch $\overset{t}{{}_1 y} = 1 \cdot y + {}^t\mathfrak{A}\, \overset{1}{y} - t \cdot y$

oder $\overset{t}{{}_1 y} = {}^t\mathfrak{A}\, y - (t-1)\, y$. Diese Gleichung, welche übrigens der Aufgabe schon Gnüge leistet, kann offenbar auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\overset{t}{{}_1 y} = {}^t\mathfrak{A}\, (t-1) \cdot \left( \frac{\overset{1}{y}}{t-1} - \frac{y}{t} \right).$$

## §. 48.

### Aufgabe.

Das allgemeine Glied einer Grundreihe der nten Ordnung, aus lauter Gliedern derselben Reihe auszudrücken.

## Auflösung.

Es ist

$$ {}_{n}^{t}y = {}^{t}\mathfrak{N}(t-n)\left[\frac{\overset{n}{y}}{t-n} - \frac{{}^{n}\mathfrak{A}\,\overset{n-1}{y}}{t-n+1} + \frac{{}^{n}\mathfrak{B}\,\overset{n-2}{y}}{t-n+2} \cdots \right. $$

$$ \left. \cdots \mp \frac{{}^{n}\mathfrak{M}\,\overset{n-m}{y}}{t-n+m} \cdots \mp \frac{{}^{n}\mathfrak{N}\overset{0}{y}}{t}\right] = E. $$

## Beweis.

Nach §. 46. ist

$$ {}_{n}^{t}y = 1.y + {}^{t}\mathfrak{A}\Delta^{1}y + {}^{t}\mathfrak{B}\Delta^{2}y \ldots + {}^{t}\mathfrak{N}\Delta^{n}y = F $$

und $ {}_{n+1}^{t}y = F + {}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}}.\Delta^{n+1}.y = F + G. $

Die Buchstaben E, F, G, sollen nehmlich nur dazu dienen, einige der hergeschriebnen Größen ganz kurz zu bezeichnen.

Schreibt man den Werth, wie ihn §. 18. für $\Delta^{n+1}y$ bestimmt, in G; so hat man G =

$$ {}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}}[1.\overset{n+1}{y} - {}^{n+1}\mathfrak{A}\overset{n}{y} \ldots \pm {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}\overset{n+1-(m+1)}{y} \ldots \mp {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}.y.] $$

Angenommen nun, es sey für irgend einen bestimmten Werth a von n die F = E; so hat man wegen der vorletzten Gleichung wonach überhaupt ${}_{n+1}^{t}y = F + G$ ist, daß für n = a sey ${}_{n+1}^{t}y = E + G$ und es kommt darauf an, die Summe der beyden Reihen E und G zu finden.

Weil $\overset{n-m}{y} = \overset{n+1-(m+1)}{y}$ ist; so schmilzt bey ihrer Summirung zusammen jedes (m + 1)te Glied von E, so so e heißen soll, mit jedem $(m + 2)$ten Gliede von $\mathfrak{G}$, welches g heißen mag.

Wenn man nun das Glied e durch

$$(t - n - 1)\ (m + 1)\ (n + 1),$$

das Glied g aber durch $(t - n - 1)\ (t - n + m)$ sowohl multiplizirt als auch dividirt; so hat man

$$e = {}^{t}\mathfrak{N}.\frac{t-n}{n+1}(t-n-1).\left(\mp\frac{m+1}{t-n-1}.\frac{{}^{n}\mathfrak{M}.(n+1)}{m+1}.\frac{\overset{n-m}{y}}{t-n+m}\right)$$

$$g = \overset{+1}{{}^{t}\mathfrak{N}}(t-n-1).\left(\pm\frac{t-n+m}{t-n-1}.\overset{+1}{{}^{n+1}\mathfrak{M}}.\frac{\overset{n-m}{y}}{t-n+m}\right),$$

daher

$$e + g = \overset{+1}{{}^{t}\mathfrak{N}}.(t-n-1).\left[\begin{matrix}\mp\dfrac{m+1}{t-n-1}\\ \pm\dfrac{t-n+m}{t-n-1}\end{matrix}\right].\overset{+1}{{}^{n+1}\mathfrak{M}}.\frac{\overset{n-m}{y}}{t-n-m}$$

und da

$$\frac{\mp m \mp 1 \pm t \mp n \pm m}{t-n-1} = \frac{\pm t \mp n \mp 1}{t-n-1} = \pm 1 \text{ ist, *)}$$

$$e + g = \overset{+1}{{}^{t}\mathfrak{N}}.(t-n-1).\left(\pm\overset{+1}{{}^{n+1}\mathfrak{M}}.\frac{\overset{n-m}{y}}{t-n+m}\right)$$

Dieser Werth von $e + g$ giebt nun gerade das $(m+2)$te Glied an, so man in der Reihe des Lehrsatzes erhalten würde, wenn man darin $n + 1$ Statt n schriebe.

Für

*) Wer die Formel nicht so allgemein zu übersehen vermag, der kann erst die obern Zeichen — und + und dann die untern + und — gelten lassen, so findet er für den ersten Fall + 1 und für den 2ten Fall — 1. Man thut aber wohl sich an dergleichen allgemeine Uebersichten zu gewöhnen, da sie die Beweise und Sätze ungemein abkürzen.

Für $m = o$ wird in e, der Coeffizient $\mp {}^{n}\mathfrak{M} = +1$**) und in g, der Coeffizient $\pm {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = - {}^{n+1}\mathfrak{A}$; und es schmilzt alsdann, nach der eben ausgeführten allgemeinen Reduktion das erste Glied der E mit dem 2ten Gliede der G dergestalt zusammen, daß

$$ {}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}} . (t - n - 1) . \left( - {}^{n+1}\mathfrak{A} . \frac{\overset{n}{y}}{t - n} \right) $$

daraus entsteht. Dies wäre aber ebenfalls das 2te Glied in der Reihe des Lehrsatzes, wenn man darin $n + 1$ Statt n schriebe. Denn $t - (n + 1)$ ist $= t - n - 1$ u. s. w.

Was nun noch das erste Glied der Reihe G betrift, so ist dies ${}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}} . \overset{n+1}{y}$ folglich auch

$$ = {}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}} . (t - n - 1) . \left( \frac{\overset{n+1}{y}}{t - n - 1} \right), $$

welches ebenfalls das erste Glied in der Reihe des Lehrsatzes ist, wenn man in demselben $n + 1$ statt n schreibt.

Bedenkt man endlich noch, daß die Reihe G nach meiner Ausgabe von Eulers Algebra §. 361. 3. Zus. gerade mit dem $(n + 2)$ten und E mit dem $(n + 1)$ten Glie-

**) Nemlich, da ${}^{n}\mathfrak{M}$, der mte Binomialcoeffizient der Potenz n andeutet, so bedeutet $m = o$, nichts anders als der ote Binomialcoeffizient, d. h. der nächstvorhergehende Coeffizient, der vor den als ersten gezählten stehet, und dieser ist wie bekannt immer $= + 1$. Man überzeugt sich davon auch so: der mte Binomialcoeffizient, gehört zum $(m + 1)$ Gliede, der ote muß also zum 1sten Gliede gehören, und ist also $= 1$.

Gliede abbricht; so ist man völlig überzeugt, daß $E + G$ gerade diejenige Reihe giebt, so man im Lehrsatze erhalten würde, wenn man darin $n + 1$ statt $n$ schriebe; der Lehrsatz also für $n = a + 1$ gelten müßte, wenn er für $n = a$ als richtig dürfte angenommen werden. Das darf aber nach §. 23. geschehen für $a = 1$. Also gilt der Lehrsatz auch für $n = 1 + 1 = 2$; also auch für $n = 2 + 1 = 0$ u. s. w. für jede Reihe der $n$ten Ordnung, wenn $n$ nur die positiven Ordnungszahlen bedeutet.

Anm. die Zahl $n$ welche bestimmt, zu welcher Ordnung die Reihe gehört, ist in §. 46. und in §. 48. nur dem $\overset{t}{y}$ beygeschrieben worden, weil es sich von selbst versteht, daß die $y$ und ihre Differenzen, die in dem Werthe von ${}_n\overset{r}{y}$ vorkommen, zu derselben Reihe derselben Ordnung gehören.

## Summatorische Reihe und derselben allgemeines Glied.

### §. 49.

Das Abziehen jedes Gliedes vom nächstfolgenden, giebt Differenzreihen: das Addiren des ersten Gliedes zum zweyten, des dritten zur beyder Summe u. s. w. des jedesmal nächstfolgenden zur Summe aller vorhergehenden, summatorische Reihen. Ist also $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots$ wieder die Hauptreihe, und schreibt man eine andere Reihe $\overset{0}{\int}, \overset{1}{\int}, \overset{2}{\int}, \overset{3}{\int} \ldots$ neben ihr zur Seite, so, daß $\overset{0}{\int}$ oder $\int = 0$;

$\overset{1}{\int} =$

$$\overset{1}{\int} = \overset{0}{y} + 0 = \overset{0}{y}$$

$$\overset{2}{\int} = \overset{1}{y} + \overset{0}{y}$$

$$\overset{3}{\int} = \overset{2}{y} + \overset{1}{y} + \overset{0}{y}$$

$$\overset{4}{\int} = \overset{3}{y} + \overset{2}{y} + \overset{1}{y} + \overset{0}{y}$$

$$\vdots$$

$$\overset{t-1}{\int} = \overset{t-2}{y} + \overset{t-3}{y} + \ldots \overset{2}{y} + \overset{1}{y} + \overset{0}{y}$$

$$\overset{t}{\int} = \overset{t-2}{y} + \overset{t-2}{y} + \ldots + \overset{3}{y} + \overset{2}{y} + \overset{1}{y} + \overset{0}{y};$$

so ist $\overset{0}{\int}, \overset{1}{\int}, \overset{2}{\int}, \overset{3}{\int} \ldots \overset{t}{\int}$ die summatorische Reihe (Series summatrix)) der Hauptreihe, und der Werth von $\overset{t}{\int}$ heißt das summatorische Glied (Terminus summatorius) der Hauptreihe (Eulers Diff. 1ster Theil. §. 53. — 56.)

Der summatorischen Reihe allgemeines Glied

$$\overset{t}{\int} = \overset{0}{y} + \overset{1}{y} + \overset{2}{y} \ldots + \overset{t-2}{y} + \overset{t-1}{y}$$

ist also mit dem summatorischen Gliede der Hauptreihe einerley; daher sich die Erfindung des summatorischen Gliedes auf jene eines allgemeinen bringen läßt (Eulers Diff. 1ster Th. §. 53.)

## §. 50.

### Aufgabe.

Das summatorische Glied der Hauptreihe, durch die ersten Glieder der Hauptreihe und der Differenzreihen, auszudrücken.

Auf=

## Auflösung.

Es ist

$$\overset{t}{\int} = {}^{t}\mathfrak{A}y + {}^{t}\mathfrak{B}\Delta^{1}y + {}^{t}\mathfrak{C}\Delta^{2}y \ldots + {}^{t}\mathfrak{T}\Delta^{t-1}y$$

d. i.

$$\int\eta(t+1) = {}^{t}\mathfrak{A}y + {}^{t}\mathfrak{B}\Delta^{1}\eta_1 + {}^{t}\mathfrak{C}\Delta^{1}\eta_1 \ldots + {}^{t}\mathfrak{T}\Delta^{t-1}\eta_1$$

## Beweis.

Aus §. 49. ist deutlich daß

$$\overset{2}{\int} - \overset{1}{\int} = \overset{1}{y}$$

$$\overset{3}{\int} - \overset{2}{\int} = \overset{2}{y}$$

$$\overset{4}{\int} - \overset{3}{\int} = \overset{3}{y}$$

$$\vdots$$

$$\overset{t}{\int} - \overset{t-1}{\int} = \overset{t-1}{y}$$

Man kann nehmlich die Hauptreihe als erste Differenzreihe der summatorischen und diese letztere also als eine gegebene Grundreihe betrachten, (Eulers Diff. 1. Th. §. 55.) hieraus folgt, daß die 1ste, 2te, 3te u. s. w. Differenzreihe der Hauptreihe, als die 2te, 3te, 4te u. s. w. überhaupt die nte Differenzreihe der Hauptreihe, als die (n + 1)te der summatorischen Reihe betrachtet werden kann.

Da nun aus §. 44. bekannt ist, daß:

$$\overset{t}{y} = 1 . y + {}^{t}\mathfrak{A} . \Delta^{1}y + {}^{t}\mathfrak{B} . \Delta^{2}y \ldots + {}^{t}\overset{-1}{\mathfrak{T}}\Delta^{t-1}y + {}^{t}\mathfrak{T}\Delta^{t}y$$

so ist offenbar

$$\overset{t}{\int} = 1 . \overset{0}{\int} + {}^{t}\mathfrak{A} . \; y \; + {}^{t}\mathfrak{B} . \Delta^{1}y \ldots + {}^{t}\overset{-1}{\mathfrak{T}}\Delta^{t-2}y + {}^{t}\mathfrak{T}\Delta^{t-1}y$$

denn

denn man schreibt in der Reihe für $\overset{t}{y}$, statt $\overset{0}{y}$, $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y$ u. s. w., nur die entsprechenden Glieder der nächst vorhergehenden Differenzreihen.

Z. B. $\overset{0}{y}$, $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y \ldots \Delta^t y$, sind die ersten Glieder der Hauptreihe, und deren 1ste, 2te, 3te.... tte Differenzreihen, aber auch

$$\overset{0}{\int}, y\, \Delta^1 y, \Delta^2 y \ldots \Delta^{t-1} y,$$

sind die ersten Glieder von Reihen, die jenen nächst vorhergehen.

Da $\overset{0}{\int} = 0$, so fällt solches aus der Reihe für $\int$ ganz weg.

## §. 51.

Man kann zu der summatorischen Reihe als einer Grundreihe, eine neue summatorische, und zu dieser wieder eine andere suchen, und dies verfahren so weit verfolgen, als man will. Dies ist der Fall bey den sogenannten figurirten Zahlen, aller Art und Ordnungen: der Triangular-Tetragonal-Pentagonal u. s. w. überhaupt Polygonalzahlen; der drey, vier, fünf und mehrseitigen Pyramidalzahlen. Hierbey kann man die Glieder verschiedentlich zählen. Zählt man sie (wie in §. 50.) so, wie jedes nte Glied der summatorischen Reihe aus der Summe von $n-1$ Gliedern der vorhergehenden (als Grundreihe) erwächst: so giebt das eine Schema für figurirte Zahlen, so wie das Kästnerische (Anal. endl. Gr. §. 727. S. 515. d. n. A.). Nimmt man aber die Summe des ersten und zweyten Gliedes der vorangehenden Reihe als das zweyte Glied der summatorischen, die Summe der drey ersten Glieder jener Reihe als das dritte dieser; setzt man überhaupt das nte Glied der summatorischen aus der Summe der n ersten Glieder der nächst vorhergehenden Reihe zusammen: so kommt daraus die **verkürzte Darstellung** der figurirten Zahlen, wie in (Hind. Infin. Dign. §. 162 – 165.)

Führt die Hauptreihe $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots$ auf beständige Differerzen, so kommen, und zwar eben dieselben, auch bey der summatorischen vor; und wenn die Hauptreihe zur nten Ordnung gehört, so gehört die summatorische zur $(n+1)$ten (Eul. Diff. 1 Th. §. 55.) Dafür kann man hier das Zeichen ${}_{n+1}\int$ in ähnlicher Bedeutung, wie ${}_{n}y$ in §. 45. gebrauchen.

## §. 52.
## Aufgabe.

**Das allgemeine Glied einer summatorischen Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, durch die ersten Glieder, der zugehörigen Grundreihe (von der Ordnung n) und ihrer Differenzreihen, auszudrücken.**

## Auflösung.

Es ist

$$ {}_{n+1}\overset{t}{\int} = {}^{t}\mathfrak{A}\; y + {}^{t}\mathfrak{B}\Delta^{1} y + {}^{t}\mathfrak{C}\Delta^{2} y \ldots + {}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}}\Delta^{n} y $$

das ist:

$${}_{n+1}\int \urcorner (t+1) = {}^{t}\mathfrak{A}\, y \urcorner 1 + {}^{t}\mathfrak{B}\, \Delta^{1} \urcorner 1 + {}^{t}\mathfrak{C}\, \Delta^{2} \urcorner 1 \ldots + {}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}}\, \Delta^{n} \urcorner 1.$$

B e w e i s.

Da die Hauptreihe (Grundreihe) zur nten Ordnung gehört, so sind ihre nten Differenzen die letzten. Da nun eben diese nten Differenzen die $(n+1)$ten der summatorischen Reihe sind, so lasse man die §. 50. für $\overset{t}{\int}$ gegebene Reihe mit dem Gliede ${}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}} \cdot \Delta^{n} y$ abbrechen, alsdann erhält man, (da das erste Glied $1 \cdot \overset{0}{\int} = 0$ ist) die in der Auflösung gegebene Reihe. Diese Reihe für ${}_{n+1}\overset{t}{\int}$, kann also nicht über ${}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}} \cdot \Delta^{n} y$ hinausgehen; früher aber kann sie allerdings abbrechen, nemlich wenn $t < n+1$ ist, nach meiner Ausg. von Eulers Alg. 1ster Th. S. 208. 3. Zus.

## Formel für die Summe einer geometrischen Reihe.

### §. 53.

Nutzanwendungen der bisherigen Lehren mache ich nicht, weil im Eulerschen Werke daran kein Mangel ist, nur sey es mir erlaubt, für Anfänger noch eine Anwendung des summatorischen Gliedes, auf die Summirung der geometrischen Reihe, hinzuzufügen.

In §. 13. sey $y = a \cdot e^{x}$ und $w = 1$; so wird die dortige Hauptreihe eine geometrische, und $x = 0$ gesetzt, erhält man für die

$$\text{Hauptreihe } y, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots\ldots \overset{n}{y}$$

$$\text{die folgende } ae^0, ae^1, ae^2, ae^3 \ldots\ldots ae^n,$$

also die allgemeine Form der geometrischen Reihe, die vom ersten Gliede $ae^0 = a$ anfängt; und man findet dafür

$$\Delta^1 y = a(e-1)^1$$
$$\Delta^2 y = a(e-1)^2$$
$$\Delta^3 y = a(e-1)^3$$

u. s. w.

überhaupt $\Delta^n y = a(e-1)^n$

Aus lauter solchen ersten Gliedern der Differenzreihen wird nach §. 50. das summatorische Glied

$$^{n}\!\int = {}^{n}\mathfrak{A}y + {}^{n}\mathfrak{B}\Delta^1 y + {}^{n}\mathfrak{C}\Delta^2 y \ldots\ldots + {}^{n}\mathfrak{N}\Delta^{n-1} y$$

also für die geometrische Reihe die Summe von n Gliedern

$$= {}^{n}\mathfrak{A}.a + {}^{n}\mathfrak{B}.a(e-1)^1 + {}^{n}\mathfrak{C}.a(e-1)^2 \ldots\ldots + {}^{n}\mathfrak{N}.a(e-1)^{n-1}$$
$$= a[{}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B}.(e-1)^1 + {}^{n}\mathfrak{C}.(e-1)^2 \ldots\ldots + {}^{n}\mathfrak{N}.(e-1)^{n-1}]$$
$$= F$$

diese Formel F die man für die Summe einer jeden geometrischen Reihe durch Hülfe der allgemeinen Differenzen gefunden hat, bestimmt auch für $e = 1$ sogleich den Werth

$$a^{n}\mathfrak{A} = an$$

da hingegen, die aus den Anfangsgründen der Algebra bekannten Formel

$$S = a.\frac{e^n - 1}{e - 1}$$

(m. A. v. Eulers Algebra, 1ster Theil S. 189. §. 514, dort ist $b = e$)

für $e = 1$, $a.\frac{0}{0}$ giebt. Der Ausdrück $\frac{0}{0}$ ist ein unbestimmter Ausdruck; $a.\frac{0}{0}$ sagt also, daß die Formel

für

für S in diesem Fall nichts bestimmen könne; doch nennt man die Formel allgemein, weil sie die Summe aus einem beliebigen ersten Gliede a, einem beliebigen Exponenten e und der beliebigen Gliederzahl n zu bestimmen scheint.

Daß eine Formel $\frac{0}{0}$ wird, ist eine Erscheinung, die bey algebraischen Formeln nicht selten sind, und der Formel für S sieht man es freilich bey genauer Achtsamkeit bald an, daß sie für $e = 1$ nichts bestimmen könne. Denn in diesem Falle wird $e^n = e^r$ kann also für die Summe von r Gliedern nichts anders angegeben, als für die Summe von n Gliedern. Da nun gleichwohl der Unterschied zwischen diesen beiden Summen, indem man außer r und n auch a beliebig verändern darf, eine jede beliebige Größe erhalten kann; so muß freylich die Formel für $e = 1$ so etwas angeben, was man jeder beliebigen Größe gleich setzen darf, das heißt, sie muß einen Ausdruck geben, der gar nichts bestimmt.

Aus der Formel F kann man auch die für S ableiten:

Es ist nemlich

$$F \text{ auch} = a.\frac{{}^n\mathfrak{A}\, e-1) + {}^n\mathfrak{B}(e-1)^2 + {}^n\mathfrak{C}(e-1)^3 \ldots\ldots + {}^n\mathfrak{N}.(e-1)^n}{e-1}$$

$$\text{folglich} = a.\frac{[1 + (e-1)]^n - 1}{e-1} \text{ folglich auch}$$

$$= a.\frac{e^n - 1}{e-1} = S$$

Betrachtet man die eben vorgenommene Umbildung der F in S; so sieht man, daß dabey durch

e—1

$e - 1$ multiplicirt und dividirt würde, in dieser Hinsicht also

$$S = F.\frac{e-1}{e-1} \text{ sey.}$$

Dann muß freylich für $e = 1$ die $S$ geben $a.\frac{0}{0}$, wenn gleich $F$ einen ganz bestimmten Werth angiebt. Diese Umbildung belehrt uns aber deutlich, warum die $S$ nichts bestimmen konnte.

Auch die Kunstgriffe, wodurch die $S$ gewöhnlich herausgelockt wird, sind auch so beschaffen, daß sie für den Exponenten $= 1$ schlechterdings nicht zum Zwecke führen können. Denn man setze nur in den Schlüssen (m. A. v. Eulers Alg. 1. Th. S. 289.) sogleich den Exponenten $= 1$: was kann man hoffen dadurch zu finden, daß man $S$ von $1.S$ abzieht?

Freylich ist es hier sehr leicht für den Fall wenn $e = 1$ den Werth von $S$ zu finden, denn alsdann ist jedes Glied der geometrischen Reihe gleich dem ersten Gliede $a$, dieses ist daher so oft zu sich selbst zu addiren als die Gliederzahl $n$ anzeigt, mithin findet man $S = a.n.$

Sonst pflegen die Algebraisten sich bey solchem Ausfalle einer allgemeinen Formel durch Substitution zu helfen. Setzt man in $S = a.\frac{e^n - 1}{e - 1}$; $e = 1 + z$, so erhält man

$$S = a.\frac{(1+z)^n - 1}{1+z-1} = a.\frac{1 + {}^n\mathfrak{A}z + {}^n\mathfrak{B}z^2 \ldots + {}^n\mathfrak{N}.z^n}{1+z-1} \quad (\delta$$

also auch

$$S = a.\frac{{}^n\mathfrak{A}z + {}^n\mathfrak{B}z^2 \ldots + {}^n\mathfrak{N}.z^n}{z} \text{ also}$$

$$S = a.({}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B}z \ldots + {}^n\mathfrak{N}.z^{n-1}). \quad (\varepsilon$$

Wenn

Wenn nun $e = 1$ ist, so muß da $e = 1 + z$; $z = 0$ seyn. für $z = 0$ findet sich nun aus der eben gefundenen Formel

$S = a.{}^{n}\mathfrak{A} = a.n.$ und so ist die Summe der geometrischen Reihe für $e = 1$ ganz richtig bestimmt.

Mit Recht aber kann man nun fragen, woher kömmt es, daß die Formel nach solcher Substitution den Werth bestimmen kann? Wenn ich erst $e = 1 + z$ setze, und dann wieder $z = 0$, wie kann das etwas anders geben, als wenn ich gleich $e = 1$ setze?

Man achte genau auf die Art und Ordnung, wie man das $z$ gebraucht und verschwinden läßt, so bemerkt man wohl, daß es die Stelle eines Differenzials vertreten muß, und $e$ dabey als eine veränderliche Größe betrachtet wird, die sich der 1 ohne Ende nähert. Die angegebene Formel bestimmt nemlich die Summe einer jeden geometrischen Reihe, so lange $e$ auch um irgend eine Größe von 1 verschieden ist. Diese Größe heiße $z$, und es werde nun $1 + z$ in die Formel statt $e$ gesetzt; so ist ihr letzter Ausdruck bey ($\delta$) so beschaffen, daß man daraus das Gesetz abnehmen kann, wornach sich ihr Werth dem Werthe der Summe für $e = 1$ ohne Ende nähert, indem man $z$ ohne Ende kleiner und kleiner werden läßt. Wenn aber das geschiehet, so nähert sich der letzte Ausdruck ohne Ende dem $= an$, oder um kurz zu reden, die unendlich kleinen Größen ${}^{n}\mathfrak{B}z$ u. s. w. müssen neben der endlichen Größe $an$ verschwinden. In dieser Hinsicht kann man nunmehr $z = 0$ setzen, nachdem man nehmlich, vermittelst des $z$, den Werth der letzten Verhältniß von $\frac{e^n - 1}{e - 1}$, indem sich $e$ der 1 ohne

Ende

Ende nähert, deutlich erkannt hat. Wer aber auf diesen Sinn nicht achtet, und nachdem er anfangs $e = 1 + z$ gesetzt hatte, dann wieder, wo es ihm zuerst einfiele, $z = 0$ setzen wollte, der würde entweder durch ein bloßes Ohngefähr zu seinem Zwecke gelangen, oder ihn auch wohl ungeachtet dieser Substitution gänzlich verfehlen. Z. B. wenn man etwa in $\delta$ wieder $z = 0$ setzen wollte, so hätte man wieder das alte $= a . \frac{0}{0}$. Denn man darf $z$ nicht neben $1 - 1$, welches keine endliche Größe, sondern $0$ ist, verschwinden lassen; wenn $z$ nicht bloß wie $0$, sondern wie eine dem $0$ sich ohn Ende nähernde Größe, wirken soll.

Vergleicht man diese Formel, worin $z$ stehet, mit der aus dem summatorischen Gliede abgeleiteten, so wird man sogleich einsehen daß beyde Formeln vollkommen identisch sind, indem in der abgeleiteten statt $z$, sein gleiches $e - 1$ stehet.

---

# Einige merkwürdige Sätze und Relationen.

## I.

Es ist

$$2^n = \frac{\overline{n + 1} . \overline{n + 1} \ldots . \overline{2n - 1} . 2n}{1 . 3 . \ldots \overline{2n - 1}}$$

Beweis.