Supplement zu L. Eulers Differenzialrechnung

Grüson, Johann Philipp

Berlin, 1798

Einige merkwürdige Sätze und Relationen.

Ende nähert, deutlich erkannt hat. Wer aber auf diesen Sinn nicht achtet, und nachdem er anfangs $e = 1 + z$ gesetzt hatte, dann wieder, wo es ihm zuerst einfiele, $z = 0$ setzen wollte, der würde entweder durch ein bloßes Ohngefähr zu seinem Zwecke gelangen, oder ihn auch wohl ungeachtet dieser Substitution gänzlich verfehlen. Z. B. wenn man etwa in δ wieder $z = 0$ setzen wollte, so hätte man wieder das alte $= a.\frac{0}{0}$. Denn man darf z nicht neben $1 - 1$, welches keine endliche Größe, sondern 0 ist, verschwinden lassen; wenn z nicht bloß wie 0, sondern wie eine dem 0 sich ohn Ende nähernde Größe, wirken soll.

Vergleicht man diese Formel, worin z stehet, mit der aus dem summatorischen Gliede abgeleiteten, so wird man sogleich einsehen daß beyde Formeln vollkommen identisch sind, indem in der abgeleiteten statt z, sein gleiches $e - 1$ stehet.

Einige merkwürdige Sätze und Relationen.

1.

Es ist

$$2^n = \frac{\overline{n+1}\,.\,\overline{n+1}\,\ldots\,\overline{2n-1}\,.\,2n}{1\,.\,3.\qquad \overline{2n-1}}$$

Beweis.

Beweis.

$$2^1 = \frac{2}{1}$$

$$2^2 = \frac{3.4}{1.3}$$

$$2^3 = \frac{4.5.6}{1.3.5}$$

$$2^4 = \frac{5.6.7.8}{1.3.5.7}$$

diese 4 constuirten Glieder stellen das Gesetz so deutlich vor Augen, daß man ohne Schwierigkeit

$$2^n = \frac{n+1 \,.\, n+2 \ldots 2n-1 \,.\, 2n}{1 \,.\, 3 \ldots\ldots 2n-1.}$$

constuirt. Um die Allgemeinheit des Gesetzes darzuthun muß bewiesen werden, daß wenn das beobachtete Gesetz für 2^n richtig ist, daß es auch für 2^{n+1} gilt.

Das beobachtete Gesetz giebt.

$$2^{n+1} = \frac{n+2 \ldots 2n-1 \,.\, 2n \,.\, 2n+1 \,.\, 2(n+1)}{1 \,.\, 3 \ldots 2n-3 \,.\, 2n-1 \,.\, 2n+1}$$

Es ist aber $2^{n+1} = 2^n . 2$.

Können wir nun beweisen, daß der nach obigem Gesetz gebildete Ausdruck für 2^n, doppelt genommen, den Ausdruck für 2^{n+1} giebt, so ist die Allgemeinheit des beobachteten Gesetzes mit aller Evidenz erwiesen.

Nun ist offenbar

$$2^n . 2 = \frac{2^n}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+1} \cdot 2(n+1)$$

dieses letztere giebt aber gerade den für $2^n . 2 = 2^{n+1}$ gefundenen Ausdruck, da wir nun gewiß sind daß das Gesetz für $n = 4$ gültig ist, so gilt es nach dem

es

erwiesenen auch für $n+1=5$, also auch für $5+1=6$ u. s. w., d. h. es gilt allgemein.

2.

$$\text{Es ist } {}^{2n}\mathfrak{N} = \frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots.2n} . 2^{2n}$$

B e w e i s.

Es ist aus (1) bekannt, daß

$$2^{n} = \frac{n+1 . n+2 \ldots . 2n}{1 . 3 \ldots . 2n-1} . \text{ ist.}$$

Daher ist auch

$$\frac{1.3\ldots.2n-1}{1.2\ldots. n} . 2^{n} = \frac{n+1 . n+2 \ldots . 2n}{1 . 2 \ldots . n} = {}^{2n}\mathfrak{N}.$$

(bekanntlich ist $2n-1$ die nte Ungeradezahl, also sind hier im Zähler eben so viele Glieder als im Nenner, d. h. es sind n Glieder sowohl im Zähler als im Nenner).

$$\frac{1.3\ldots.2n-1}{2.4\ldots. 2n} . 2^{2n} = \frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{n}} . 2^{n} = {}^{2n}\mathfrak{N} \text{ ist}$$

W. Z. E. W.

3.

Es ist

$${}^{n+m}\mathfrak{R} = 1 . {}^{m}\mathfrak{R} + {}^{n}\mathfrak{A} . {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\mathfrak{B} . {}^{m}\overset{-2}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\mathfrak{C}\, {}^{m}\overset{-3}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\mathfrak{D} . {}^{m}\overset{-4}{\mathfrak{R}} + \ldots$$

$$\ldots . + {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}} . {}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}\, {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{R} . 1$$

Beweis.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\text{Da } (1+x)^m &= 1 + {}^m\mathfrak{A}x + {}^m\mathfrak{B}x^2 + \dots\dots + {}^m\overset{-1}{\mathfrak{R}}x^{r-1} + {}^m\mathfrak{R}x^r \\
\text{und } (1+x)^n &= 1 + {}^n\mathfrak{A}x + {}^n\mathfrak{B}x^2 + \dots\dots + {}^n\overset{-1}{\mathfrak{R}}x^{r-1} + {}^n\mathfrak{R}x^r \\
\hline
\text{so ist } (1+x)^{n+m} &= 1 + 1.{}^m\mathfrak{A}x + 1.{}^m\mathfrak{B}x^2 + 1.{}^m\mathfrak{C}x^3 + \dots\dots + 1.{}^m\mathfrak{R}x^r \\
&\quad {}^n\mathfrak{A}.1.x + {}^n\mathfrak{A}.{}^m\mathfrak{A}x^2 + {}^n\mathfrak{A}.{}^m\mathfrak{B}x^3 + \dots\dots \quad {}^n\mathfrak{A}.{}^m\overset{-1}{\mathfrak{R}}x^r \\
&\quad {}^n\mathfrak{B}.1x^2 + {}^n\mathfrak{B}.{}^m\mathfrak{A}x^3 + \dots\dots \quad {}^n\mathfrak{B}.{}^m\overset{-2}{\mathfrak{R}}x^r \\
&\quad + {}^n\mathfrak{C}.1.x^3 + \dots\dots \quad {}^n\mathfrak{C}.{}^m\overset{-1}{\mathfrak{R}}x^r \\
&\quad \vdots \\
&\quad {}^n\overset{-1}{\mathfrak{R}}.{}^m\mathfrak{A}x^r \\
&\quad {}^n\mathfrak{R}.1.x^r
\end{aligned}
$$

auch ist

$$(1+x)^{n+m} = 1 + {}^{n+m}\mathfrak{A}x + {}^{n+m}\mathfrak{B}x^2 + {}^{n+m}\mathfrak{C}x^3 + \dots {}^{n+m}\mathfrak{R}x^r$$

Wir entwickeln hier sowohl vom Produkte, als auch von $(1+x)^{n+m}$ nur $r+1$ Glieder (das erste mitgezählt); denn sonst sind hier wenn n und m ganze Zahlen sind, im Produkte sowohl als in $(1+x)^{n+m}$; $n+m+1$ Glieder vorhanden, die aber hier zu entwickeln nicht nöthig sind, indem die obi-

gen

gen schon deutlich das Gesetz des Fortgangs vor Augen legen. Vergleicht man nun das Produkt mit der Reihe für $(1 + x)^{n+m}$, so ergeben sich nach bekannten Lehren, folgende fruchtbare Relationen

$$ {}^{n+m}\mathfrak{A} = 1.{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{A}.1 $$
$$ {}^{n+m}\mathfrak{B} = 1.{}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{A}{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B}.1 $$
$$ {}^{n+m}\mathfrak{C} = 1.{}^{m}\mathfrak{C} + {}^{n}\mathfrak{A}{}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{B}{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{C}.1 $$
$$ {}^{n+m}\mathfrak{D} = 1.{}^{m}\mathfrak{D} + {}^{n}\mathfrak{A}{}^{m}\mathfrak{C} + {}^{n}\mathfrak{B}{}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C}{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{D}.1 $$

u. s. w.

wo man also für ${}^{n+m}\mathfrak{R}$ den oben angegebenen Werth findet.

Ehe ich weitere Folgerungen mache, will ich folgende nützliche Betrachtung hinzufügen. Wir können manche Untersuchungen und manchen langwierigen Calcul, dadurch ungemein abkürzen, wenn wir überlegen, daß *die analytischen Operationen, nur die Form des zu suchenden aus der Form des Gegebenen bestimmen, die Größen aber unbestimmt lassen.*

Diese wirklich höchst wichtige philosophische Bemerkung, verdanken wir, wenigstens so bestimmt ausgedrückt unsern gelehrten Hrn. Prof. Kugel. Ich werde gleich zeigen wie wir hier davon eine sehr gute Anwendung machen können.

Das $(r + 1)$te Glied von $(1 + x)^{n+m}$ oder $(1 + x)^{n+m} \urcorner (r + 1)$ ist $= {}^{n+m}\mathfrak{R}x^r$; das $(1 + x)^m . (1 + x)^n \urcorner (r + 1)$, welches mit ${}^{n+m}\mathfrak{R}x^r$ identisch seyn soll, muß also aus lauter partial Produkte die x^r enthalten bestehen. Diese partial Produkte entstehen nun aus zwey Glieder, deren das eine aus der Reihe $(1 + x)^m$, das andere aus der Reihe $(1 + x)^n$

ge-

genommen ist; die Exponenten der xen worin diese Glieder multiplizirt sind, müssen also zusammen addirt immer die Zahl r geben damit ihr Produkt x^r enthält, da nun in jeder der in einander zu multiplizirende Reihen diese Eponenten von x (den das erste Glied von 0 angerechnet) die Reihe der natürlichen Zahlen ist, so führt diese Betrachtung, auf das wichtige Problem

Jede ganze Zahl r aus zwey Zahlen der gegebenen Progression 0, 1, 2, 3, 4....r, nicht allein zusammenzusetzen, sondern was hiernöthig ist, alle diese mögliche Zusammensetzungen selbst darzustellen.

Herr Professor Hindenburg hat dieses Problem in seinem ganzen Umfange, mit bewundrungswürdiger Leichtigkeit aufgelößt, und hierdurch eigentlich eine bisherige Lücke in der Analysis ausgefüllt. Mir sey es erlaubt die Auflösung von diesem hier erwähnten besondern Fall so zu geben, als ich solche zuerst fand ehe ich Hrn. Hindenburgs Verfahren kannte, letzteres werde ich weiter unten mittheilen.

Aus der Lehre von den arithmetischen Progressionen ist bekannt daß, wenn man unter einer arithmetischen Reihe, dieselbe Reihe verkehrt, unterschreibt, so daß das letzte Glied unter dem ersten, das vorletzte unter dem 2ten Gliede vom Anfange u. s. w. zu stehen kömmt, so sind die Summe der übereinander stehenden Glieder unter einander alle gleich, schreibt man also

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots . r-1, r \\ r,\ r-1, r-2, r-3 \ldots\ldots . 1, 0 \end{array}$$

so

so geben jede der zwey übereinanderstehende Zahlen, zur Summe r, und das Problem ist aufgelößt.

Wir können also das $(1 + x)^{m} . (1 + x)^{n} \urcorner (r + 1)$ auf folgende leichte Art finden. Man schreibe

$$(1+x)^{n} = 1 \quad + {}^{n}\mathfrak{A}x \quad + {}^{n}\mathfrak{B}x^{2} \quad + \ldots + {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}x^{r-1} + {}^{n}\mathfrak{R}x^{r}$$

darunter

$$(1+x)^{m} = {}^{m}\mathfrak{R}x^{r} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{R}}x^{r-1} + {}^{m}\overset{-2}{\mathfrak{R}}x^{r-2} + \ldots + {}^{m}\mathfrak{A}x \quad + 1$$

und multiplizire jede zwey übereinanderstehende Glieder in einander, so erhält man das gesuchte wie oben, denn die Exponenten von den xen machen, die oben verkehrt unter einander geschriebenen arithm. Progressionen.

Ich sagte aus der Form des Gegebenen ist die Form des Gesuchten bestimmt, das findet hier folgende Anwendung, da $p + (r - p) = r$ geben, so multiplizire man

$$(1 + x)^{n} \urcorner (p + 1) = {}^{n}\mathfrak{P} . x^{p}$$

$$\text{und } (1 + x)^{m} \urcorner (r - (p - 1)) = {}^{m}\overset{-p}{\mathfrak{R}} . x^{r-p}$$

in einander, so giebt ${}^{n}\mathfrak{P} . x^{p} . {}^{m}\mathfrak{R}x^{r-p}$ die Form eines jeden partialProdukts, woraus ${}^{n+m}\mathfrak{R}x^{r}$ bestehet und da es uns bey gegenwärtiger Untersuchung nur um die Binomialcoeffizienten die in diesen partialProdukten vorkommen zu thun ist, so giebt

${}^{n}\mathfrak{P} . {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{R}}$ dazu die allgemeine Form.

Setzen wir nemlich p, nach und nach $= 0, 1, 2, \ldots r-1, r$, so erhalten wir

$$1 . {}^{m}\mathfrak{R} + {}^{m}\mathfrak{A} . {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + \ldots . {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}} . {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{R} . 1 = {}^{n+m}\mathfrak{R}.$$

Aus der allgemeinen Form für ${}^{n+m}\mathfrak{R}$, findet sich wenn man $\mathfrak{R}$ nach und nach $= \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ u. s. w., setzt, die

obi-

obigen für ${}^{n+m}\mathfrak{A}$, ${}^{n+m}\mathfrak{B}$, ${}^{n+m}\mathfrak{C}$, ${}^{n+m}\mathfrak{D}$ u. s. w. gefundene Werthe.

Mann wird denke ich schon jetzt den Vortheil den jener Klügelsche Satz, in Abkürzung der hier sonst nöthigen Rechnungen bewirkt hat, einsehen, an andern Orten werden noch weit mehr in die Augen fallende gegeben werden.

4.

Es ist

$$1^2 + {}^{n}\mathfrak{A}^2 + {}^{n}\mathfrak{B}^2 + {}^{n}\mathfrak{C}^2 + \ldots\ {}^{n}\mathfrak{R}^2 + \ldots\ 1^2$$

$$= {}^{2n}\mathfrak{N} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n}.2^{2n}$$

Beweis.

Da ${}^{n+m}\mathfrak{R} = 1.{}^{n}\mathfrak{R}. + {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + \ldots {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}.{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{R}.1$ so ist wenn statt $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$ gesetzt wird

$${}^{n+m}\mathfrak{N} = 1.{}^{m}\mathfrak{N} + {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + \ldots {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{N}.1$$

da nun ${}^{n}\mathfrak{N} = 1$; ${}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{N}} = {}^{n}\mathfrak{B}$ u. s. w. ist, so hat man auch

$${}^{n+m}\mathfrak{N} = 1.{}^{m}\mathfrak{N} + {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + \ldots {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{m}\mathfrak{A} + 1.1$$

setzt man hier $m = n$, so folgt

$${}^{2n}\mathfrak{N} = 1.{}^{n}\mathfrak{N}. + {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + \ldots + {}^{n}\mathfrak{A} + 1.1$$

folglich

$${}^{2n}\mathfrak{N} = 1^2 + {}^{n}\mathfrak{A}^2 + {}^{n}\mathfrak{B}^2 + \ldots\ {}^{n}\mathfrak{R}^2 + \ldots {}^{n}\mathfrak{A}^2 + 1^2$$

W. Z. E. W.

5.

Anmerkung.

Der merkwürdige Satz in (4) würde, meines Wissens zuerst von Lagrange, und zwar zufälliger Weise, gefunden. Denn in einer Abhandlung die in den Berliner Denkschriften stehet, fand er für eine gewisse Wahrscheinlichkeit zuerst den einen, und für diese nemliche Wahrscheinlichkeit hernach auch den andern Ausdruck und schloß daraus auf ihre Gleichheit. Bemerkt zugleich daß er aber noch keinen analytischen Beweis gefunden hätte, der ihm auch ziemlich versteckt zu seyn schien.

6.

Es ist $\pm \overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}} \mp {}^{m+1}\mathfrak{N} = \mp {}^{m}\mathfrak{N}$.
oder welches einerley

$$\pm \overset{-1}{{}^{m-1}\mathfrak{N}} \mp {}^{m}\mathfrak{N} = \mp {}^{m-1}\mathfrak{N}.$$

Beweis.

Seite 174 habe ich bewiesen, daß

$${}^{m}\mathfrak{N} + \overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N} \text{ ist}$$

woraus sogleich obige Gleichung folgt.

7.

Es ist

$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} + \ldots\ldots + {}^{m}\mathfrak{N} = \pm {}^{m-1}\mathfrak{N}.$$

Beweis.

Setzt man in der 2ten Gleichung bey (6) nach und nach $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ u. s. w., so bekommt man

$1 - {}^{m}\mathfrak{A}$

$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} = - {}^{m-1}\mathfrak{A}\,; \quad - {}^{m-1}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} = {}^{m-1}\mathfrak{B}.$$
$${}^{m-1}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} = - {}^{m-1}\mathfrak{C}\,; \quad - {}^{m-1}\mathfrak{C} + {}^{m}\mathfrak{D} = {}^{m-1}\mathfrak{D}$$

u. s. w.

folglich auch

$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} = {}^{m-1}\mathfrak{B}\,; \quad 1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} = - {}^{m-1}\mathfrak{C}$$
$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} + {}^{m}\mathfrak{D} = {}^{m-1}\mathfrak{D}\,;$$

also überhaupt

$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} + {}^{m}\mathfrak{D} \ldots\ldots \pm {}^{m}\mathfrak{N} = \pm {}^{m-1}\mathfrak{N}.$$

W. Z. E. W.

8.

Es muß

$$0^0 = 1 = \pm {}^{-1}\mathfrak{N} \text{ seyn.}$$

Beweis.

Wenn in (7) $m = n$ ist, so wird die linke Seite der Gleichung gleich $(1 - 1)^n$ und die rechte Seite geht über in $\pm {}^{n-1}\mathfrak{N}$, aber der nte Binom. Coeff. der $(n + 1)$ten Potenz ist $= 0$; auch ist $(1 - 1)^n$ Null für jeden endlichen wirklichen Werth von n, (S. 158. §. 6.); aber für $n = 0$, ist $(1 - 1)^0 = 0^0 = 1$, folglich muß $1 = \pm {}^{-1}\mathfrak{N}$ seyn. Vielleicht wird hier mancher fragen was ${}^{-1}\mathfrak{N}$ eigentlich bedeutet? ${}^{-1}\mathfrak{N}$ bedeutet den allgemeinen nten Bin. Coeff. des $(n+1)$ten Gliedes in $(1+1)^{-1} = \frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$; das $(n + 1)$te Glied dieser Reihe ist aber gewiß $= \pm 1 = 1 \,.\, \pm 1$ folglich ${}^{-1}\mathfrak{N}$ zuverlässig nichts anders als 1. Wodurch ich abermals und zwar wie mich dünkt, sehr strenge bewiesen habe daß $0^0 = 1$

seyn muß, und sich also hier auf eine angenehme Art bestätiget.

Anm. Für Anfänger muß ich erinnern daß hier n als Exponent $= 0$ nicht mit $\mathfrak{N}$ als $n$te Bin. Coeff. einerley ist.

9.

Wenn man in der Gleichung

$$1 - {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{n}\mathfrak{R} = \pm {}^{n-1}\mathfrak{R}$$

statt $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$ setzt, so hat man in Hindenbürgische Zeichen vollkommen die Formel, die der Herr Prof. Fischer in seiner Theorie der Dimensionszeichen §. 146. noch auf eine andere ihm eigenthümliche Art bewiesen hat. *)

Schreibt man $n - m$ statt n und $\overset{-m}{\mathfrak{R}}$ statt $\mathfrak{R}$, so kömmt

$$1 - {}^{n-m}\mathfrak{A} + {}^{n-m}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{n-m}\overset{-m}{\mathfrak{R}} = + {}^{n-(m+1)}\overset{\cdot\cdot m}{\mathfrak{R}}$$

setzt man nun hierin nach und nach $m = 1, 2, 3$ u. s. w., so erhält man sogleich, die Formeln die im 147. §. der Theorie der Dimensionszeichen stehen.

10.

Setzt man in der Formel für $\pm {}^{n-1}\mathfrak{R}$; $-n$ statt n, so entsteht

1—

*) Fischer beweißt diese Gleichung ohne Hülfe des binomischen Lehrsatzes, daher ist der Vorwurf, den Hr. Töpfer (in seiner bekannten Schrift wieder Fischer. S. 169.) ihm dieserwegen macht, offenbar übel angebracht.

$$1 - {}^{-n}\mathfrak{A} + {}^{-n}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{-n}\mathfrak{R} = \pm {}^{-(n+1)}\mathfrak{R}.$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Da aber} - & & {}^{-n}\mathfrak{A} = {}^{n}\mathfrak{A} \\
 & + & {}^{-n}\mathfrak{B} = {}^{n+1}\mathfrak{B} \\
 & - & {}^{-n}\mathfrak{C} = {}^{n+2}\mathfrak{C} \\
 & & \vdots \\
 & \pm & {}^{-n}\mathfrak{R} = {}^{n+r-1}\mathfrak{R} \\
\text{und} & \pm & {}^{-(n+1)}\mathfrak{R} = {}^{n+r}\mathfrak{R}
\end{array}$$

Von diesen Gleichungen wird man sich wohl ohne meine Anweisung zu überzeugen suchen. — Da sie fast von selbst einleuchten.

so ist

$$1 + {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n+1}\mathfrak{B} + {}^{n+2}\mathfrak{C} + {}^{n+3}\mathfrak{D} \ldots + {}^{n+r-1}\mathfrak{R} = {}^{n+r}\mathfrak{R}.$$

Hierin $n + m$ statt n, und $\overset{-m}{\mathfrak{R}}$ statt $\mathfrak{R}$ gesetzt, giebt

$$1 + {}^{n+m}\mathfrak{A} + {}^{n+m+1}\mathfrak{B} + {}^{n+m+2}\mathfrak{C} \ldots + {}^{n+m+r-1}\overset{-m}{\mathfrak{R}} = {}^{n+m+r}\overset{-m}{\mathfrak{R}}$$

hierin nun nach und nach $n = 1, 2, 3$ u. s. w. gesetzt, so erhält man wiederum alle Formeln die bey Fischer in §. 148 stehen. Und wenn man hier in der Formel für ${}^{n+r}\mathfrak{R}$, statt n, $2n$ setzt, so entsteht die Formel, welche Fischer §. 165. giebt.

II.

Die in (9 und 10) enthaltene Formeln ergeben sich auch unmittelbar, aus der allgemeinen Summenformel für Binomialcoeffizienten. Es war nemlich oben

$${}^{n+m}\mathfrak{R} = 1.{}^{m}\mathfrak{R} + {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\mathfrak{B}.{}^{m}\overset{-2}{\mathfrak{R}} + \ldots {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}}\,{}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}\,{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{R}.1$$

In dieser Formel wird bekanntlich

für $r = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

$\mathfrak{R} = 1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$

Setzt man nun hier nach und nach

$m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3 \ldots\ \pm r$

so geben die negativen Zahlen, die Fischerschen Formeln in (§. 146 — 148), eben so als sie sich aus den in (9 und 10) gegebenen Formeln finden. Setzt man z. B. $m = -1$, so ist

$$^{n-1}\mathfrak{R} = 1.^{-1}\mathfrak{R} + {}^{n}\mathfrak{A}.^{-1}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\mathfrak{B}.^{-1}\overset{-2}{\mathfrak{R}} + \ldots$$

$$\ldots\ {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}}{}^{-1}\mathfrak{B} + {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}{}^{-1}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{R}.1$$

Wir haben bereits oben erwiesen, daß alle Glieder eines Bin. vom Exponenten — 1, abwechselnd — 1 und + 1 sind, nachdem die Zahl dieser Glieder nach der sie gezählt werden, ungerade oder gerade ist. Ob nun ein Glied positiv oder negativ ist, ergiebt sich aus der Formel von selbst, die in Nichts von der oben gegebenen unterschieden ist, als das jedes Glied noch in einem Bin. Coeff. der (— 1) ten Potenz, also in Eins multiplizirt, und hier nur beybehalten wird, um dadurch die Zeichen der Glieder in jedem verlangten Fall bestimmen zu können. Da das Glied ${}^{n}\mathfrak{R}.1$ in keinen Bin. Coeff. der (— 1)ten Potenz multiplizirt ist, so hat es immer das Zeichen +, schreibt man nun die letzt gefundene Reihe umgekehrt, so erhält man eine bestimmte Norm, deren Zeichen durch den Fortgang sich ebenfalls von selbst ergiebt, nachdem nemlich die 1 in eine ungerade oder gerade Stelle fällt:

Nemlich;

$$^{n-1}\mathfrak{R} = {}^{n}\mathfrak{R} - {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}} - {}^{n}\overset{-3}{\mathfrak{R}} + \ldots \pm 1$$

multiplizirt man diese Gleichung mit ± 1 so erhält

$$\pm\, {}^{n-1}\mathfrak{R} = \pm\, {}^{n}\mathfrak{R} \mp {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}} \pm {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}} \mp {}^{n}\overset{-3}{\mathfrak{R}} \ldots + 1$$

die

die Glieder dieser letzteren Formel haben in derselben Folge die nemlichen Zeichen, als die Formel in (9), und ist auch wesentlich dieselbe, den ${}^{n}\mathfrak{A}$; ${}^{n}\mathfrak{B}$; ${}^{n}\mathfrak{C}$.... sind in der Ordnung wie sie hier stehen identisch mit

$\mathfrak{R}^{-(r-1)}$, $\mathfrak{R}^{-(r-2)}$, $\mathfrak{R}^{-(r-3)}$, u. s. w.

12.

Wenn man in den Formeln (3) setzt,

$$
\begin{array}{lll}
m=0 & \text{wird} & {}^{n}\mathfrak{A} = {}^{n}\mathfrak{A} \\
m=1 & „ & {}^{n+1}\mathfrak{B} = {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B} \\
m=2 & „ & {}^{n+2}\mathfrak{C} = {}^{n}\mathfrak{A} + 2.{}^{n}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C} \\
m=3 & „ & {}^{n+3}\mathfrak{D} = {}^{n}\mathfrak{A} + 3.{}^{n}\mathfrak{B} + 3.{}^{n}\mathfrak{C} + {}^{n}\mathfrak{D} \\
m=4 & „ & {}^{n+4}\mathfrak{E} = {}^{n}\mathfrak{A} + 4.{}^{n}\mathfrak{B} + 6.{}^{n}\mathfrak{C} + 4.{}^{n}\mathfrak{D} + {}^{n}\mathfrak{E}. \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

diese Formeln, findet Fischer §. 367. zwar nicht auf eine so äußerst leichte Art, aber sein Verfahren ist ihm gewiß eigen, und nirgends entlehnt so wie überhaupt sein ganzes Werk, *Theorie der Dimensionszeichen. 2 Theile in 4to. Halle 1792.*, überall Spuren eines geübten mathematischen Scharfsinns und Genie zeigt, und wenn man frey von alle Partheylichkeit, also nicht etwa vorher wieder den Verfasser eingenommen ist, so ist unverkennbar daß die ganze *Theorie der Dimensionszeichen* sein Eigenthum ist. — Nicht nur im äußern Bau der Zeichen weicht er von Hindenburg ab. — Nein was wesentlicher ist — die Gründe, der ganze Gang — Vortrag den er zum Theil hat nehmen müssen, paßt nicht für die ich gestehe es gerne weit vollkommenere

und

und sich ungleich weit verbreitender Hindenbürgische Combinatorische Analytik — Ein Kopf wie Fischer hätte wenn er die Hindenbürgische Comb. Analytik gekannt hätte, nie etwas unvollkommeneres liefern können*) — Seine Schrift hat gleichwohl einen entschiedenen Werth, die Analysis endlicher Größen ist nicht allein dadurch erweitert, sondern es möchte die beste Vorbereitung zum Studiren der bis jetzt heraus gekommenen combinatorischen Schriften seyn, weil man sich nun zur nöthigen Uebung die Fischersche Formeln, alle in Combinatorische übersetzen kann — diesen Dienst hat es wie ich gerne dankbar gestehe mir selbst geleistet. — Aber eben diese so leichte Umsetzung der Dimensionszeichen in Combinatorische, und umgekehrt, hat die meisten Beurtheiler und namentlich Hrn. Töpfer zu übereilten, ungerechten und bittern Vorwürfen verführt. — Um den wesentlichen Unterschied und das Eigenthümliche jeder Methode, gehörig zu würdigen, wähle man ein schwieriges Problem, löse es nach beyder Methode auf, so wird sich zeigen daß der Gang der Auflösung bey beyden durchaus verschieden ist — das aber das Resultat fast selbst der äußern Form (nur nicht in Zeichen) einerley ist — kann entweder als zufällig angesehen werden, oder kann der Natur der mathematischen Untersuchung gemäß nicht anders ausfallen.

12.

*) Sein vortreflicher moralischer Caracter, den freylich nur die beurtheilen können, die das Glück haben, diesen verehrungswürdigen Mann näher und genau zu kennen — bürgt für jede Anmassung fremden Eigenthums.

13.

Es ist

$$1 - \frac{{}^{n}\mathfrak{A}\,.\,{}^{m}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}} + \frac{{}^{n}\mathfrak{B}\,.\,{}^{m}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}} - \frac{{}^{n}\mathfrak{C}\,.\,{}^{m}\mathfrak{C}}{{}^{r}\mathfrak{C}} \ldots \pm \frac{1\,.\,{}^{m}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}}$$

$$= \pm \frac{{}^{n+m-(r+1)}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}}.$$

Beweis.

Man setze in der Hauptreihe (S. 167. §. 13);

statt $y, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots \overset{n}{y}$; die Werthe

$$1, \frac{{}^{m}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}}, \frac{{}^{m}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{A}} \ldots \frac{{}^{m}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}};$$

so ist

$$\Delta y = \frac{{}^{m-r}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}}; \qquad = \frac{{}^{1+m-(r+1)}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}}$$

$$\Delta^2 y = \frac{{}^{m-(r-1)}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}} \qquad = \frac{{}^{2+m-(r+1)}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}}$$

$$\Delta^3 y = \frac{{}^{m-(r-2)}\mathfrak{C}}{{}^{r}\mathfrak{C}} \qquad = \frac{{}^{3+m-(r+1)}\mathfrak{C}}{{}^{r}\mathfrak{C}}$$

$$\Delta^4 y = \frac{{}^{m-(r-3)}\mathfrak{D}}{{}^{r}\mathfrak{D}} \qquad = \frac{{}^{4+m-(r+1)}\mathfrak{D}}{{}^{r}\mathfrak{D}}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n y = \frac{{}^{m-(r-(n-1))}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}} = \frac{{}^{n+m-(r+1)}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}};$$

Substituirt man diese Werthe in der Formel

$$\Delta^n y = \mp 1\,.\,y \pm {}^{n}\mathfrak{A}\,.\,\overset{1}{y} \mp {}^{n}\mathfrak{B}\overset{2}{y} \ldots \pm {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{N}}\;\overset{n-1}{y} + 1\,.\,\overset{1}{y}$$

(S. 177. §. 20.)

oder

oder welches einerley

$$\pm\Delta^{n}y = \overset{1}{y} - {}^{n}\mathfrak{A}\overset{2}{y} + {}^{n}\mathfrak{B}\overset{3}{y} \ldots \mp {}^{n}\mathfrak{R}^{-1}\overset{n-1}{y} \pm 1.\overset{n}{y}$$

so erhält man den oben angegebenen Ausdruck.

14.

Es ist

$$1 + \frac{{}^{n}\mathfrak{A}\,.\,{}^{m-r}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}} + \frac{{}^{n}\mathfrak{B}\,.\,{}^{m-r+1}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}} \ldots + \frac{1\,.\,{}^{n+m-r-1}\mathfrak{R}}{{}^{r}\mathfrak{R}}$$

$$= \frac{{}^{m}\mathfrak{R}}{{}^{r}\mathfrak{R}}.$$

Beweis.

Man substituire in der Formel.

$$\overset{n}{y} = 1\,.\,y + {}^{n}\mathfrak{A}\Delta y + {}^{n}\mathfrak{B}\Delta^{2}y + \ldots {}^{n}\mathfrak{R}\,.\,\Delta^{n}y.$$ (S. 200.)

die für y, Δy, $\Delta^{2}y$ u. s. w. in (13) gefundenen Werthe, so ergiebt sich obige Gleichung.

15.

Setzt man in (13), $r = -1$, so ist

${}^{r}\mathfrak{A} = -1$; ${}^{r}\mathfrak{B} = +1$; ${}^{r}\mathfrak{C} = -1$; ${}^{r}\mathfrak{D} = +1$ u. s. w.
wodurch man erhält:

$$1 + {}^{n}\mathfrak{A}\,.\,{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B}\,.\,{}^{m}\mathfrak{B} \ldots + 1\,.\,{}^{m}\mathfrak{R} = {}^{n+m}\mathfrak{R}.$$

wie wir bereits (S. 223. 4. Bew.) auf andern Wegen gefunden haben.

16.

Es ist

$$1 - \frac{m}{m-1}\,.\,{}^{n}\mathfrak{A} + \frac{m}{m-2}\,.\,{}^{n}\mathfrak{B} - \frac{m}{m-3}\,.\,{}^{n}\mathfrak{C} \ldots \pm \frac{m}{m-n}\,.\,1$$

$$= + \frac{1}{{}^{m-1}\mathfrak{R}}$$

Be-

Beweis.

Man setze in (13), $r = m - 1$, weil nun auch ${}^{m}\mathfrak{R} = \frac{m}{m-r} \cdot {}^{m-1}\mathfrak{R}$, so ist $\frac{{}^{m}\mathfrak{R}}{{}^{m-1}\mathfrak{R}} = \frac{m}{m-r}$, und ${}^{n}\mathfrak{N}$ ist $= 1$; folglich die obige Gleichung richtig.

17.

Es ist

$$1 + \frac{{}^{n}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}} + \frac{{}^{n}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}} \dots + \frac{1}{{}^{r}\mathfrak{N}} = \frac{r+1}{r+1-n}$$

Beweis.

Setzt man in (13); $m = -1$, so entstehet hier die erste Hälfte der Gleichung, und aus der 2ten Hälfte in (13) wird $\pm \frac{{}^{n-r-2}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}}$ und dieses ist nach (16. Bew.) $= \frac{r+1}{r-1-n}$.

Hindenburgs Theorie der combinatorischen Analytik.

1.

Wer sich überwinden wird, daß folgende mit einiger Aufmerksamkeit durchzugehen, dem wird die darauf verwendete Zeit, gewiß nie gereuen können — er wird, (wenn er der Mann ist der entscheiden darf alsdann sicherlicher die Hindenbürgische Erfin-

dung