Supplement zu L. Eulers Differenzialrechnung

Grüson, Johann Philipp

Berlin, 1798

Hindenburgs Theorie der combinatorischen Analytik.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52957

Beweis.

Man setze in (13), $r = m - 1$, weil nun auch ${}^{m}\mathfrak{R} = \frac{m}{m-r} \cdot {}^{m-1}\mathfrak{R}$, so ist $\frac{{}^{m}\mathfrak{R}}{{}^{m-1}\mathfrak{R}} = \frac{m}{m-r}$, und ${}^{n}\mathfrak{N}$ ist $= 1$; folglich die obige Gleichung richtig.

17.

Es ist

$$1 + \frac{{}^{n}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}} + \frac{{}^{n}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}} \dots + \frac{1}{{}^{r}\mathfrak{N}} = \frac{r+1}{r+1-n}$$

Beweis.

Setzt man in (13); $m = -1$, so entstehet hier die erste Hälfte der Gleichung, und aus der 2ten Hälfte in (13) wird $\pm \frac{{}^{n-r-2}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}}$ und dieses ist nach (16. Bew.) $= \frac{r+1}{r-1-n}$.

Hindenburgs Theorie der combinatorischen Analytik.

1.

Wer sich überwinden wird, daß folgende mit einiger Aufmerksamkeit durchzugehen, dem wird die darauf verwendete Zeit, gewiß nie gereuen können — er wird, (wenn er der Mann ist der entscheiden darf alsdann sicherlicher die Hindenbürgische Erfin-

dung

dung, eine der ersten Stellen, unter den Merkwürdigen Erfindungen unsers Zeitalters einräumen. Mit Herrn Töpfer darf man dreist behaupten, daß durch diese wichtige Erfindung, das Grundgebiete der Analysis beträchtlich erweitert, die Priorität derselben höher gestellt, die Allgemeinheit der Aufgaben, selbst in den verwickelsten Fällen, aufs höchste getrieben, und die Formeln für ihre auch noch so sehr zusammengesetzten Resultate, mit der möglichsten simplizität, in Absicht auf Ausdruck und Anordnung, Darstellung und Entwickelung, vereinbart — eine Erfindung, welche in der Folge nicht weniger interressant und weiter aussehende Stoffe ihrer Art zum Nachdenken in Umlauf bringen wird, als das Kantische Meisterwerk des Tiefsinns.

2.

Ich werde hier die Theorie der comb. Analytik, nicht in ihrem ganzen Umfange, vortragen — dazu ist mir der Raum hier viel zu beschränkt — aber auch das wenige was ich hier mittheilen will, und was ich nach meine Art gebe, ist gewiß für jeden Mathematikverständigen höchst wichtig — Mein Urtheil über den Werth der comb. Analytik, ist um so unpartheiischer, da ich selbst ehe ich die weit vortreflichere Methode des Hrn. Prof. Hind. kannte z. B. bey dem allgemeinen Productenproblem auf manche kurze und leichte Darstellung gerathen war, die in besondern Fällen an Leichtigkeit und geschwinder Darstellung, gefoderter Glieder außer der Ordnung und independent, der Hindenburgischen Metho-

de

de nichts nachzugeben schienen. Aber sehr gerne gestehe ich daß mein Algorithmus, wie ich jetzt mit völliger Ueberzeugung einsehe durchaus nicht wissenschaftlich war, und daher dem Hindenburgischen weit nachstehet. Ich werde ihm also gewiß nie beschreiben da ich selbst jetzt überall bey meinen mathematischen Untersuchungen mich ganz der Hindenbürgischen Zeichen bediene.

Rein = combinatorische Darstellungen von Permutationen, Combinationen und Variationen gegebener Dinge.

3.

Die Bedeutung der Wörter: Permutationen, Combinationen mit und ohne Wiederholung, Variationen, habe ich in m. Ausg. von Eul. Alg. 1 Th. S. 198. rc. gegeben, und ich ersuche dem Leser sich das dort Gesagte vorher gehörig bekannt zu machen. Folgende Erklärungen füge ich hinzu.

4.

Die zum Variiren, Permutiren oder Combiniren gegebenen Dinge werden, wie sonst schon gebräuchlich, nach der Folge

der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...,
oder der Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, ...,

dargestellt. Das erste geschieht nach Leibnitzens Beyspiele, und ist in gewissen Rücksichten sehr vortheilhaft, dennoch aber, bey Combinationen und Variationen,

tionen, die sich nicht auf bestimmte Zahlen oder Summen beziehen, nicht schlechterdings nothwendig. Zahlen und Buchstaben, wie hier steht, mit einander verbunden, werden immer als Zeiger (index) zu den Formeln gesetzt, in denen combinatorische Zeichen vorkommen, um nachzuweisen, worauf die Zahlen, dieser Zeichen sich beziehen. Nicht selten ist der Zeiger

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ldots.}{b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ \ldots.}$$

oder anders.

5.

Die einzelnen Species oder Formen von Combinationen oder Variationen gegebener Dinge, werden mit einem gemeinschaftlichen Namen Complexionen genannt. Z. B. alle mögliche Amben der drey Dinge b, c und d, wenn Wiederholungen verstattet werden sind:

bb, bc, bd, cc, cd, dd,

jede dieser einzelne Verbindung zu zwey oder Ambe heißt nun eine Complexion, da man die zu combinirende Dinge entweder durch Buchstaben oder Zahlen vorstellt, so hat man Buchstaben- und Zahlen-Complexionen. Die hier den Buchstaben-Complexionen nach dem 2ten Zeiger in (4) entsprechenden Zahlen-Complexionen sind in eben der Ordnung folgende, 11, 12, 13, 22, 23, 33;

Wären keine Wiederholungen verstattet, so sind nur 3 Complex. möglich, nemlich

bc,

bc, bd, cd, Buchst. Complex.
12, 13, 23, Zahlen = = =
Unter jenen Zahlen=Complex. mit Wiederholungen, sind welche deren Ziffersumme gleich groß ist, als: 13, 22; deren Ziffersumme 4 beträgt. In der comb. Analytik, ist es öfters nöthig Complexionen zu bestimmten Zahlen oder Summen (numeri. dati. s. propositi.) darzustellen; sieht man nicht auf der Ziffersumme, so hat man Complex. schlechthin (simpliciter).

Man wird hieraus schon abnehmen, was man unter; Combinationen oder Variationen an sich, (simpliciter), oder nach bestimmten Summen, zu verstehen hat.

6.

Gutgeordnete Complexionen (rite ordinatae) sind, in denen Buchst. oder Zahlen, so auf einander folgen, daß nie ein früherer Buchstabe auf einen spätern, eine kleinere Zahl auf eine größere folgt. Sie sind die Repräsentanten und Stellvertreter aller übrigen Complex., die mit ihnen einerley und gleichviel Buchstaben oder Ziffern haben. Dergleichen können nur durchaus bey Comb. vorkommen, nicht aber bey Variationen, bey denen man alle mögliche Verbindungen zugleich mit allen möglichen Versetzungen der gegebenen Dinge verlangt.

7.

Diese Complexionen werden nach Classen geordnet. Die erste Classe machen die gegebene Dinge

selbst,

selbst als Unionen; aus; zur zweyten Classe werden die zweybuchstäbigen oder zweyzahligen Complex., als Binionen, zur dritten die dreybuchstäbigen oder dreyzahligen Complex., als Ternionen; u. s. w. die 4, 5, 6, u. s. w. buchstäbigen oder zahligen Complexionen, für die folgenden Classen nach der Ordnung, gerechnet.

8.

Alle Classen müssen gut geordnet seyn, (rite ordinatae) d. h. ihre Complex. (wenn man die darinnen vorkommende Zahlen, als Grundzeichen oder bloße Ziffern, u. so die ganze Complex. als eine aus diesen Ziffern bestehende Zahl ansieht) müssen so auf einander folgen, wie Zahlen wachsen; es muß nie eine kleinere Complexion, als Zahl, auf eine größere folgen. Bey den Comb. müssen also beyde, sowohl Complex. als die Classen gut geordnet seyn; bey den Variationen kann das nur bey den Classen statt finden, und die Folge ihrer Complex. dadurch bestimmt werden.

9.

Alle Complex. einer Classe werden zu einer Ordnung gerechnet, wenn sie mit einem und demselben Elemente anfangen. So gehören aaa, aab, aac, abb, abc zu einer Ordnung, und eben so bbbb, bbbc, bbcd, bcde; jene zur Ordnung a der dritten, diese zur Ordnung b der vierten Combinationsklasse. (Nov. Syst. Perm. p. VIII, 20).

10.

Oft ist es bey Comb. nöthig, zu wissen, wie viel verschiedene Complex. derselben, nur aber versetzten Buchst. oder Zahlen, es giebt, wie sie eine gutgeordnete Complex., als Stellvertreterinn aller übrigen, enthält. Das zeigt die Versetzungszahl (numerus permutationum) oder der Polynomialcoeffizient an; welche Zahl man also auf den Fall der Complexion versetzen muß. (Eul. Alg. 1 Th. S. 209).

11.

Rein-combinatorisch heißt nach Herr Hindenburg das Verfahren, wenn die dabey vorkommende Veränderungen, 1) durch bloßes Ansetzen oder Beyfügen 2) durch bloßes Wegnehmen oder Absondern. 3) durch bloße Aus- oder Umtauschung gewisser, so wie durch bloßer bestimmter Anordnung der übrigen Elemente, gemacht werden. Sie unterscheidet sich von der gemischten, bey der öfters, (wenn gleich leichte) Rechnungen vorkommen.

12.

Trift man bey der wirklichen Darstellung der zu machenden Comb. Arbeit, eine solche geschickte Anordnung, daß man durch gerade, horizontale und vertikale, Linien, leicht jede niedere Classe absondern kann, so wie folgende Classen durch bloßes Zusetzen an die vorhergehenden, sogleich darzustellen

stellen vermag, so nennt man dieses Verfahren **Combinatorische Involutionen** (Involutiones combinatoriae). Die durch solches Verfahren bewirkten Darstellungen selbst, werden häufig, **Involutionen** oder **Evolutionen** (besondere Involutionen) genannt.

13.

Zur Erläuterung von (12) will ich folgendes Beyspiel deutlich auseinander setzen.

In Eulers Einl. zur Anal. des Unendlichen 1ster Th. §. 360., werden von den continuirlichen Bruche,

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \text{etc.}}}}}}$$

folgende Werthe angegeben.

$$\frac{ab + \alpha}{b}; \quad \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta}; \quad \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b}$$

Ohne den Werth dieser 3 Brüche im geringsten zu schaden, setze ich die im Zähler und Nenner vorkommende Produkte, und auch die Buchstaben dieser Produkte in folgender Ordnung

$$\frac{ab + \alpha}{b}; \quad \frac{abc + \alpha c + a\beta}{bc + \beta}; \quad \frac{abcd + \alpha cd + a\beta d + ab\gamma + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + b\gamma}$$

ich füge hiezu den auf diesen 3 Brüchen, unmittelbar folgenden 4ten Bruch, ordne aber die Buchstaben und Produkte gleich so wie sie meiner gegenwärtigen Absicht dienlich sind.

abcde

$$\frac{abcde + \alpha cde + a\beta de + ab\gamma e + a\gamma e + abc\delta + \alpha c\delta + a\beta\delta}{bcde + \beta de + b\gamma e + bc\delta + \beta\delta}$$

Ob Produkte neben oder unter einander stehen, ändert ihren Werth nicht, man schreibe also die partial Produkte, des Zählers und Nenners des 4ten Bruchs jeden besonders in ihrer Ordnung unter einander so, daß ihre Endbuchstaben in einer geraden Linie zu stehen kommen, so erhält man

Zähler des 4ten Bruchs — Nenner des 4ten Bruchs

$$\begin{array}{ccccc|c}
a & b & c & d & e & \cdot\,\cdot \\
 & \alpha & c & d & e & \cdot\,\cdot \\
 & a & \beta & d & e & \cdot\,\cdot \\
a & b & \gamma & e & & \cdot\,\cdot \\
 & a & \gamma & e & & \cdot\,\cdot \\
a & b & c & \delta & & \cdot\,\cdot \\
 & \alpha & c & \delta & & \cdot\,\cdot \\
 & \alpha & \beta & \delta & & \cdot\,\cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|c}
b & c & d & e & \cdot\,\cdot \\
 & \beta & d & e & \cdot\,\cdot \\
b & \gamma & e & & \cdot\,\cdot \\
b & c & \delta & & \cdot\,\cdot \\
 & \beta & \delta & & \cdot\,\cdot \\
 & \cdot & \cdot & & \\
 & \cdot & \cdot & &
\end{array}$$

Die hier durch die eingeschriebenen Winkel abgeschnittenen Theile, (Evolutionen) geben sogleich die Zähler und Nenner der vorhergehenden Brüche, auf eine so leichte Art, daß eine solche involutorische Darstellung gewiß jeden, der Sinn für dergleichen Untersuchungen hat, ganz in Begeisterung setzen muß —zumal wenn er erst die Folgen übersieht, die diese Involutionen im ganzen Gebiet der Analysis haben

Ferner übersieht man schon aus dem hier mitgetheilten, daß bey der aufgestellten Involution, nicht mehr Buchstaben geschrieben werden, als gerade nur zu dem größten unter den darzustellenden Brüchen nöthig sind, alle kleinere Brüche, sind mit diesem zugleich dargestellt. Man denke sich die Arbeit, wenn man nach Euler, Lambert oder Lagrange, nur den 20sten Bruch in seiner Ordnung, wozu jene die 4 ersten sind, darstellen soll — Nach ihnen kann es nicht anders geschehen, als man muß alle vorhergehende wissen — aber nach der hier gezeigten Darstellung kann solches independent geschehen, dabey wird wie schon erinnert nicht ein Jota mehr geschrieben, (als durchaus nöthig ist nur den gefoderten 20sten Bruch darzustellen, daß die vorhergehenden 19 Brüche zugleich mit construirt sind, ist eine Vollkommenheit dieser Methode mehr — Es würde an diesem Orte noch unverständlich seyn, mehr hier davon beyzubringen — Ich begnüge mich also an diesem Beyspiele gezeigt zu haben, daß die combinatorische Analytik hier bey den continuirlichen Brüchen etwas leistet, was die feinsten Kunstgriffe der Analysis, bey aller Bemühung eines Eulers und Lagrange bisher nicht zu leisten vermochte. Wie nahe waren Bernouilli und Lambert und Euler dieser Erfindung! es bedurfte, wie man siehet nur einer zweckmäßigen Anordnung der Produkte und Buchstaben, und die ganze Involution liegt vor Augen. — Eben diese erstaunliche Leichtigkeit erhöhet den Werth der Hindenburgischen Erfindung ungemein.

14.

Die Zeichen die Herr Hindenburg bey seiner Theorie eingeführt hat, sind Lokalzeichen, combinatorische und andere. Von den Lokalzeichen sind in unsern vorhergehenden Abhandlungen bereits ei-

einige erklärt, und wie ich hoffe zeigen diese Abhandlungen genugsam, wie vortheilhaft der Gebrauch dieser Zeichen überall in der Analysis ist. Daher sollten billig alle Analysten sich künftig dieser Zeichen bedienen, so würde doch wenigstens der Anfang zur Einführung einer unveränderlichen und zweckmäßigen Bezeichnung gemacht — Sind wir Deutsche dieses nicht selbst, dem verehrungswürdigen Erfinder schuldig? — —

Einige der combinatorischen Zeichen, will ich hier vorläufig mittheilen, andere werden besser, wenn sie vorkommen erklärt.

I. die Zeichen für die Classen nach der Ordnung, sind für die Combinationen an sich (simpliciter)

$$'A, \ 'B, \ 'C, \ 'D, \ 'E \ldots . \ 'N$$

wo 'N nicht etwa die so vielste Classe bedeutet, als der so vielste Buchstabe sie im Alphabeth ist — sondern, unter der hier gezeichneten Figur zeigt sie überhaupt die nte Classe an. *) Noch erinnere ich daß jede Complexion in einer Classe aus so viel Elementen bestehen muß, als die Zahl der Classe, mithin der dieser Classe bezeichnende Buchstabe anzeigt.

II. Die Zeichen für die Classen nach der Ordnung, sind für Variationen an sich:

$$'A, \ 'B, \ 'C, \ 'D, \ 'E \ldots . \ 'N$$

wo 'N wiederum die allgemeine nte Classe anzeigt.

*) Eigentlich sollte hier nach Hindenburg eine Art geschriebener Buchstaben stehn, allein da er in der Druckerey fehlt so hat man das N beybehalten, dieses gilt auch bey den Variationen.

III. Für Classen zu bestimmten Zahlen n, m, oder Summen

Für Combinationen:

$^{n}A, {}^{n}B, {}^{n}C, {}^{n}D \ldots {}^{n}M$

^{n}M, bedeutet die allgemeine mte Classe zur Summe n; d. h. wenn die in der mten Classe stehenden Dinge mit dem im Zeiger ihnen correspondirenden Zahlen, bezeichnet werden, so sollen die Summen dieser Zahlen in jeder Complexion der mten Classe, alle einander gleich seyn, und n Einheiten betragen.

Für Variationen zu bestimmten Summen m

$^{m}A, {}^{m}B, {}^{m}C, {}^{m}D \ldots {}^{m}N.$

IV. Zahlen, neben den Classenbuchstaben, rechter Hand, zeigen einzelne Complexionen der Classen nach ihrer Ordnung an:

$'A3; 'B5; 'Cr \ldots {}^{n}F10; {}^{r}Hn \ldots$

und so auch bey den Variationsclassen.

V. Nemlich ^{r}Hn, bedeutet die nte Complexion der 8ten Combinationsclasse zur Summe r.

Werden die zu combinirenden Dinge aus mehreren Reihen r, p, q, s u. s. w. genommen, so werden die combinatorischen Darstellungen, so gemacht, daß immer die Elemente jeder Reihe gegebener Dinge in eine bestimmte Verticalreihe zu stehen kommen.

Z. B. die Elemente von p in die erste,
— — — — — q — zweyte
— — — — — r — dritte
— — — — — s — vierte
u. w. von der Rechten nach der Linken.

Da

Damit man nun gleich sieht, auf welche Reihe sich jedes Classenzeichen bezieht und in welcher Ordnung: so setzt man die **Reihenexponenten**, p, q, r, s . . . in bestimmter Ordnung gleich über die Classenbuchstaben.

Z. B. ${}^{n}\overset{p}{A}, {}^{n}\overset{qp}{B}, {}^{n}\overset{rqp}{C}, {}^{n}\overset{srqp}{D} \ldots\ldots {}^{n}\overset{\ldots srqp}{M}$

Hier bedeutet der letzte Buchstabe die mte Variationsclasse zu Summe n, aus den Elementen, der Reihenexponenten p, q, r, s . . . . und zwar die Elemente neben einander in vertikal Reihen so gestellt, wie kurz vorher gesagt ist.

VI. Die **einzelnen** Complexionen der Classen, mit ihren **Versetzungszahlen**, oder **Polynomialcoeffizienten**, anzudeuten, werden den großen lateinischen Classenbuchstaben die kleinen gleichnamigen deutschen Buchstaben vorgesetzt:

$\mathfrak{a}'A, \mathfrak{b}'B, \mathfrak{c}'C, \mathfrak{d}'D \ldots$ oder $\mathfrak{a}^{n}A, \mathfrak{b}^{n}B, \mathfrak{c}^{n}C, \mathfrak{d}^{n}D \ldots \mathfrak{n}^{r}N$

Es bedeutet nemlich, $\mathfrak{n}^{r}N$, so viel als die nte Combinationsclasse zur Summe r, mit der zu jeder ihrer Complexion gehörigen Versetzungszahl.

VII. Oft kommen die in I bis VI beschriebenen Zeichen, zusammen, wie

$${}^{m}\mathfrak{A}.\mathfrak{a}'A + {}^{m}\mathfrak{B}.\mathfrak{b}'B + {}^{m}\mathfrak{C}.\mathfrak{c}'C \ldots + {}^{m}\mathfrak{N}.\mathfrak{n}'N$$

oder $${}^{m}\mathfrak{A}.\mathfrak{a}^{n}A + {}^{m}\mathfrak{B}.\mathfrak{b}^{n}B + {}^{m}\mathfrak{C}.\mathfrak{c}^{n}C \ldots + {}^{m}\mathfrak{N}.\mathfrak{n}^{n}N$$

Deren Werthe durch die beygefügten Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a & b & c & \ldots \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 . & 2 . & 3 \ldots \\ b & c & d \ldots \end{pmatrix}$ nach erwiesenen Regeln und constuirten Tafeln sogleich entwickelt und dargestellt, auch in **Lokalausdrücke** $p^{m\prime}n \ldots qp^{\prime}m$ (durch welche man statt der Glieder selbst nur ihre Stellen angiebt) und umgekehrt

kehrt verwandelt werden können. Von solchen Lokalausdrücken und ihren Werthen (Nov, Syst. Comb. p. LI. LIII.). Es bestehet nemlich ein Glied jener Reihen wie ${}^{m}\mathfrak{N}{}^{n}N$, aus dem ${}^{m}\mathfrak{N}$ oder nten Binomialcoeffizient der mten Potenz, aus n oder der Versetzungszahl jeder einzelnen Complexion der nten Classe und endlich aus ${}^{n}N$, oder die nte Combinationsclasse zur Summe n.

$$\text{Z. B. } {}^{m}\mathfrak{A} . \mathfrak{a}\,{}^{3}A + {}^{m}\mathfrak{B} . \mathfrak{b}\,{}^{3}B + {}^{m}\mathfrak{C} . \mathfrak{c}\,{}^{3}C$$

$$\binom{1\ 2\ 3}{a\ b\ c}$$

hier ist ${}^{3}A = 3$ oder c;
${}^{3}B = 12$ oder ab
${}^{3}C = 111$ oder aaa

demnach ${}^{m}\mathfrak{A} . \mathfrak{a}\,{}^{3}A = {}^{m}\mathfrak{A} . c$
${}^{m}\mathfrak{B} . \mathfrak{b}\,{}^{3}B = {}^{m}\mathfrak{B} . 2ab$
${}^{m}\mathfrak{C} . \mathfrak{c}\,{}^{3}C = {}^{m}\mathfrak{C} . a^{3}$

$\mathfrak{a}$ ist, da ein einzelnes Ding keine Versetzungen zuläßt, immer 1. Da ab oder 12, die Versetzung ba oder 21 zulassen, so ist hier $\mathfrak{b}=2$; bey ${}^{3}C$ findet, da alle Elemente gleich sind keine Versetzung statt, also ist hier $\mathfrak{c} = 1$.

VIII. Die Distanzexponenten, die als Zahlen über die Buchstaben geschrieben werden, dienen dazu, um durch ihre Beyhülfe gleichnamige Zeichen, wie sie I bis VII vorkommen, durch einander auszudrücken, vorhergehende durch folgende und umgekehrt, bestimmte durch unbestimmte und wechselsweise.

IX. Werden bey den Involutionen die Elemente so gestellt, daß sie wie Wörter in alphabethischer Ord-

Ordnung, vor oder rückwärts gelesen, auf einander folgen, so heißt dieses die lexikographische oder alphabethische Fortschreitung — Der Gebrauch dieser lexikographischen Anordnungen, ist in der Analysis sehr wichtig. Das Verfahren, nach welchem hierbey die gesuchten Complexionen, durch Zusammensetzung oder Absonderung ihrer Elemente, in horizontaler, vertikaler oder aus beyden gemischter Richtung, sich ergeben verstattet immer, ein solches Verbindungsgesetz auszuwählen, welches das gesuchte Resultat leichter und geschwinder herbeyführt, als auf keinem andern Wege durch kein anderes Verfahren, möglich ist.

Involutarische Darstellungen, werden von andern combinatorischen durch J, *J* unterschieschieden; jenes für Combinationen dieses für Variationen — die lexikographischen Darstellungen, erhalten zu ihrer und zur Bezeichnung der Classen

für Combinationen J, A, B, C . . .

für Variationen *J*, *A*, *B*, *C* . . . *)

Wem hier noch nicht alles bis zum höchsten Grad, verständlich ist, der wird im folgenden völbefriediget werden.

Ver-

*) *J*, J deuten nemlich lexikographische = Involutionen an.

Versetzungen. (Permutationes).

15.

Aufgabe.

Gegebene Dinge oder Elemente

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & \ldots \end{matrix}\right)$$

auf alle mögliche Arten zu versetzen.

Erste Auflösung. Aus der Anfangscomplexion abcde... oder 12345... für n Dinge, suche man die nächst folgende höhere *) und aus dieser wieder die nächsthöhere (immer aus demselben und gleichvielen Elementen bestehende) Complexion, u. s. fort, nach folgender Regel.

I. Man suche von der Rechten nach der Linken zu, das erste Element, das als ein niedrigeres oder kleineres, auf ein höheres oder größeres folgt;

II. Zu diesem niedrigern suche man, aus denen die ihm zur Rechten stehen, das nächst höhere;

III. Man setze dieses höhere Element (II) in die Stelle des niedrigern (I) behalte die Elemente zur Linken (wenn dergleichen vorhanden sind) unverändert bey, und schreibe das niedrigere mit den übrigen, gutgeordnet, von der Linken nach der Rechten zu;

IV. Die Complexion, auf welche man die Vorchriften (I, II, III) nicht weiter anwenden kann, ist alsdann die letzte.

16.

*) Höhere oder niedrigere Complexionen sind hier mit größern oder kleinern Zahlen gleichgültig.

16.

Beyspiel. Auf	123456	ferner	124563
folgt	123465	=	124635
und darauf	123546	=	124653
und dann	123564	=	125346
ferner	123645	=	125364
=	123654	=	125436
=	124356	=	125463
=	124365	=	125634
=	124536	=	125643

u. s. w.

bis man auf die letzte Complexion 654321 verfällt, wo kein niedrigeres Element auf ein höheres folgt. Die punctirten Buchstaben sind hier die beyden Elemente der Auflösung (15. I. II.) Da hier 6 verschiedene Elemente zu versetzen sind, so geben diese $1.2.3....6 = 520$ verschiedene Versetzungen. Denkt man sich unter jenen Zahlen die Augen von 6 Würfeln, so beträgt die Summe der Augen in jeder Complexion 21; diese Summe kann daher mit 6 Würfeln auf 520 verschiedene Arten geworfen werden.

Wäre statt der Zahlen-Complexion 123456; die Buchstaben-Complexion, abcdef gegeben, so stehen die aufeinander folgende Versetzungen nach obiger Regel so:

$a\ b\ c\ d\ \dot{e}\ \dot{f}$

$a\ b\ c\ \dot{d}\ f\ \dot{e}$

$a\ b\ c\ e\ \dot{d}\ \dot{f}$

$a\ b\ c\ \dot{e}\ \dot{f}\ d$

$a\ b\ c\ f\ \dot{d}\ \dot{e}$

$a\ b\ c\ \dot{f}\ e\ \dot{d}$

u. s. w.

Obgleich die Buchstaben-Complexionen, ganz wie die Zahlen-Complexionen behandelt werden, so wird doch fast ein jeder die Behandlung der Zahlen leichter finden, weil man das kleinere und nächst größere, überhaupt die ihrer Größe nach auf einander folgende Elemente, bey Zahlen weit geschwinder als bey Buchstaben übersieht. Ich würde also hier, immer lieber gleich Anfangs, statt der vorgegebenen Buchstaben-Complexion, die nach dem Zeiger ihr entsprechende Zahlen-Complexion wählen, daraus die gesuchten Complexionen schaffen, und nachher wenn es nöthig ist, alles in Buchstaben übersetzen. — Wenigstens ist dieses bey Complexionen welche aus viele Elemente bestehen nöthig.

2tes Beyspiel. Nach jener Regel (15) findet man auch die Versetzungen von 11222 worin nicht alle Elemente verschieden sind nach der Ordnung.

$1\dot{1}\dot{2}22$	$122\dot{1}\dot{2}$	$21\dot{1}\dot{2}1$	$2\dot{1}\dot{2}21$	$22\dot{1}\dot{2}1$
$12\dot{1}\dot{2}2$	$\dot{1}\dot{2}221$	$212\dot{1}\dot{2}$	$221\dot{1}\dot{2}$	22211

Anmerkung.

Die Auflösung (15) hat Hr. Hindenburg zuerst 1784 in seiner Vorrede zu Rudig. Specim. anal. de lin. curv. sec. ord. p. XLVI, XLVII. beschrieben. Hier werden immer Complexionen aus Complexionen abgeleitet, jede nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden, und umgekehrt, kann man auch z. B. aus der Complexion 22211, sogleich die nächstfolgende niedere 22121 herleiten; aus dieses wiederdie nächst niedere u. s. f. (zum Unterschiede punctire ich hier unterwärts). — Das Verfahren ist hier also dependent, aber ganz allgemein und hat etwas Absolutes. Es ist um so mehr zu empfehlen, da es die wenigsten Data erfordert, und man von jeder gegebenen Complexion, außer der Ordnung, sogleich weiter fortgehen kann.

Bey den Versetzungen ist dieses Verfahren rein combinatorisch. Das ist aber nicht immer der Fall bey andern Operationen, wo man dadurch zuweilen auf arithmetische Summen oder Ergänzungen geführt wird, die für Buchstaben-Complexionen nicht immer (wenigstens nicht so unmittelbar) die Bequemlichkeit haben, wie für Zahlencomplexionen.

Es soll daher hier eine 2te Auflösung gegeben werden, bey welcher Ordnungen aus Ordnungen, nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden, gefolgert werden; ein Verfahren, das sich durchgängig, auch bey den übrigen hier aufzuführenden Operationen, rein combinatorisch beweisen wird, eben so leicht ist als jede andere Vorschrift zu

per-

permutiren, aber in der Anwendung und in ihren Folgen nützlicher als alle übrigen.

17.

Zweite Auflösung. Der Gang des Verfahrens bey folgenden bestimmten Fall ist wie man sogleich wahrnimmt allgemein (Inf. Dignit. p. 78. not.) In der Auflösung, werden hier immer nur die Buchstaben genannt werden, weil man sich die entsprechenden Zahlen leicht denken kann.

Gegebene Elemente

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, \\ a, & b, & c, & d, \end{pmatrix}$$

1234	abcd	2134	bacd	3124	cabd	4	1 2 3	d	a b c
1243	abdc	2143	badc	3142	cadb	4	1 3 2	d	a c b
1324	acbd	2314	bcad	3214	cbad	4	2 1 3	d	b a c
1342	acdb	2341	bcda	3241	cbda	4	2 3 1	d	b c a
1423	adbc	2413	bdac	3412	cdab	4	3 1 2	d	c a b
1432	adcb	2431	bdca	3421	cdba	4	3 2 1	d	c b a

I. Man setze, wie hier zur Seite, das Element d als einzelnes Ding

1	2	3	4	a	b	c	d
1	2	4	3	a	b	d	c
1	3	2	4	a	c	b	d
1	3	4	2	a	c	d	b
1	4	2	3	a	d	b	c
1	4	3	2	a	d	c	b

II. Dem d setze man das nächst vorhergehende Element c vor; das giebt cd, die Ordnung c aus zwey Dingen c, d. Aus der Ordnung c findet man die fol-

folgende Ordnung d, wenn man c und d gegen einander umtauscht. Das giebt zusammen cd und dc, die beyden Versetzungen zweyer Dinge, c, d.

III. Den einzelnen Complexionen cd und dc in II setze man b vor. Das giebt die Ordnung b, aus welcher man die Ordnung c, und aus dieser wieder die Ordnung d findet, wenn man, im ersten Fall b, c mit c, b, im zweyten c, d mit d, c verwechselt, und die so abgeleiteten Complexionen unter einander schreibt. Das giebt zusammen bcd, bdc, cdb, dbc, dcb, die sechs Versetzungen von drey Dingen b, c, d.

IV. Den einzelnen Complexionen in III setze man a vor. Das giebt die Ordnung a von vier Dingen a, b, c, d. Aus der Ordnung a findet man die Ordnung b, und aus dieser die Ordnung c, und aus dieser die Ordnung d, durch successive Vertauschung der Buchstaben a,b mit b, a und b,c mit c,b und c,d mit d, c und dadurch alle 24 Versetzungen von 4 Dingen a,b,c,d wie oben stehen, wo aber die Ordnungen (nach IV) nicht unter, sondern neben einander gesetzt worden sind.

Eben so verfährt man bey mehr gegebenen Dingen und mehreren Ordnungen derselben. Zugleich erhellet, daß soviel verschiedene Ordnungen statt finden als Elemente gegeben sind, und daß jede Ordnung, gleich viel Complexionen hat, vorausgesetzt, daß alle Elemente verschieden sind, denn sonst hat die Ordnung desjenigen Elements, welches am öftersten in der Reihe der gegebenen vorkömmt, die meisten Complexionen.

18.

Das oben in 17 und neben II beygefügte Schema der Ordnung 4 und 1 oder d und a, zeigt durch die eingezogenen Winkel, daß diese Auflösung zu den involutorischen gehöre. Diese Involution für vier Dinge enthält nemlich zugleich folgende Evolutionen (besondere, niedrigere Involutionen) für ein Ding d oder a; für zwey Dinge c, d oder a, b; für drey Dinge b, c, d oder a, b, c.. Die Complexionen gehen hier unter sich wie wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikographisch; daher kann man auch folgende Regel der Versetzung von n Dingen geben.

„Man setze für n Dinge a, b, c, d, e, f... die Ziffern oder Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6... Schreibe die „niedrigste nzifrige Complexion 1 2 3 4 5 6...n und „alle gleichvielziffrigte successive höhere Complexionen, „nach der Ordnung, bis zur höchsten n...654321, „die sich aus den gegebenen Elementen (ohne eins „mehr als einmal zu setzen) schreiben lassen: so hat „man alle mögliche Versetzungen der gegebenen n Dingen in Ziffern, und dadurch auch in Buchstaben „(Nov. Syst. Perm. p. XVII. XVIII.)".

Daraus fließt, theils unmittelbar, theils durch eine leichte Folge:

α) Die Regel, folgende Complexionen aus unmittelbar vorhergehenden abzuleiten, wie dazu die erste Auflösung (15) Anweisung giebt.

β) Die Formel 1.2.3.4....n für die Anzahl der Versetzungen von verschiedenen Dingen,

γ) Die

γ) Die Beantwortung der Fragen: die wievielste eine gegebene Complexion. Z. B. 3412 oder cdab in dieser Ordnung sey, und wie eine durch ihre Ordnungszahl angegebene, z. B. die 19te Complexion aussehe?

Das alles läßt sich auf dem Wege der Involution leichter, als auf andern Wegen, finden und beantworten.

19.
Anmerkung.

Andere Regeln zu permutiren hat ehemals selbst Hr. Hindenburg in seinen Schriften gegeben. Herr Professor Klügel, giebt in der 1796 von Hindenburg herausgegebene Schrift der polynomische Lehrsatz, S. 53. ein anderes gleichfalls involutorisches Verfahren. — Herr Professor Burja giebt in seinen Algebraisten 1ster Theil Seite 6, 7, 8, u. 9, zweyerley Auflösungen, davon die erste die Complexionen gerade so wie unsere 2te Auflösung giebt — In Rosenthals Math. Encyklopädie, ist das Burjasche Verfahren abgeschrieben, ohne Herrn Burja zu erwähnen. — Mehrere Stellen der Burjaschen Werke und auch Werke von andern Mathematikern sind auf solche Art von Hr. Rosenthal benutzt worden. Herr Burja nennt die Permutationen, auch vollständige Verwechslungen, (combinaisons totales) die Anordnung die Michelsen im 2ten Theile seiner politischen Rechenkunst Seite 19. aufgestellt, giebt die Complexionen, auch wie hier, und so findet man dieses bey mehrere Schriftsteller, aber

keiner

keiner hat die Involutionen wahrgenommen — keiner hat so leichte zu befolgende Vorschriften gegeben — keiner hat so glückliche Anwendungen gemacht als Hindenburg.

Variationen überhaupt mit Wiederholungen. (Variationes ſimpliciter, admiſſis repetitionibus)

20.

Aufgabe. Gegebene Dinge oder Element

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g & \ldots \end{pmatrix}$$

zu variiren, oder auf alle mögliche Arten zu zwey, drey, vier u. ſ. w. in gut geordnete Claſſen zuſammenzuſtellen:

(α)

'A	a	b	c	d
	aa	ab	ac	ad
'B	ba	bb	bc	bd
	ca	cb	cc	cd
	da	db	dc	dd
	aaa	aab	aac	aad
	⸗	⸗	⸗	⸗
	ada	adb	adc	add
	baa	bab	bac	bad
	⸗	⸗	⸗	⸗
'C	bda	bdb	bdc	bdd
	caa	cab	cac	cad
	⸗	⸗	⸗	⸗
	cda	cdb	cdc	cdd
	daa	dab	dac	dad
	⸗	⸗	⸗	⸗
	dda	ddb	ddc	ddd
	aaaa	aaab	aaac	aaad
'D	u. s. w.			

(β)

	a	a	a	a
	a	a	a	b
	a	a	a	c
	a	a	b	a
u.	a	a	b	b
	a	a	b	c
	a	a	c	a
	a	a	c	b
	a	a	c	c
s.	a	b	a	a
	a	b	a	b
	a	b	a	c
	⸗		⸗	
	a	b	c	c
	a	c	a	a
	a	c	a	b
	⸗		⸗	
	a	c	c	c
w.	b	a	a	a
	b	a	a	b
	b	a	a	c
	u. s. w.			

Erste Auflösung. I. Die gegebenen Elemente a, b, c, d setze man, als einzelne Dinge (Uniones), in die erste Classe 'A.

II. Den einzelnen Unionen in 'A setze man erst a, dann b, dann c, dann d vor. Das giebt zusammen alle Binionen der zweyten Classe 'B.

III. Den einzelnen Binionen in 'B setze man wieder erst a, dann b, dann c, dann d vor. Das giebt zusammen alle Ternionen der dritten Classe 'C.

IV. Eben so erhält man, durch successives Vorsetzen der einzelnen Elemente a, b, c, d, vor alle Ternionen in 'C, die Quaternionen der vierten Classe 'D, vor alle Quaternionen in 'D, die Quinionen der fünften Classe 'E, u. s. w. alle übrige Variationscomplexionen der folgenden, aus den unmittelbar vorhergehenden, Classen.

Zweyte Auflösung. I. Die gegebenen einzelnen Elemente a, b, c, d (gleichsam als so viel einzelne Ordnungen) setze man in die erste Classe 'A.

II. Den Unionen in 'A setze man sämmtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a; aus welcher man durch Umtauschung des vorgesetzten a mit b, die Ordnung c; und daraus weiter, durch Umtauschung des vorgesetzten b mit c, die Ordnung c; und daraus weiter durch Umtauschung der vorgesetzten c mit d, die Ordnung d der Binionen der zweyten Classe 'B findet.

III. Den Binionen in 'B setze man sämmtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a der Ternionen, u. s. w. alle übrige Ordnungen derselben in der dritten Classe 'C, wenn man (wie in II.) statt der successive vorgesetzten a, b, c nun b, c, d setzt.

IV. Eben so erhält man, durch successives Vorsetzen und Austauschen der Anfangsbuchstaben a, b, c mit b, c, d der vierten, fünften und folgenden Classen, 'D 'E u. s. w. sämmtliche Ordnungen a, b, c, d jede nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden.

21.

Nach der ersten Auflösung (hier 20. und Nov. Syst. Perm. p. XXI.) werden Classen aus Classen, nach

nach der zweyten, Ordnungen von Ordnungen (und so mittelbar auch Classen) abgeleitet. beyde Verfahren sind hier rein-combinatorisch, auch gehen ihre Complexionen wie wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikographisch geordnet. In der Darstellung (20, β) ist ein Element (d) weniger als bey a genommen worden, um nicht die Colonne zu lang zu machen, des Fortgangsgesetz (für noch so viel Elemente) liegt dennoch klar und deutlich vor Augen.

22.

Die Auflösungen (20) der Aufgabe passen beyde auf die hier (20, α, β,) vorgelegten Schemata. Indessen sind beyde Darstellungen sehr von einander verschieden. In der ersten werden für jede einzelne Complexion die vorzusetzenden Elemente mit den übrigen immer ganz in die folgenden Classen hingeschrieben; in der andern werden, für die Complexionen der ersten Ordnung a, diese a den zugehörigen Complexionen der vorhergehenden Classe nur vor; die übrigen Ordnungen aber, ganz ausgeschrieben, darunter gesetzt. Das giebt eine große Verkürzung und zugleich eine Involution in aller Form. Sie stellt, eben so wie jene, Summen von Classen, aber auch einzelne Classen, außer der Ordnung dar, und zeigt beyder Zusammenhang durch die figurliche Anordnung mit eingezeichneten Winkeln.

23.

Die Variationscomplexionen in (20, α, und β) beziehen sich sämmtlich auf die einzige Reihe der gegebenen Dinge a, b, c, d.... von denen also in jeder Classe alle Combinationen mit allen Versetzungen zugleich vorkommen. Das wird durch

$$'A \dagger 'B \dagger 'C \dagger 'D \dagger 'E \ldots \dagger 'N \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, \ldots \end{pmatrix}$$

angegeben; durch Setzung nemlich der Classen, mit Beyfügung der einzelnen durch Variation zu verbindenden Elemente im Zeiger. Oder mit andern Worten. Jene symbolische Darstellung ist nichts anders als die Aufgabe in 20.

24.

Man kann aber auch, wenn mehrere Reihen von Elementen

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \ldots & \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g \ldots & = p \\ A, & B, & C, & D, & E, & F, & G \ldots & = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{e}, & \mathfrak{f}, & \mathfrak{g} \ldots & = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}, & \mathfrak{F}, & \mathfrak{G} \ldots & = s \end{array}\right\}$$

u. s. w. &c.

gegeben sind (wie hier zeigerförmig beysammenstehen) die Auflösungen (20) ohne alle Schwierigkeit sogleich dahin modificiren, daß jede einzelne Complexion ein Ding dieser Reihen enthält: die Unionen aus p, die Binionen aus q,p, die Ternionen aus r,q,p, die Quaternionen aus s,r,q,p u. s. w. für Variationscomplexionen folgender Classen und mehrerer Elementenreihen. Man darf nur den Elementen a,b,c... die letzte Stelle in den Complexionen die sie (in 20. α,β) schon haben, lassen, in die zweyte Stelle aber A,B,C... und

und in die dritte 𝔞,𝔟,𝔠... und in die vierte 𝔄,𝔅,ℭ... u. s. w. bey Complexionen von mehrern Stellen, setzen, oder, während der Auflösung und Darstellung selbst, zum Vorsetzen und Umtauschen, unmittelbar gebrauchen. Das ändert, wie man sieht, nichts in den Vorschriften der Auflösungen (20) weil man eben so leicht A,B,C... und 𝔞,𝔟,𝔠... und 𝔄,𝔅,ℭ... u. s. w. als a,b,c... vorsetzen und umtauschen kann.

25.

Auf diese Art erhält man

(α)

$\overset{\nu}{{}'A}$	a	b	c	d
	Aa	Ab	Ac	Ad
	Ba	Bb	Bc	Bd
$\overset{qp}{{}'B}$	Ca	Cb	Cc	Cd
	Da	Db	Dc	Dd
	𝔞Aa	𝔞Ab	𝔞Ac	𝔞Ad
	⸗	𝔢	⸗	⸗
	𝔞Da	𝔞Db	𝔞Dc	𝔞Dd
	𝔟Aa	𝔟Ab	𝔟Ac	𝔟Ad
	⸗	⸗	⸗	⸗
	𝔟Da	𝔟Db	𝔟Dc	𝔟Dd
	𝔠Aa	𝔠Ab	𝔠Ac	𝔠Ad
	⸗	⸗	⸗	⸗
$\overset{rqp}{{}'C}$	𝔠Da	𝔠Db	𝔠Dc	𝔠Dd
	𝔡Aa	𝔡Ab	𝔡Ac	𝔡Ad
	⸗	⸗	⸗	⸗
	𝔡Da	𝔡Db	𝔡Dc	𝔡Dd
$\overset{srqp}{{}'D}$	𝔄𝔞Aa	𝔄𝔞Ab	𝔄𝔞Ac	𝔄𝔞Ad

u. s. w.

(β)

	𝔄	𝔞	A	a
	𝔄	𝔞	A	b
u.	𝔄	𝔞	A	c
	𝔄	𝔞	B	a
	𝔄	𝔞	B	b
	𝔄	𝔞	B	c
	𝔄	𝔞	C	a
s.	𝔄	𝔞	C	b
	𝔄	𝔞	C	c
	𝔄	𝔟	A	a
	𝔄	𝔟	A	b
	𝔄	𝔟	A	c
	⸗		⸗	
w.	𝔄	𝔟	C	c
	𝔄	𝔠	A	a
	𝔄	𝔠	A	b
	⸗		⸗	
	𝔄	𝔠	C	c
	𝔅	. 𝔞	A	a
	𝔅	. 𝔞	A	b

u. s. w.

und

und so kommen hier immer die Elemente jeder Reihe gegebener Dinge in eine bestimmte Verticalreihe zu stehen; die Elemente von p in die erste, die von q in die zweyte, die von r in die dritte, die von s in die vierte u. s. w. von der Rechten nach der Linken. Damit man nun gleich sieht, auf welche Reihen sich jedes Classenzeichen beziehet und in welcher Ordnung: so findet man hier die Reihenexponenten p, q, r, s ... (24) in bestimmter Ordnung gleich über die Classenbuchstaben gesetzt.

26.

Herr Hindenburg hat von diesen so angeordneten Complexionen aus den Elementen mehrerer Reihen, sehr häufigen Gebrauch in der Anwendung gemacht. Dahin gehören die Tafeln (Infi. Dign. p. 172. 177 seq. und Nov. Syst. Perm. LX. und LXI. seq.) Die Zahlen in den dortigen Zahlencomplexionen sind wirklich variirt, d. i. auf alle mögliche Art combinirt und permutirt. Die Anwendung aber auf mehrere Buchstabenreihen wie hier in (24, 25) giebt bloß Combinationen der Elemente dieser Reihen.

27.

Variationen sind unter allen combinatorischen Arbeiten die leichtesten; in meiner Ausg. von Eulers Alg. 1 Th. S. 201. findet man von mir eine andere Methode gegebene Dinge zu variiren. Herr Burja nennt die Variationen, weitläuftige Verwechselungen (combinaisons vagues); (Algebraisten 1 Th. S. 136).

Eine

Eine sehr sinnreiche Bemerkung des Herrn Professor Hindenburg, ist auch diese, daß die Regeln zum Variiren, und daher auch zum Combiniren und Permutiren, keine anderen sind, als die allgemeinen Gesetze, nach denen der Verstand z ä h l t. Denn wenn man z. B. in der Dekadik von 0 bis 9 zählt, so braucht man dazu zehn e i n z e l n e Ziffern. Zählt man nochmals von vorne aber zweyzifrig, nemlich 00,01,02,... 09,10,11..99, so hat man alle Variationsamben von zehn Ziffern gemacht. Zählt man nochmals von vorne aber dreizifrig, nemlich 000,001, 002,... 009,010,011,012... 099,100,101,102...999 so hat man alle Variationsternen von jenen zehn Zifern formiret, u. s. f. Hierher gehören auch die nützlichen Bemerkungen von

Zahlensysteme in und umeinander; Fortschreitungsgesetz für Zahlen.

28.

Dyadische System.

	0	1
0	00	01
	10	11
1	00	01
	10	11
10	00	01
	10	11
11	00	01
	10	11
100	00	01
	10	11
	ꝛc.	ꝛc.

Triadische System.

	0	1	2
0	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
1	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
2	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Tetradische System.

	0	1	2	3
0	00	01	02	03
	10	11	12	13
	20	21	22	23
	30	31	32	33
1	00	01	02	03
	10	11	12	13
	20	21	22	23
	30	31	32	33
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Dode=

Dodekadisches System.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z	e	
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0z	0e	ꝛc.
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1z	1e	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2z	2e	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	3z	3e	
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	4z	4e	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	5z	5e	ꝛc.
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	6z	6e	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	7z	7e	
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	8z	8e	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	9z	9e	
z0	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	zz	ze	
e0	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	ez	ee	ꝛc.
ꝛc.					ꝛc.						ꝛc.	

Diese figürlichen sämmtlichen combinatorischen Anordnungen zeigen zweyzifrige Gesetze, für das dyadische System im ersten, für das triadische im zweyten, für das tetradische im dritten und für das Duodecimalsystem im vierten Parallelogramme, mit den überschriebenen Zifern 0, 1, 3, 4, 5, 6.... als einfachen Grundzeichen. Durch die bey den 3 ersten Parallelogrammen, zur Seite beygeschriebenen 0, 1, 2, 3.... wird die Fortschreitung der Zahlen in jedem System nach der Ordnung, deutlich nachgewiesen.

Insbesondere gehört hieher das vierte Parallelogram, in Form eines Quadrats, mit den überschriebenen Grundzeichen 0, 1, 2, 3....9, z, e (z und e, sind angenommen 11te und 12te Grundzeichen) des zwölftheiligen Zahlengebäudes, in welchem zugleich

zugleich alle *kleinere*, von weniger als 12 Grundzeichen, enthalten sind und deutlich vor Augen liegen, so wie alle *größere*, von mehr als 12 Grundzeichen, daraus sogleich hergestellt werden können. Das zweyzifrige Gesetz von zwey Grundzeichen $\begin{array}{cc}10 & 11\\ 00 & 01\end{array}$ liegt oben linker Hand; daraus entsteht, durch Anlegung des Winkels oder Gnomons $\begin{array}{ccc} & & 02\\ & & \vdots\\ 20 & \cdots & 22\end{array}$ das zweyzifrige Gesetz von drey Grundzeichen $\begin{array}{ccc}00 & \cdots & 02\\ \vdots & & \vdots\\ 20 & \cdots & 22\end{array}$ und daraus, durch Anlegung des Winkels oder Gnomons $\begin{array}{ccc} & & 03\\ & & \vdots\\ 30 & \cdots & 33\end{array}$ das zweyzifrige Gesetz von vier Grundzeichen $\begin{array}{ccc}00 & \cdots & 03\\ \vdots & & \vdots\\ 30 & \cdots & 33\end{array}$ u. s. w. Die Gesetze von 5, 6.... bis auf 12 Grundzeichen, für das dodekadische System, welches hier vollständig dargestellt ist. Aus dem dodekadischen, findet man, durch Abnehmung eines Winkels $\begin{array}{ccc} & & 0e\\ & & \vdots\\ e0 & \cdots & ee\end{array}$, das zweyzifrige Gesetz für das *hendekadische* (11zifrige) Zahlengebäude. Aber durch Anlegung eines neuen Winkels oder Gnomons, würde man, für ein angenommenes 13tes Grundzeichen, das zweyziffrige Gesetz für das dreyzehntheilige Zahlengebäude erhalten u. s. w. für *mehrere* Grundzeichen und Zahlensysteme.

29.

Diese figürliche Darstellung der Zahlensysteme in und umeinander, zeigt also eine wahre Involution. Auch hat Herr Hindenburg diese Erscheinung zuerst bey den Untersuchungen über die Zahlengebäude wahrgenommen; diese und ähnliche Anordnungen (in quadratischen, rectangulären, triangulären, polygonischen, regulären und irregulären, Formen), hat er bey seinen Untersuchungen über die mechanische Fortschreitung der Zahlen, bey verlangter Zahlen-Aufsuchung durch Abzählen nach Fächern oder deren Abmessung nach vorgeschriebenen Distanzen *) vielfältig benutzt; den Vortheil, den sie auch in der Combinationslehre gewähren können, erkannt, und solchen über die gesammte Wissenschaft erstreckt. um so mehr, da aus dergleichen Darstellungen, die Gesetze der Fortschreitung der Zahlen, nach jedem Systeme, in der Ordnung und sprungweise, sogleich in die Augen fallen, die er dann zum Grunde seiner neuen Combinationslehre gelegt hat, bey welcher gut geordnete Complexionen und Classen wie Zahlen wachsen oder abnehmen. Nov. Syst. Perm. IX. 25. 26.

30.

Der Erfolg davon war in der That außerordentlich. Denn nun erschien die Combinationslehre auf

*) Hindenburgs Beschreibung einer neuen Art Zahlen durch Abzählen oder Abmessen zu finden. Leipz. bey Crusius 1776 mit Kupf. und Beylagen. gr. 8.

auf einmal in der ursprünglichen Simplicität, die ihr als selbständiger Grundwissenschaft zukommt, aus welcher die Arithmetik und Analysis hervorgehen. Die Regeln der so einfachen combinatorischen Operationen ließen sich nun sehr kurz abfassen, und waren äußerst leicht, leichter als die schon zusammengesetztern arithmetischen Operationen, die nur bedingte combinatorische sind. Bey jenen nemlich beruht alles auf bloßer Zusammenstellung, Ordnung und Versetzung der Elemente zu Complexionen; bey diesen hingegen muß zugleich mit auf derselben besondere Werthe, Lagen und Beziehungen, wie sie als Zahlen auf und in einander wirken sollen, Rücksicht genommen werden. Was endlich über alles wichtig ist, die ausgedehnteste Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis war nun eine natürliche und nothwendige Folge einer solchen Umänderung, und zog die Erfindung bequemer combinatorischer und anderer harmonirender Zeichen (Nov. Syst. Perm. p. XXXII, — XLIX.) herbey, die gleich geschickt sind, die, größtentheils neuen, combinatorischen, einfachen und zusammengesetzten, Begriffe (Ebend. p. IV.—XV.) kurz und deutlich darzustellen, und zu Lokal- und combinatorisch-analytischen Formeln sich anordnen zu lassen.

Hierbey ward die Einführung
des Zeigers (index, indiculus)

$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ a, & b, & c, & d\ldots \end{pmatrix}$; oder $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ b, & c, & d, & e\ldots \end{pmatrix}$; 2c.

unent-

unentbehrlich; die simpelste Nachweisung, die man sich denken kann.

Die von Hindenburg (Inf. Dign. und Nov. Syst. Perm.) angewiesenen und mannigfaltig benutzten Vorschriften gegebene Dinge

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots \end{pmatrix}$$

zu permutiren, combiniren und variiren, führen auf dergleichen Involutionen, wovon oben schon Proben gegeben sind, und weiter hin etwas näher erwogen werden sollen.

31.

Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen.

(Combinationes simpliciter, admissis repetitionibus).

Aufgabe.

Gegebene Dinge oder Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

zu combiniren, oder, nach zwey, drey, vier u. s. w. verbunden, in gut geordneten Complexionen und Classen darzustellen.

(α)

(α)

'A	b	b	c	d
	aa	ab	ac	ad
		bb	bc	bd
'B			cc	cd;
				dd
	aaa	aab	aac	aad
		abb	abc	abd
			acc	acd
				add
'C		bbb	bbc	bbd
			bcc	bcd
				bdd
			ccc	ccd
				cdd
				ddd
	aaaa	aaab	aaac	aaad
'D		u. s. w.		

(β)

	a	a	a	a	a
	a	a	a	a	b
u.	a	a	a	a	c
	a	a	a	b	b
	a	a	a	b	c
	a	a	a	c	c
	a	a	b	b	b
	a	a	b	b	c
s.	a	a	b	c	c
	a	a	c	c	c
	a	b	b	b	b
	a	b	b	b	c
	a	b	b	c	c
	a	b	c	c	c
	a	c	c	c	c
w.	b	b	b	b	b
	b	b	b	b	c
	b	b	b	c	c
			u. s. w.		

32.

Erste Auflösung. I. Die gegebenen Elemente setze man als einzelne Dinge (Uniones) in die erste Classe 'A.

II. Der Union a (in 'A) und allen folgenden, setze man a; dann der Union b und allen folgenden, c; u. s. w. vor. Das giebt zusammen die Binionen der zweyten Combinationsclasse 'B.

III. Den Binionen in 'B der Ordnung a und aller folgenden, setze man a; denen der Ordnung b und aller

aller folgenden, setze man b; denen der Ordnung c und aller folgenden, setze man c; u. s. w. vor. Das giebt zusammen die Ternionen der dritten Combinationsclasse 'C.

IV. Eben so findet man, durch successives Vorsetzen der einzelnen Elemente a,b,c.... (immer von den Complexionen der Ordnung anfangend, die mit dem vorzuschreibenden Buchstaben gleichnamig ist) die Combinationsclassen 'D, 'E u. s. w. jede folgende aus der nächst vorhergehenden, also die nte Classe aus der (n — 1)ten.

33.

Zweyte Auflösung. I. Die gegebenen einzelnen Elemente (gleichsam als so viel einzelne Ordnungen) setze man in die erste Classe 'A.

II. Den Unionen in 'A setze man sämmtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a; aus welcher man, durch Umtauschung des vorgesetzten a mit b (von der Binion an, wo zuerst zwey verschiedene Elemente vorkommen) die Ordnung b; und aus dieser, durch Umtauschung des vorgesetzten b mit c (von der Binion an, wo zuerst zwey verschiedene Elemente vorkommen) die Ordnung c; und daraus eben so die Ordnung d; u. s. w. der Binionen der zweyten Classe 'B findet.

III. Eben so findet man:

1) Die Ordnung a der dritten, vierten.... überhaupt der nten Classe, wenn man den sämmtlichen Complexionen der (n — 1)ten Classe, a vorsetzt;

2) Die

2) Die Ordnungen b,c,d... der nten Classe, aus den Ordnungen a,b,c... derselben Classe, wenn man in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnungen (von da an, wo zuerst die beyden Anfangsbuchstaben nicht einerley sondern verschieden sind) in die Stelle des ersten dieser beyden Anfangsbuchstaben den nächstfolgenden Ordnungsbuchstaben setzt.

34.

Die Auflösung (32) für die Combinationen ist von der ersten Aufl. für die Variationen (20) bloß darin unterschieden, daß die Buchstaben b,c,d... hier nicht (wie dort) allen Complexionen der vorhergehenden Classen für die folgenden vorgesetzt werden. Die Auflösung (33) ist mit der zweyten Aufl. (in 20) was die Bestimmung der Ordnung a in jeder Classe anbetrift, vollkommen einerley, und weicht nur bey den übrigen Ordnungen ab, bey denen nicht alle Complexionen der vorhergehenden gebraucht werden. Beyde Auflö-nachdem man die figürliche Anordnung bey ihnen so oder anders (22) trift, führen auf die Darstellungen (31, α,β)

35.

Die Auflösung (32) hat Hindenburg (Nov. Syst. Perm. p. XIX. 10.) aus einer noch allgemeinern ausgedrückten (Ebend. 8.) abgeleitet. Die Darstellungen (31, α, β) gehen übrigens wie jene der Variationen (20) wie wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikoxikographisch geordnet (Arch. der Math. H. II. S. 178. Note).

36.

Das Gesetz der Combination, und die Fortschreitung bey mehrerern Dingen und mehreren Classen, fällt, so wie die Involution selbst bey β und wie sie (in 31 bey α hier nicht gezogene) vertikale Linien, neben den Endelementen a,b,c,d.... sich zeigt deutlich in die Augen. Diese Darstellungen, geben Veranlassung zu mannigfaltigen Beobachtungen und Folgerungen, in Beziehung auf Anfangs- und Endzifern, horizontal und vertikal fortschreitende Complexionen, Entwickelung folgender Classen aus vorhergehenden, folgender Complexionen aus vorhergehenden, in horizontaler und vertikaler Lage, Anzahl der Complexionen überhaupt und für jede Classe ins besondere, für jede beliebige Menge gegebener Dinge u. s. w. (Infin. Dign. p. 19 — 22). Herr Burja findet nach seiner Regel (Alg. 1 Thl. S. 137. §. 23.) alles vollkommen so wie hier (31, α) bey ihm heißen diese Art von Combinationen, mittlere Verwechselungen (combinaisons neutres).

Variationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

(Variationes numeri propositi, admissis repetitionibus)

37.
Aufgabe.

Die Variationen zu bestimmten Summen, aus den Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

in gut geordneten Classen darzustellen.

Classen Complex. für ^5J

^5A	e
^5B	ad
	bc
	cb
	da
^5C	aac
	abb
	aca
	bab
	bba
	caa
^5D	aaab
	aaba
	abaa
	baaa
^5E	aaaaa

Lexikogr. Complex. für $^5\mathfrak{J}$

$^5\mathfrak{A}$ u. s. f.	a	a	a	a	a	
	a	a	a	b		
	a	a	b	a		
	a	a	c			
	a	b	a	a		
	a	b	b			
	a	c	a			
	a	d				
$^5\mathfrak{B}$	b	a	a	a		
	b	a	b			
	b	b	a			
	b	c				
$^5\mathfrak{C}$	c	a	a			
	c	b				
$^5\mathfrak{D}$ w.	d	a				
$^5\mathfrak{E}$	e					

38.

Auflösung für ${}^5J = {}^5A + {}^5B + {}^5C + {}^5D + {}^5E$

I. Das 5te Element e setze man, als einzelnes Ding, in die erste Classe ${}^5A$.

II. Die Complexionen der zweyten und aller folgenden Classen bestimme man nach ihren Ordnungen:

1) Die Ordnung a der nten Classe zu finden, setze man jeder Complexion der (n — 1)ten Classe a vor, und vertausche den letzten Buchstaben der Complexion mit dem nächst vorhergehenden des Zeigers, mit Uebergehung derer, die sich mit a endigen. *)

2) Die so gefundene Ordnung a giebt die Ordnung b, diese die Ordnung c, u. s. w. derselben nten Classe, wenn man successive in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnung, mit Uebergehung derer, die sich mit a endigen, den **ersten** Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden des Zeigers, den letzten hingegen mit dem nächst vorhergehenden vertauscht.

III. So findet man aus e in ${}^5A$ (nach II, 1) ad, und daraus (II, 2) bc, und daraus cb, und daraus da, die Ordnungen der zweyten Classe, deren jede hier nur aus einer Complexion besteht. Eben so ergeben sich die Ordnungen mit ihren Complexionen der dritten, und übrigen Classen.

*) Ich habe hinzugesetzt **mit Uebergehung derer, die sich mit a endigen.** Hindenburg hat dieses wahrscheinlich ausgelassen, weil bey einer solchen Complexion es für den letzten Buchstaben kein nächstvorhergehender zu vertauschen giebt. (**Der polynomische Lehrsatz.** S. 177. 34).

39.

Die Auflösung (38) ist einerlei mit der (S.258.) nur daß hier noch die letzten Buchstaben der Complexion verändert werden, welches dort nicht nöthig war; (auch werden dort keine übergangen) *). Man hätte auch die Elemente a, b, c... den Complexionen nach (S.257.) vorsetzen, und die zugehörige Umtauschung des letzten Elements vornehmen können. Dadurch aber würde die Auflösung an Simplicität und Leichtigkeit etwas verlohren haben, dieselbe auch nicht rein combinatorisch, wie die hier (38) aufgeführte, geblieben seyn.

40.

Auflösung für

$${}^5\mathfrak{J} = {}^5\mathfrak{A} + {}^5\mathfrak{B} + {}^5\mathfrak{C} + {}^3\mathfrak{D} + {}^5\mathfrak{E}$$

Die Complexionen zur Summe n werden hier aus denen zur Summe (n — 1) auf folgende Art abgeleitet.

1. Man setze allen einzelnen Complexionen der Summe (n—1), das erste Element derselben mit dem nächstfolgenden des Zeigers, und schreibe jede Complexion, die diese Vertauschung giebt, in ihrer Ord-

*) Bey einer Wissenschaft die so neu als diese ist, muß jeder der nicht Erfinder davon ist, sich mit aller Behutsamkeit ausdrücken — ich habe mich daher immer genau an die Worte und Ausdrücke des Erfinders gehalten, der die Sache gewiß besser als jeder andere übersieht — ich halte es daher für Pflicht hier anzuzeigen, daß ich was in Clammern steht zugesetzt habe, da es mir noch einen charakteristischen Unterschied dünkte.

nung, unter die Complexionen die I schon vorhergegeben hat.

41.

Da bey den Buchstabencomplexionen zu bestimmten Summen, diese Summen sich auf die Ordnungszahlen beziehen, wie sie im Index oder Zeiger, (37) über den Buchstaben stehen: so erhellet deutlich, daß wenn man das Element a (oder 1) im ersten Winkel (37) setzt, man, nach dem obigen Verfahren (I, II) von da auf die Summe 2, und von dieser auf die Summe 3, u. s. w. auf die Summen 4, 5 ... n successive fortschreitet. Diese involutorische Succession, nach welcher man vorhergehende und folgende Werthe in und um einander schreibt, ist gleichwohl mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig (Arch. der Math. H. III. S. 324, c.) und so schreibt man nach ihr Summen von Classen eben so leicht als einzelne Classen, und umgekehrt, oder vielmehr, eins ist mit dem andern zugleich gegeben und innigst verbunden.

42.

Damit man den Unterschied zwischen rein und nicht rein combinatorisches Verfahren deutlich einsehen mag, so will ich hier noch folgende Auflösung von der Aufgabe (38) mittheilen.

Aufgabe I). Aus einer gegebenen Variationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben.

Auflösung I). Ist die letzte oder niedrigste Ziffer der gegebenen Complexion größer als 1, so ziehe

ziehe man 1 von ihr ab und addire 1 zur folgenden Ziffer. Die beyden so veränderten Ziffern in ihren Stellen, mit den übrigen, sämmtlich unveränderten, geben zusammen die verlangte nächst höhere Complexion.

So folgen 1114
1123
1132
1141 auf einander

2) Ist die letzte Ziffer der gegebenen Complexion 1, oder sind mehrere Ziffern derselben nebst der letzten, hintereinander 1, daß also die Complexion sich mit 1 oder 11 oder 111 oder 1111 u. s. w. endiget: so erhöhe man die nächste zweyte Ziffer von der 1 in der höchsten Stelle, vorwärts, lasse die Ziffern neben der erhöheten linker Hand (wenn es noch dergleichen giebt) unverändert, in die Stellen aber rechter Hand derselben setze man durchgehends 1, bis in die letzte Stelle, in die man das Complement zur gegebenen Summe setzt, das auch 1 seyn kann.

Auf 1141; auf 12311; auf 512111
folgt 1213; folgt 13112; folgt 521111
u. daraus 611111

3) Giebt es aber keine nächste zweyte Ziffer vorwärts von der 1, (wie sie 2 bestimmt) so ist die gegebene Complexion die letzte ihrer Classe.

So ist in 611111 die Ziffer 6, die erste nach 1, zugleich die in der höchsten Stelle, nach welcher es also

also keine höhere, und folglich auch keine zweyte Ziffer vorwärts von 1 geben kann. Die gegebene Complexion 611111 ist also die höchste und letzte ihrer Classe.

Zusatz. Die erste und niedrigste Complexion einer Classe, z. B. der Classe k zur Summe n, findet man, wenn man (k — 1) Einheiten neben einander schreibt und in die letzte oder niedrigste Stelle das Complement $n - (k - 1) = n + 1 - k$ zur Summe n setzt. Für $k = n$ ist dies Complement selbst 1, und es giebt nur eine, aus lauter Einsen bestehende Complexion dieser Classe, die zugleich die letzte Classe von allen ist.

Daraus fließt unmittelbar folgende

Aufgabe II. Alle Complexionen zur Summe n einer verlangten Variationsclasse k, gutgeordnet zu schreiben.

Auflösung 1). Man schreibe (nach vorigem Zusatze) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die höheren Complexionen folgere man durch Anwendung (von 1 und 2) der Auflösung der vorigen Aufgabe I. bis man (nach 3) auf die höchste und letzte Complexion derselben Classe verfällt.

Anmerkung. Jede der beyden Vorschriften 1 und 2 der Aufgabe I. läßt sich für die Aufgabe II. oft mehrmal hintereinander anwenden, so lange nämlich die in 1 und 2 festgesetzten Bedingungen vorhanden sind. Auch dadurch wird die an sich leichte Darstellung noch mehr erleichtert, welches bey großen Zahlen, wo der Fall häufiger vorkommt, um so angenehmer ist.

Bey-

Beyspiel. Für n = 7 und k = 5. Oder: die Variationscomplexionen für

$$\overset{5}{E}\,(1\;2\;3\;4\;\ldots)$$ zu schreiben.

Diese sind, nach obigem Verfahren

$111\dot{1}\dot{3}$	$1\dot{1}3\dot{1}1$	$211\dot{1}\dot{2}$
$111\dot{2}\dot{2}$	$121\dot{1}\dot{2}$	$21\dot{1}2\dot{1}$
$11\dot{1}3\dot{1}$	$12\dot{1}2\dot{1}$	$2\dot{1}2\dot{1}1$
$112\dot{1}\dot{2}$	$1\dot{2}2\dot{1}1$	$\dot{2}2\dot{1}11$
$11\dot{2}2\dot{1}$	$\dot{1}3\dot{1}11$	$3\dot{1}111$

Anmerkung. Hier ist $3\dot{1}111$ die letzte und höchste Complexion der 5ten Classe zur Summe weil es hier keine zweyte Ziffer nach der (hier punktirten) höchsten $\dot{1}$ giebt. (Aufg. I. 3.) Würde man aber statt $3\dot{1}111$ schreiben $03\dot{1}111$, so könnte man die Regel (2) wieder anwenden, und fände so 111112, die erste und niedrigste Complexion der folgenden 6ten Classe, aus der letzten und höchsten Complexion der unmittelbar vorhergehenden 5ten Classe; aus welcher man, wie vorher, die folgenden derselben Classe weiter ableiten kann.

Einen solchen Uebergang nennt Herr Hindenburg deductionem ex Classe in Classem. Er findet auch, in seiner Art, bey der in natürlicher Ordnung, nach welchem Zahlensystem man will, geschriebenen Zahlenreihe statt, wenn man von mziffrigen Zahlen zu den (m+1)ziffrigen fortschreitet.

So

So giebt z. B. im dekadischen System die höchste mziffrige Zahl $9\overset{m-1}{99\ldots}$ wenn man dafür schreibt $\overset{m}{0999\ldots}$ die kleinste (m+1)ziffrige Zahl $\overset{m}{1000\ldots}$

43.

Von diesem Variationsproblem zu bestimmten Summen (37) stehet Hindenburgs erste Auflösung (Infinit. Dign. p. 129 — 135.) für Summen von Classen, so wie für einzelne Classen. Die zweyte Auflösung von Hindenburg habe ich hier nach Herrn Mag. Töpfer (Comb. Anal. S. 77 — 80) in (42) mitgetheilt. Beyde sind leicht und ganz allgemein, aber nicht rein combinatorisch, wie die hier (38,40) beschriebenen von denen Hindenburg die letztere zuerst in seinem Programm Terminorum ab infinitinomii dignitatibus Coefficientes Moivraeanos sequi ordinem lexicographicum, ostenditur. p. IV, 2. und im Arch. der Math. (H. IV. S. 393, A) in Zahlencomplexionen aufgeführt hat. Von diesen vier ganz verschiedenen Verfahren geben, das erste Classen aus Classen, das zweyte Complexionen aus Complexionen, das dritte Ordnungen aus Ordnungen, das vierte Summenwerthe aus Summenwerthen; durchgängig nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden. Die nähere Betrachtung der combinatorischen Operationen besonders der Involutionen, führt diese Unterschiede von selbst herbey. Man vergleiche Arch. der Math. H. II. S. 183, 18, I.

44.

Die Variationen zu bestimmten Summen, die ich bisher nur auf eine Reihe a,b,c,d... (37) bezogen habe, können eben so, wie jene (an sich oder überhaupt, simpliciter) auf mehrere Reihen (24,26) bezogen werden; auch hat Hindenburg davon (Infin. Dign. §. XXVII. p. 127 — 145 und Nov. Syst. Perm. p. LXX. seq.) häufig Gebrauch gemacht, und solches bey den Classenzeichen sowohl, als bey der darstellenden Entwickelung nachgewiesen. Wählt man für die mehrern Reihen p,q,r,s den Zeiger, wie in (24), wozu ich itzt nicht die Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots = t$ fügen will: so stehen, für die Summe 5 oder $^{5}\mathfrak{J}$ (37) die Zahlen- und Buchstabencomplexionen nebst ihren Classenzeichen und den überschriebenen Reihenexponenten p, q, r, s, t, wie folget:

p		p
q 5	${}^5\overset{p}{A}$	q e
14		Ad
23	${}^5\overset{qp}{B}$	Bc
32		Cb
r 41		r Da
113		aAc
122		aBb
131	${}^5\overset{rqp}{C}$	aCa
212		bAb
221		bBa
s 311		s cAa
1112	${}^5\overset{srqp}{D}$	𝔄aAb
1121		𝔄aBa
1211		𝔄bAa
t 2111		t 𝔅aAa
11111	${}^5\overset{tsrqp}{E}$	a𝔄aAa

Zuweilen sind auch einige der Reihen p,q,r,s,t..... Glied für Glied einander gleich. Wäre z. B. $p=q$; $s=t$;.... so käme hier:

$$ {}^5\mathfrak{J} = {}^5\overset{p}{A} + {}^5\overset{p^2}{B} + {}^5\overset{rp^2}{C} + {}^5\overset{srp^2}{D} + {}^5\overset{srp^2}{E} $$

45.

Für eben die Reihen p,q,r,s,t (44), eben so gebraucht, aber auf ${}^5\mathfrak{J}$ (in 37) angewendet, fände man die Zahlen- und Buchstabencomplexionen, wie folget:

1	1	1	1	1
1	1	1	2	
1	1	2	1	
1	1	3		
1	2	1	1	
1	2	2		
1	3	1		
1	4			
2	1	1	1	
2	1	2		
2	2	1		
2	3			
3	1	1		
4	1			
5				

α	𝔄	a	A	a
α	𝔄	a	b	
α	𝔄	B	a	
α	𝔄	c		
α	b	A	a	
α	𝔅	b		
α	C	a		
α	d			
𝔅	a	A	a	
𝔅	a	b		
𝔅	B	a		
B	c			
c	A	a		
c	b			
D	a			
e				

Hier stehen nemlich in der ersten Buchstabencomplexion die Anfangsbuchstaben der Alphabete für die Reihen ... t,s,r,q,p, in ihrer Ordnung; jeder (nach 40,I) vorzuschreibende erste Buchstabe, wird aus dem nächstfolgenden, noch nicht gebrauchten, Alphabete genommen, jeder (nach 40, II) durch Umtauschung zuzusetzende hingegen, aus dem Alphabete, wohin der auszutauschende gehört. Das nennt Hindenburg, die Reihen p,q,r,s,t...., hier eben so gebrauchen, wie in (37). Die Buchstabencomplexionen kommen hier gleichwohl mit den dortigen nicht in dem Umstande überein, daß in einerley Stellen Buchstaben desselben Alphabets durchgängig vorkämen. Mit einem Worte, die Zahlencomplexionen in (44,45) sind bloß der Form, die Buchstabencomplexionen (Ebendas.) hingegen,

gen, der Form und Materie nach verschieden. Von beyder Gebrauch und Anwendung, in der Folge.

Combinationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

(Combinationes numeri propositi, admissis repetitionibus)

46.

Aufgabe.

Die Combinationen zu bestimmten Summen, aus den Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

in gutgeordneten Complexionen und Folgen derselben darzustellen.

Clas-

Classen-Complex. für 'J

'A	g
	af
'B	be
	cd
'C	aae
	abd
	acc
	bbc
'D	aaad
	aabc
	abbb
'E	aaaac
	aabb
F	aaaaab
'G	aaaaaaa

Lexikographische Complexion für 'J

'A	a	a	a	a	a	a	a
	a	a	a	a	a	b	
	a	a	a	a	c		
	a	a	a	b	b		
	a	a	a	d			
	a	a	b	c			
	a	a	e				
	a	b	b	b			
	a	b	d				
	a	c	c				
	a	f					
'B	b	b	c				
	b	e					
'C	c	d					
'G	g						

'A	aaaaaaa
'B	baaaaa
	bbaaa
	bbba
'C	caaaa
	cbaa
	cbb
	cca
'D	daaa
	dba
	dc
'E	eaa
	eb
'F	fa
'G	g

47.

Auflösung für

$^7J = {}^7A + {}^7B + {}^7C + {}^7D + {}^7E + {}^7F + {}^7G.$

I. Das 7te Element g setze man, als einzelnes Ding, in die erste Classe ^7A

II. Die Complexionen der zweyten und aller folgenden Classen bestimme man nach ihren Ordnungen:

1) Die Ordnung a der nten Classe zu finden, setze man jeder Complexion der (n — 1)ten Classe (mit Uebergehung derer, die am Ende zwey oder mehr gleiche Elemente haben) a vor, und vertausche den letzten Buchstaben der Complexion mit dem nächstvorhergehenden des Zeigers.

2) Die so gefundene Ordnung a giebt die Ordnung b, diese die Ordnung c u. s. w. derselben nten Classe wenn man successive in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnung (mit Uebergehung derjenigen Complexionen, welche entweder zwey oder mehr gleiche Anfangs- oder zwey oder mehr gleiche Endelemente, eins oder beydes zusammen, haben) den ersten Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden, den letzten hingegen mit dem nächstfolgenden, den letzten hingegen mit dem nächstvorhergehenden (in beyden Fällen, des Zeigers nicht der Complexion) vertauscht.

III. So findet man aus g in ^7A (nach II. 1) af, und daraus (II. 2.) be, und daraus cd (weiter darf man hier nicht gehen, weil die Binionen dc, eb, fa nicht gutgeordnet wären, und auch schon durch die vorhergehenden dargestellt sind) die Ordnungen der

zwey-

zweyten Classe, deren jede hier nur aus einer Complexion besteht. Eben so ergeben sich die Ordnungen mit ihren Complexionen der dritten und übrigen Classen.

48.

Auflösung für

$$'\mathfrak{J} = '\mathfrak{A} + '\mathfrak{B} + '\mathfrak{C} + '\mathfrak{G}$$

die Complexionen zur Summe n werden hier aus denen zur Summe (n — 1), auf folgende Art abgeleitet:

II. Man setze allen einzelnen Complexionen der Summe (n — 1) das Elemønt a vor.

II. Man vertausche in den Complexionen der Summe n — 1, (mit Uebergehung derer, welche zwey oder mehr gleiche Anfangselemente haben) das erste Element mit dem nächstfolgenden höhern Elemente des Zeigers, und schreibe jede Complexion, die diese Vertauschung giebt, in ihrer Ordnung, unter die Complexionen die I schon vorher gegeben hat.

49.

Auflösung für

$$'\mathfrak{J} = '\mathfrak{A} + '\mathfrak{B} + '\mathfrak{C} + '\mathfrak{D} + '\mathfrak{E} + '\mathfrak{F} + '\mathfrak{G}$$

II. Man setze allen einzelnen Complexionen der nächstvorhergehenden Summe (n — 1), das Element a vor.

II. Man vertausche (aber nur in denjenigen Complexionen der Summe (n — 1), bey denen die beyden ersten Elemente nicht einerlei, sondern verschieden sind) das erste Element solcher Complexionen, mit

mit dem nächstfolgenden des Zeigers, und füge solchem die übrigen Elemente der Complexion unverändert bey.

III. Die Complexionen (die I und II geben) mische man so unter einander, daß man zu jeder Complexion aus I die aus II setzt, wenn es dergleichen giebt. Giebt es keine in II (wenn nemlich der Complexion zur Summe (n — 1) erste beyde Elemente nicht verschieden sind) so setzt man bloß die aus I, und geht gleich zur folgenden Complexion der Summe (n — 1) fort.

50.

Das Combinationsproblem zu bestimmten Summen nach Classen (47), war das erste auf welches Hindenburg verfiel, und das ihm Gelegenheit gab, in der Folge weiter zu gehen. Seine erste Auflösung davon (Infin. Dign. §. XII. p. 73 — 91.) für Summen von Classen, so wie für einzelne Classen. Seine 2te Auflösung ist folgende (Töpf. comb. Anal. S. 80 — 90).

Combinatorische Zusammensetzung für Zahlencomplexionen zu bestimmten Summen, aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5....

Aufgabe I. Aus einer gegebenen Combinationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben.

Auflösung. 1) Ist die letzte oder niedrigste Ziffer der gegebenen Complexion um mehr als 1 größer als die nächstfolgende, so ziehe man 1 von der letzten Ziffer ab, und addire 1 zur vorletzten Ziffer. Die beyddn so veränderten Ziffern in ihren

ren Stellen mit den übrigen, sämmtlich unveränderten, geben zusammen die verlangte nächsthöhere Complexion.

So folgen 11137; imgleichen 11227
und 11146; und 11236
und 11155; und 11245

aufeinander; aus jeder vorhergehenden Complexion, die nächstfolgende höhere.

2) Ist die letzte Ziffer der gegebenen Complexion gleich groß oder nur um 1 größer, als die vorletzte, so gehe man weiter zu den nächstfolgen-Ziffern fort, und suche die erste Ziffer unter ihnen, die um mehr als 1 kleiner ist als die letzte. Diese kleinere Ziffer erhöhe man um 1 in ihrer Stelle, lasse die Ziffern neben der erhöheten linker Hand (wenn es auch dergleichen giebt) unverändert, in die Stelle aber rechter Hand der Erhöheten, setze man lauter (wie sie die Erhöhung gegeben) gleiche Ziffern, bis auf die letzte oder niedrigste Stelle, in die man das Complement zur gegebenen Summe setzt, das größer oder gleich groß mit der vorletzten Ziffer seyn, nie aber kleiner werden kann.

Auf 12244
folgt 12334 auf 22234
darauf 13333 folgt 22333
und darauf 22225;

3) Hat die gegebene Complexion keine Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist als die letzte, so ist sie die letzte und höchste Complexion ihrer Classe.

Dies ist der Fall bey der vorigen letzten Complexion 22333, nach welcher also keine weiter in der Classe zu welcher sie gehört, folgen kann.

Zusatz. Die erste und niedrigste Complexion einer Classe, z. B. der Classe k zur Summe n, ist mit der ersten Complexion für Variationen, für einerley n und k, vollkommen gleich, und wird also eben so (wie in dem obigen Zusatze) bestimmt. Für k=n giebt es auch hier nur eine einzige aus lauter Einsen bestehende Complexion der letzten Classe.

Daraus fließt unmittelbar folgende.

Aufgabe II. Alle Complexionen zur Summe n einer angegebenen Combinationsclasse k, gutgeordnet, zu schreiben.

Auflösung. 1) Man schreibe (nach vorhergehendem Zusatze) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die folgenden höhern Complexionen folgere man durch Anwendung (von 1 und 2) der Auflösung der vorstehenden Aufgabe I. bis man (nach 3) auf die höchste und letzte Complexion der gegebenen Classe verfällt.

Anmerkung. Jede der beyden Vorschriften 1 und 2 der Aufgabe I. läßt sich für die Aufgabe II. oft mehrmal hintereinander anwenden, so lange nemlich die in 1 und 2 festgesetzten Bedingungen vorhanden sind. Auch dadurch wird die an sich leichte Darstellung noch mehr erleichtert, welches bey großen Zahlen, wo der Fall häufiger vorkommt, um so angenehmer ist.

Bey=

Beyspiel. Für n = 13 und k = 5; oder die Complexion für $\left(\begin{matrix} {}^{13}E \\ 1, 2, 3, 4\ldots \end{matrix}\right)$ zu schreiben.

Diese sind nach obiger Vorschrift:

11119	11236	12244
11128	11245	12334
11137	11335	13333
11146	11344	22225
11155	12226	22234
11227	12235	22333

Anmerkung 1. Hier ist 22333 die letzte und höchste Complexion der 5ten Classe zur Summe 13, weil es in ihr keine Ziffer giebt, die um mehr als 1 kleiner ist, als die letzte Ziffer 3. Würde man aber statt 22333 schreiben 022333, so könnte man die Regel (2) wieder anwenden, und fände so 111118 die erste und niedrigste Complexion der folgenden 6ten Classe, aus der letzten und höchsten Complexion der unmittelbar vorhergehenden 5ten Classe. Eine deductio ex Classe in Classem, (wie die obige S. 279).

Würde vorgeschrieben, daß die Zahl 13 in 5 Theile zertheilt werden sollte, die sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, und nur diesen allein, (keinen größern) schreiben lassen. So übersieht man leicht, daß von obigen 18 dargestellten Complexionen, nur 6 brauchbar sind, die übrigen sind für diese Aufgabe umsonst gesucht. Hindenburg unterscheidet in solchen Fällen

Complexiones utiles und inutiles (Nov. Syst. Comb. p X. 27).

Wie dergleichen Complexionen, unabhängig von den übrigen, die man nicht braucht, sich finden lassen, wird folgendes zeigen.

51.

Entwickelung der Zahlencomplexion in 50, wenn statt der dortigen unbestimmten Elementenreihe $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ eine bestimmte $1, 2, 3 \ldots r \ldots m - 1, m$ gegeben ist; wo r jedes Element $< m - 1$ bedeutet, und das höchste Element $m < n + 1 - k$ seyn soll*)

Aufgabe 1. Die erste Complexion zur Summe n für die Combinationsclasse k, aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots r \ldots m - 1, m$ zu finden; wenn $m < n + 1 - k$.

Auflösung. Man nehme $n - k = R$, so ist entweder

1) Der Rest $R = r$ eine kleinere Zahl als $m-1$
2) oder es ist $R = q\,(m - 1)$, ein vielfaches von $m - 1$,
3) oder es ist $R = q\,(m - 1) + r$, ein Vielfaches von $m - 1$, und eine kleinere Zahl.

Für

*) Man muß hier und in der Folge die Reihe $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ von der $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots m$ wohl unterscheiden, weil die letztere auf ein bestimmtes Zahlensystem sich bezieht, dessen höchste Ziffer m ist. Da

$$m < n + 1 - k,$$
$$m - 1 < n - k$$

also auch $m - 1 < R$; daher scheint es, als wenn R nicht gleich r kleiner als $m - 1$ gesetzt werden darf. Die Aufl. zählt die möglichen Fälle auch für $m >$ oder $<$ oder $= n + 1 - k$. Seite 298 wird man aber sehen, daß die Annahme $m < n + 1 - k$ gnügt.

Für 1 setze man in die letzte und niedrigste Stelle der zu bestimmenden Complexion die Zahl 1 † r, und in die übrigen (k — 1) Stellen, lauter Einsen.

Für 2 setze man das höchste Element m von der letzten Stelle an so oft nebeneinander, als q Einheiten hat. Werden dadurch noch nicht alle Stellen besetzt, so fülle man die übrigen mit Einsen aus.

Für 3 setze man eben so das Element m von der letzten Stelle an qmal hintereinander, schreibe dann die Zahl 1 † r daneben, und fülle wenn noch leere Stellen vorhanden sind, die übrigen mit Einsen aus.

Zusatz. Soll die Aufgabe möglich seyn: so darf n nicht kleiner als k, aber auch nicht größer als mk seyn. Denn für n = k bestände die Complexion aus lauter Einsen, als kleinsten, für n = mk aus lauter men, als größten Elementen. Dieß gäbe also die kleinste und größte Complexion von allen, die sich aus k Zahlen der Reihe 1, 2, 3 . . . m schreiben lassen, als Grenzen der übrigen dazwischen fallenden.

Exempel. Für 1,2,3,4,5,6, (wo also m = 6) soll man die erste Complexion in der Classe k = 8 suchen; und zwar

1) zur Summe n = 11.
Hier wäre 11 — 8 = R = 3. Da nun 3 < 5, so ist die gesuchte Complexion 11111114.

2) Zur Summe n = 28.
Hier wäre 28 — 8 = R = 20. Da nun m—1 =5, so ist 20. d. i. q(m—1)=4.5. also q=4, und die erste Complexion ist 11116666.

3) Zur Summe n = 40.

Hier

Hier wäre $40-8=R=32$. Da nun $m-1=5$, so ist 32 d. i. $q(m-1)+r=6.5+2$, also $q=6$ und $r=2$. Also ist $1+r=3$; und die erste Complexion 13666666.

4) Die möglichst kleinste Complexion wäre 11111111 für $n=k=8$.

Die möglichst größte Complexion wäre 66666666 für $n=mk=48$.

Dieß wären also die Grenzen der möglichen Complexionen von beyden Seiten.

Aufgabe II. Aus einer gegebenen Combinationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben. Die Reihe sey wieder 1,2,3,...m, wie sie Aufgabe I. bestimmt.

Auflösung. 1) Man suche von der letzten oder niedrigsten Stelle der gegebenen Complexion vorwärtsgehend die erste Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die letzte. Diese kleinere Ziffer erhöhe man um 1 in ihrer Stelle, lasse die Ziffern neben der Erhöhten linker Hand, wenn es noch dergleichen giebt, unverändert, in den übrigen Stellen aber rechter Hand der Erhöhten setze man (wie sie die Erhöhung gegeben hat) lauter gleiche Ziffern.

2) Betragen die Ziffern der so (nach 1) bestimmten Complexion in ihrer Summe so viel als die Summe n der gegebenen Complexion, so hat man die verlangte nächstfolgende Complexion gefunden.

$\dot{1}\dot{2}224$ giebt 12233; und $\dot{2}33\dot{4}$ giebt 3333.

3) Ge-

3) Geben die Ziffern (nach 1) in ihrer Summe weniger als n so vertheile man den Rest auf die letzte und folgenden Ziffern vorwärts, so weit er zureicht, dergestalt, daß die niedrigern Stellen zuerst mit den höhern Ziffern versehen werden; welches geschieht, wenn man von dem Reste zu den Ziffern der niedrigsten und successive höhern Stellen nach und nach so viel addirt, als nur immer geschehen kann, um die höchsten Ziffern der Reihe zu erreichen, ohne die Summe n zu übersteigen.

So gäbe die Complexion 155556 nach den verschiedenen Werthen für m folgende nächst höhere Complexionen.

222222	222222	222222	ꝛc.
3444	555	366	ꝛc.
225666	222777	222588	
für m = 6	für m = 7	für m = 8	ꝛc.

4) Hat die gegebene Complexion mehrere größte Ziffern der Reihe von der letzten Stelle an hintereinander, so kann man als eine Abkürzung (denn sonst gelten auch hier die gegebenen Vorschriften 1, 2, 3, wie in anderen Fällen) hier die erste Ziffer die um mehr als 1 kleiner ist, als die höchste der größten Ziffern, suchen, und die durch die Erhöhung der gefundenen kleinern bestimmten gleichen Ziffern nur bis in diese höchste Stelle schreiben, und weiter mit diesen nach 1 bis 3 verfahren; wobey also die übrigen nach der höchsten größten weiter folgenden Ziffern, bis in die letzte Stelle, unverändert bleiben, eben

so

so wie die über der Erhöheten vorwärts liegenden Ziffern.

So giebt die Complexion 225666

(nach No. 4) (nach No. 3)

$$\begin{array}{r} 233366 \\ 13 \\ \hline 234666 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 233333 \\ 1333 \\ \hline 234666. \end{array}$$

für einerley Werth von $m=6$, wie sich von selbst versteht, dieselbe nächstfolgende Complexion.

5) Hat die gegebene Complexion keine Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist als die letzte, so ist sie die letzte und höchste Complexion ihrer Classe: wie 233; 3344; 44455; u. s. w:

Aus I. und II. fließt sogleich die

III. Aufgabe. Alle Complexionen zur Summe n für die Combinationsclasse k gutgeordnet, aus den Elementen $1.2.3\ldots.m$, wenn $m < n + 1 - k$, zu schreiben.

Auflösung. 1) Man schreibe (nach der Aufgabe I.) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die folgenden höheren Complexionen folgere man durch Anwendung von (1 bis 4) der Auflösung der Aufgabe II. bis man (nach 5.) auf die höchste und letzte Complexion derselben Classe verfällt.

Anmerkung. Man kann wenn n keine große Zahl ist, was man (nach 3 und 4 der Auflösung in Aufgabe II.) zu addiren hat, leicht übersehen, ohne erst die Zahlen unter die zugehörigen Ziffern unterzusetzen, welches das Verfahren abkürzt und erleichtert.

Bey=

Beyspiel. Man soll die Complexionen für

$$\overset{13}{}E$$

$$(1\ 2\ 3\ 4)$$

suchen; wo also $n = 13$; $k = 5$, und $m = 4$. Diese sind nach obigen Vorschriften, folgende sechs:

$$1\dot{1}3\dot{4}4$$

$$12\dot{2}\dot{4}4$$

$$1\dot{2}33\dot{4}$$

$$\dot{1}333\dot{3}$$

$$22\dot{2}3\dot{4}$$

$$22333$$

Die Punktirung für die erste und zweyte Complexion, die mehr als eine größte Ziffer, nemlich 4, am Ende haben, ist nach Auflösung für Aufgabe II. 4. die Punktirung der übrigen vier Complexionen aber, nach Auflösung für Aufgabe II. 3. geschehen.

Die Complexionen im vorhergehenden Beyspiel sind auf dem kürzesten Wege und unabhängig von den oben (50) gesuchten gefunden worden, welches ungleich kürzer und bequemer ist, als wenn man die Complexionen wie sie die unbestimmte Reihe 1.2.3.4.... giebt (50 Aufg. II.) entwickelt, und daraus die zur bestimmten Reihe 1.2.3.4 gehörigen auslesen wollte. Die Menge beyder ist um so mehr von einander verschieden, je größer n und je kleiner m ist. Für $n = 15$, $k = 5$, und $m = 4$, müßte man schon 30 Complexionen darstellen, um daraus die 5 brauchbaren: 12444; 13344; 22344; 23334; 33333; auszulesen, und so ungleich mehrere für größere Unterschiede von n und m.

Hier

Hier zeigt sich zugleich der Unterschied beyder Ausdrücke.

$$\overset{13}{E}(1, 2, 3, 4 \ldots) \quad \text{und} \quad \overset{13}{E}(1, 2, 3, 4)$$

sehr deutlich, und wie sie von

$$e\,\overset{13}{E}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ a & b & c & d \ldots\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e\,\overset{13}{E}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d\end{pmatrix}$$

verschieden sind.

Daß die Aufgabe über die Complexionen zu bestimmten Summen aus der Reihe der Zahlen in natürlicher Ordnung von 1 an, in (50) und (51) vollständig gelößt sey, erhellet folgendergestalt. Die höchste Zahl die in den Complexionen der Classe k vorkommen kann, ist $n + 1 - k$. Reihen also die auch größern Zahlen enthalten, wie die unbestimmt fortgehende 1,2,3 ... oder jede andere deren Endzahl $m > n + 1 - k$ wäre, sind mit der, deren Endzahl $n + 1 - k$ ist, in so fern gleichgültig, weil von den größern Zahlen jener Reihen in den Complexionen der Classe k keine vorkommt. Dahin gehn die Vorschriften in (50). Ist aber die bestimmte Reihe 1, 2, 3 ... m, und $m < n + 1 - k$ gegeben; so kommen immer weniger und weniger Complexionen in die Classe k, je kleiner m ist. Da hingehen die Vorschriften in (51).

Auch erhellet zugleich, warum Herr Hindenburg für die Auflösung der Aufgabe, wo er alle mögliche Complexionen aller Classen zu finden anweiset, die Reihe 1,2,3,4 ... n annimmt. Denn in der ersten Classe kommt n selbst, in der zweyten $n - 1$, in der dritten $n - 2$ u. s. w. als höchstes Element vor, und die nte oder letzte Classe besteht aus lauter Einsen.

Eben so hat Herr Hindenburg auch die Variationscomplexionen in (42) auf eine bestimmte Reihe 1,2,3,4...m bezogen. Von dergleichen beschränkten Variationscomplexionen und den Regeln ihrer Darstellung, so wie überhaupt die Anwendung auf die allgemeine Progression a, a † d, a † 2d, a † 3d &c. wo das Verfahren dafür dieselben, nur allgemeiner ausgedrückten Vorschriften befolgt, werde ich an einem andern Orte handeln.

Wenn auch schon die Regeln, der hier in (42,50,u.51) vorgetragenen Aufgaben, in der Anwendung nicht schwer zu befolgen sind, so muß man sie doch, um sie sicher und ohne Gefahr zu fehlen, anwenden zu können, nach ihrem ganzen Umfange und mit der nöthigen Präcision dem Leser vorlegen.

Man wird diese Vorschriften überall mit Nutzen befolgen, wo man die Complexionen einzelner Classen braucht. Da aber, wo man alle Classen haben muß, sind jene andern Hindenbürgischen Regeln, nach denen man Complexionen folgender Classen aus Complexionen nächstvorhergehender bestimmt, doch noch leichter. Denn diese setzen bloß die successive Zerfällung einer gegebenen Zahl in zwey Theile voraus; wobey also alle vorgängige Vergleichung der Ziffern oder Zahlen, einzelner Complexionen, alles Aufmerken auf ein Complement aus mehrern Ziffern oder einen Rest, ganz wegfällt; wie bey den hier vorgetragenen Auflösungen der Aufgaben (in 42, 50, 51), zuweilen nöthig ist.

Dieses, und ähnliche combinatorische Verfahren, die nach den Hindenbürgischen Vorschriften, die gemeimeinen arithmetischen Operationen an Leichtigkeit noch übertreffen, sind in der combinatorischen Analytik Hülfsmittel geworden, die größten Schwierigkeiten zu übersteigen, und den Erfolg der verwickelsten Substitutionen zu übersehen, die auf keinem andern Wege zu bewältigen waren, und welche auch der entschlossenste Rechner aufzugeben sich oft genöthiget sahe.

52.

Beyde Auflösungen (nemlich in Infin. Dign. §. XII. p. 73 — 91. und die hier in 51 mitgetheilten) sind leicht und ganz allgemein, aber nicht rein-combinatorisch, wie die in (47,48,49). Die Auflösung (48) hat Hindenburg zuerst in dem (S. 280) genannten Programm, und nachher im Arch. d. Math. (H. IV. S. 392, 93.) vorgelegt; die (in 49) ist die Boscovichische (Ebendas. S. 405.) Auch hier werden, wie bey den ähnlichen Verfahren für die Aufgabe (37) verschiedentlich, Classen aus Classen, oder Complexionen aus Complexionen, oder Ordnungen aus Ordnungen, oder endlich Summenwerthe aus Summenwerthen, durchgängig nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden, abgeleitet und rein-combinatorisch entwickelt.

53.

Gewöhnlich hat man bey Entwickelung und Darstellung der Combinationsclassen nur auf eine Reihe a,b,c,d....= p zu sehen, und diese wird im Zeiger angegeben, so, daß es keiner weitern Nachweisung bey den Classen selbst bedarf.

Für

Für die Fälle hingegen, wo die Combinationsclassen in der Formel, die das Resultat einer Aufgabe enthält, sich auf mehrere Reihen p,q,r,s... (24) beziehen, müssen diese Zeichen, als Reihenexponenten, über die Classenzeichen gesetzt werden:
${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{p}{B}$....${}^{m}\overset{q}{A}$, ${}^{m}\overset{q}{B}$.... u. s. w. bey den übrigen (Nov. Syst. Perm. p. XLV. 21). Zuweilen kommen auch ${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{qp}{B}$, ${}^{n}\overset{rqp}{C}$... vor.

Classen außer der Ordnung, für Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

54.

Classen zu bestimmten Summen lassen sich eben so leicht außer der Ordnung geben, wie bey Variationen und Combinationen an sich, und ihre figürliche Anordnung zeigt gleichfalls eine combinatorische Involution, die hier durch Winkel bemerklich gemacht werden soll.

55.

Aufgabe.

Die Elemente seyn, wie vorher,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g & h \ldots \end{pmatrix}$$

Man soll die vierte Variationsclasse zur Summe 7 aus a,b,c,d und die fünfte Combinationsclasse zur Summe 12 aus a,b,c,d,e,f,g,h darstellen.

	a a a d	1 1 1 4
	a a b c	1 1 2 3
	a a c b	1 1 3 2
	a a d a	1 1 4 1
	a b a c	1 2 1 3
	a b b b	1 2 2 2
	a b c a	1 2 3 1
	a c a b	1 3 1 2
	a c b a	1 3 2 1
	a d a a	1 4 1 1
^{7}D	b a a c	2 1 1 3
	b a b b	2 1 2 2
	b a c a	2 1 3 1
	b b a b	2 2 1 2
	b b b a	2 2 2 1
	b c a a	2 3 1 1
	c a a b	3 1 1 2
	c a b a	3 1 2 1
	c b a a	3 2 1 1
	d a a a	4 1 1 1

	a a a a h	1 1 1 1 8
	a a a b g	1 1 1 2 7
	a a a c f	1 1 1 3 6
	a a a d e	1 1 1 4 5
	a a b b f	1 1 2 2 6
	a a b c e	1 1 2 3 5
	a a b d d	1 1 2 4 4
^{12}E	a a c c d	1 1 3 3 4
	a b b b e	1 2 2 2 5
	a b b c d	1 2 2 3 4
	a b c c c	1 2 3 3 3
	b b b b d	2 2 2 2 4
	b b b c c	2 2 2 3 3

56.

Auflösung für die Combinationsclasse ^{7}D

I. Man setze d, das höchste der gegebenen Elemente als ein einzelnes Ding, im Winkel.

II. Daneben setze man das erste Ding a. Das giebt ad, die Ordnung a der Dinge a, d. Aus der Ordnung a findet man (38. II, 2) die Ordnung b, und daraus die Ordnung c, und daraus die Ordnung d der Binionen ab, bc, cb, da.

III.

III. Den einzelnen Binionen in II. setze man a vor. Das giebt die Ordnung a der Ternionen, und daraus findet man weiter (nach 38, II. 2) die Ordnung b und daraus die Ordnung c und daraus die Ordnung d der zugehörigen Ternionen.

IV. Eben so geht man zu den Quaternionen für ${}^{v}D$ fort, und so auch zu den Verbindungen von mehr als vier Dingen, für spätere Classen; alles wie in (38), nur mit dem einzigen Unterschiede, daß man bey der Vorsetzung von a (bey Bestimmung der Ordnung a) das letzte Element der Complexion hier nicht (wie dort) mit den nächstvorhergehenden Zeigerelement vertauscht; wohl aber in den folgenden Ordnungen b,c...

57.

Auflösung für die Combinationsclasse ${}^{12}E$.

I. Man setze h, das höchste der gegebenen Elemente, als ein einzelnes Ding, im Winkel.

II. Daneben setze man das erste Ding a. Das giebt ah, die Ordnung a der Dinge a,h. Aus der Ordnung a findet man (47, II. 2)
die Ordnung b, und daraus
— — — c,
— — — d der Binionen ah,bg,cf,de.

III. und IV. Das Verfahren für den Fortgang ist hier eben so, wie in (III. IV.); nur daß hier (47) statt des dortigen (38) zu citiren. Auch wird bey der Versetzung von a das letzte Element nicht mit dem nächstvorhergehenden vertauscht, wohl aber in in den folgenden Ordnungen b,c... Die Darstellung für ^{7}D und ^{12}E (in 55) involutorisch zu machen, beobachtet man, beym Schreiben der Ordnungen a,b,c... die Vorschrift (22).

58.

Von der großen Mannigfaltigkeit und leichten Umwandlung combinatorischer Formen, findet man viele Beyspiele im Arch. der Math. wovon ich hier nur (H. I. S. 31 — 43 und H. II. S. 183 — 192) anführen will. Hier sind noch ein Paar andere für ^{10}D

(α)		(β)		(γ)		(δ)	
111	7	a^3	7	000	6	a^3	6
11	26	a^2	26	00	15	a^2	15
11	35		35	00	24		24
11	44		44	00	33		33
1	225	a^1	225	0	114	a^1	114
1	234		234	0	123		123
1	333		333	0	222		222
	2224	a^0	2224		1113	a^0	1113
	2233		2233		1122		1122.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$

59.

Bey den hier gebrauchten Zahlencomplexionen fallen die in Winkeln eingeschloßenen Summen sogleich deutlich ins Auge. Die a^3 a^3 a^1 deuten hier bloße Nebeneinanderstellungen von a an, nach der beygefügten Zahl (diese Zahlen sind nemlich hier keine Potenz= sondern Wiederholungsexponenten) und a^0 zeigt, daß kein a weiter in der Verbindung vorkömmt. Man erhält γ aus α wenn man von jeder Zahl in α Eins abzieht, wodurch also der Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3\ldots \\ a, & b, & c\ldots \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2\ldots \\ a, & b, & c\ldots \end{pmatrix}$ abgeändert wird. Hier hat man nun die Zerlegung einer gegebenen Classe in Summen von Classen (das Umgekehrte von 31 β mit dem Unterschiede daß

$$ {}^{10}D = a^3\,{}^{7}A + a^0\,{}^{8}B + a^1\,{}^{9}C + a^0\,{}^{10}D $$

$$ \begin{bmatrix} 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ b, & c, & d, & e, & f, & g \end{bmatrix} $$

und $$ {}^{10}D = a^3\,{}^{6}A + a^2\,{}^{6}B + a^1\,{}^{6}C + {}^{0}\,{}^{6}D $$

$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & c & d & e & f & g \end{pmatrix} $$

jenes bey α, β dieses bei γ, δ. Die steigenden Summen 7, 8, 9, 10 der Classen nach dem ersten Zeiger, werden also auf eine und dieselbe (kleinere) Summe 6, durch den zweiten Zeiger reducirt, und so alles in das gewöhnliche Gleis eingeleitet.

Das wird zugleich das (Infin. Dignit. p. 141, 142, in der Note und (Nov. Syst. Perm. p, XXII, 18) von Variationen Beigebrachte weiter aufklären. Von Umänderung der Formen durch Zusetzen oder Abziehen gewißer Zahlen (wie hier der Eins) Arch. der Math. Heft I. S. 41, 42. Von der Zerfällung einzelner höherer Combinationsklassen in Summen aus niedrigern, mit Veränderung des Zeigers, Nov. Syst. Perm. p. LV. LVI. Das dortige n ist hier 6.

60.

Bey Classen von vielen Complexionen kann man um die Colonne nicht zu lang zu machen, die einzelnen Ordnungen derselben neben einander setzen, auch zur Verkürzung, wenn man will, sich der Wiederholungsexponenten bei b, c, d... (eben so, wie in 85, 59 bei a) bedienen, die sich bei der Ableitung der Ordnungen aus einander (47, II. 2) von selbst ergeben.

Die erste Complexionn ist ${}^{15}E$ ist IIII II (nach 58, α) und 000010 (nach 58, γ). Das giebt

$$ {}^{15}E = a^4\,{}^{10}A + a^3\,{}^{10}B + a^2\,{}^{10}C + a^1\,{}^{10}D + a^0\,{}^{10}E $$

$$ \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \ldots 9, & 10, & 11 \\ a, & b, & c \ldots i, & k, & l \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \ldots 8, & 9, & 10 \\ b, & c, & d \ldots i, & k, & l \end{bmatrix} $$

und daraus folgt (der erste Zeiger gilt für ${}^{15}E$)

$$ \begin{array}{rl|rl|rl|rl|} & a^4 & l & + a^2 & b^2i & + a^1 & b^3h & + a^0 & b^4g \\ & & & & bch & & b^2cg & & b^3cf \\ & a^3 & bk & & bdg & & b^2df & & b^3de \\ & & ci & & bef & & b^2e^2 & & b^2c^2e \\ {}^{15}E = & & dh & & c^2g & & bc^2f & & b^2cd^2 \\ & & eg & & cdf & & bcde & & bc^3d \\ & & f^2 & & ce^2 & & bd^3 & & c^5 \\ & & & & d^2e & & c^3e & & \\ & & & & & & c^2d^2 & & \end{array} $$

Die Zahlencomplexionen von ${}^{13}E$ nach dem ersten Zeiger, findet man (Infi. Dig. p. 80, 81).

Weil hier die Wiederholungen von a (als Ergänzung der Dimensionen in den einzelnen Ordnungen) im Voraus vorgeschrieben werden, so kann a, und mithin auch sein Zahlenwerth o, im zweiten Zeiger ganz übergegangen werden. Ein Beyspiel ähnlicher Wiederholungen eines Buchstabens (b wie hier a) findet man (Infin. Dign. p. 41.) bei Combinationen an sich (simpiiciter). Man vergleiche die erste Tafel (Ebend. p. 157).

61.

Man kann auch nach dem (Infin. Dign. p. 26.) gegebenen Beyspiele, außer den Wiederholungen von a noch die Verbindungen von b, c, d, e... von den übrigen absondern. Die Ableitung der Ordnungen auseinander (47,II.) führt auch hier unmittelbar darauf; und so kommt:

a^4	l	†	a^2	b	bi	†	a^1	bb	bh	†	a^0	bbb	bg
a^3	bk				ch				cg				cf
	ci				dg				df				de
	dh				ef				ee				
	eg			c	cg			bc	cf			bbc	ce
	ff				df				de				dd
					ee			bd	dd			bcc	cd
				d	de							ccc	cc
								cc	ce				
									dd				

62.

Man kann also bey solchen Darstellungen der einzelnen Classen (wie hier in 60, 61) durch die Absonderung von a, mehrere a (ihre Wiederholungen) auf einmahl, wie vorher (57) einzelne a vorschreiben. Die Darstellung für jede zu entwickelnde Classe lehrt jedesmahl, wie weit man mit den Wiederholungen von a fortgehen muß, die für andere Classen und andere Summen, nicht immer bis auf a^0 herunterfallen. Die zunächst auf die Wiederholungen von a folgenden Verbindungen von b, c, d.... von bb, bc... von bbb, bbc... u. s. w. befolgen das combinatorische Gesetz in 31 (S. 269, α) nur daß man hier b,c,d... für die dortigen a,b,c... schreiben, oder den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ b & c & d \ldots \end{pmatrix}$ für den dortigen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots \end{pmatrix}$ nehmen muß. Von diesen Verbindungen, hängen die unmittelbar auf sie folgenden Binionen im Winkel ab; und so gewährt hier die Combinationslehre einen Ueberblick des Ganzen, aus seinen einzelnen Theilen, den man auf keinem andern Wege in der Kürze und Vollkommenheit so deutlich und anschaulich, haben kann.

63.

Ein Beyspiel einer gemischten (nicht ganz reincombinatorischen) Darstellung hier zu geben, mag die Bestimmung der Complexionen dienen, die Herr Prof. Klügel in der Schrift der polyn. Lehrsatz S. 61 aufgestellt hat.

Aufgabe. Die Complexionen der lexikographischen Ordnungen 2, 3, 4, 5 u. s. w. für ${}^{2n}\mathfrak{J}$ und ${}^{2n+1}\mathfrak{J}$, von der Ordnung, 1 unabhängig, zu entwickeln.

Complexionen für

${}^{2n}\mathfrak{J}$

(2, 3, 4, 5, 6...)

2 2 2 2 2 2
u. 2 2 2 2 4
2 2 2 3 3
2 2 2 6
2 2 3 5
2 2 4 4
2 2 8
s. 2 3 3 4
2 3 7
2 4
2 5 5
2 10
3 3 3 3
3 3 6
3 4 5
3 9
4 8
5 7
w. 6 6
12

u. s. w.

Complexionen für

${}^{2n+1}\mathfrak{J}$

(2, 3, 4, 5, 6...)

2 2 2 2 2 3
2 2 2 2 5
u. 2 2 2 3 4
2 2 2 7
2 2 3 3 3
2 2 3 6
2 2 4 5
2 2 9
2 3 3 5
2 3 4 4
2 3 8
s. 2 4 7
2 5 6
2 11
3 3 3 4
3 3 7
3 4 6
3 5 5
3 10
4 4 5
4 9
w. 5 8
6 7
13

u. s. w.

64.

Auflösung. Die Complexionen der niedrigsten Summen sind, für *gerade* zahlen $\left|\begin{array}{l}2\,|\,\underline{2}\\ \underline{4}\end{array}\right.$, für *ungerade* Zahlen $\left|\begin{array}{l}2\,|\,\underline{3}\\ 5\end{array}\right.$. Daraus lassen sich die Complexionen höherer Summen für beyde, folgender gestallt herleiten:

I. Man setze alle Complexionen der vorhergehenden niedrigern Summen, 2 vor. Das giebt die Ordnung der folgenden höheren Summen.

II. In den so gefundenen Complexionen, vertausche man (mit Uebergehung aller derer, wo die beyden ersten oder letzten Zahlen, eins oder beydes, *nicht verschieden* sind) die erste Zahl mit der nächstfolgenden, die letzte mit der nächstvorhergehenden des Zeigers, das giebt die Ordnung 3 derselben Summe.

III. Dasselbe Verfahren auf die (nach II.) gefundenen Complexionen angewendet, giebt die Complexionen der Ordnung 4 aus denen der Ordnung 3 u. s. w. alle folgende Ordnungen aus den nächstvorhergehenden.

IV. Sobald man, bey Anwendung von II. und III. auf eine Complexion verfällt, die nur aus *zwey*, *gleichen* oder um *eins verschiedenen*, Zahlen besteht, so nimmt man beyder Summe, und setzt sie als letzte Complexion dieser Summe darunter.

Auf ähnliche Art kann man von der Ordnung 3 oder 4... oder m anfangen, und auf die Ordnungen m+1, m+2 u, s. w. fortgehen.

65.

Wegen des Umstandes (64 IV.) gehört das Verfahren zu den gemischten, und hat für Zahlencomplexionen keinen Austoß. Um es auf Buchstabencomplexionen anzuwenden, darf man nur, auf diesen einzigen Fall, den Index vor Augen haben; alles Uebrige geht sonst rein-combinatorisch fort, wo der Buchstaben gleiche Bequemlichkeit mit dem der Zahlen hat (S. 251.) Man hätte die Auflösung der Aufgabe (63) auch so geben können, daß man jede nächstfolgenden Complexion aus der unmittelbar vorhergehenden abgeleitet hätte; aber hierbey würden sich zu jenen arithmetischen Summen (64 IV.) auch noch arithmetische Ergänzungen eingefunden haben, und so das combinatorische Verfahren, bey aller Leichtigkeit an sich, doch minder rein, als das in (64) geworden seyn. Die Darstellungen in (63) enthalten alle (von Klügel im polyn. Lehrsatz S. 61) vorkommende Complexionen der Summen 8, 9, 10 und noch mehrere, in einer lexikographischen Involution.

66.

Ein Beyspiel, wie schnell die combinatorischen Formen (was für die Analysis so wichtig ist) sich in einander umwandeln lassen, mögen die hier folgende drey Anwendungen zur Summe 7 abgeben.

Nach Boscowich.	Nach Hindenburg I.	Nach Hindenburg II.
1111111	7	1111111
211111	16	111112
22111	25	11113
2221	34	11122
31111	115	1114
3211	124	1123
322	133	115
331	223	1222
4111	1114	124
421	1123	133
43	1222	16
511	11113	223
52	11122	25
61	111112	34
7	1111111	7

Diese 3 Darstellungen sind dieselben in Zahlen, die S. 285. in Buchstaben aufgeführt sind, nur daß die dortige erste, 2te und dritte, hier die 2te, 3te und 1ste ist. Die Darstellungen der Zerfällungen nach Boscowich ist zu dem Gebrauch bey den Combinationen überhaupt nicht so bequem, als die beyden von Hindenburg gefundenen, und die Abtheilung nach jener kann sehr leicht aus diesen hergeleitet werden. Die erste Hindenbürgische Zerfällungsart dient vorzüglich, wenn mit der Zerfällung zugleich die Abtheilung nach der Anzahl der Theile (nach Classen) verlangt wird. Die zweyte Hindenbürgische Zerlegungsart, giebt mit den Zerfällungen einer Zahl zu-

zugleich die durch Winkelhaken von einander gesonderten Zerfällungen aller kleinern, und hat in Ansehung der etwas größern Leichtigkeit in der Darstellung, wegen des einfachern Gesetzes der Zusammensetzung, Vorzug vor der ersten Art. Dagegen ist, in Beziehung auf die Analysis überhaupt die Hindenbürgische erste Art von Zerlegung (nach Classen von gleichvielen Theilen) von weit ausgedehnterm Umfange in der Anwendung als die zweyte; weil es unzählig viele Fälle giebt, wo man nur die Complexionen einzelner Classen (der einzeln Abtheilungen zwischen den horizontalen Linien) nicht aber aller Classen zusammen nöthig hat. Auch enthält die erste Art zweyerley Involutionen 1) der niedrigern Summen durch alle Classen 2) der niedrigern Classen zu verschiedenen Summen in den einzelnen Classen; und man kann jede der beyden übrigen, hier angeführten Anordnungen, augenblicklich aus ihr darstellen. Das Letzte gilt auch von den beyden andern Anordnungen, und ist eine natürliche Folge davon, daß man bey den Combinationsverfahren immer alle Elemente in der Zusammensetzung vor sich hat. Von diesen ist die dritte Darstellung die leichteste in der Entwickelung. Aus ihr formt man die zweyte, wenn man von oben heruntergehend erst die einzifrige (hier 7) dann die zweyzifrigen (1, 6 und 2, 5 und 3, 4) dann die drey- dann die vier- u. s. w. zifrigen Complexionen zusammenlieſt, die gleichvielzifrigen jedesmal in eine Classe zusammensetzt, und die letzte mit 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, (der einzigen siebenzifrigen Complexionen) beschließt. Aus dieser zweyten Anordnung schaft man sogleich die

erste

erste, wenn man in der zweiten, von unten herauf steigend und rückwärts lesend, alle diejenigen Complexionen in eine Ordnung zusammensetzt, (die in dieser zweyten) mit 1, oder 2, oder 3 u. s. w., mit 7, sich enden, und folglich mit diesen Elementen in der ersten anfangen. Auf ähnliche Art wird (Arch. der Math. H. II. S. 188) eine andere lexikographische Darstellung in eine Classenanordnung umgestaltet, oder, wie man sagen könnte umgelesen.

67.

Ich habe von den combinatorischen Operationen hier nur das Unentbehrlichste vorgetragen, das, was theils des Zusammenhangs, theils des Folgenden wegen, da seyn mußte. Die Operationen, wo Wiederholungen der Elemente verstattet sind, sind für die Analysis bey weitem die wichtigsten. Aus den Vorschriften für diese folgen zugleich die, wo keine Wiederholungen vorkommen dürfen; daher ich mich dabey gegenwärtig so wenig aufhalte, als bei der Verschiedenheit der Zeiger, in Absicht auf die Folge oder Menge ihrer Elemente. Von der lexikographischen oder alphabetischen Darstellung, habe ich nur die zu bestimmten Summen hier (37, 46) aufgeführt. Ueberall sind hierbey Involutionen vorzüglich bequem, die hier nicht durchgängig durch eingezeichnete Winkel bemerklich gemacht worden sind: dahin z. B. die (31, α) aufgeführte gehört, eine der wichtigsten, die (Infin. Dign. p. 17, 18) etwas weiter ausgeführt ist, und sehr mannigfaltige Abschnitte durch einzuzeichnende de Linien und Winkel verstattet, und so verschiedene Untersuchungen veranlaßt (Ebendas. S. 19 u. f.) wobey zu merken, daß die dort vorkommenden Zeichen, keine combinatorischen, sondern bloß willkührlich gewählte, sind.

68.

Beyden Involutionen wird gewöhnlich ein Theil der Complexionen (die Ordnung 1 oder 2, S. 238, 9 durch bloßes vorschreiben des ersten Elements erhalten. Man sieht hier ein Schreiben der Elemente in die Tiefe (Arch. der Math. H. I. S. 15.) oder in vertikalen Colonnen, wovon die Zahlenreihe gleichfalls ein sehr einfaches und belehrendes Beyspiel aufstellt. Ich will hier nur den Anfang des dyadischen Zahlensystems aus den beyden Grundzahlen 0,1 beyfügen, wo die überschriebenen Potenzen der 2 anzeigen, wie vielmal jedes der beyden Elemente in jeder Vertikalreihe abwechselnd untereinander zu schreiben sey. Die hier eingezeichneten Parallelogramme (statt den sonstigen Winkel) zeigen jedesmal den Perioden der zusammengehörigen Ziffern in den Vertikalreihen der ohne Aufhören in

ꝛc.	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1
u.	0	0	0	1	0
	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	1
	0	0	1	1	0
	0	0	1	1	1
	0	1	0	0	0
s.	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	0
	0	1	1	0	1
	0	1	1	1	0
	0	1	1	1	1
	1	=	=	=	=
	=	=	=	=	=
w.	1	1	1	1	1

u. s. w.

in die Tiefe hinab wiederholt werden muß. Bey Systemen von 3, 4, 5 oder mehreren Grundzeichen, würden die Wiederholungen der einzelnen Grundzeichen in den vertikalen Reihen eben so durch Potenzen der Zahlen 3,4,5 u. s. w. nachgewiesen werden. Bey dem dekadischen System können hier die Potenzen 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 u. s. w. vor.

69.

Die unmittelbarste Anwendung zeigt die Variationsaufgabe (20), wo man die Vorschrift für die dortige Darstellung (β) nach (68) für ein triadisches System aus a, b, c hätte geben, und so nicht bloß wie dort die a sondern auch die übrigen Elemente b, c nach senkrechter Fortschreitung in die Tiefe hätte schreiben können. Eine zweyte aber nicht so unmittelbare, Anwendung zeigt (31, β), denn hier könnte man die Wiederholungen der a,b,c in den einzelnen vertikalen Colonnen nicht durch Potenzen der 3, sondern müßte selbige durch Zahlen aus der Tafel der figürlichen nachweisen, wie Herr Prof. Rothe in einem andern Falle, durch Zahlen einer andern Tafel gethan hat (Arch. der Math. H. II. S. 171—174) Eine interressante Anwendung solcher Fortschreitung gegebener Elemente in die Tiefe, geben die cyklischen Perioden. Hindenburgs Abhandlung davon im Magazine für reine und angewandte Mathematik (1786 St. III. 281 — 324).

Allgemeine Glieder für Classen und Ordnungen, erste und einfachste Relationen in combinatorischen Zeichen.

70.

Ich habe den Vertrag der Vorschriften über die beygebrachten combinatorischen Operationen durch dergleichen Glieder und Formeln nicht unterbrechen wollen. Sie sind aber wichtig und müssen daher nachgeholet werden.

71.

Allgemeine nte Classe der Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen (31).

$$a^n + a^{n-1}\,{}'A + a^{n-2}\,{}'B + a^{n-3}\,{}'C \ldots + a^0\,{}'N = {}'N$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$$

Da hier die Wiederholungen von a nach der Ordnung vorgeschrieben werden, so beziehen sich die Combinationsclassen 'A 'B 'C... hier eben so auf b, c, d wie in (31) auf a, b, c... und können auch die Werthe derselben unmittelbar (aus 31) abgeleitet werden, wenn man für die dortigen a, b, c... hier b, c, d... setzen. Obige Formel giebt der Dinge a, b, c, d . . .

für $n = 1$, Unionen $a^1 + a^0\,{}'A = {}'A$

„ $n = 2$, Binionen $a^2 + a^1\,{}'A + a^0\,{}'B = {}'B$

„ $n = 3$, Ternionen $a^3 + a^2\,{}'A + a^1\,{}'B + a^0\,{}'C = {}'C$

&c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a & b & c & \ldots \end{pmatrix}$

Man

Man darf also nur der Dinge b, c, d. . Combinationsclassen nach der Ordnung suchen (31, a) und ihnen die zugehörigen Wiederholungen von a vorschreiben.

Diese Formel für die allgemeine nte Classe der Combinationen überhaupt, hat Hindenburg bereits (Infin. Dign. p. 159 und Nov. Syst. Perm. p. XY, II.) gegeben. Aber die hier gebrauchten combinatorischen Zeichen 'A, 'B, 'C... welche Hindenburg jetzt eingeführt hat sind deutlicher und verständlicher als die dortigen willkührlichen Zeichen $\overset{1}{B}, \overset{2}{B}, \overset{3}{B}$...

Allgemeine Darstellung der Combinationen zur unbestimmten Summe n, mit Wiederholungen.

72.

Für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{smallmatrix}\right)$ giebt die Auflösung (48) die Buchstabeninvolution für jede verlangte Summe.

$\int^{n}$ und daraus für ${}^{7}\int$

&c.	b	b	b	b	b	b	b	b^6	b
	b	b	b	b	b	c		b^5	c
	b	b	b	b	d			b^4	d
	b	b	b	c	c			b^3	cc
	b	b	b	e					e
	b	b	c	d				b^2	cd
	b	b	f						f
&c.	b	c	c	c				b^1	ccc
	b	c	e						ce
	b	d	d						dd
	b	g							g
	c	c	d					b^0	ccd
	c	f							cf
&c.	d	e							de
	h								h
	&c.								

Eben das giebt die zweyte Darstellung (in 46) wenn man darin b, c, d... statt a, b, c... setzt.

II. Die erste Darstellung in I. zeigt nur den Anfang für das unbestimmte ${}^{n}\int$. Dieser bleibt wegen der Involutorischen Fortschreitung bey jedem höhern Werthe n derselbe; auch fällt der Fortgang nach demselben Gesetze (48) klar in die Augen, und hat nicht die geringste Schwierigkeit.

III. Die Complexionen zwischen jedem Paare horizontaler Linien haben immer eine gleiche Anzahl von b vorgeschrieben, die niederwärts successive um eins abnimmt. Drükt man diese Mengen durch Wiederholungsexponenten (59) aus, so recht-

fer-

fertigt das die Darstellung von J *) in $\mathbf{I}$ wo die Wiederholungen von b^c bis auf b^o herunter fallen. Auch hier deutet b^o an, daß b in den übrigen Verbindungen nicht weiter vorkomme.

IV. Die Complexionen neben den Wiederholungen von b, die hier in Winkeln stehen, haben (die erste ausgenommen) weiter kein b, und beziehen sich auf den Zeiger $\binom{2\ 3\ 4\ 5 \ldots}{c\ d\ e\ f \ldots}$, nach welchem die Complexionen in einem und demselben Winkel auch einerley Summe geben, die nach der Reihe der natürlichen Zahlen fortgehend, nach $^{2}\mathbb{J}$, $^{3}\mathbb{J}$, $^{4}\mathbb{J}$ u.s.w. steigt.

V. das führt auf der Gleichung:

$$^{n}J = b^{n-1}\, b + b^{n-2}\, {}^{2}J + b^{n-3}\, {}^{3}J + b^{n-4}\, {}^{4}J \ldots + b^{o}\, {}^{n}J$$

$$\binom{1\ 2\ 3\ 4 \ldots}{b\ c\ d\ e \ldots} \qquad \binom{2\ 3\ 4\ 5\ 6 \ldots}{c\ d\ e\ f\ g \ldots}$$

Der Zeiger linker Hand gehört zu ^{n}J linker Hand des Gleichheitszeichens, der Zeiger rechter Hand zu den obigen Involutionen. Die Entwickelung ihrer Glieder giebt nachstehende lexikographische Involution.

*) die J bedeuten hier dasselbe als $\mathbb{J}$

${}^{n}\mathfrak{J}^{c}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\ldots\\ b & c & d & e\ldots\end{pmatrix}$		Combinationen zu bestimmten Summen in direkter lexikographischer Ordnung.
$b^{n-1}b$	$=$	$b^{n-1}b$
$+\,b^{n-2}\;{}^{2}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-2}c$
$+\,b^{n-3}\;{}^{3}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-3}d$
$+\,b^{n-4}\;{}^{4}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-4}[c^2, e]$
$+\,b^{n-5}\;{}^{5}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-5}[cd, f]$
$+\,b^{n-6}\;{}^{6}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-6}[c^3, ce, d^2, g]$
$+\,b^{n-7}\;{}^{7}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-7}[c^2d, cf, de, h]$
$+\,b^{n-8}\;{}^{8}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-8}[c^4, c^2e, cd^2, cg, df, e^2, i]$
$+\,b^{n-9}\;{}^{9}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-9}[c^3d, c^2f, cde, cb, d^3, dg, ef, k]$
$+\,b^{n-10}\;{}^{10}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-10}[c^5, c^3e, c^2d^2, c^2g, cdf, ce^2, ci, d^2e, dh, eg, f^2, l]$
$+\,b^{n-11}\;{}^{11}\mathfrak{J}^{c}$	$=$	$b^{n-11}[c^4d, c^3f, c^2de, c^2h, cd^3, cdg, cef, ck, d^2f, de^2, di, eh, fg, m]$
&c. &c. $\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\ldots\\ c & d & e & f\ldots\end{pmatrix}$		u. s. w. f.

Das ist das allgemeine Schema, deren die Anfänge in dem oben (S. 280. erwähnten Hindenbürgischen Programm und im Archiv der Math. H. IV. S. 390, 393, 395) vorkommen. Die Complexionen in den Klammern (deren Summen immer mit der von n an b abgezogenen Zahl übereinkommen) sind hier zur Ersparung des Raums n e b e n e i n a n d e r, nicht wie dies (und hier in 72, I.) unter einander geschrieben.

73.

Diese Darstellung gehört zu den Involutionen der vollkommensten Art, und gewinnt durch den allgemeinen Ausdruck, beydes an Kürze und Bequemlichkeit zugleich. Eine niedrigere Involution zu bestimmten Summen, z. B. die für ${}^{7}J$ (in 72 I) aus ihr abzusondern, darf man nur $n = 7$ setzen, und einen Horizontalstrich unter $b^{n-7}\,{}^{7}J$ d. i. $b^{0}\,{}^{7}J$ und dessen (rechter Hand des Gleichheitszeichens befindlichen) Werth ziehen: so giebt das, was über diesen Strich stehet, zusammen die gefoderte Involution für ${}^{7}J$, auf den in (72 I, befindlichen Zeiger bezogen.

Jede nächsthöhere Involution entsteht durch Anfügung eines neuen Gliedes zu den schon gegebenen, folgendergestalt: Es seyen $b^{n-m+2}\,{}^{m-2}J$, und $b^{n-m+1}\,{}^{m-1}J$ das vorletzte und letzte Glied der gegebenen Involution, so findet man daraus das neuanzufügende $b^{n-m}\,{}^{m}J$, wenn man 1) allen Complexionen für ${}^{m-2}J$ (die im vorletzten Gliede in der Klammer stehen) den Buchstaben c vorsetzt 2) in denjenigen Complexionen für ${}^{m-1}J$ (die im letzten Gliede in der Klammer stehen) welche zwey ungleiche Anfangsbuchstaben haben, den ersten Buchstaben mit dem nächstfolgenden des Zeigers vertauscht 3) die Complexionen, wie man sie (nach 1 und 2) gefunden hat, in ihrer Ordnung, neben b^{n-m} in die Klammer setzt. So sieht man, wie man z. B. für $m = 11$, das Glied $b^{n-11}\,{}^{11}J$ aus den beyden vorhergehenden $b^{n-9}\,{}^{9}J$ und $b^{n-10}\,{}^{10}J$ hat finden können, Auf diesem

sem so leichten Wege ist die obige Darstellung, aus den Anfangsgliedern $b^{n-1}b$, $b^{n-2}c$, $b^{n-3}d$ construirt worden; und daraus erhellet, daß man die Wiederholungsexponenten (59) hier eben so leicht bey c, d, e, f... als bey b anbringen kann, zu nicht geringer Verkürzung im Vortrage, und ohne dadurch die Vortheile der Involution aufzuheben oder zu vernichtrn.

74.

Setzt man die (S. 321) in Klammern eingeschloßenen Complexionen so neben die b^{n-1}, b^{n-2}, b^{n-3}, u. s. w. daß zuerst die einbuchstabigen, dann die zwei- dann drei- vier und mehrbuchstabigen Complexionen, in verticalen Reihen, wie in nachstehender figürlicher Anordnung, neben einander folgen, so wird dadurch jene lexikographische in eine Classendarstellung augenblicklich umgewandelt (66).

Combinationen zu unbestimmten Summen n, nach gutgeordneten Complexionen und Classen

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	c				
b^{n-3}	d				
b^{n-4}	e	c^2			
b^{n-5}	f	cd			
b^{n-6}	g	ce d^2	c^3		
b^{n-7}	h	cf de	c^2d		
b^{n-8}	i	cg df e^2	c^2e cd^2	c^4	
b^{n-9}	k	ch dg ef	c^2f cde d^3	c^3d	
b^{n-10}	l	ci dh eg f^2	c^2g cdf ce^2 d^2e	c^3e c^2d^2	c^5
b^{n-11}	m	ck di eh fg	c^2h cdg cef d^2f de^2	c^3f c^2de cd^3	c^4d
0	1	2	3	4	5

75.

Die Darstellung (74) bricht hier, wie die, von der sie abgeleitet worden, mit den zu b^{n-11} gehörigen Complexionen ab. Die Vergleichung derselben mit der Involution (72, 1S. 319.) zeigt folgendes:

1) Die Wiederholungen von b linker Hand des Doppelstrichs in (74) sind die b längst der Senkstriche des Winkels (S. 319).

2) Die Complexionen in den Fächern rechter Hand des Doppelstrichs (74) sind dieselben, die zwischen den horizontalen Schenkeln zweier nächster Winkel (S. 319) liegen.

3. Die Wiederholungen der b (1) nur die danebenstehenden Complexionen (2) gehören so zusammen, daß die erstern jeder einzelnen Complexion vorgesetzt (oder damit verbunden gedacht) werden müssen.

4) Die Zahlenwerthe der Buchstaben in der Darstellung (74) giebt der Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

Dieser bringt durchgängig die Glieder (in 3) auf einerley Summe n. Die Summe in den einzelnen Complexionen (2) ist nehmlich immer so groß, als die Zahl, die von n an b abgezogen wird.

5) Das Absondern niedrigerer Involutionen aus höhern geschieht hier durch Ziehung eines Horizontalstriches, auf eben die Art, wie in (S. 73). Eben so auch der Fortgang für höhere Involutionen durch Anfügung neuer Glieder an die gegebenen.

6) Die Vertical-Reihen oder Colonnen der Complexionen in den Fächern sind unten, nach der Ordnung mit 0, 1, 2, 3, 4 ... bezeichnet. Zählt man nun die Glieder oder Fächer der einzeln Verticalkolonnen von oben herunter $I_1, I_2, I_3, \ldots I_m$,

so

so kann man die Complexionen jedes bestimmten Fachs bestimmt nachweisen, und selbige bequem untereinander vergleichen.

76.

Die Darstellung (74) kann auch von jener andern (72 S. 321) unabhängig, folgendergestalt gefunden werden:

I. Man schreibe die Wiederholungen b^{n-1}, b^{n-2}, b^{n-3}, b^{n-4}, ... in eine Verticalreihe unter einander, und gleich daneben die einzeln Elemente b, c, d, e... in die erste Verticalreihe (75, 6) rechter Hand des Doppelstrichs.

II. Die übrigen Colonnen und Fächer mit ihren Complexionen, z. B. Col. n 7 m, findet man, wenn man allen um zwey Fächer höher liegenden Complexionen in der nächstvorhergehenden Colonne [allen Complexionen in Col. (n — 1) 7 m] den Buchstaben c vorsetzt; 2) in den Complexionen, die unmittelbar über dem Fache liegen, dessen Complexion man sucht [in den Complexionen in Col. n 7 (m — 1)] mit Uebergehung derer, die zwey gleiche Anfangsbuchstaben haben, den ersten Buchstaben mit dem nächstfolgenden des Zeigers vertauscht, und 3) die (nach 1 und 2) gefundenen Complexionen, in Col. n 7 m nach ihrer Ordnung setzt.

Für m = 1 wird 7 (m — 1) = 0. Es giebt nehmlich nirgends ein Fach über den ersten, also auch für Col. n 7 0 nichts umzutauschen.

77.

Für jeden bestimmten Werth von n in (74) z. B. für $n = 10$, sind b^{n-10} mit den zugehörigen, rechter Hand daneben stehenden Complexionen die letzten, mit denen die Darstellung abbricht, so, daß b^{n-11} mit allem was daneben und darunter steht, für den Werth von $n = 10$ nicht weiter in Betrachtung kommt. Was über dem Horizontalstrich unter b^{n-10} (d. h. hier b^0) neben den Wiederholungen von b liegt, enthält zusammen die Combinationsclassen.

$$^{10}A,\ ^{10}B,\ ^{10}C,\ ^{10}D,\ ^{10}E,\ ^{10}F,\ ^{10}G,\ ^{10}H,\ ^{10}J,\ ^{10}K$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \\ c & d & e & f & g\ldots \end{pmatrix}$$

Der Zeiger für die Classen fängt hier von c oder 2 an, weil die Wiederholungen von b schon ein, für allemal in (74) abgesondert sind. Die Complexionen der einzeln Classen ^{10}A, ^{10}B... liegen hier in den Diagonalfächern niederwärts rechter Hand, der erstern ^{10}A durch l; der zweyten ^{10}B durch k; der 3ten ^{10}C durch i; der 4ten ^{10}D durch h; u. s. w. aber nur bis an den Horizontalstrich unter b^{n-10}, weil unter diesem Strich nichts weiter (für $n = 10$) vorkommt.

78.

Exempel. Die Complexionen für

$$^{10}E \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$ aus 74 anzugeben

Für

Für n = 10 findet man nach (77) aus (74)

$${}^{10}\mathfrak{E} = b^4|\underline{g} + b^3\left|\begin{array}{l}cf\\ \underline{de}\end{array}\right. + b^2\left|\begin{array}{l}c^2e\\ \underline{cd^2}\end{array}\right. + b^1|\underline{c^3d} + b^0|\underline{c^5}$$

Die Complexionen sind hier nach (60) neben einander geordnet. Eine von (74) unabhängige involutorische Darstellung derselben unter einander gäbe (58), wenn man mit ${}^{10}E$ eben so verführe, wie dort mit ${}^{10}D$, und für die dortigen a, b, c... hier b, c, d... setzte. Diese Anordnung wäre einerley mit der, wenn man die hier gefundenen Complexionen ganz ausgeschrieben (ohne Wiederholungsexponenten) unter einander setzte.

79.

Zöge man (wie in 58, 59) von jeder Zahl des Zeigers (75, 4) Eins ab, d. i. nehme man anstatt des Zeigers $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \ldots\\ b & c & d \ldots\end{pmatrix}$ für (74) nun $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \ldots\\ c & d & e \ldots\end{pmatrix}$ so würde das einen Einfluß auf die Summen der einzelnen Complexionen in den Fächern der einzeln Verticalreihen haben. Sie würden sämmtlich niedrigere Summen darstellen als jene. Die Complexionen in der ersten Verticalcolonne um 1; die in der zweyten um 2; die in der dritten um 3; u. s. w.

80.

Diesen Unterschied anschaulich darzustellen, darf man nur, statt der einzeln Complexionen, das zugehörige Classenzeichen in die Fächer setzen. Das giebt (α) für 74

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	${}^{2}A$				
b^{n-3}	${}^{3}A$				
b^{n-4}	${}^{4}A$	${}^{4}B$			
b^{n-5}	${}^{5}A$	${}^{5}B$			
b^{n-6}	${}^{6}A$	${}^{6}B$	${}^{6}C$		
b^{n-7}	${}^{7}A$	${}^{7}B$	${}^{7}C$		
b^{n-8}	${}^{8}A$	${}^{8}B$	${}^{8}C$	${}^{8}D$	
b^{n-9}	${}^{9}A$	${}^{9}B$	${}^{9}C$	${}^{9}D$	
b^{n-10}	${}^{10}A$	${}^{10}B$	${}^{10}C$	${}^{10}D$	${}^{10}E$
b^{n-11}	${}^{11}A$	${}^{11}B$	${}^{11}C$	${}^{11}D$	${}^{11}E$
u.	s.	w.	f.		

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ c & d & e & f & g & h & i & k & l & m \end{pmatrix}$

(β) nach 79

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	${}^{1}A$				
b^{n-3}	${}^{2}A$				
b^{n-4}	${}^{3}A$	${}^{2}B$			
b^{n-5}	${}^{4}A$	${}^{3}B$			
b^{n-6}	${}^{5}A$	${}^{4}B$	${}^{3}C$		
b^{n-7}	${}^{6}A$	${}^{5}B$	${}^{4}C$		
b^{n-8}	${}^{7}A$	${}^{6}B$	${}^{5}C$	${}^{4}D$	
b^{n-9}	${}^{8}A$	${}^{7}B$	${}^{6}C$	${}^{5}D$	
b^{n-10}	${}^{9}A$	${}^{8}B$	${}^{7}C$	${}^{6}D$	${}^{5}E$
b^{n-11}	${}^{10}A$	${}^{9}B$	${}^{8}C$	${}^{7}D$	${}^{6}E$
u.	s.	w.	f.		

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ c & d & e & f & g & h & i & k & l & m & \ldots \end{pmatrix}$

Beyde,

Beyde, dem äussern Ansehen nach ganz verschiedene, Schemata α und β geben, jedes auf den unten beygefügten Zeiger bezogen, die Complexionen der Darstellung (74).

81.

Um $\overset{{}^{10}D}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ b & c & d & \ldots \end{bmatrix}}$ durch 80 α oder β zu bestimmen, darf man nur $n = 10$ setzen (77) so findet man

nach α; $\;{}^{10}D = b^3\,{}^{7}A + b^2\,{}^{8}B + b^1\,{}^{9}C + b^0\,{}^{10}D$

nach β; $\;{}^{10}D = b^3\,{}^{6}A + b^2\,{}^{6}B + b^1\,{}^{6}C + b^0\,{}^{6}D$

wo bloß der Zeiger in (80, α, β) den Unterschied macht. Diese Classe ${}^{10}D$ wird nehmlich hier in Summen von Classen zerlegt, wie in (58, 59); nur daß hier b, c, d..., statt der dortigen a, b, c... zu setzen.

82.

Die Vortrefflichkeit der involutorischen Darstellung (74) wird folgendes in der Kürze zeigen:

1) Die rein-combinatorische Entwickelung (76, I, II.) und Anordnung (74) ist, bey ihrer Allgemeinheit, dennoch äußerst leicht, und verstattet, die Wiederholungsexponenten, bey den Elementen der Complexionen unmittelbar anzubringen, ohne die Involution zu zerstören.

2) Die Wiederholungen von b, so wie die ein- zwey- drey- vier... buchstabigen Complexionen aus c, d, e, f... sind in einzelne Vertikalreihen, nach der Ordnung, classenweise (nach gleichnamigen

Classen

Classen, aber zu verschiedenen Summen) gesondert, jene nach fallenden, diese nach steigenden Summenexponenten (80).

3) Die Complexionen in den einzelnen Horizontalreihen oder Fächern hinter dem Doppelstrich stellen einzelne Classen für sich, nach dem beygefügten Zeiger dar. Auf die nebenstehenden b zugleich mit bezogen, sind es diejenigen Complexionen, die immer eine gleiche Anzahl vorgesetzter b enthalten.

4) Die zusammengehörigen Elemente der lexikographischen Ordnung aus b, c, d... findet man in den Horizontalreihen (72, IV); der Classendarstellung in den Diagonalreihen (77). Die hier getroffene figürliche Anordnung stellt nehmlich beyder Zusammenhang anschaulich dar.

5) Das Absondern niedrigerer Involutionen (bestimmter und unbestimmter Summen) aus höhern, so wie der Fortgang für höhere Involutionen aus den gegebenen, geschieht mit größter Leichtigkeit (75, 5).

6) Die wenigen Complexionen in (74) vertreten, wenn man nach einander $n = 1, 2, 3, 4 \ldots 11$ setzt, vollkommen die Stelle der Tafel (Infin. Dignit. p. 166. und Nov. Syst. Perm. p. LVIII) und noch weiter, denn der Werth $n = 11$ giebt auch die sämmtlichen Classen zur Summe 11, davon in jener Tafel nichts vorhanden ist. Die Buchstabencomplexion der Tab. V. (Infin. Dign. p. 167) aus (74) zu schreiben, darf man nur

statt

statt b, c, d, e, f, g, h, i, k, l (in 68)
hier α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ setzen

7) Obschon hier nach der Vorschrift (76, I. II. folgende Complexionen und Fächer aus vorhergehenden abgeleitet werden, so kann man gleichwohl jede einzelne Vertical- Horizontal- und Diagonalreihen und Fächer ganz independent von andern, außer der Ordnung, schaffen. Das giebt insonderheit (80, β) klar und dentlich zu erkennen, weil man die Complexionen jeder Classe und Summe unmittelbar darstellen kann (55, 57, 58).

83.

Das zusammen zeigt die Güte und Vortrefflichkeit sowohl der combinatorischen Methode überhaupt, als der Darstellung (74) insbesondere. Simplicität und Allgemeinheit bey der Entwickelung Kürze und Deutlichkeit bey der Anordnung, Mannigfaltigkeit und Leichtigkeit bey der Anwendung, sind hier aufs innigste mit einander verbunden. Das ist die von Hindenburg (im polynomischen Lehrsatz. S. 54. Note c) versprochene endliche Vollendung. Was Herr Professor Klügel in der dortigen Note von den Vorzügen der combinatorischen Involutionen überhaupt sagt, das gilt in einem eminenten Grade, vornehmlich von dieser letzten, noch mehr als von jeder andern in (71) nach welcher die in (74) im Ganznn geformt, und, mutatis mutandis, eingerichtet ist. Die allgemeine Formel, deren nähere Entwickelung die Darstellung (74) giebt, wird in Folgendem vorkommen.

84.

84.

So viel schien mir nöthig, von den combinatorischen Operationen, vorzüglich den Involutionen, im Zusamenhange hier beyzubringen. Die Aufführung bestimmter Vorschriften für die Entwickelung und Darstellung dieser Operationen ist unumgänglich nothwendig. Sie betrift die unmittelbare Anwendung der allerersten Gründe der Sache, und darf der Willkühr des Lesers nicht überlassen bleiben. Auch würde dieser nicht (selbst nicht einmal der geübte Analyst, sogleich und auf der Stelle) immer die kürzesten, und für gewisse Absichten zunächst passenden Regeln und Vorschriften auffinden. Auf solche muß man sich also beziehen können, und darum müssen sie auch irgendwo deutlich verfaßt und beschrieben vorhanden seyn. Die Sache (deren Nothwendigkeit gleichwohl einmal ist bezweifelt worden), so angesehen, spricht für sich selbst, und Herr Professor Klügel ist derselben Meinung, (Siehe die in 83 genannter Schrift S. 89). Hinterher kann jedem freystehen und es wird auch keine Schwierigkeit haben, die Vorschriften nach Gefallen für sich abzuändern, nach Umständen zu erweitern und durch neue zu vermehren.

85.

Ich hoffe, die Leichtigkeit der hier angewiesenen Verfahren wird dem Leser von selbst einleuchten. Sollte aber diese combinatorische Theorie, so einfach sie an sich ist, dem Anfänger gleichwohl verwickelt schei-

scheinen, weil man sie, bey der Ausdehnung, die sie in der Anwendung hat, nicht mit zwey Worten abthun kann: so kann ich einen solchen nichts Passenderes und Wahreres entgegensetzen, als die Antwort, die Herr Hofrath Lichtenberg, in einem ähnlichen Falle, bey einer gleichfalls sehr einfachen nur dem Scheine nach verwickelten , physischen Theorie gegeben hat. — „Man muß viel Worte machen, nicht, „weil die Theorie selbst verwickelt ist, sondern weil „der Anwendungen die daraus erklärt werden können „so viele sind, Man sagt nichts anders, man wendet es nur auf etwas anders an.“ (Erxleb. Anfangsg. der Naturl. §. 549. l. S. 525). Alles fließt auch hier (wie dort) aus einer einzigen sehr einfachen Voraussetzung: Die Veränderungen bey rein-„combinatorischen Verrichtungen, lassen sich auf bloßes Ansetzen oder Beyfügen, Wegnehmen oder Absondern, Aus- oder Umtauschen, der vorgegebenen Elemente, zurückführen (S. 239. II.).“

Vergleichung der Zeichen für combinatorische Operationen; einfachste Relationen derselben in diesen Zeichen.

86.

Die Zeichen selbst, so viel deren hier aufzuführen nöthig schien sind schon im Vorhergehenden erklärt. Hier kommt es nur auf ihre Vergleichung gegen einander an, und wie sich combinatorische (und in der Folge auch analytische) Sätze bequem durch sie ausdrücken lassen.

(*) Va-

(α) Variationen überhaupt, mit Wiederholungen.

Var (a b c d) simpl.

87.

$$'\mathcal{J} = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots + 'N$$

(a b c d e....)

Die einzelnen Classen $'A$, $'B$, $'C \ldots$ beziehen sich auf (20, α), die Involutionen $'\mathcal{J}$ auf (20, β) in sofern diese Darstellung Summen von Classen involutorisch enthält. Die Elemente a. b, c, d, werden jederzeit, als der zu bearbeitende Stoff, den Zeichen $'\mathcal{J}$ und $'A$ $'B \ldots$ unten beygefügt.

88.

Die Variationen gegebener Elemente enthalten alle Combinationen derselben, mit allen Permutationen. Für jede einzelne Complexion einer Variationsclasse, müssen in derselben Classe auch alle ihre Versetzungen vorkommen. Man kann also wegen der Versetzungen gegebener Elemente auf die Variationsclassen verweisen, in denen sie enthalten sind, und die besondern Complexionen welche diese Versetzungen zusammen ausmachen durch den beygefügten Zeiger nachweisen. So ist z. B.

$$\text{Perm.}(a^4b^3) = \text{Perm}\begin{pmatrix}1111222\\ aa\,aabbb\end{pmatrix} = \overset{10}{}G(aaaabbb)$$

$$\text{Perm.}(a^3b^2c^4) = \text{Perm.}\begin{pmatrix}111223333\\ aaa\,bb\,cccc\end{pmatrix} = \overset{19}{}\mathcal{J}(aaabbcccc)$$

Die Auflösung giebt (15) wie bey dem dortigen Exempel (16). Sie ist nemlich eine bequeme Auflösung für den Fall, Permutationen als (beschränkte

Varia-

Variationsclassen zu betrachten, in welchen bestimmte Elemente, aber jedes nur nach einer bestimmten Anzahl, vorkommen. Das kann man sehr bequem (wie hier) durch wirkliche Wiederholung der Elemente ausdrücken, welche zusammen die erste Permutationscomplexion (als die Repräsentantinn allerübrigen) darstellen. Ferner

$$\text{Perm. (abcd)} = \text{Perm.} \binom{1234}{\text{abcd}} = \overset{10}{}D' \text{(abcd)}$$

Die Auflösung giebt (15) und steht vollendet in (17) auch hier hat man bequeme Auflösungen für Variationen, aus bestimmten Elementen zu bestimmten Summen, aber ohne Wiederholungen, von welchen im Vorhergehenden nichts ist beygebracht worden.

Die Complexionen von $\overset{10}{}D'$ (1234) sind mit unter denen von $\overset{10}{}D$ (1234567) enthalten, die (Infi. Dign. p. 177) stehen; daß sich also jene (ohne Wiederholungen aus diesen (mit Wiederholungen) auslesen ließen. Die angeführten Auflösungen zeigen, wie man sie leichter gradezu finden kann.*)

(β) Com-

*) Man könnte auch die Combinationen (wie hier die Permutationen) als beschränkte Variationen ansehen, deren Complexionen gut geordnet wären, und in dieser Rücksicht, nur eine einzige combinatorische Operation die Variation, annehmen. So wahr daß an sich ist, und so sehr das Ganze dadurch an Simplicität gewinnt, so ist es dennoch besser bey dem Vortrage der ersten Gründe der Wissenschaft von dieser Allgemeinheit nicht auszugehen, und drey combinatorischen Operatio-

(β) Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen.
Comb. (a b c d) simpl.

89.

$$'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots + 'N.$$
(a b c d e...)

Die einzelnen Classen 'A, 'B, 'C... stehen in (31, α) die Involution 'J in (31, β). Auch hier sind den Zeichen 'J und 'A, 'B... die Elemente (a b c d...) unten beygefügt (86).

Einzelne Classen durch Summen von Classen (71).

90.

$$'N = a^n + a^{n-1}\,'A + a^{n-2}\,'B + a^{n-3}\,'C \ldots + a^0\,'N$$
(a b c...) (b c d e...)

Die Classen 'A, 'B, 'C... giebt (31, α) nur daß man hier b c d... statt der dortigen a b c... brauchen, oder die erstern für die letztern setzen muß. Die Beschaffenheit, die Zahl, der Ort der unten beygefügten Elemente zeigt nehmlich jederzeit, was für Elemente die Entwickelung und Darstellung der darüberstehenden Classen zu gebrauchen.

Fol-

tionen als besondere ihrer Art anzusehen, und um so mehr, da diese Unterschiede beim Gebrauche häufig vorkommen. Beym Vortrage der Regeln hingegen, kann man auf diese Dependenz Rücksicht nehmen; daher ich auch im Vorhergehenden die Verfahren für Variationen, denen für Combinationen vorgesetzt, der letztern Abhängigkeit von den erstern gezeigt, auch hier, wegen der Permutationen, auf Variationen verwiesen habe.

Folgende Classen aus unmittelbar vorhergehenden (31, 32)

91.

$$'N = a\,\overset{-1}{'N} + b\,\overset{-1}{'N} + c\,\overset{-1}{'N} \ldots + \psi\,\overset{-1}{'N} + \omega\,\overset{-1}{'N}$$
$$(ab \ldots \psi\omega)\ (ab \ldots \omega)\ (bc . \omega)\ (cd . \omega)\ (\psi\omega)\ \omega$$

Diese Formel enthält die Auflösung (32), symbolisch dargestellt. Bei dieser werden nehmlich die Ordnungen jeder folgenden Classe $'N$, aus den Ordnungen der unmittelbar vorhergehenden $\overset{-1}{'N}$ durch succeſſives Vorschreiben der Buchstaben a, b, c ... gefunden

Complexionen mit einerley Endbuchstaben.

92.

$$(1 + {}'A + {}'B + {}'C + {}'D + {}'E \ldots + \overset{-1}{'N})\, q$$
$$(a\ b\ c\ d\ e \ldots q)$$

Nämlich für den Endbuchstaben q, durch alle Classen, von der ersten bis der nten; und so auch für andere Endbuchstaben und Classen.

Complexionen der Endbuchstaben a, b, c, d... nach der Reihe.

93.

$$'N = a^n + \overset{-1}{'N}b + \overset{-1}{'N}c + \overset{-1}{'N}d + \text{etc.} \ldots$$
$$(a\ b\ c) \ldots\ (a\ b)\ (a\ b\ c)\ (a\ b\ c\ d)$$

Für die Complexionen jedtr einzelnen Classe $'N$ aus den Complexionen der unmittelber vorhergehenden Classe $\overset{-1}{'N}$ mit Beziehung auf die untergesetzten

Ele-

Elemente (ab) oder (abc) u. s. w. (90) In der Anwendung kommen (92, 93) weit seltener vor, als (90 91). Hier sollen sie bloß zeigen, wie außerordentlich leicht solche Forderungen combinatorisch sich abthun lassen. Die Formeln (90, 92) geben Beispiele von Veränderung der Elemente, in Absicht auf Menge und Beschaffenheit, wo man zugleich mit auf den Ort sehen muß (90) wo sie stehen. Verschiedene Elemente (auch Zeiger) kommen nicht selten bey einer und derselben Formel vor, und werden mit großem Nutzen gebraucht. Die oben beygefügten Buchstabenelemente beziehen sich auch hier zunächst, wie die Zahlenelemente bey der Aufgabe (S. 309), auf die durch sie zu bezeichnenden Ordnungen.

γ) Variationen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen.

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e \ldots \end{pmatrix} \mathrm{num}\ n\ ^{*})$$

94.

Classen-Complexionen (37, 38).

$${}^{n}\mathfrak{J} = {}^{n}A \dagger {}^{n}B \text{ ſſ } {}^{n}C \dagger {}^{n}D \dagger {}^{n}E \ldots \dagger {}^{n}N$$

*) Bey den Operationen zu den bestimmten Summen, wenn man sie auch schon von Zahlen unabhängig (37, 40, 46, 49, 55, 57) darstellen kann, muß man doch Zahlen und Buchstaben, wie sie zusammengehören im Zeiger angeben, weil die Summenexponenten der Classen von den Zahlenwerthen abhangen, und bey andern Zahlen anders werden (79, 80); und so muß man den Zeiger (wie hier in 94) von den einzelnen Elementen, Buchstaben (90, 91, 92, 93) oder Zahlen (65, S. 309) unterscheiden. Zuweilen setzt man den Zeiger wo einzelne Elemente zureichten (15, 17, 20, 31) anzudeuten, die Regeln der Operationen erstrecken sich gleich leicht auf beyderley Elemente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

Lexikographische Complexionen (37, 40)

95.

$${}^n\mathcal{J} = {}^n\mathcal{A} + {}^n\mathcal{B} + {}^n\mathcal{C} + {}^n\mathcal{D} + {}^n\mathcal{E} \ldots + {}^n\mathcal{N}$$

(Der Zeiger, wie vorher).

Für mehrere Reihen p, q, r, s, t... nach Classen (44)

96.

$$\overset{tsrqp}{{}^nJ} = \overset{p}{{}^nA} + \overset{qp}{{}^nB} + \overset{rqp}{{}^nC} + \overset{srqp}{{}^nD} + \overset{tsrqp}{{}^nE} \text{ etc.}$$

(Der Zeiger wie in 24)

Wegen der Lexikographischen Anwendung für $\overset{\ldots tsrqp}{{}^n\mathcal{J}}$ suche man die Darstellung in (45).

(δ) Combinationen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen.

$$\text{Comb.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e \ldots \end{pmatrix} \text{ num. } n.$$

Classen = Complexionen (46, 47.)

97.

$${}^nJ = {}^nA + {}^nB + {}^nC + {}^nD + {}^nE \ldots + {}^nN.$$

Lexikographische Complexionen (46, 48, 49.)

98.

$${}^n\mathfrak{J} = {}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B} + {}^n\mathfrak{C} + {}^n\mathfrak{D} + {}^n\mathfrak{E} \ldots + {}^n\mathfrak{N}$$

(Der Zeiger wie vorher).

Wegen der beyderley (48, 49) aufgeführten lexikographischen Formen, kann man auch das Arch. der Math. (H. IV. S. 397. und 409, 414) nachsehen.

Wegen

Wegen der gebrauchten Zeichnung für lexikographischen Ordnungen überhaupt (Ebendas. S. 396 Note) für Fälle wo die Combinationsclasse noch mit Reihenexponenten zu versehen sind, hier (53).

Höhere Involutionen, aus nächst vorhergehenden niedrigern *)

99.

$$
{}^{n}\mathfrak{J} = 1\;{}^{n-1}\mathfrak{J} + {}^{n}\mathfrak{J}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e \ldots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{bmatrix}
$$

Wegen der beyden ersten Involutionen sehe man (46, 58), wegen der dritten, deren Zeiger von b (d. i. hier 2) anfängt (65. S. 309). Hieher gehören die drey vom Professor Klügel (Der polyn. Lehrsatz S. 61.) aufgeführten Beyspiele.

Höhere

*) Von einer andern Zusammensetzung höherer Involutionen aus niedrigern, wo der Zeiger mehrmals verändert wird (Arch. der Math. H. IV. S. 418, d). Statt des dortigen [JL] muß das hiesige $\mathfrak{J}$ gesetzt werden, welches damals bey dem Drucke nicht zur Hand war. Dieser Umstand hat veranlaßt; daß der Analogie wegen (Ebend.) auch [Js] gesetzt werden mußte, wo das hiesige J allein hinreichend gewesen wäre. Eben so ist in Herrn von Praßens Abhandlung (usus Log. in Theoria Equationum Lipsia 1793) aus Mangel der zugehörigen Typen überall J und $\mathcal{J}$ statt $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}$ gesetzt werden. Dieses zu erinnern ist nöthig theils um Anstoß zu vermeiden, theils aber auch, weil die Beibehaltung derselben Zeichen nirgends so unerlaßlich, nothwendig und wichtig ist, als bei der combinatorischen Analysis

Höhere Involutionen aus Summen der niedrigern (S. 320, V).

100.

$${}^{n}J = a^{n-1}\,a + a^{n-2}\,{}^{2}J + a^{n-3}\,{}^{3}J + a^{n-4}\,{}^{4}J \ldots + a^{0}\,{}^{n}J$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\ldots\\ a & b & c & d\ldots\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots\\ b & c & d & e & f\ldots\end{pmatrix}$$

Lexikographische Darstellung der vorigen Formel.

101.

$a^{n-1}a$
$a^{n-2}b$
$a^{n-3}c$
$a^{n-4}[b,{}^{2}d]$
$a^{n-5}[bc,e]$
u. s. w. S. 321.

Sie ordnet die Glieder so, daß die Complexionen aus b, c, d ... die gleichviel a vor sich haben, in eine horizontale Reihe fallen. Für den Zeiger $\begin{pmatrix}1\,2\,3\ldots\\ a\,b\,c\ldots\end{pmatrix}$ gehen die Complexionen, neben den Wiederholungen von a, in steigender Summe 1, 2, 3, 4, ... fort; mit den Wiederholungen von a verbunden, geben sie durchaus die Summe n. Die b, c, d... der Darstellung (S. 321) sind hier mit a, b, c... verwechselt. Für $n = 5$ wären hier schon alle Complexionen für J vorhanden.

Einzelne Klassen durch Summen von Klassen. (Nov. Syst. p. LV. 9.)

102.

$${}^{v+n}N = a^{n-1}\,{}^{v}A + a^{n-2}\,{}^{v}B + a^{n-3}\,{}^{v}C \ldots + a^{n-m}\,{}^{v}M$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\ldots\\ a & b & c & d\ldots\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\ldots\\ b & c & d & e\ldots\end{pmatrix}$$

Diese Formel (mit Binomial- und Polynomial-Coefficienten versehen wie sie für die Dignitäten des Polynomiums paßt) steht in der oben angezeigten Stelle

der

Hindenbürgischen Schrift. Hier habe ich bloß n und v verwechselt, um n und N auf einerley Zahlenwerth zu setzen. Das allgemeine mte Glied ist hier $a^{n-m}\,{}^{v}M$. Sobald n oder v (oder beydes zugleich) = m werden, bricht die Formel mit diesem Gliede ab.

Für ${}^{10}D \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\ldots\\ a & b & c\ldots\end{pmatrix}$ wäre N = D, also n = 4, und v + 4 = 10 folglich v = 6

$$\text{also } {}^{10}D = a^3\,{}^{6}A + a^2\,{}^{6}B + a^1\,{}^{6}C + a^0\,{}^{6}D$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\ldots\\ a & b & c\ldots\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\ldots\\ b & c & d & e\ldots\end{pmatrix}$$

vollkommen so, wie S. 305.

Eben so fände man den Werth für ${}^{15}E$, wie S. 306.

Involutorische Classendarstellung der vorigen Formel.

103.

a^{n-1} a	a^{n-1} a
a^{n-2} b	$a^{n-2}\,{}^{1}A$
a^{n-3} c	$a^{n-3}\,{}^{2}A$
a^{n-4} $[d, b^2]$	a^{n-4} $[{}^{3}A,\ {}^{2}B]$
a^{n-5} $[e, bc]$	a^{n-5} $[{}^{4}A,\ {}^{3}B]$
u. s. w. S. 324.	u. s. w. S. 329, β

Der Zeiger für die Klassen ${}^{1}A$, ${}^{2}A\ldots{}^{2}B$, ${}^{3}B\ldots$ u. s. w. ist $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\ldots\\ b & c & d\ldots\end{pmatrix}$ Auch hier sind die b, c, d... (in 74 und 80 β) mit a, b, c... verwechselt worden. Die einzelnen Classen liegen in den Diagonalen niederwärts (77) und so kommt hier die Bedeutung von n mit der in (102) nicht überein.

(r) Ver=

(c) Verschiedene Relationen der Variationen und Combinationen, mit und ohne Summenexponenten.

Variat. ohne und mit Summenexponenten.	Combin. ohne und mit Summenexponenten.
104.	105.
$'A = {}^{1}A + {}^{2}A + {}^{3}A\,..$	$'\mathrm{A} = {}^{1}\mathrm{A} + {}^{2}\mathrm{A} + {}^{3}\mathrm{A}$
$'B = {}^{2}B + {}^{3}B + {}^{4}B\,..$	$'\mathrm{B} = {}^{2}\mathrm{B} + {}^{3}\mathrm{B} + {}^{4}\mathrm{B}$
$'C = {}^{3}C + {}^{4}C + {}^{5}C\,..$	$'\mathrm{C} = {}^{3}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{C} + {}^{5}\mathrm{C}$
$'D = {}^{4}D + {}^{5}D + {}^{6}D\,..$	$'\mathrm{D} = {}^{4}\mathrm{D} + {}^{5}\mathrm{D} + {}^{6}\mathrm{D}$

106.

Die Summe in (104) giebt

$$\left\{\begin{array}{l} 'A \\ + 'B \\ + 'C \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{llll} & {}^{1}A + {}^{2}A + {}^{3}A \ldots \\ + & {}^{2}B + {}^{3}B + {}^{4}B \ldots \\ + & {}^{3}C + {}^{4}C + {}^{5}C \ldots \\ & \;\;:\quad\;\; :\quad\;\; : \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} {}^{1}A \\ + ({}^{2}A + {}^{2}B) \\ + ({}^{3}A + {}^{3}B + {}^{3}C) \\ \;\;:\quad\;\; :\quad\;\; : \end{array}\right\}$$

Die Summe in (105) giebt

107.

$$\left\{\begin{array}{l} '\mathrm{A} \\ + '\mathrm{B} \\ + '\mathrm{C} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} {}^{1}\mathrm{A} + {}^{2}\mathrm{A} + {}^{3}\mathrm{A} \\ + {}^{2}\mathrm{B} + {}^{3}\mathrm{B} + {}^{4}\mathrm{B} \\ + {}^{3}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{C} + {}^{5}\mathrm{C} \\ \;\;:\quad\;\; :\quad\;\; : \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} {}^{1}\mathrm{A} \\ + ({}^{2}\mathrm{A} + {}^{2}\mathrm{B}) \\ + ({}^{3}\mathrm{A} + {}^{3}\mathrm{B} + {}^{3}\mathrm{C}) \\ \;\;:\quad\;\; :\quad\;\; : \end{array}\right\}$$

Eben so ist, bey mehreren Reihen p, q, r, s ... (24, 25)

108.

$$'\overset{p}{A} = {}^{1}\overset{p}{A} + {}^{2}\overset{p}{A} + {}^{3}\overset{p}{A} + {}^{4}\overset{p}{A} + \text{etc.}$$

$$'\overset{qp}{B} = {}^{2}\overset{qp}{B} + {}^{3}\overset{qp}{B} + {}^{4}\overset{qp}{B} + \text{etc.}$$

$$'\overset{rqp}{C} = {}^{3}\overset{rqp}{C} + {}^{4}\overset{rqp}{C} + \text{etc.}$$

Die Summe aus (321) giebt.

109.

$${}^{1}\overset{p}{A} + {}^{1}\overset{qp}{B} + {}^{1}\overset{rqp}{C} + \text{etc.} = {}^{2}\overset{p}{A} + ({}^{2}\overset{'n}{A} + {}^{2}\overset{rqp}{B})$$
$$+ ({}^{3}\overset{p}{A} + {}^{3}\overset{qp}{B} + {}^{3}\overset{rqp}{C}) + \text{etc.}$$

Variatioen an sich und Combinationen.

110.

$$\begin{array}{lll} \text{Für } {}^{1}A = \mathfrak{a}\,{}^{1}\mathrm{A} & \text{ist} & {}^{1}A + {}^{1}B + {}^{1}C + \ldots \\ \phantom{\text{Für }} {}^{1}B = \mathfrak{b}\,{}^{1}\mathrm{B} & & = \\ \phantom{\text{Für }} {}^{1}C = \mathfrak{c}\,{}^{1}\mathrm{C} & & \mathfrak{a}\,{}^{1}\mathrm{A} + \mathfrak{b}\,{}^{1}\mathrm{B} + \mathfrak{c}\,{}^{1}\mathrm{C} + \ldots \end{array}$$

Die Variationen sind nemlich nichts anders als Combinationen, mit allen Versetzungen der Elemente in den einzelnen Complexionen. Wo also die Versetzungen, (wie bey die Faktoren der Produkte) nichts verschiedenes geben, darf man sie nur überhaupt zählen, und ihre Zahl den zugehörigen Combinations-Complexionen, (welche die übrigen repräsentiren, beyfügen. Das geschieht durch die Versetzungszahlen a, b, c... (Nov. Syst. Perm. p. IX. 24 und XL, 10) deren Werth für jede Complexion gegeben ist. (Ebend. p. YXIV. 23. und hier S. 321; 1, 2)

Combinationen mit und ohne Summenexponenten.

111.

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{a}\,{}^{1}\mathrm{A} = & \mathfrak{a}^{1}\mathrm{A} & + \mathfrak{a}\,{}^{2}\mathrm{A} & + \mathfrak{a}\,{}^{3}\mathrm{A} & + \mathfrak{a}\,{}^{4}\mathrm{A} \ldots \\ \mathfrak{b}\,{}^{1}\mathrm{B} = & & \mathfrak{b}\,{}^{2}\mathrm{B} & + \mathfrak{b}\,{}^{3}\mathrm{B} & + \mathfrak{b}\,{}^{4}\mathrm{B} \ldots \\ \mathfrak{c}\,{}^{1}\mathrm{C} = & & & \mathfrak{c}\,{}^{3}\mathrm{C} & + \mathfrak{c}\,{}^{4}\mathrm{C} \ldots \\ \mathfrak{d}\,{}^{1}\mathrm{D} = & & & & \mathfrak{d}\,{}^{4}\mathrm{D} \ldots \\ \text{= =} & & & & \text{= =} \end{array}$$

Die Summe (aus 111) giebt

112.

112.

$$a'A + {}'B + c'C + \ldots = a^1A + (a^2A + b^2B)$$
$$+ (a^3A + b^3B + c^3C) + \ldots$$

Für die Fälle wo $'A = a'A$, $'B = b'B$ u. s. w. (110) ist auch

113.

$$'A + {}'B + {}'C + \ldots = a^1A + (a^2A + b^2B)$$
$$+ (a^3A + b^3B + c^3C) + \ldots$$

114.

Diese Formeln und Vergleichungen, wenn man einmal die Bedeutung der dabey vorkommenden combinatorischen Zeichen gut inne hat, sind so leicht, daß man sie nur zu **sehen** braucht, um sie sogleich **durchzusehen**.

Da hier überall keine andern Complexionen als solche vorkommen, bey denen Wiederholungen verstattet sind, so war es nicht nöthig, solches hier mit anzumerken. In andern Fällen darf man nur die Buchstaben a. r. (admissis repetitionibus oder o. r. (omissis repetitionibus) beyfügen und z. B. schreiben.

Var. (a b c d . . .) simpl. a. r.

Var. (a b c d . . .) simpl. o. r.

II. Die unmittelbarste Anwendung der Combinationslehre zeigt sich bey dem allgemeinen Produkten- und Potenzenprobleme der Reihen.

115.

Die Combinationslehre deutet überhaupt die in bestimmter Ordnung gegebenen Dinge oder Elemente

durch

durch die Folge der Zahlen 1 2 3 4... oder der Buchstaben a b c d... an. Bey der Verbindung dieser Elemente zu einer zusammengesetzten Ganzen, abstrahirt sie von aller Bedeutung und betrachtet z. B. die Complexionen ab und ba als bloße Nebeneinanderstellungen der beyden Dinge a, b noch mit dem Unterschiede, daß in ab das Element a die erste und b die zweyte Stelle einnimmt, welches bei ba umgekehrt sich verhält.

116.

Bey dem Gebrauche der Combinationslehre aufserhalb ihren Grenzen hingegen, muß man wissen, was für Dinge die a,b,c,d... bezeichnen, muß die Beschaffenheit dieser Dinge und welche Beziehung sie auf einander haben, genauer kennen. In der Hindenbürgischen Schrift (Nov. Syst. Perm. p. XXV. XXVI.) sind mehrere Anwendungen der Combinationslehre auf verschiedene Künste und Wissenschaften in der Kürze und nur überhaupt angegeben. Hier genügt es bey derjenigen Wissenschaft stehn zu bleiben, welche an der wohlthätigen Einwirkung der Combinationslehre den unmittelbarsten Antheil nimmt, den größten Vortheil davon zieht und gleichwohl bisher von dieser Seite fast ganz übersehen worden ist — der Analysis.

117.

Läßt man die Buchstaben a, b, c... allgemein ausgedrückte Größen oder Zahlen bedeuten, so darf nur noch angegeben werden, wie man ihre Verbindungen ab, abc u. d. gl. zu nehmen habe. An sich

nem-

nemlich kann ab in arithmetischer Bedeutung eben so wohl a + b als a — b und a.b und a : b und a^b und $\sqrt[a]{b}$ u. s. w. ausdrücken. Schränkt man aber so lange nichts anders erinnert wird — die Bedeutung der (für sich oder in Beziehung auf Zahlen im Zeiger) gegebenen Elemente a, b, c, d... auf a + b + c + d,.. u. ihre Verbindungen ab, abc, a^2b... auf a.b, a.b.c, a.a.b (d. i. a^2b)... ein, so entstehen dadurch Produkte aus einzelnen Faktoren, die Wiederholungsexponenten (59) verwandeln sich in Potenzexponenten, und die im vorhergehenden angeführten bloß combinatorischen Formeln und Relationen zusammengehöriger Dinge oder Elemente überhaupt, erhalten dadurch sogleich bestimmte arithmetische oder algebraische Bedeutung.

118.

Für die Anwendung dieser und anderer combinatorischen Formeln und Relationen auf die Analysis, ist also nur noch übrig nachzuweisen, bey was für analytischen Problemen sie vorkommen; überhaupt — wo und wie sie zu gebrauchen, und im Calkul einzuführen sind. Das nennt Hindenburg, statt der algebraischen und transzendentischen (oft sehr verwickelten und schweren) Operationen, die gleichgültigen (einfachern und leichtern) combinatorischen setzen, und benutzen. Das von Hindenburg hieben eingeführte Verfahren, ist sowohl in Absicht auf Entwickelung als Darstellung, von dem gewöhnlichen wesentlich unterschieden; daher auch die Einführung jener Operationen statt dieser

ser, in der **Erklärung** namentlich vorkommt, die Hindenburg ohnlängst von der **combinatorischen Analysis** gegeben hat. (Arch. der Math. H. IV. S. 423).

119.

Die Hindenbürgischen Combinationszeichen sind übrigens so geformt, ihre Zusammensetzung so eingerichtet, daß sie das, wofür sie gebraucht werden, nicht nur aufs deutlichste anzeigen, sondern auch alle andere nicht combinatorische Veränderungen sich bei ihnen anbringen, und durch sie nachweisen lassen. Sie können daher auch andere, von ihnen ganz verschiedene Methoden leichter angepaßt werden, als man dem ersten Ansehen nach vermuthen sollte. Daß man dabey etwas neues lernen müsse, was man bisher noch nicht gewußt und in Ausübung gebracht hat, ist freilich eine nothwendige Bedingung, die man sich aber gerne wird gefallen lassen, wenn man eines theils sieht, wie leicht dieser combinatorische Kalkul ist, anderntheils, welche Schwierigkeiten anderer Methoden hierbei umgegangen werden. Nach einer von Herrn **Hofrath Kästner** bey ganz anderer Gelegenheit *) gethanen Aeußerung zu urtheilen, gehört die Hindenbürgischen Combinationsmethode offenbar zu den **leichtesten**; wenn man mit diesem vortreflichen Mathematiker, diejenigen Verfahren überhaupt leicht nennt, wodurch man das Gesuchte **leicht** findet, sollte man auch zuvor einiges, was nicht ganz leicht

*) Bei einigen von Herrn Professor **Buck** bekannt gemachten neuen Auflösungen einiger schweren trigonometrischen Aufgaben. (Kästn. Eb. Trigon. Satz 15.)

leicht war, haben erlernen müssen. Das, was man hier zu lernen hat, hat aber auch nicht einmal den Anstrich von Schwierigkeit: es ist leichter als alles, was man sich nur immer leichtes denken mag. Das kann und wird vielleicht jedem Leser, der noch gar nichts von der Sache weiß, und von ungefähr auf diese Stelle trift, unglaublich scheinen — es ist dennoch buchstäblich wahr.

120.

Wie sich Hindenburg bey dieser Anwendung der Combinationslehre, insbesondere bey den allgemeinen Potenzen und Produktenprobleme, von denen vornemlich hier die Rede ist anfänglich verhalten hat, erhellet aus Infin. Dign. (§. XXI — XXIII, XXV und XXVII). Bekanntlich geräth man nicht gleich zuerst auf den kürzesten natürlichsten Weg, und so hat freilich die Sache nachher ein ganz anderes Ansehen gewonnen. Alles ist nachher (wie Hindenburg bereits im Archiv der Math. H. I. S. 14. in der Note erinnert hat) aufs möglichste simplifizirt, alles auf rein-combinatorische Begriffe gegründet, und sowohl die Hülfs- als andere daraus abgeleiteten Sätze in den strengsten systematischen Zusammenhang gebracht worden. Ein Beispiel davon mag die, auf dem Titel der Schrift der polyn. Lehrsatz angegebene, neue Bearbeitung der obgenannten allgemeinen Potenzen- und Produktenprobleme darstellen. Beyde Aufgaben werden, wie man finden wird, aus dem combinatorischen Boden in den analytischen gleichsam nur verpflanzt, und lassen sich aus dem Gebiete der einen

Wis-

Wissenschaft unmittelbar in das andere herüber-bringen.

121.

Aufgabe. Es sind mehrere Reihen

$$a + b + c + d + e \ldots = p.$$
$$A + B + C + D + E \ldots = q$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \ldots = r$$

u. s. w. f.

gegeben, man verlangt die Produkte von zwey, drey, vier ... m dieser Reihen, von den vorhergehenden niedrigen Produkten unabhängig.

122.

Auflösung. Diese geben die Variationsklassen (25). Nach ihnen ist

$$qp = \overset{qp}{'B} \qquad rqp = \overset{rqp}{'C}$$
$$srqp = \overset{srqp}{D} \qquad \ldots tsrqp = \overset{tsrqp}{M}$$

Der Zeiger ist hier wie in (121)

Die Entwickelung dieser Classen nach (25, α) giebt ein Produkt nach dem andern, jedes folgende aus dem nächstvorhergehenden; die Anordnung nach (25, β) giebt jedes verlangte Produkt für sich, und man hat, wegen der Involution, nicht nöthig, die vorhergehenden für die folgenden erst besonders abzusetzen (22)

123.

Beweis. Man findet das Produkt qp, wenn man die einzelnen Glieder der Reihe q den einzelnen

Glieder von p nach und nach vorschreibt, und die so entstehenden Produkte zusammen addirt. Daraus findet man weiter rqp, wenn man mit den einzelnen Gliedern von r und qp eben so verfährt, wie vorher mit den Gliedern von q und p u. s. w. Das ist, wenn man die einzelnen Dinge der Reihen p, q, r, s... als Faktoren betrachtet, und die Produkte aus ihnen auf eben die Art classenweise sucht, wie in (25, α, β) die Variationen der gegebenen Elemente der einzelnen Reihen.

124.

Aufgabe. Es sind mehrere Reihen

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots & \\ a + bz & + cz^2 & + dz^3 & + ez^4 \ldots & = p & \\ A + Bz & + Cz^2 & + Dz^3 & + Ez^4 \ldots & = q & \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}z & + \mathfrak{c}z^2 & + \mathfrak{d}z^3 & + \mathfrak{e}z^4 \ldots & = r & \\ & \text{u.} & \text{s.} & \text{w.} & \text{f.} & \end{array}$$

gegeben: man verlangt das allgemeine $(n+1)$te Glied der Produkte von zwey, drey, vier.... m dieser Reihen von den vorhergehenden niedrigern Produkten und Gliedern unabhängig.

125.

Auflösung. Diese geben die Variationsclassen (44, 55), nach ihnen ist

$$(qp)\urcorner(n+1) = {}^{n-2}\overset{qp}{B}z^n;\ (rqp)\urcorner(n+1) = {}^{n-3}\overset{rqp}{C}z^n$$

$$(srqp)\urcorner(n+1) = {}^{n-4}\overset{srqp}{D}z^n;\ (\ldots tsrqp)\urcorner(n+1) = {}^{n-m}\overset{\ldots tsrqp}{M}z^n$$

(Der Zeiger ist hier, wie in 124)

Hier

Hier giebt (44) eine Classe nach der andern, (55) jede für sich außer der Ordnung; nur muß man bey (55) in die letzte Vertikalreihe die Buchstaben aus p (wie auch hier schon stehen), in die vorletzten Buchstaben aus q in die darauf folgende die Buchstaben aus r u. s. w., das ist, eben dieselben Buchstaben dem Nahmen nach, als in (55) bereits stehen, nur aus andern Alphabeten setzen (24). So wie in (55) ^{10}D gefunden worden, so kann man auch jede andere Classe sogleich finden.

126.

Beweis. Daß für die (n + 1)ten Glieder der Produkte aus zwei, drei, vier... m Reihen immer z^n kommen müsse, ist für sich klar. Nun fangen die Verbindungen der Coeffizienten, bei zwei Reihen qp von $\overset{qp}{{}^2B}$ bei drei Reihen rqp von $\overset{rqp}{{}^3C}$, bei vier Reihen srqp von $\overset{srqp}{{}^4D}$ an, und gehen bei ihnen die Summenexponenten nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort, (108). Folglich gehören für die (n + 1 ten Glieder der Produkte der Reihen, die Variationsklassen für die Coeffizienten und die Potenzen z^n so zusammen, wie in (115) ist angegeben worden.

127.

Setzt man in die allgemeinen (n+1)ten Glieder nach und nach n = 0, 1, 2, 3, 4... so findet man dieser Produkte einzelne Glieder nach der Ordnung

$$qp = \overset{qp}{{}^{2}B} + \overset{qp}{{}^{3}Bz} + \overset{qp}{{}^{4}Bz^{3}} + \overset{qp}{{}^{5}Bz^{3}} + \ldots$$

$$rqp = \overset{rqp}{{}^{3}C} + \overset{rqp}{{}^{4}Cz} + \overset{rqp}{{}^{5}Cz^{2}} + \overset{rqp}{{}^{6}Cz^{3}} + \ldots$$

$$srqp = \overset{srqp}{{}^{4}D} + \overset{srqp}{{}^{5}Dz} + \overset{srqp}{{}^{6}Dz^{2}} + \overset{srqp}{{}^{7}Dz^{3}} + \ldots$$

$$\ldots tsrqp = \overset{\ldots tsrqp}{{}^{m}M} + \overset{\ldots tsrqp}{{}^{m+1}Mz} + \overset{\ldots tsrq}{{}^{m+2}Mz} + \overset{\ldots tsrpq}{{}^{m+3}Mz} + \ldots$$

128.

Die Entwickelung von Produkten der Reihen solcher combinatorischen Formeln (122, 125, 129) ist leicht. Die einzelnen Glieder derselben weit fortgesetzt, findet man in Hindenburgs Tafel (Nov. Syst. Perm, p. LXIX. sep.) Ich habe hier für die Reihen (124) die einfachsten in Absicht auf die Exponenten gewählt, weil das für jede andern Exponenten hinreichend ist (139, 140). In der Hindenbürgischen eben angeführten Tafel sind für die Exponenten der z in den Reihen die allgemeinen Progressionen $\mu, \mu + \delta$, $\mu + 2\delta \ldots$; ν, $\nu + \delta$, $\nu + 2\delta \ldots$ u. s. w. gesetzt worden. Die Ursache, und von den Vortheilen einer solchen Annahme, sehe man Toepf. comb. Anal. Vorr. S. XI. — XIII. u. S. 162, 189.

129.

Aufgabe. Es ist die Reihe

$$a + bz + cz^{2} + dz^{3} + ez^{4} + \ldots = p$$

und die ganze positive Zahl m gegeben: man verlangt das allgemeine $(n + 1)$te Glied der Potenz p^{m} von den vorhergehenden Gliedern unabhängig.

130.

130

Auflösung. Sie ist in der Formel:

$$p^m \urcorner (n + 1) = m \; {}^{m+n}Mz^n \binom{1\;2\;3\ldots}{a\;b\;c\ldots}$$

enthalten. Hier ist die Combinationsklasse m aus (46, 55) mit der Versetzungszahl m verbunden (110).

131.

Beweis. Die Reihe p (129) m mal gesetzt und in sich multiplizirt würde nach und nach alle Potenzen von p, bis mit der gesuchten mten geben. Wären nun die m Faktoren nicht (wie hier) einerley, sondern alle verschieden, wie p, q, r... in (124) so wäre das (n+1)te Glied ihres Produkts, das ist.

$$(\ldots tsrqp) \urcorner (n + 1) = {}^{n+m}\overset{\ldots tsrqp}{M}z^n$$

Da aber hier $p = q = r = s = t = \ldots$ so kommen in ihrem Produkte unter den Complexionen (Binionen, Ternionen, Quaternionen... mtionen) der Coeffizienten der gegebenen Reihe, mehrere vor, die, der Zahl und Art nach eben dieselben, nur verschiedentlich versetzte Buchstaben enthalten, folglich (als Produkte derselben Faktoren, nur in verschiedner Ordnung und Lage) nicht verschieden sind. Diese dürfen also nur überhaupt gezählt, und ihre Zahl (die Versetzungszahl) den zugehörigen Combinationscomplexionen, welche die übrigen repräsentiren, nach der Erinnerung (110) beygefügt werden, dadurch verwandelt sich das obige ${}^{m+n}M$ in $m \; {}^{m+n}M$ (wo m die Versetzungszahl oder der polynomialcoeffizient der einzelnen Complexionen der Combinationsklasse M ist,) und so kommt,

$$p^{m} \urcorner (n + 1) = \mathfrak{m}\ {}^{m+n}Mz^{n}$$

mit dem Zeiger wie in (130).

132.

Die einzelnen Glieder für p^{m} nach der Reihe zu finden, darf man nur $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ nach einander setzen. Das giebt:

$$p^{m} = \mathfrak{m}\ {}^{m}M + \mathfrak{m}\ {}^{m+1}Mz + \mathfrak{m}\ {}^{m+2}Mz^{2} + \ldots$$

daraus folgt $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ also $M = A, B, C, D \ldots$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ nach und nach gesetzt:

$$p^{1} = \mathfrak{a}^{1}A + \mathfrak{a}^{2}Az + \mathfrak{a}^{3}Az^{2} + \mathfrak{a}^{4}Az^{3} + \ldots$$
$$p^{2} = \mathfrak{b}^{2}B + \mathfrak{b}^{3}Bz + \mathfrak{b}^{4}Bz^{2} + \mathfrak{b}^{5}Bz^{3} + \ldots$$
$$p^{3} = \mathfrak{c}^{3}C + \mathfrak{c}^{4}Cz + \mathfrak{c}^{5}Cz^{2} + \mathfrak{c}^{6}Cz^{3} + \ldots$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ a & b & c & d \ldots \end{pmatrix}$$

133.

Ich habe von den Combinationen in (46) hier (131, 132) nur die Classeninvolutionen ausgehoben, und die Versetzungszahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ zu den einzelnen Classen gesetzt. In (46) werden die Classen, eine aus der andern hergeleitet. Wie jede Classe unabhängig (wie hier vornemlich verlangt wird) gefunden werden könne, zeigt (55) an dem Beyspiele von ${}^{10}D$ ganz allgemein.

134.

Aufgabe. Die Reihe (129).

$$a + bz + cz^{2} + dz^{3} + ez^{4} + \ldots = p$$

auf

auf die Potenz des Exponenten m zu erheben, die Zahl m mag eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn.

135.

Auflösung. Das erste Glied von p^m ist a^m, und das $n+1$)te oder

$$p^m \rceil (n+1) = ({}^m\mathfrak{A}a^{m-1}\;\mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}\;\mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}\;\mathfrak{c}^n C \ldots + {}^m\mathfrak{N}a^{m-n}\;\mathfrak{n}^n N)z^n.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

Die hier gebrauchten Zeichen sind aus dem Vorhergehenden schon bekannt.

136.

Beweis. Man setze die Reihe (134) $p = a + Z$. Der binomische Lehrsatz giebt sodann für jedes m,

$$p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}Z^1 + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}Z^2 + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}Z^3 \ldots$$

Die Potenzen z^1, z^2, $z^3 \ldots$ giebt (132); darnach ist

$$\begin{aligned} Z^1 &= \mathfrak{a}^1 A z^1 + \mathfrak{a}^2 A z^2 + \mathfrak{a}^3 A z^3 \ldots + \mathfrak{a}^n A z^n \ldots \\ Z^2 &= \qquad\qquad\quad \mathfrak{b}^2 B z^2 + \mathfrak{b}^3 B z^3 \ldots + \mathfrak{b}^n B z^n \ldots \\ Z^3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{c}^3 C z^3 \ldots + \mathfrak{c}^n C z^n \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

(Man bekommt nemlich hier gleich in die ersten Glieder der Potenzen von Z die Potenzen z^1, z^2, $z^3 \ldots$ weil hier $Z = bz + cz^2 \ldots$ gleich im ersten Gliede z hat, welches sich bey $p = a + bz \ldots$ in (132) anders verhält). Nimmt man nun alle Glieder in denen z^n vorkommt mit den zugehörigen Binomialcoeffizienten und Potenzen von a (nach dem obigen vermittelst der Binomialformel ausgedrückten Werthe von p^m) zusammen; denn diese machen mit einander

das

das gesuchte $(n+1)$te Glied aus, a^m als das erste gezählt: so erhält man die Formel wie sie in (135) steht.

137.

Die einzelnen Glieder für p^m (134) nach dem ersten a^m zu finden, darf man nur in dem allgemeinen Gliede (135) nach und nach $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ setzen. Das giebt $p^m = a^m$

$$+ {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}\, a^1Az^1$$
$$+ ({}^m\mathfrak{A}a^{m-1}\, a^2A + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}\, b^2B)z^2$$
$$+ ({}^m\mathfrak{A}a^{m-1}\, a^3A + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}\, b^3B + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}c^3C)z^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ b & c & d & e\ldots \end{pmatrix}$$

138.

Aufgabe. Die Reihe

$$a + b + c + d + e + f + \ldots = p$$

auf die Potenz des Exponenten m zu erheben.

139.

Auflösung. 1) wenn m eine ganze positive Zahl ist. Dann ist $p^m\, 7\, (n+1) = \mathfrak{m}\ {}^{m+n}M$

$$\text{also } p^m = \mathfrak{m}\ {}^mM + \mathfrak{m}\ {}^{m+1}M$$
$$+ \mathfrak{m}\ {}^{m+2}M \ldots = \mathfrak{m}\ {}'M$$
$$\text{und } p^1 = a^1A + a^2A + a^3A + a^4A \ldots\ldots = a'A$$
$$p^2 = b^2B + b^3B + b^4B + b^5B \ldots\ldots = b'B$$
$$p^3 = c^3C + c^4C + c^5C + c^6C \ldots\ldots = c'C$$

= = = = = = =

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ a & b & c & d & e\ldots \end{pmatrix}$$

2) wenn

2) wenn *m* eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, so ist

$$p^m \urcorner (n + 1) = {}^m\mathfrak{N} a^{m-n}\, \mathfrak{n}'N$$

und $p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A} a^{m-1}\, \mathfrak{a}'A + {}^m\mathfrak{B} a^{m-2}\, \mathfrak{b}'B + {}^m\mathfrak{C} a^{m-3}\, \mathfrak{c}C + \ldots$

$$(b\ c\ d\ e\ f \ldots)$$

140.

Beweis. So wie die Reihe (129) sich in die gegebene (138) verwandelt, wenn man in jener $z = 1$ setzt, eben so findet man durch diese Substitution in den Formeln (130, 132) mit Zuziehung von (110) die Formeln für (138, 1) und gleichergestalt die, in (339, 2) wenn man $z = 1$ in die Formel für p^m (137) setzt, und die Glieder, wie sie nach dem dortigen Ausdrucke senkrecht untereinander kommen, nach (111) summirt, und durch $\mathfrak{a}'A$, $\mathfrak{b}'B$, $\mathfrak{c}'C \ldots \mathfrak{n}'N$ ausdrückt.

141.

Hier (140) ist die Potenz m der Reihe $a + b + c + d + \ldots$ aus jener der Reihe $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$ abgeleitet worden. Man hätte jene, eben so wie diese ganz independent behandeln können, ich habe aber den eingeschlagenen Weg, der Kürze wegen, vorgezogen habe auch bei den Potenzen wie bey den Produkten (228) die am einfachsten ausgedrückte Reihe $a + bz + cz^2 \ldots$ zum Grunde gelegt. Hindenburgs Formeln für Potenzen (Nov, Syst. Perm. p. LIV, 7, 8) beziehen sich auf die am allgemeinste ausgedrückte Reihe (128)

142.

Es ist nützlich die Vergleichung der Lokalzeichen für Potenzen mit den combinatorischen, etwas näher nachzuweisen, welches am füglichsten durch die Formeln (130, 135) geschehen kann, bey denen, wenn man bloß die Koeffizienten ohne den Faktor z^n betrachtet, der Lokalausdruck $p^m \urcorner (n+1)$ in $p^m \varkappa (n+1)$ sich verwandelt.

143.

Daraus und aus (130) folgt für ganze positive Zahlen m

$$
\begin{array}{l|l}
p^1 \varkappa (n+1) = \mathfrak{a}^{n+1}A & p^5 \varkappa (n+1) = \mathfrak{e}^{n+5}E \\
p^2 \varkappa (n+1) = \mathfrak{b}^{n+2}B & \quad = \quad = \quad = \quad = \\
p^3 \varkappa (n+1) = \mathfrak{c}^{n+3}C & p^m \varkappa (n+1) = \mathfrak{m}^{n+m}M \\
p^4 \varkappa (n+1) = \mathfrak{d}^{n+4}D & p^m \varkappa (n-m+1) = \mathfrak{m}^{n}M
\end{array}
$$

$$p \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

144.

Eben so folgt aus (142 und 135) für jeden Werth von m

$$p^m \varkappa 1 = a^m$$

$$p^m \varkappa 2 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^1 A$$

$$p^m \varkappa 3 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^2 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^2 B$$

$$p^m \varkappa 4 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^3 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^3 B + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^3 C$$

$$= \quad = \quad = \quad = \quad = \quad =$$

$p^m \varkappa (n+1) =$ (dem Coeffizienten von z^n in 135)

$$p \begin{pmatrix} = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

Die

Die in (143 und 144) unter den Formeln beygefügten Nachweisungen zeigen 1) die Coeffizienten a,b,c... der Reihe p, und 2) was für Zahlenwerthe denselben Classencomplexionen zukommen.

145.

Solche Vergleichungen der beyderley (lokal- und combinatorischen) Zeichen und Formeln sind wichtig, weil jene, als Stellvertreter der letztern wegen ihrer signifikanten Kürze, während des Calculs, und selbst in den Formeln für die Endresultate häufig gebraucht werden. Sie knüpfen gleichsam das Band zwischen der gewöhnlichen und der combinatorischen Analysis, und man kann, wenn die Relation zwischen beyden gegeben ist, sogleich aus den Lokalausdrücken in die combinatorischen, und aus diesen in die der gewöhnlichen algebraischen Sprache übergehn. Von solchen Relationen für Potenzen, wie hier (Nov. Syst. Perm. p. LI. und die dortigen Exempel p. LI. und LII.) für Produkte (Ebendas. p. LII. LII).

146.

Nun sey auch m in (144) eine ganz positive Zahl; so geben die beyden Werthe von $p^m \ast (n + 1)$ in (143, 144 oder 135) einander gleich gesetzt, folgende Relation:

$$\mathfrak{m}^{\,n+m}M = {}^{m}\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^{n}A + {}^{m}\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^{n}B + {}^{m}\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^{n}C + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \ldots \\ a & b & c & d \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

Die

Die Glieder rechter Hand brechen mit demjenigen ab, wo zuerst die Zahl des Binomialcoeffizienten so groß, wie $\mathfrak{m}$ oder die Klasse so groß wie n ist. Diese Formel giebt einzelne höhere Classen der Potenzen, durch Summen von niedrigern Classen. Auf ähnliche Art hat sie Hindenburg bereits (Nov. Syst. Perm. p. LV. 9) hergeleitet. Man vergleiche hier (102).

147.

Die Buchstaben m, $\mathfrak{m}$, M bestimmen einander dergestalt, daß ein Werth des einen die ähnlichen Werthe der beyden andern festgesetzt. Hier mögen Zahlenwerthe für m angenommen, die Werthe der $\mathfrak{m}$ und M bestimmen.

Für $m=1$ wird $\mathfrak{a}^{n+1}A = {}^1\mathfrak{A}a^0\mathfrak{a}^nA$

" $m=2$ " $\mathfrak{b}^{n+2}B = {}^2\mathfrak{A}a^1\mathfrak{a}^nA + {}^2\mathfrak{B}a^0\mathfrak{b}^nB$

" $m=3$ " $\mathfrak{c}^{n+3}C = {}^3\mathfrak{A}a^2\mathfrak{a}^nA + {}^3\mathfrak{B}a^1\mathfrak{b}^nB + {}^3\mathfrak{C}a^0\mathfrak{c}^nC$

" $m=4$ " $\mathfrak{d}^{n+4}D = {}^4\mathfrak{A}a^3\mathfrak{a}^nA + {}^4\mathfrak{B}a^2\mathfrak{b}^nB + {}^4\mathfrak{D}a^0\mathfrak{d}^nD$

" $m=5$ " $\mathfrak{e}^{n+5}E = {}^5\mathfrak{A}a^4\mathfrak{a}^nA + {}^5\mathfrak{B}a^3\mathfrak{b}^nB + {}^5\mathfrak{C}a^0\mathfrak{e}^nE$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\ldots \\ a & b & c\ldots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ a & b & c & d\ldots \end{bmatrix}$$

Eben so lassen sich Werthe für n bestimmen (Nov. Syst. Perm. p. LV. 10.)

Für $n^{15}E$ wäre $n = 10$, also käme

$$\mathfrak{e}^{15}E = {}^5\mathfrak{A}a^4\mathfrak{a}^{10}A + {}^5\mathfrak{B}a^3\mathfrak{b}^{10}B + {}^5\mathfrak{C}a^2\mathfrak{c}^{10}C + {}^5\mathfrak{D}a^1\mathfrak{d}^{10}D + {}^5\mathfrak{E}a^0\mathfrak{e}^{10}E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\ldots \\ a & b & c\ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ b & c & d & e & f\ldots \end{pmatrix}$$

Man vergleiche (60. S. 306) und das Exempel (Nov. Syst. Perm. p. LVI. 11.

148.

Lehrsatz. Aus den Reihen p, q, r, s.., (122).

Potenzen, nach der Ordnung.

$$p^a = p^a{\times}1 + p^a{\times}2z^1 + p^a{\times}3z^2 + p^a{\times}4z^3 \ldots$$
$$q^b = q^b{\times}1 + q^b{\times}2z^1 + q^b{\times}3z^2 + q^b{\times}4z^3 \ldots$$
$$r^c = r^c{\times}1 + r^c{\times}2z^1 + r^c{\times}3z^2 + r^c{\times}4z^3 \ldots$$
$$s^d = s^d{\times}1 + s^d{\times}2z^1 + s^d{\times}3z^2 + s^d{\times}4z^3 \ldots$$

folgt das allgemeine (n + 1)te Glied,

I. Für das **Produkt** aus zwey Potinzen.

$$(q^bp^a)\rceil(n+1) = {}^{n+2}\overset{q^bp^a}{B}z^n$$

$$\text{also } q^bp^a = {}^{2}\overset{q^bp^a}{B} + {}^{3}\overset{q^bp^a}{B} + {}^{4}\overset{q^bp^a}{B}z^2 + {}^{5}\overset{q^bq^a}{B}z^3 + \ldots$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{cccc} p^a{\times}1 & p^a{\times}2 & p^a{\times}3 & p^a{\times}4\ldots \\ q^b{\times}1 & q^b{\times}2 & q^b{\times}3 & q^b{\times}4\ldots \end{array}\right)} \end{array}$$

wenn man in dem allgemeinen Gliede, 0, 1, 2, 3... nach und nach für n setzt.

II. Für das **Produkt** aus drey Potenzen.

$$(r^cq^bp^a)\rceil(n+1) = {}^{n+3}\overset{r^cq^bp^a}{C}z^n$$

$$\text{also } r^cq^bp^a = {}^{3}\overset{r^cq^bp^a}{C} + {}^{4}\overset{r^cq^bp^a}{C}z + {}^{5}\overset{r^cq^bp^a}{C}z^2 + {}^{6}\overset{r^cq^bp^a}{C}z^3 + \ldots$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \multicolumn{4}{c}{\left[\begin{array}{cccc} p^a{\times}1 & p^a{\times}2 & p^a{\times}3 & p^a{\times}4\ldots \\ q^b{\times}1 & q^b{\times}2 & q^b{\times}3 & q^b{\times}4\ldots \\ r^c{\times}1 & r^c{\times}2 & r^c{\times}3 & r^c{\times}4\ldots \end{array}\right]} \end{array}$$

wenn man in dem allgemeinen Gliede 0, 1, 2, 3 nach und nach für n setzt.

III. Für das Produkt aus m Potenzen.

$$(\ldots s^d r^c q^b p^a)\,?\,(n + 1) = {}^{n+m}\overset{s^d r^c q^b p^a}{M} z^n$$

$$\ldots s^d r^c q^b p^a = {}^{m}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{M} + {}^{m+1}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{M} z + {}^{m+2}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{M} z^2 + \ldots,$$

(Der Zeiger enthält die Coeffizienten nach der Ordnung aller m Potenzreihen, wie sie in (148) stehen)

Auch hier kommt der Ausdruck für die einzelnen Glieder aus dem allgemeinen, wenn man 0, 1, 2, 3..., nach und nach für n setzt.

149.

Beweis. So vielfach, und zusammengesetzt der Lehrsatz (148) auch an sich ist, so leicht ist gleichwohl der combinatorischen Beweis desselben hier an dieser Stelle.

Daß die Variationsklassen *B*, *C*... *M* kommen müssen, erhellet daraus, daß zwey, drei... m Reihen (wie hier in 148) in einander multiplizirt, alle Binionen, Ternionen... mtionen ihrer Coeffizienten geben (126, 131) und weil diese (nach dem Zeiger) alle von 1 an nach der Ordnung gezählt werden, so fängt *B* mit dem Summenexponen 2 und C mit 3... und *M* mit m an, und gehen dieselben nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort. Daher für die (n + 1)ten Glieder oder Coeffizienten nothwendig ${}^{n+2}B$, ${}^{n+3}C \ldots {}^{n+m}M$ kommen müssen. Der Fortgang für die Potenzexponenten 0, 1, 3.... von z ist für sich klar, und so kommt überall z^n für die (n + 1)ten Glieder. Die beygefügten Zeiger anlangend, so darf man darinnen $p^a \times 1$, $p^a \times 2$..,

$q^b \times 1$,

$q^{b}\varkappa 1$, $q^{b}\varkappa 2$ ... u. s. w. als bekannt voraussetzen, weil die Reihen p, q, r, s gegeben sind und nach Hindenburgs (lokal = und combinatorischen) Potenzformeln die $p^{a}\varkappa(n + 1)$, $q^{b}\varkappa(n + 1)$ u. s. w. durch $p\varkappa(n + 1)$, $q\varkappa(n + 1)$ u. s. w. sich ausdrücken lassen. Die Construktion der Variationsklassen mittelst der beygefügten Zeichen, hängt von Tab. IV. (Nov. Syst. Perm. p. LX) ab, in so fern man sich die Complexionen nach (20, 25) nicht selbst machen will.

Auf dieser und ähnlichen Voraussetzungen beruhen die so nützlichen Reduktionen der Probleme auf einander, der zusammengesetztern, auf die einfachern, davon Herr Prof. Pfaff in seinen beyden Abhandlungen (Der polyn. Lehrs. IV. V.) eine Menge interessanter Beyspiele gegeben hat, die ohne dem Gebrauch der Lokalausdrücke zum Theil auf ausserordentliche Verwickelungen geführt haben würden.

150.

Die Ausdrücke (148, I. — III. für ganze Glieder $7(n + 1)$ verwandeln sich sogleich in solche für einzelne Coeffizienten $\varkappa(n + 1)$; wenn man dort $z = 1$ setzt, wo also z und alle Potenzen von z ganz wegfallen, und nur die Variationsklassen allein, mit ihrer Summen = und Reihenexponenten übrig bleiben.

151.

Aufgabe. Den Werth, von $(r^{c} q^{b} p^{a})\varkappa 3$ in Coeffizienten, der einzelnen Potenzen p^{a}, q^{b}, r^{c} auszudrücken. Die Reihen p, q, r stehen (124).

Auflösung. In (148. II.) setze man $n = 2$, $z = 1$ und (150) $\varkappa$ statt 7, so findet man

$$(r^c q^b p^a) \varkappa (z \dagger 1) = \overset{r^c q^b p^a}{{}^5C}$$

das giebt nach dem Zeiger (148, II.). Die Complexionen selbst gemacht, oder nach Tab. IV. (Nov. Syst. Perm. p. LX) und den dort überschriebenen Reihenexponenten r, q, p, angeordnet

$$\begin{array}{ll} r^c \varkappa 1\, q^b \varkappa 1\, p^a \varkappa 3 & r^c \varkappa 2\, q^b \varkappa 1\, p^a \varkappa 2 \\ r^c \varkappa 1\, q^b \varkappa 2\, p^a \varkappa 2 & r^c \varkappa 2\, q^b \varkappa 2\, p^a \varkappa 1 \\ r^c \varkappa 1\, q^b \varkappa 3\, p^a \varkappa 1 & r^c \varkappa 3\, q^b \varkappa 1\, p^a \varkappa 1 \end{array}$$

wo man $r^c \varkappa 1$ und $r^c \varkappa 2$ als factores communes in die zugehörigen Nebenfaktoren nehmen, oder jede andere aus den übrigen dazu wählen kann, diejenigen nemlich, die am meisten zusammengesetzt sind. Ein anderes Beyspiel für den nächstfolgenden Coeffizienten $(r^c q^b p^a) \varkappa 4$, steht im Archiv der Mathem. (H. II. S. 227.) Der hiesige Lehrsatz (148) mit seinem Beweise (149) ist nemlich bereits dort, etwas ausführlicher, zugleich mit Anwendung auf gebrochene Funktionen, vorgetragen worden.

152.

Auf der diesem Werke beygefügten Tafel, habe ich die am allgemeinsten ausgedrückte Reihe

$p = az^m \dagger bz^{m+d} \dagger cz^{m+2d} \dagger \ldots$ zur rten Potenz erhoben, und vollständig bis auf 12 Glieder entwickelt. m, d und r können hier jede positive, negative ganze und gebrochene, irrationale oder unmögliche Zahlen seyn. Daß aber die dafür auf der Tafel angegebene combinatorisch-analytische Formel richtig sey, erhellet so:

153.

153.

Man setze in der Formel für p (152), $z^d = y$; so verwandelt sich p in $(a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots) . z^m$ mithin

$$p^r = (a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots)^r . z^{rm}$$

also ist die Potenzierung von p^r (in 152) auf jener (in 137) zurückgeführt. Setzt man daher nach der Entwickelung $y = z^d$, so hat man vollkommen die Formel so, wie sie auf der Tafel angegeben ist.

154.

Da ich die höchste Allgemeinheit des Binomischen Lehrsatzes, hier voraussetze, so bedarf es weiter keine Rechtfertigung, für negative, irrationale, veränderliche, und unmögliche Exponenten. Ich will daher um die Allmacht der combinatorischen Analysis recht ins Licht zu setzen, im folgenden § nach das 21ste Glied von p^r (152) vollständig entwickeln. Jedes andere nicht combinatorisches Verfahren, würde die vollständige Entwickelung der 20 vorhergehenden Gliedern voraussetzen. Auch des Herrn Etatsrath Tetens Substitutions-Verfahren, ist noch so weitläuftig, daß es auf diesen Wegen so gut wie unausführbar ist. Es giebt leider in diesen Zeiten genug Menschen, welche bey einigen geringen unverdauten mathematischen elementar Kenntnissen, ihre Unverschämtheit so weit treiben, über Sachen abzusprechen von der sie doch nichts weiter als den Nahmen wissen. — Für diese habe ich zum Theil die Entwickelung des 21ten Gliedes unternommen. — Sie mögen ihre gerühmte Stärke in der Analysis daran versuchen — leisten sie auf andern Wegen eben so viel, so will ich der erste seyn, der ihre mathematischen Kenntnissen Gerechtigkeit wiederfahren läßt, von denen sonst ihre compilirten Schriften keinen vortheilhaften Begriff giebt.

155.

$$p^r \approx 21\, z^{rm+20d} = p^r \rceil 21$$

$+ {}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\; a^{20}A$ | z^{rm+20d}
$+ {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\; b^{20}B$
$+ {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\; c^{20}C$
.
.
.
$+ {}^r\mathfrak{U}a^{r-20}\; u^{20}U$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots & 20 \\ b, & c, & d, & e, & f \ldots & v \end{pmatrix}$$

daraus folgt nun daß

$p^r \approx 21 = \dfrac{p^r \rceil 21}{z^{rm+20d}}$ die ganze Summe aller folgenden Theile gleich ist.

$+ {}^r\mathfrak{A}a^{r-1}$ v

$+ {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}$
- 2bu
- 2ct
- 2ds
- 2er
- 2fq
- 2gp
- 2ho
- 2in
- 2km
- $2l^2$

$+ {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}$
- b^2t
- 6bcs
- 6bdr
- 6beq
- 6bfp
- 6bgo
- 6bhn
- 6bim
- 6bkl
- $3c^2r$
- 6cdq
- 6cep
- 6cfo
- 6cgn
- 6chm
- 6cil
- $3ck^2$

$+ {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}$
- $3d^2p$
- 6deo
- 6dfn
- 6dgm
- 6dhl
- 6dik
- $3e^2n$
- 6efm
- 6egl
- 6ehk
- $3ei^2$
- $3f^2l$
- 6fgk
- 6fhi
- $3g^2i$
- gh^2

$+ {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}$
- $4b^3s$
- $12b^2cr$
- $12b^2dq$
- $12b^2ep$
- $12b^2fo$
- $12b^2gn$
- $12b^2hm$
- $12b^2il$
- $6b^2k^2$
- $12bc^2q$
- 24bcdp
- 24bceo
- 24bcfn
- 24bcgm
- 24bchl
- 24bci

$+ {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}$
- $12bd^2o$
- 24bden
- 24bdfm
- 24bdgl
- 24bdhk
- $12bdi^2$
- $12be^2m$
- 24befl
- 24begk
- 24behi
- $12bf^2k$
- 24bfgi
- $12bfh^2$
- $12bg^2h$
- $4c^3p$
- $12c^2do$
- $12c^2en$
- $12c^2fm$
- $12c^2gl$
- $12c^2hk$
- $6c^2i^2$
- $12cd^2n$
- 24cdem
- 24cdfl
- 24cdgk
- 24cdhi
- $12ce^2l$
- 24cefk
- 24cegi
- $12ceh^2$
- $12cf^2i$
- 24cfgh
- $4cg^3$
- $4d^3m$
- $12d^2el$
- $12d^2fk$
- $12d^2gi$
- $6d^2h^2$
- $12de^2k$
- 24defi
- 24degh
- $12df^2h$
- $12dfg^2$
- $4e^3i$
- $12e^2fh$
- $6e^2g^2$
- $12ef^2g$
- f^4

$+{}^{r}\mathfrak{E}a^{r-5}$

$5b^4r$
$20b^3cq$
$20b^3dp$
$20b^3eo$
$20b^3fn$
$20b^3gm$
$20b^3hl$
$20b^3ik$
$30b^2c^2p$
$60b^2cdo$
$60b^2cen$
$60b^2cfm$
$60b^2cgl$
$60b^2chk$
$30b^2ci^2$
$30b^2d^2n$
$60b^2dem$
$60b^2dfl$
$60b^2dgk$
$60b^2dhi$
$30b^2e^2l$
$60b^2efk$
$60b^2egi$
$30b^2eh^2$
$30b^2f^2i$
$60b^2fgh$
$10b^2g^3$
$20bc^3o$
$60bc^2dn$
$60bc^2em$
$60bc^2fl$
$60bc^2gk$
$60bc^2hi$
$60bcd^2m$
$120bcdel$
$120bcdfk$
$120bcdgi$
$60bcdh^2$
$60bce^2k$
$120bcefi$
$120bdgeh$
$60bcf^2h$
$60bcfg^2$
$20bd^3l$
$60bd^2ek$
$60bd^2fi$
$60bd^2gh$

$+{}^{r}\mathfrak{E}a^{r-5}$

$60bde^2i$
$120bdefh$
$60bdeg^2$
$60bdf^2g$
$20be^3h$
$60be^2fg$
$20bef^3$
$5c^4n$
$20c^3dm$
$20c^3el$
$20c^3fk$
$20c^3gi$
$10c^3h^2$
$30c^2d^2e$
$60c^2dek$
$60c^2dfi$
$60c^2dgh$
$30c^2e^2i$
$60c^2efh$
$30c^2eg^2$
$30c^2f^2g$
$20cd^3k$
$60cd^2ei$
$60cd^2fh$
$30cd^2g^2$
$60cde^2h$
$120cdefg$
$20cdf^3$
$20ce^3g$
$20ce^2f$
$5d^4i$
$20d^3eh$
$20d^3fg$
$30d^2e^2g$
$30d^2ef^2$
$20de^3f$
e^5

$+{}^{r}\mathfrak{F}a^{r-6}$

$6b^5q$
$30b^4cp$
$30b^4do$
$30b^4en$
$30b^4fm$
$30b^4gl$
$30b^4hk$
$15b^4i^2$
$60b^3c^2o$
$120b^3cdn$

$+^{r}\mathfrak{F}a^{r-6}$
$120b^3cem$
$120b^3cfl$
$120b^3cgk$
$120b^3chi$
$60b^3d^2m$
$120b^3del$
$120b^3dfk$
$120b^3dgi$
$60b^3dh^2$
$60b^3e^2k$
$120b^3efi$
$120b^3egh$
$60b^3f^2h$
$60b^3fg^2$
$60b^2c^3n$
$180b^2c^2dm$
$180b^2c^2el$
$180b^2c^2fk$
$180b^2c^2gi$
$90b^2c^2h^2$
$180b^2cd^2l$
$360b^2cdek$
$360b^2cdfi$
$360b^2cdgh$
$180b^2ce^2i$
$360b^2cefh$
$180b^2ceg^2$
$180b^2cf^2g$
$60b^2d^3k$
$180b^2d^2ei$
$180b^2d^2fh$
$90b^2d^2g^2$
$180b^2de\ h$
$360b^2defg$
$60b^2df^3$
$60b^2e^3g$
$90b^2e^2f^2$
$30bc^4m$
$120bc^3dl$
$120bc^3ek$
$120bc^3fi$
$120bc^3gh$
$180bc^2d^2k$
$360bc^2dei$
$360bc^2dfh$
$180bc^2dg^2$
$180bc^2e^2h$

$+^{r}\mathfrak{F}a^{r-6}$
$360bc^2efg$
$60bc^2e^3$
$120bcd^3i$
$360bcd^2eh$
$360bcd^2fg$
$360bcde^2g$
$360bcdef^2$
$120bce^3f$
$30bd^4h$
$120bd^3eg$
$60bd^3f^2$
$180bd^2e^2f$
$30bde^4$
$6c^5l$
$30c^4dk$
$30c^4ei$
$30c^4fh$
$15c^4g^2$
$60c^3d^2i$
$120c^3deh$
$120c^3dfg$
$60c^3e^2g$
$60c^3ef^2$
$60c^2d^3h$
$180c^2d^2eg$
$90c^2d^2f^2$
$180c^2de^3f$
$15c^2e^4$
$30cd^4g$
$120cd^3ef$
$60cd^2e^3$
$6d^5f$
$15d^4e^2$

$+^{r}\mathfrak{G}a^{r-7}$
$7b^6p$
$42b^5eo$
$42b^5dn$
$42b^5em$
$42b^5fl$
$42b^5gk$
$42b^5hi$
$105b^4c^2n$
$210b^4cdm$
$210b^4cel$
$210b^4cfk$
$210b^4cgi$
$105b^4ch^2$
$105b^4d^2l$

$+ {}^{r}\mathfrak{G}ar^{-7}$

$210b^4dek$
$210b^4dfi$
$210b^4dgh$
$105b^4e^2i$
$210b^4efh$
$105b^4eg^2$
$105b^4f^2g$
$140b^3c^3m$
$420b^3c^2dl$
$420b^3c^2ek$
$420b^3c^2fi$
$420b^3c^2gh$
$420b^3cd^2k$
$840b^3cdei$
$840b^3cdfh$
$420b^3cdg^2$
$420b^3ce^2h$
$840b^3cefg$
$140b^3cf^3$
$140b^3d^3i$
$420b^3d^2eh$
$420b^3d^2fg$
$420b^3de^2g$
$420b^3def^2$
$140b^3e^3f$
$105b^2c^4l$
$420b^2c^3dk$
$420c^2c^3ei$
$420b^2c^3fh$
$210b^2c^3g^2$
$420b^2c^3di$
$1260b^2c^2deh$
$1260b^2c^2dfg$
$630b^2c^2e^2g$
$630b^2c^2ef^2$
$420b^2cd^3h$
$1260b^2cd^2eg$
$630b^2cd^2f^2$
$1260b^2cde^2f$
$105b^2ce^4$
$105b^2d^4g$
$420b^2d^3ef$
$210b^2d^2e^3$
$42bc^5k$
$210bc^4di$
$210bc^4eh$
$210bc^4fg$

$+ {}^{r}\mathfrak{G}ar^{-7}$

$420bc^3d^2h$
$840bc^3deg$
$420bc^3df^2$
$420bc^3e^2f$
$420bc^2d^3g$
$1260bc^2d^2ef$
$420bc^2de^3$
$210bcd^4f$
$420bcd^3e^2$
$42bd^5e$
$7c^6i$
$42c^5dh$
$42c^5eg$
$21c^5f^2$
$105c^4d^2g$
$210c^4def$
$35c^4e^3$
$140c^3d^3f$
$210c^3d^2e^2$
$105c^2d^4e$
$7cd^6$

$+ {}^{r}\mathfrak{H}ar^{-8}$

$8b^7o$
$56b^6cn$
$56b^6dm$
$56b^6el$
$56b^6fk$
$56b^6gi$
$28b^6h^2$
$168b^5c^2m$
$336b^5cdl$
$336b^5cek$
$336b^5cfi$
$336b^5cgh$
$168b^5d^2k$
$336b^5dei$
$336b^5dfh$
$168b^5dg^2$
$168b^5e^2h$
$336b^5efg$
$56b^5f^3$
$280b^4c^3l$
$840b^4c^2dk$
$840b^4c^2ei$
$840b^4c^2fh$
$420b^4c^2g^2$
$840b^4cd^2i$
$1680b^4cdeh$

$+^{r}Ha^{e}-8$

$1680b^4cdfg$
$840b^4ce^2g$
$840b^4cef^2$
$280b^4d^3h$
$840b^4d^2eg$
$840b^4de^2f$
$70b^4e^4$
$280b^3c^4k$
$1120b^3c^3di$
$1120b^3c^3eh$
$1120b^3c^3fg$
$1680b^3c^2d^2h$
$3360b^3c^2deg$
$1680b^3c^2df^2$
$1680b^3c^2dg^2$
$1680b^3c^2e^2f$
$1120b^3cd^3g$
$3360b^3cd^2ef$
$1120b^3cde^3$
$280b^3d^4f$
$560b^3d^3e^2$
$168b^2c^5i$
$840b^2c^4dh$
$840b^2c^4eg$
$420b^2c^4f^2$
$1680b^2c^3d^2g$
$3360b^2c^3def$
$560b^2c^3e^3$
$1680b^2c^2d^3f$
$2520b^2c^2d^2e^2$
$840b^2cd^4e$
$28b^2d^6$
$56bc^6h$
$336bc^5dg$
$336bc^5ef$
$840bc^4d^2f$
$840bc^4de^2$
$1120bc^3d^3e$
$168bc^2d^5$
$8c^7g$
$56c^6df$
$28c^6e^2$
$168c^5d^2e$
$70c^4d^4$

$+^{r}Ja^{r}-9$

$9b^8n$
$72b^7cm$
$72b^7dl$
$72b^7ek$
$72b^7fi$
$72b^7gh$
$252b^6c^2l$
$504b^6cdk$
$504b^6cei$
$504b^6cfh$
$252b^6cg^2$
$252b^6d^2i$
$504b^6deh$
$504b^6dfg$
$252b^6e^2g$
$252b^6ef^2$
$504b^5c^3k$
$1512b^5c^2di$
$1512b^5c^2eh$
$1512b^5c^2fg$
$1512b^5cd^2h$
$3024b^5cdeg$
$1512b^5cdf^2$
$1512b^5ce^2f$
$504b^5d^3g$
$1512b^5d^2ef$
$504b^5de^3$
$630b^4c^4i$
$2520b^4c^3dh$
$2520b^4c^3eg$
$1260b^4c^3f^2$
$3780b^4c^2d^2g$
$7560b^4c^2def$
$315b^4c^2e^4$
$2520b^4cd^3f$
$3780b^4cd^2e^2$
$630b^4d^4e$
$504b^3c^5h$
$2520b^4c^4dg$
$2520b^3c^4ef$
$5040b^3c^3d^2f$
$5040b^3c^3de^2$
$5040b^3c^2d^3e$
$504b^3cd^5$
$252b^2c^6g$
$1512b^2c^5df$
$756b^2c^5e^2$

$+r\mathfrak{J}a^{r-9}$
$3780b^3c^3d^2e$
$1260b^2c^3d^4$
$72bc^7f$
$504bc^6de$
$504bc^5d^3$
$9c^8e$
$36c^7d^2$

$+r\mathfrak{K}a^{r-10}$
$10b^9m$
$90b^8cl$
$90b^8dk$
$90b^8ei$
$90b^8fh$
$45b^8g^2$
$260b^7c^2k$
$720b^7cdi$
$720b^7ceh$
$720b^7cfg$
$360b^7d^2h$
$720b^7deg$
$360b^7df^2$
$360b^7e^2f$
$840b^6c^3i$
$2520b^6c^2dh$
$2520b^6c^2eg$
$1260b^6c^2f^2$
$2520b^6cd^2g$
$5040b^6cdef$
$840b^6ce^3$
$840b^6d^3f$
$1260b^6d^2e^2$
$1260b^5c^4h$
$5040b^5c^3dg$
$5040b^5c^3ef$
$7560b^5c^2d^2f$
$7560b^5c^2de^2$
$5040b^5cd^3e$
$252b^5d^5$
$1260b^4c^5g$
$6300b^4c^4df$
$3150b^4c^4e^2$
$12600b^4c^3d^2e$
$3150b^4c^2d^4$

$+r\mathfrak{K}a^{r-10}$
$840b^3c^6f$
$5040b^3c^5de$
$4200b^3c^4d^3$
$360b^2c^7e$
$1260b^2c^6d^2$
$90bc^8d$
c^{10}

$+r\mathfrak{L}a^{r-11}$
$11b^{10}l$
$110b^9ck$
$110b^9di$
$110b^9eh$
$110b^9fg$
$495b^8c^2i$
$990b^8cdh$
$990b^8ceg$
$495b^8cf^2$
$495b^8d^2g$
$990b^8def$
$165b^8e^3$
$1320b^7c^3h$
$430b^7c^2dg$
$430b^7c^2ef$
$430b^7cd^2f$
$430b^7cde^2$
$1320b^7d^3e$
$330b^6c^4g$
$1320b^6c^3df$
$660b^6c^3e^2$
$1980b^6c^2d^2e$
$330b^6cd^4$
$2772b^5c^5f$
$13860b^5c^4de$
$4620b^5c^3d^3$
$330b^4c^6e$
$6930b^4c^5d^2$
$495b^2c^8d$
$55b^2c^9$

$+{}^{r}\mathfrak{M}a^{r-12}$
$12b^{11}k$
$132b^{10}ci$
$132b^{10}dh$
$132b^{10}eg$
$66b^{10}f^2$
$660b^9c^2h$
$1320b^9cdg$
$1320b^9cef$
$660b^9d^2f$
$660b^9de^2$
$1980b^8c^3g$
$5940b^8c^2df$
$2970b^8c^2e^2$
$5940b^8cd^2e$
$495b^8d^4$
$3960b^7c^4f$
$15840b^7c^3de$
$7920b^7c^2d^3$
$5544b^6c^5e$
$13860b^6c^4d^2$
$5544b^5c^6d$
$66b^2c^{10}$

$+{}^{r}\mathfrak{N}a^{r-13}$
$13b^{12}i$
$156b^{11}ch$
$156b^{11}dg$
$156b^{11}ef$
$858b^{10}c^2g$
$1716b^{10}cdf$
$858b^{10}ce^2$
$858b^{10}d^2e$
$2860b^9c^3f$
$8580b^9c^2de$
$2860b^9cd^3$
$6435b^8c^4e$
$12870b^8c^3d^2$
$10296b^7c^5d$
$1716b^6c^7$

$+{}^{r}\mathfrak{O}a^{r-14}$
$14b^{13}h$
$182b^{12}cg$
$182b^{12}df$
$91b^{12}e^2$
$1092b^{11}c^2f$
$2184b^{11}cde$
$464b^{11}d^3$
$4004b^{10}c^3e$
$6006b^{10}c^2d^2$
$10010b^9c^4d$
$3003b^8c^6$

$+{}^{r}\mathfrak{P}a^{r-15}$
$15b^{14}g$
$210b^{13}cf$
$220b^{13}de$
$1365b^{12}c^2e$
$1365b^{12}cd^2$
$5460b^{11}c^3d$
$3003b^{10}c^5$

$+{}^{r}\mathfrak{Q}a^{r-16}$
$16b^{15}f$
$240b^{14}ce$
$120b^{14}d^2$
$1680b^{13}c^2$
$1820b^{12}c^4$

$+{}^{r}\mathfrak{R}a^{r-17}$
$17b^{16}e$
$272b^{15}cd$
$1360b^{14}c^3$

$+{}^{r}\mathfrak{S}a^{r-18}$
$18b^{17}d$
$306b^{16}c$

$+{}^{r}\mathfrak{T}a^{r-19}$
$19b^{18}c$

$+{}^{r}\mathfrak{U}a^{r-20}$
b^{20}