Die Theorie der Gleichungen

Euler, Leonhard

Berlin, 1791

I. Von den Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53259

I. Von den Gleichungen.

I. Gedanken über die Formen der Wurzeln einer jeden Gleichung.

Von

Leonhard Euler.

Aus dem sechsten Bande der Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften, vom Jahr 1738.

§. 1.

Es ist in der That zu bewundern, daß man noch keine allgemeine Regel zur Auflösung der Gleichungen hat. Kaum war die Analysis erfunden, als man auch schon die Entwickelung der cubischen und biquadratischen Gleichungen kannte; und wie sehr sind seit der Zeit die Grenzen der Analysis erweitert! was für Männer haben jenem Gegenstande ihre Zeit und ihren Fleiß gewidmet! Ob sie aber gleich ihren Endzweck nicht erreicht haben, so ist man doch ihren Bemühungen eine Menge der wichtigsten Hülfsmittel bey der Behandlung der Gleichungen schuldig. Daher befürchte auch ich keinen Tadel, wenn ich einige Gedanken über die Formen der Wurzeln einer jeden Gleichung und über die etwanigen Wege dieselben selbst zu entdecken, mittheile. Vielleicht werden dadurch andere in den Stand gesetzt, weiter zu gehen.

§. 2.

Da eine jede höhere Gleichung alle niedrigere Gleichungen in sich enthält, so ist leicht einzusehen, daß die Erfindung der Wurzeln irgend einer Gleichung die Erfindung der Wurzeln aller niedrigern Gleichungen erfordere. Will man daher die Wurzeln einer Gleichung vom sechsten Grade entwickeln, so ist dazu die Auflösung der Gleichungen vom fünften, vierten und dritten Grade nöthig. So führt auch die Bombellische Regel von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades auf die Auflösung der cubischen Gleichungen, und die Auflösung der cubischen Gleichungen geht ohne die Auflösung der quadratischen Gleichungen nicht von statten.

§. 3.

Die Abhängigkeit der Auflösung der cubischen Gleichungen von der quadratischen stelle ich mir auf folgende Art vor. Ich setze von jeder cubischen Gleichung

$$x^3 = ax + b,$$

in welcher das zweyte Glied fehlt, die Wurzel

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

und lasse A und B die beyden Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$z^2 = \alpha z - \beta$$

seyn.

seyn. Auf diese Art bekomme ich, wegen der Natur der Gleichungen,

$$A + B = \alpha, \text{ und } AB = \beta.$$

Um aber α und β aus a und b zu bestimmen, erhebe ich die Gleichung $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ zur dritten Potestät, wodurch

$$x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{BA}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B$$

wird. Denn vergleicht man diese Gleichung mit $x^3 = ax + b$, so wird

$$a = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{\beta}, \text{ und } b = A + B = \alpha$$

und man bekommt folglich

$$\alpha = b, \text{ und } \beta = \tfrac{1}{27}a^3.$$

Auf diese Art ist die quadratische Gleichung, vermittelst welcher man auf die angezeigte Weise die cubische Gleichung $x^3 = ax + b$ auflösen kann,

$$z^2 = bz - \tfrac{1}{27}a^3.$$

Kennt man nemlich die Wurzeln dieser Gleichung, A und B, so ist

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}.$$

§. 4.

Man findet aber nach $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ nicht bloß eine, sondern alle drey Wurzeln der Gleichung $x^3 = ax + b$. Denn bedeuten μ und ν die beyden cubischen Wurzeln von 1 außer 1, so ist auch

$$x = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$$

vorausgesetzt, daß $\mu\nu = 1$ ist. Es müssen daher die Werthe von μ und ν seyn $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ oder umgekehrt, und folglich thun außer

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

auch folgende Wurzeln

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$$

der gegebenen Gleichung ein Genüge. Nach dieser Methode lassen sich auch die Wurzeln solcher cubischen Gleichungen finden, worin das zweyte Glied nicht mangelt, indem man aus jeder Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen im Stande ist.

§. 5.

Die biquadratischen Gleichungen führt man auf mehr als eine Art auf cubische Gleichungen zurück, aber keine davon stimmt zu meiner jetzigen Absicht überein. Allein außer ihnen habe ich eine der bey den cubischen Gleichungen ähnliche Methode, so daß man daraus ohngefähr schließen kann, wie die höhern Gleichungen werden behandelt werden müssen. Ist nemlich die Gleichung

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

gegeben, worin ebenfalls das zweyte Glied fehlt: so behaupte ich, daß

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$$

und A, B, C die drey Wurzeln einer cubischen Gleichung

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$$

seyen. Auf diese Art wird

$$\alpha = A + B + C$$
$$\beta = AB + AC + BC, \text{ und}$$
$$\gamma = ABC.$$

Um aber α, β und γ zu bestimmen, erhebe ich $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ zur zweyten Potestät, und leite aus

$x^2 =$

$$x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$$
$$x^2 - \alpha = 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$$

her. Ferner erhalte ich durch Erhebung dieser Gleichung zur zweyten Potestät

$$x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4AB + 4AC + 4BC + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})$$

oder

$$x^4 = 2\alpha x^2 + 8x\sqrt{\gamma} + 4\beta - \alpha^2.$$

Nehme ich nun diese Gleichung mit $x^4 = ax^2 + bx + c$ zusammen, so finde ich

$$2\alpha = a;\ 8\sqrt{\gamma} = b;\ \text{und}\ 4\beta - \alpha^2 = c;$$

und daher wird

$$\alpha = \tfrac{1}{2}a;\ \gamma = \tfrac{1}{64}b^2;\ \beta = \tfrac{1}{4}c + \tfrac{1}{16}\alpha^2.$$

Dieses vorausgesetzt ist die cubische Gleichung, vermittelst welcher man die biquadratischen auflösen kann, folgende:

$$z^3 = \tfrac{1}{2}az^2 - \frac{4c - a^2}{16}z + \frac{b^2}{64}.$$

Denn nennt man die Wurzeln dieser Gleichung A, B und C, so wird

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$$

und die übrigen Wurzeln sind

$$x = \sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}$$
$$x = \sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C}$$
$$x = \sqrt{C} - \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

§. 6.

Setzt man $z = \sqrt{t}$, so wird

$$\left(t + \frac{4c + a^2}{16}\right)\sqrt{t} = \frac{at}{2} + \frac{b^2}{64}$$

und folglich, wenn man quadrirt,

$$t^3 + \frac{4c + a^2}{8}t^2 + \frac{(4c + a^2)^2}{256}t = \frac{a^2t^2}{4} + \frac{ab^2t}{64} + \frac{b^4}{4096}$$

oder

$$t^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})t^2 + (\frac{ab^2}{64} - \frac{c^2}{16} - \frac{a^2c}{32} - \frac{a^4}{256})t + \frac{b^4}{4096}.$$

Diese Gleichung hat daher die Eigenschaft, daß ihre Wurzeln Quadratwurzeln aus den Wurzeln der vorigen Gleichung, oder aus A, B und C sind. Nennt man also die Wurzeln derselben E, F und G, so wird

$$x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$$

und es giebt folglich eine cubische Gleichung, wo die biquadratischen Wurzeln ihrer Wurzeln zusammen genommen die Wurzel der gegebenen biquadratischen ausmachen. Nun ist zwar dieser Weg, die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung zu finden, beschwerlicher als der vorige, aber er stimmt dagegen mehr mit der Auflösung der cubischen Gleichungen überein, da dabey aus den Wurzeln der niedrigern Gleichung Wurzeln von eben dem Grade gezogen werden müssen, zu welchem die gegebene Gleichung gehört.

§. 7.

Auf ähnliche Art wird auch die quadratische Gleichung $x^2 = a$, worin das zweyte Glied fehlt, vermittelst der Gleichung $z = a$ vom ersten Grade aufgelöset. Es ist nemlich die Wurzel dieser letzten Gleichung $= a$, und die Wurzel der vorhergehenden $x = \sqrt{a}$, oder $x = -\sqrt{a}$. Ich nenne aber die um einen Grad niedrigere Gleichung, vermittelst welcher die höhere Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt, aufgelöset wird, die resolvirende Gleichung. Auf diese Art hat die Gleichung $x^2 = a$ die resolvirende Gleichung $x = a$; die Gleichung $x^3 = ax + b$ dagegen folgende, $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$,

und

und die Gleichung $x^4 = ax^2 + bx + c$ diese, $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$.
Denn wenn bey der quadratischen Gleichung die Wurzel der resolvirenden Gleichung $= A$ ist, so ist $x = \sqrt{A}$; sind bey der cubischen Gleichung die Wurzeln der resolvirenden Gleichung A und B, so wird $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; und sind bey der biquadratischen Gleichung die Wurzeln der resolvirenden Gleichung A, B und C, so ist $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$.

§. 8.

Ohnerachtet wir hier nicht mehr als drey Fälle haben, so scheint mir gleichwohl daraus nicht ohne Grund gefolgert werden zu können, daß auch die höhern Gleichungen ähnliche resolvirende Gleichungen haben. So muthmaße ich, daß der Gleichung

$$x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

eine Gleichung vom vierten Grade $z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$ zukommen werde, so daß, wenn die Wurzeln von dieser A, B, C und D genennt werden,

$$x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$$

sey. Ueberhaupt scheint mir jede Gleichung

$$x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \text{rc.}$$

eine resolvirende Gleichung von der Form

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} - \text{rc.}$$

zu haben, aus deren $n - 1$ Wurzeln, wenn man sie kennte, und A, B, C, D, rc. nennte,

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} + \text{rc.}$$

werden würde. Wäre diese Muthmaßung gegründet, und könnte man in jedem Falle die resolvirende Gleichung angeben, so wäre es auch möglich, die Wurzeln einer jeden Gleichung zu entwickeln. Man würde nemlich allemal eine Gleichung von einem niedrigern Grade erhalten, und wenn man fortgienge, endlich die wahre Wurzel der gegebenen Gleichung kennen lernen.

§. 9.

Wenn die Gleichungen den vierten Grad übersteigen, so bin ich zwar noch nicht im Stande, die resolvirende Gleichung darzustellen, aber demungeachtet habe ich verschiedene nicht unwichtige Gründe, welche meine Muthmaßung zu bestätigen scheinen. Ist nemlich die Gleichung so beschaffen, daß in der resolvirenden Gleichung, außer den drey ersten Gliedern alle übrige verschwinden: so läßt sich die resolvirende Gleichung allemal angeben, und also auch die gegebene Gleichung selbst auflösen. Die hierher gehörigen Gleichungen sind eben die, welche Moivre in den Transactionen untersucht hat. Es sey die resolvirende Gleichung

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}, \text{ oder } z^2 = \alpha z - \beta$$

Um aus dieser resolvirenden Gleichung diejenige, welche dadurch aufgelöset werden soll, zu entwickeln, setze man ihre Wurzeln A und B, denn die übrigen verschwinden insgesammt. Alsdann ist die Wurzel der aufzulösenden Gleichung

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}.$$

Nun ist $\alpha = A + B$, und $\beta = AB$, wegen der Natur der Gleichungen; folglich

$$\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} = x^2 - 2\sqrt[n]{\beta}$$

ferner

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} = x^3 - 3x\sqrt[n]{\beta}$$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} = x^4 - 4x^2\sqrt[n]{\beta} + 2\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} = x^5 - 5x^3\sqrt[n]{\beta} + 5x\sqrt[n]{\beta^2}$$

und überhaupt

$$\sqrt[n]{A^n} + \sqrt[n]{B^n} =$$

$$x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6}\sqrt[n]{\beta^3}$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}x^{n-8}\sqrt[n]{\beta^4} - \text{ꝛc.} = \alpha.$$

Dieses ist die Gleichung, deren resolvirende Gleichung $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}$ oder $z^2 = \alpha z - \beta$ ist.

§. 10.

Man findet aber auf diese Art von der Gleichung

$$x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - \text{ꝛc.} = \alpha$$

nicht bloß die eine Wurzel $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, sondern es thut derselben auch jede Wurzel von der Form $x = \mu\sqrt[n]{A} + \nu\sqrt[n]{B}$ ein Genüge, wofern $\mu^n = \nu^n = \mu\nu = 1$ ist, und dieses kann auf n verschiedene Arten seyn. Ist z. B. $n = 5$, so sind die fünf Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 5x^3\sqrt[5]{\beta} + 5x\sqrt[5]{\beta^2} = \alpha$$

folgende:

I. $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B}$

II. $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} +$

$$\frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$$

III.

$$\text{III. } x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A}+$$
$$\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$$
$$\text{IV. } x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A}+$$
$$\frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$$
$$\text{V. } x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A}+$$
$$\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$$

denn es sind diese Coefficienten lauter fünfte Wurzeln aus 1, und das Produkt aus je zweyen ist $= 1$. Auf ähnliche Art giebt es außer der Einheit sechs sechste Wurzeln von 1, und unter ihnen drey Paare, welche mit einander multiplicirt zum Produkte 1 geben. Diese Wurzeln sind die Wurzeln der Gleichung

$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Um sie zu finden bedarf es bloß der Auflösung einer cubischen Gleichung, weil eine jede Gleichung vom sechsten Grade von der Form

$$y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0,$$

welche unverändert bleibt, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y setzt, vermittelst einer cubischen Gleichung aufgelöset werden kann. Da dieser Weg bey der Erfindung der Wurzeln öfters mit Vortheil betreten werden kann, so will ich denselben kürzlich beschreiben.

§. 11.

Ich nenne aber solche Gleichungen, die durch die Substitution von $\frac{1}{y}$ für y nicht verändert werden, reciproke Gleichungen. Wenn darin die höchste Potestät von y eine ungerade Potestät ist, so lassen sie sich allemal durch $y + 1$ dividiren, und die dadurch entstehende Gleichung ist eine reciproke Gleichung von einem um eins niedrigern Grade. Es ist daher hinlänglich, bloß die reciproken Gleichungen der geraden Dimensionen zu untersuchen, und die Art ihrer Auflösung zu erklären. Es sey also zuvörderst diese Gleichung vom vierten Grade

$$y^4 + ay^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

gegeben. Betrachtet man dieselbe als ein Produkt aus folgenden beyden quadratischen Gleichungen

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0; \text{ und } y^2 + \beta y + 1 = 0$$

so wird

$$\alpha + \beta = a; \text{ und } \alpha\beta + 2 = b \text{ oder } \alpha\beta = b - 2.$$

Demnach sind α und β die beyden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2 - au + b - 2 = 0$$

und man findet die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung durch die Auflösung quadratischer Gleichungen. Was die Gleichung vom sechsten Grade

$$y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

betrifft: so setze man dieselbe dem Produkte aus folgenden drey quadratischen Gleichungen gleich:

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0.$$

Ist dieses geschehen, so wird

$$\alpha + \beta + \gamma = a; \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b - 3,$$

und

und

$$\alpha\beta\gamma = c - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = c - 2a.$$

Demnach sind α, β und γ die drey Wurzeln der cubischen Gleichung

$$u^3 - au^2 + (b - 3)u - c + 2a = 0.$$

Auf ähnliche Art läßt sich die reciproke Gleichung vom achten Grade

$$y^8 + ay^7 + by^6 + cy^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

als ein Produkt aus folgenden vier quadratischen Gleichungen betrachten

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0$$
$$y^2 + \delta y + 1 = 0,$$

und daraus fließt,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = a$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b - 4$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c - 3a$$
$$\alpha\beta\gamma\delta = d - 2b + 2$$

Hiernach sind die Coefficienten α, β, γ, δ die vier Wurzeln folgender biquadratischen Gleichung

$$u^4 - au^3 + (b-4)u^2 - (c-3a)u + d - 2b + 2 = 0.$$

Setzt man ferner die Gleichung vom zehnten Grade

$$y^{10} + ay^9 + by^8 + cy^7 + dy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

dem Produkte aus folgenden fünf quadratischen Gleichungen gleich

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0$$
$$y^2 + \delta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \varepsilon y + 1 = 0;$$ so werden

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ die fünf Wurzeln der Gleichung

$$u^5 - au^4 + (b - 5)u^3 - (c - 4a)u^2 + (d - 3b + 5)u - e + 2c - 2a = 0$$

Ueberhaupt läßt sich die reciproke Gleichung

$$y^{2n} + ay^{2n-1} + by^{2n-2} + cy^{2n-3} + dy^{2n-4} + ey^{2n-5} + fy^{2n-6} + \ldots\ldots + py^n + \ldots\ldots + fy^6 + ey^5 + dy^4 + by^2 + ay + 1 = 0$$

als aus n quadratischen Gleichungen von folgenden Formen betrachten

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0$$
$$y^2 + \delta y + 1 = 0$$
ꝛc.

und die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. sind dann die Wurzeln folgender Gleichung vom nten Grade:

$$u^n - au^{n-1} + \left.\begin{matrix} b \\ - n \end{matrix}\right\} u^{n-2} \quad \left.\begin{matrix} - c \\ - (n-1)a \end{matrix}\right\} u^{n-3}$$

$$\left.\begin{matrix} + d \\ - (n-2)b \\ + \frac{n(n-3)}{1.2} \end{matrix}\right\} u^{n-4} \quad \left.\begin{matrix} - e \\ + (n-3)c \\ - \frac{(n-1)(n-4)a}{1.2} \end{matrix}\right\} u^{n-5}$$

$$\left.\begin{matrix} + f \\ - (n-4)d \\ + \frac{(n-2)(n-5)}{1.2}b \\ - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} \end{matrix}\right\} u^{n-6} \quad \left.\begin{matrix} - g \\ + (n-5)e \\ - \frac{(n-3)(n-6)}{1.2}c \\ + \frac{n(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a \end{matrix}\right\} u^{n-7}$$

+ h

$$\left.\begin{array}{r} + h \\ -(n-6)f \\ + \dfrac{(n-4)(n-7)}{1 \cdot 2}d \\ - \dfrac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b \\ + \dfrac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{array}\right\} u^{n-8} - \text{etc.}$$

§. 12.

Da eine jede von den quadratischen Gleichungen, aus welchen man die gegebene Gleichung bestehen läßt, zum letzten Gliede 1 hat: so erhellet, daß das Produkt aus je zweyen Wurzeln der gegebenen Gleichung $= 1$ ist. Diese beyden Wurzeln muß man nun mit den beyden Gliedern $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ verbinden, wenn man alle Wurzeln der §. 9. untersuchten Gleichung haben will.

§. 13.

Wenn in der reciproken Gleichung außer den äußersten und dem mittelsten Gliede alle übrige fehlen, wie z. B. in $y^{2n} + py^n + 1 = 0$, so bekommt man die Divisoren $y^2 + \alpha y + 1$; $y^2 + \beta y + 1$; $y^2 + \gamma y + 1$; etc. wenn man für α, β, γ, δ, etc. die Wurzeln folgender Gleichung setzt,

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}u^{n-6} \text{ etc.}$$
$$\pm p = 0$$

und zwar $+ p$, wenn n eine gerade, $- p$ aber, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet. Man sieht hieraus, daß diese Gleichung mit der §. 9. oder $x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \text{etc.} = \alpha$ übereinstimmt, und daß also daraus alle Divisoren angegeben werden können.

§. 14.

Die Auflösung der Formel $y^{2n} + py^n + 1$ in Faktoren leistet großen Vortheil bey der Integration der Differenzial-Formel $\frac{dy}{y^{2n} + py^n + 1}$, womit sich die Geometer häufig beschäftiget haben. Denn hat man den Nenner in seine Faktoren $y^2 + \alpha y + 1$; $y^2 + \beta y + 1$; ꝛc. aufgelöset, so wird dadurch die Integration auf die Quadratur des Cirkels oder der Hyperbel zurückgeführt. Auch ist der Umstand vortheilhaft, daß die Gleichung

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}u^{n-4} - \text{ꝛc.} \pm p = 0$$

die Theilung eines Kreisbogens in n Theile enthält, wodurch die Coefficienten α, β, γ, ꝛc. sehr leicht bestimmt werden können.

§. 15.

Um zur Methode zurück zu kehren, aus den resolvirenden Gleichungen die aufzulösenden Gleichungen zu finden, so sey die resolvirende Gleichung

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$$

und die drey Wurzeln derselben A, B, C; folglich

$$\alpha = A + B + C$$
$$\beta = AB + AC + BC, \text{ und}$$
$$\gamma = ABC.$$

Auf diese Art ist die Wurzel der aufzulösenden Gleichung

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}.$$

Nun sey

$$p = \sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{BC}$$

so wird

$$\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} + \sqrt[n]{C^2} = x^2 - 2p$$

$$\sqrt[n]{A^2B^2} + \sqrt[n]{A^2C^2} + \sqrt[n]{B^2C^2} = p^2 - 2x\sqrt[n]{\gamma}.$$

Ferner

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} + \sqrt[n]{C^3} = x^3 - 3px + 3\sqrt[n]{\gamma}$$

$$\sqrt[n]{A^3B^3} + \sqrt[n]{A^3C^3} + \sqrt[n]{B^3C^3} = p^3 - 3px\sqrt[n]{\gamma} + 3\sqrt[n]{\gamma^2}$$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} + \sqrt[n]{C^4} = x^4 - 4px + 4x\sqrt[n]{\gamma} + 2p^2$$

$$\sqrt[n]{A^4B^4} + \sqrt[n]{A^4C^4} + \sqrt[n]{B^4C^4} = p^4 - 4p^2\sqrt[n]{\gamma} + 4p\sqrt[n]{\gamma^2} + 2x^2\sqrt[n]{\gamma^2}$$

$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} + \sqrt[n]{C^5} = x^5 - 5px^3 + 5x^2\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2x - 5p\sqrt[n]{\gamma}$$

$$\sqrt[n]{A^5B^5} + \sqrt[n]{A^5C^5} + \sqrt[n]{B^5C^5} = p^5 - 5p^3x\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2\sqrt[n]{\gamma^2} + 5px^2\sqrt[n]{\gamma^2} - 5x\sqrt[n]{\gamma^3}.$$

Die Art und Weise, diese Tabelle fortzusetzen, ist leicht zu erkennen. Es ist nemlich

$$\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m}$$
$$=$$
$$x(\sqrt[n]{A^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}} + \sqrt[n]{C^{m-1}})$$
$$- \; p(\sqrt[n]{A^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}} + \sqrt[n]{C^{m-2}})$$
$$+ \; \sqrt[n]{\gamma}(\sqrt[n]{A^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}} + \sqrt[n]{C^{m-3}})$$

und

$$\sqrt[n]{A^mB^m} + \sqrt[n]{A^mC^m} + \sqrt[n]{B^mC^m}$$
$$=$$
$$p(\sqrt[n]{A^{m-1}B^{m-1}} + \sqrt[n]{A^{m-1}C^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}C^{m-1}}$$

—

$$-\sqrt[n]{\gamma}(\sqrt[n]{A^{m-2}B^{m-2}} + \sqrt[n]{A^{m-2}C^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}C^{m-2}})$$
$$+\sqrt[n]{\gamma^2}(\sqrt[n]{A^{m-3}B^{m-3}} + \sqrt[n]{A^{m-3}C^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}C^{m-3}})$$

§. 16.

Diese Reihen haben noch andere merkwürdige Eigenschaften. Denn setzt man

$$\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m} = R, \text{ und}$$
$$\sqrt[n]{A^mB^m} + \sqrt[n]{A^mC^m} + \sqrt[n]{B^mC^m} = S;$$

so wird

$$\sqrt[n]{A^{2m}} + \sqrt[n]{B^{2m}} + \sqrt[n]{C^{2m}} = R^2 - 2S, \text{ und}$$
$$\sqrt[n]{A^{2m}B^{2m}} + \sqrt[n]{A^{2m}C^{2m}} + \sqrt[n]{B^{2m}C^{2m}} = S^2 - 2R\sqrt[n]{\gamma^m}.$$

Auf ähnliche Art ist auch

$$\sqrt[n]{A^{3m}} + \sqrt[n]{B^{3m}} + \sqrt[n]{C^{3m}} = R^3 - 3RS + 3\sqrt[n]{\gamma^m},$$

und

$$\sqrt[n]{A^{3m}B^{3m}} + \sqrt[n]{A^{3m}C^{3m}} + \sqrt[n]{B^{3m}C^{3m}} = S^3 - 3RS\sqrt[n]{\gamma^m} + 3\sqrt[n]{\gamma^{2m}},$$

und es geht also diese Reihe völlig auf eben die Art fort, als die vorhergehende.

§. 17.

Wenn $n = 2$ ist: so wird $\alpha = x^2 - 2p$, und $\beta = p^2 - 2x\sqrt{\gamma}$. Nimmt man diese beyde Gleichungen zusammen, so wird

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}, \text{ und}$$
$$p = \sqrt{AB} + \sqrt{AC} + \sqrt{BC}$$

und A, B, C sind die drey Wurzeln der cubischen Gleichung

$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$. Schafft man daher aus jenen beyden Gleichungen die Größe p weg, so wird

$$\left(\frac{x^2 - \alpha}{2}\right)^2 - 2x\sqrt{\gamma} = \beta, \text{ oder}$$

$$x^4 - 2\alpha x^2 - 8x\sqrt{\gamma} = 4\beta - \alpha^2$$

und die Wurzel dieser Gleichung ist bekannt, indem $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ist. Kommen zwey Gleichungen von folgender Art vor

$$x^3 - 3px + 3\sqrt[3]{\gamma} = \alpha, \text{ und}$$

$$p^3 - 3px\sqrt[3]{\gamma} + 3\sqrt[3]{\gamma^2} = \beta: \text{ so wird}$$

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}, \text{ und}$$

$$p = \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{AC} + \sqrt[3]{BC}$$

so daß A, B und C die drey Wurzeln der cubischen Gleichung $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ sind, wie vorhin. Man kann aber auch den Buchstaben p wegschaffen, und dadurch eine Gleichung zwischen x, α, β und γ finden, deren Wurzeln bekannt sind. Völlig auf dieselbe Art erhält man, wenn folgende zwey Gleichungen vorkommen

$$x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha, \text{ und}$$

$$p^4 - 4p^2x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$$

diese Bestimmungen

$$x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}, \text{ und}$$

$$p = \sqrt[4]{AB} + \sqrt[4]{AC} + \sqrt[4]{BC}$$

und es sind auch hier wieder A, B und C die Wurzeln der Gleichung $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma = a$. Um p auf eine leichtere Art wegzuschaffen, setze man

$$x^2 - 2p = R; \text{ und } p^2 - 2x\sqrt[4]{\gamma} = S$$

so

so wird

$$R^2 - 2S = \alpha \text{ und } S^2 - 2R\sqrt{\gamma} = \beta.$$

Hierdurch bekommt man aus jenen beyden Gleichungen nach Wegschaffung des Buchstabens p,

$$x^4 = 2Rx^2 + 8x\sqrt[4]{\gamma} + 4S - R^2$$

und vergleicht man diese Gleichung mit

$$x^4 = ax^2 + bx + c: \text{ so wird}$$

$$R = \frac{a}{2};\ \sqrt[4]{\gamma} = \frac{b}{8},\ \text{oder } \gamma = \frac{b^4}{4096}$$

$$\text{und } S = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}.$$

Da man auf diese Art

$$\alpha = \frac{a^2}{8} - \frac{c}{2},\ \text{und } \beta = \frac{c^2}{16} + \frac{a^2c}{32} + \frac{a^4}{256} - \frac{ab^2}{64}$$

bekömmt: so werden A, B und C die drey Wurzeln der Gleichung

$$x^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$$

und dieses stimmt mit dem aufs genaueste überein, was wir oben §. 7. gefunden haben.

§. 18.

So oft sich daher bey der Rechnung zwey Gleichungen ergeben, welche die unbekannten Größen z und p enthalten und unter die §. 15. gefundenen Formen gehören: so oft ist man im Stande, den Werth von beyden anzugeben, die eine eliminirte Gleichung mag so zusammengesetzt seyn, als sie will. In diesen Fällen ist es daher besser, daß man anstatt Eine Gleichung zu suchen, zwey, die beyden unbekannten Größen enthaltende Gleichungen beybehält, und untersucht, ob sie unter jenen Formen begriffen sind. Wenn man den Calcul gehörig anstellt, so findet solches öfters statt.

§. 19.

So wie wir die resolvirenden Gleichungen $z^2 = \alpha z - \beta$, und $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ behandelt haben, so kann man auch die Gleichung

$$z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$$

behandeln. Läßt man nemlich die Wurzeln dieser Gleichung A, B, C und D seyn, und setzt man

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} = x$$

$$\sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{AD} + \sqrt[n]{BC} + \sqrt[n]{BD} + \sqrt[n]{CD} = p$$

und

$$\sqrt[n]{ABC} + \sqrt[n]{ABD} + \sqrt[n]{ACD} + \sqrt[n]{BCD} = q$$

und sucht daraus Ausdrücke für $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} +$ 2c., desgleichen für $\sqrt[n]{A^mB^m} + \sqrt[n]{A^mC^m} +$ 2c.: so findet man allemal je drey Gleichungen, welche x, p und q für jeden Werth von m enthalten. Da diese drey Gleichungen auf ähnliche Art sich darstellen, so bekommt man dadurch jene drey unbekannte Größen.

§. 20.

Ich glaube aber, daß sich, wenn man $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D}$ setzt, eine rationale Gleichung werde finden lassen, in welcher x die fünfte Potestät nicht übersteigt, ohnerachtet solches fast nicht möglich zu seyn scheint. Denn so wie wir §. 17. aus den Gleichungen

$$x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha, \text{ und}$$

$$p^4 - 4p^2x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$$

durch die Wegschaffung der Größe p eine Gleichung von nicht mehr als 4 Dimensionen fanden: so ist es vielleicht durch einen ähnlichen Kunstgriff möglich, daß man die Auflösung der Gleichung des fünften Grades $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ endlich entdecke. Ein sehr wichtiger Umstand ist dabey, daß man, wie ich glaube, bloß α, β, γ und δ aus a, b, c und d zu bestimmen nöthig haben wird, und nicht auch diese Buchstaben aus jenen; denn in diesem Falle würde die Gleichung zu einem höhern Grade aufsteigen. Ich überlasse aber dieses Geschäfte andern, oder verschiebe es wenigstens auf eine andere Zeit, indem ich mich für jetzt damit begnüge, daß ich vielleicht durch das Bisherige auf den rechten Weg geleitet habe.

---

2. Von der Auflösung der Gleichungen eines jeden Grades.

Von

Leonhard Euler.

Aus dem neunten Theile der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften, vom J. 1764.

§. 1.

Alles, was bis jetzt in der Algebra über die Auflösung der Gleichungen gelehrt wird, erstreckt sich, wenn von allgemeinen Regeln die Rede ist, bloß bis auf die Gleichungen vom vierten Grade, und noch hat man keine allgemeine Methode, die Wurzeln der Gleichungen vom fünften oder irgend einem höhern Grade zu finden. Ich sage aber ausdrücklich, keine allgemeine Methode, d. h. eine solche, nach welcher man alle Gleichungen, die zu Einem Grade gehören, auflösen kann; denn es giebt von jedem Grade mehrere Gleichungen, die sich durch die Division in zwey oder mehrere Gleichungen auflösen lassen, deren Wurzeln zusammen genommen die Wurzeln jener Gleichungen ausmachen. Auch hat Moivre in jedem Grade gewisse specielle Gleichungen entdeckt, deren Auflösung möglich ist, ob man sie gleich nicht durch die Division in andere Gleichungen zerfällen kann.

§. 2.

§. 2.

Aus der allgemeinen Methode die Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade aufzulösen, ist bekannt, daß sich die Gleichungen des ersten Grades ohne alle Extraction der Wurzel entwickeln lassen, dahingegen die Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades die Extraction der Quadratwurzel erfordert. Die Auflösung der cubischen Gleichungen ferner geht ohne die Extraction der Quadrat- und Cubikwurzel, nicht von statten, und die Auflösung der biquadratischen Gleichungen macht außerdem noch die Extraction der Biquadrat-Wurzel nothwendig. Hieraus läßt sich sicher schließen, daß die Gleichungen des fünften Grades nicht ohne die Extraction der fünften und aller niedrigen Wurzeln möglich sey, und daß überhaupt die Wurzel einer Gleichung vom nten Grade durch eine Formel werde ausgedruckt werden müssen, welche alle Wurzelzeichen sowohl von nten, als von allen niedrigern Graden enthalte.

§. 3.

Hierauf habe ich vor einiger Zeit (in der vorhergehenden Abhandlung) eine Muthmaßung über die Form der Wurzeln einer jeden Gleichung gegründet. Ist nemlich eine Gleichung von irgend einem Grade

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

worin, wie stets angenommen werden kann, das zweyte Glied fehlt, gegeben: so scheint mir allemal eine um einen Grad niedrigere Gleichung von der Form

$$y^{n-1} + \mathfrak{A}y^{n-2} + \mathfrak{B}y^{n-3} + \mathfrak{C}y^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

(die ich die resolvirende Gleichung genennt habe) möglich, durch deren $n-1$ Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. die Wurzel jener Gleichung auf folgende Art ausgedruckt werden müßte:

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{rc.}$$

Diese Muthmaßung habe ich dadurch bestätigt, daß ich gezeigt habe, wie die Auflösung der niedrigern Grade wirklich aus dieser allgemeinen Form fließt, und ich zweifele auch jetzt nicht an ihrer Richtigkeit.

§. 4.

Allein außerdem, daß die Erfindung der resolvirenden Gleichung, sobald die aufzulösende Gleichung den vierten Grad übersteigt, sehr große Schwierigkeiten hat, ja überhaupt genommen, eben so unmöglich scheint, als die Auflösung der gegebenen Gleichung selbst; denn außer den speciellen, den Moivrischen ähnlichen Fällen, kommt man auf nichts wichtiges: so habe ich bey der gedachten Form noch andere Unbequemlichkeiten bemerkt, weswegen ich glaube, daß es vielleicht noch eine andere von jener eben nicht verschiedene Form gebe, wobey diese Unbequemlichkeiten nicht statt fänden, und wobey sich eher hoffen ließe, in dieser schweren algebraischen Materie weitere Fortschritte zu machen. Denn es ist dabey eine Sache von Wichtigkeit, daß man die Form der Wurzeln einer jeden Gleichung genauer kenne.

§. 5.

Vorzüglich mißfällt mir an der Form, welche die Wurzeln aller Gleichungen meiner Muthmaßung nach haben müßten, daß dadurch nicht alle Wurzeln der Gleichung deutlich ausgedruckt werden. Denn obgleich das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{\alpha}$ so viel Werthe in sich schließt als n Einheiten enthält, so daß man, wenn $a, b, c, d, e,$ rc. alle Werthe der Formel $\sqrt[n]{1}$ bedeuten, anstatt $\sqrt[n]{\alpha}$ jede dieser Formeln setzen kann,

$a\sqrt[n]{\beta}$,

$a\sqrt[n]{\alpha}$, $b\sqrt[n]{\alpha}$, $c\sqrt[n]{\alpha}$, $d\sqrt[n]{\alpha}$, rc.: so fällt doch in die Augen, daß man solches nicht bey jedem von den Ausdrücken $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$, rc. zu thun befugt ist. Denn wäre die Verbindung dieser Ausdrücke mit den Buchstaben a, b, c, d, e, rc. willkührlich, so würde man viel mehr Combinationen machen können, als die Gleichung Wurzeln enthält, deren Zahl allemal $= n$ ist.

§. 6.

Wenn also die mitgetheilte Form der Wurzel x alle Wurzeln der Gleichung in sich enthalten soll, so müssen die Combinationen der Glieder $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$, rc. mit den Buchstaben a, b, c, d, rc. durch gewisse Bedingungen eingeschränkt, und die zur Darstellung der Wurzeln untauglichen ausgeschlossen werden. Aus der Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades wissen wir, daß unter den Wurzeln der Einheit von demselben Grade, a, b, c, d, eine gewisse Ordnung festgesetzt werden muß, und daß darnach auch die Combinationen zu machen sind. Man wird also auch unter den Gliedern der Wurzel $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$, rc. eine ähnliche Ordnung beobachten, und darnach die Combinationen machen müssen. Allein da nicht bekannt ist, wie diese Ordnung bey den Wurzeln der höhern Grade gemacht werden muß, so entsteht daher ein wichtiger Mangel für meine ehemalige Muthmaßung, und ich will jetzt suchen denselben aus dem Wege zu räumen.

§. 7.

Zuvörderst wird es nützlich seyn, den Wurzeln aus der Einheit, ihr Exponent mag seyn welcher er wolle, eine gewisse

wisse Ordnung zu geben, weil dadurch meistens die große Menge der Combinationen eingeschränkt werden kann. Zu dem Ende bemerke ich, daß allemal, wenn ein Werth von denen, welche $\sqrt[n]{1}$ außer 1 hat, $= a$ gesetzt wird, auch a^2, a^3, a^4, ꝛc. passende Werthe von $\sqrt[n]{1}$ geben. Denn ist $a^n = 1$, so ist auch $(a^2)^n = 1$; $(a^3)^n = 1$; $(a^4)^n = 1$; ꝛc. Wenn man also die übrigen Wurzeln b, c, d, ꝛc. nennt, so ergiebt sich daraus, weil sich a^2, a^3, a^4, ꝛc. unter ihnen befinden, eine bestimmte Ordnung für diese Buchstaben. Fängt man z. B. nach der Einheit, welche allemal die erste Stelle bekommen muß, von a an, so sind die Werthe der Formel $\sqrt[n]{1}$ folgende: $1, a^2, a^3, a^4 \ldots a^{n-1}$, und ihre Anzahl $= n$. Es sind nemlich nicht mehr Werthe möglich, weil $a^n = 1$; $a^{n+1} = a$; $a^{n+2} = a^2$; ꝛc. ist. Auf ähnliche Art verhält es sich, wenn man von dem Buchstaben b, c oder d ꝛc. anfängt.

§. 8.

Ich muthmaße daher nicht ohne Grund, daß auch unter den Gliedern, welche die Wurzel einer Gleichung oder x ausdrucken, eine solche Ordnung statt finden, oder daß diese Glieder so beschaffen seyn werden, daß die übrigen von einem jeden unter ihnen Poteståten sind, wobey es aber nöthig wird, ihnen unbestimmte Coefficienten zu geben. Hat man also folgende Gleichung, in welcher das zweyte Glied fehlt,

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + Dx^{n-5} \ldots = 0$$

so ist es sehr wahrscheinlich, daß die allgemeine Form ihrer Wurzel

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} \ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

sey, wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. entweder rationale Größen sind, oder wenigstens das Radicalzeichen $\sqrt[n]{\ }$ nicht in sich schließen.

§. 9.

Aus dieser Form erhellet zuvörderst, daß sie nicht mehr als $n - 1$ Glieder enthalten kann. Denn wollte man dieselbe ihrer Natur gemäß fortsetzen, so würden die folgenden Glieder schon unter den vorhergehenden begriffen seyn, weil $\sqrt[n]{v^{n+1}} = v\sqrt[n]{v}$; $\sqrt[n]{v^{n+2}} = v\sqrt[n]{v^2}$; ꝛc. ist. Setzte man daher jene Reihe selbst ins Unendliche fort: so erhielte man gleichwohl in Ansehung der Irrationalität nicht mehr als $n - 1$ Glieder. Da wir nun schon vorhin gesehen haben, daß der Ausdruck für die Wurzel nicht mehr Glieder haben darf, so ist dieser Umstand kein unbedeutendes Kennzeichen der Wahrheit jener Form; es giebt indeß dafür noch stärkere Gründe.

§. 10.

Es läßt sich nemlich dieser Ausdruck sehr leicht auch auf die Gleichungen ausdehnen, in welchen das zweyte Glied nicht fehlt, welches bey dem andern nicht angieng, so daß deswegen der gegenwärtige natürlicher zu seyn scheint. Denn setzt man die irrationalen Glieder $\sqrt[n]{v}$, $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$, ꝛc. fort, so erhält man darunter auch $\sqrt[n]{v^0}$, $\sqrt[n]{v^n}$, welche wegen des zweyten Gliedes der Gleichung noch hinzugefügt werden müssen. Man kann daher, und dies ist noch allgemeiner, behaupten, daß die Wurzel einer vollständigen Gleichung vom nten Grade

$$x^n + \triangle x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + C x^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

die Form habe

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} \ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

wo ω den rationalen Theil der Wurzel bedeutet, von dem man weiß, daß er $= -\frac{1}{n}\triangle$ ist. Die übrigen Glieder enthalten

halten die irrationalen Theile vom Grade n, deren es, insofern sie von einander verschieden sind, nicht mehr als n — 1 geben kann.

§. 11.

Wenn v eine solche Größe bedeutet, daß man aus ihr die nte Wurzel wirklich ausziehen, oder $\sqrt[n]{v}$ entweder rational oder durch niedrigere Wurzelzeichen darstellen kann, so erhellet, daß die Irrationalität vom nten Grade nicht in der Formel bleibt, wodurch die Wurzel x ausgedruckt ist. Dies muß allemal statt finden, wenn die gegebene Gleichung in Faktoren aufgelöset werden kann, denn alsdann enthält keine Wurzel das Zeichen $\sqrt[n]{}$. Da also in diesem Falle alle Radicalzeichen $\sqrt[n]{}$ verschwinden, und auf niedrigere reducirt werden; aus der obigen Form aber nicht erhellet, wie die Verschwindung desselben bey einem Gliede $\sqrt[n]{\alpha}$ ein Gleiches bey den übrigen Gliedern $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, ꝛc. nach sich ziehe: so muß man allerdings diese letzte Form der Natur der Gleichungen angemessener halten als die obige.

§. 12.

Ueberdem zeigt dieselbe, welches das vornehmste ist, alle Wurzeln der Gleichungen ohne alle Zweydeutigkeit, und es ist gar nicht weiter die Frage, wie die Werthe von $\sqrt[n]{1}$ mit den Radicalgrößen mit den Zeichen $\sqrt[n]{}$ zu verbinden sind. Denn wenn die nten Wurzeln aus 1 folgende sind: 1, a, b, c, d, ꝛc.; und man $\sqrt[n]{v}$ mit einer davon, a, combinirt; so muß man, weil $\sqrt[n]{v}$ allerdings $a\sqrt[n]{v}$ ist, für $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$, $\sqrt[n]{v^4}$ ꝛc.

ꝛc. $a^2\sqrt[n]{v^2}$, $a^3\sqrt[n]{v^3}$, $a^4\sqrt[n]{v^4}$, ꝛc. schreiben. Das beständige Glied ω aber bleibt in allen Wurzeln unverändert, weil es eigentlich die Form $\omega\sqrt[n]{v^0}$ vorstellt, und also in $a^0\omega\sqrt[n]{v^0}$ $= 1\omega$ übergeht. Da dieses aus der Theorie von den Gleichungen schon für sich klar ist, so hat man darin ein neues und sicheres Kennzeichen für die Richtigkeit dieser Form.

§. 13.

Hieraus erhellet ferner, wie man nach der Erfindung Einer Wurzel die übrigen darstellen kann, und man hat dazu bloß die nten Wurzeln aus der Einheit zu wissen nöthig. Setzt man dieselben 1, a, b, c, d, ꝛc. und ist die eine gefundene Wurzel der Gleichung

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

so sind die übrigen

$$x = \omega + \mathfrak{A}a\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}a^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}a^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{D}a^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}b\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}b^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}b^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{D}b^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}c\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}c^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}c^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{D}c^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ꝛc.

Auf diese Art erhält man allemal so viel Wurzeln als die Zahl n, welche den Grad der Gleichung anzeigt, Einheiten in sich faßt.

§. 14.

Durch diese Gründe bekommt also diese neue Form der Wurzeln einen sehr hohen Grad der Wahrscheinlichkeit, und

es

es fehlt zur vollen Gewißheit nichts weiter, als eine Regel zur Erfindung derselben bey jeder gegebenen Gleichung und zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. und der Größe v. Ließe sich diese Regel entdecken, so würde die allgemeine Auflösung der Gleichungen, welche bisher noch immer vergeblich gesucht worden ist, bekannt seyn. Noch kann ich zwar diese Regel nicht versprechen, sondern ich muß mich damit begnügen, die Allgemeinheit jener Form erwiesen zu haben. Für die Auflösung der Gleichungen selbst muß indeß dies nothwendig als ein Gewinn betrachtet werden, da man dazu der Kenntniß jener Form auf keine Weise entbehren kann.

§. 15.

Ob wir gleich noch nicht im Stande sind, aus der gegebenen Gleichung selbst, ihre Wurzel, oder die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. und die Größe v zu bestimmen: so schadet solches doch dem Beweise für die Richtigkeit jener Formel nichts, wenn wir umgekehrt aus der angenommenen Wurzel die Gleichung finden können, wovon sie die Wurzel ist. Diese Gleichung muß das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{\ }$ nicht enthalten, weil man die Gleichungen, deren Wurzeln gesucht werden sollen, aus lauter rationalen Gliedern bestehen zu lassen pflegt. Es kommt also darauf an, die Gleichung

$$x = \alpha + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + C\sqrt[n]{v^3} + \ldots + D\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

von der Irrationalität, oder von den Wurzelzeichen $\sqrt[n]{\ }$ zu befreyen, und eine rationale Gleichung daraus herzuleiten, von welcher man mit Gewißheit behaupten kann, daß jener Ausdruck eine Wurzel derselben sey. Vermag man dieses, so ist man auch im Stande alle Wurzeln der Gleichung anzugeben.

Auf diese Art werden wir wenigstens sehr viele Gleichungen angeben können, deren Wurzeln bekannt sind; und wenn diese Gleichungen die allgemeinen Gleichungen aller Grade in sich fassen, so wird auch dieser ihre Auflösung in unserer Gewalt stehen.

§. 16.

Es wird zwar wenig geleistet zu seyn scheinen, wenn wir nur einige Gleichungen darstellen, deren Wurzeln angegeben werden können, indem aus den Elementen bekannt ist, wie Gleichungen von jedem Grade, die gegebene Wurzeln haben, gemacht werden können. Denn wenn Formeln wie $x - a$, $x - b$, $x - c$, ꝛc. in beliebiger Anzahl mit einander multiplicirt werden, so bekommt man allemal eine Gleichung, deren Wurzeln $x = a$, $x = b$, $x = c$, ꝛc. sind; allein diese Art Gleichungen zu formiren leistet bey der Auflösung der Gleichungen wenig Nutzen. Man erhält nemlich auf diesem Wege bloß solche Gleichungen, die sich in Faktoren auflösen lassen, und deren Auflösung selbst weiter keinen Schwierigkeiten unterworfen ist. Eben so wenig Vortheil stiften gegenwärtig diejenigen Gleichungen, die aus der Multiplication zweyer oder mehrerer Gleichungen von niedrigern Graden entstehen; denn auch ihre Auflösung hat auf die allgemeine Auflösung der Gleichungen keinen Einfluß.

§. 17.

Wenn dagegen aus der Formel $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2}$ + ꝛc. eine rationale Gleichung gefunden wird, so kann diese Gleichung keine rationale Faktoren haben, weil sonst ihre Wurzeln das Zeichen $\sqrt[n]{\ }$ nicht bekommen würden, indem sie zugleich Wurzeln niedrigerer Gleichungen wären. Es ist

 aber

aber schon viel geleistet, wenn nur die Wurzeln irgend einer Gleichung eines höhern Grades, die sich nicht in Faktoren auflösen läßt, angegeben werden; und es verdient daher Moivre vielen Dank, weil er von einzelnen Graden der Gleichungen eine in Faktoren unauflösbare Gleichung bekannt gemacht hat, deren Wurzeln angegeben werden können. Wenn seine Formeln einen größern Umfang hätten, so würde ihr Einfluß ohne Zweifel noch viel wichtiger seyn, da hingegen den Gleichungen, die in Faktoren aufgelöset werden können, dergleichen gar nicht beygelegt werden kann.

§. 18.

Doch wir kehren zurück zur Befreyung jener Formel von der Irrationalität, die sie durch das Zeichen $\sqrt[n]{\ }$ hat. Nach der gewöhnlichen Methode die Wurzelzeichen wegzubringen, würde man eine Gleichung bekommen, welche den nten Grad weit überstiege. Denn wenn nur ein Wurzelzeichen da wäre, oder man $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v}$ hätte; so wüde die rationale Gleichung bis zu n Dimensionen von x aufsteigen, und es scheint daher, daß sie viel mehr Dimensionen enthalten wird, wenn mehr Wurzelzeichen von jenem Grade da sind. Hangen diese Wurzelzeichen gar nicht von einander ab, so muß dieses nothwendiger Weise statt finden. Allein da alle Potestäten des ersten sind, so will ich zeigen, daß man die Gleichung rational machen kann, ohne höher als zum nten Grade aufzusteigen. Ich will nemlich darthun, daß die Gleichung

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

auf die Art von der Irrationalität befreyet werden kann, daß die sich ergebende rationale Gleichung die Potestät x^n als

als die höchste enthalte. Es wird also diese Gleichung die Form

$$x^n + \triangle x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

und jene Formel zur Wurzel haben; und da die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung $= n$ ist, so werden wir aus eben dieser Formel alle Wurzeln der Gleichung anzugeben im Stande seyn.

§. 19.

So wie dieses ein sehr deutliches Merkmal von der Richtigkeit dieser Formel ist, so verdient auch bemerkt zu werden, daß die rationale Gleichung, weil die Form der Wurzel $n - 1$ willkührliche Größen enthält, ebenfalls $n - 1$ willkührliche Größen in sich enthalten werde. Hieraus erhellet, daß sich jene Größen auf die Art bestimmen lassen, daß die rationale Gleichung die dadurch gegebenen Coefficienten $\triangle$, A, B, C, ꝛc. bekömmt, und wenn diese Bestimmung wirklich vorgenommen werden kann, so gelangt man dadurch zu einer allgemeinen Auflösung der Gleichungen, ihr Grad mag seyn, welcher er will. Auf diese Art hat man wenigstens keine Ursache an der Möglichkeit jener Auflösung zu zweifeln. Freylich finden sich dabey große Schwierigkeiten, die klar in die Augen fallen werden, wenn wir die Anwendung von jener Form machen, und dabey von den einfachsten Fällen anfangen. Der Kürze und Leichtigkeit wegen wollen wir den rationalen Theil ω weglassen, so daß wir jedesmal zu solchen Gleichungen gelangen, in welchen das zweyte Glied fehlt. Bekanntermaßen leidet dadurch die Allgemeinheit unserer Auflösung nicht.

1.
Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades.

§. 20.

Es sey also, um von den Gleichungen des zweyten Grades anzufangen, $n = 2$. Setzt man $\omega = 0$, so wird unsere Form

$$x = \mathfrak{A}\sqrt{v}$$

und rational gemacht giebt dieselbe

$$xx = \mathfrak{A}\mathfrak{A}v.$$

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der allgemeinen Form der Gleichungen des zweyten Grades, oder mit

$$xx = A,$$

in welcher das zweyte Glied fehlt, so wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}v = A.$$

Man setze, damit dies statt finden könne, $\mathfrak{A} = 1$, so wird

$$v = A$$

und es ergiebt sich demnach aus der Gleichung $xx = A$, wenn man $\mathfrak{A} = 1$ und $v = A$ setzt, für die eine Wurzel derselben

$$x = \mathfrak{A}\sqrt{v} = \sqrt{A}$$

Da $\sqrt{1}$ zwey Werthe hat, nemlich 1 und -1, so ist die andere Wurzel

$$x = \mathfrak{A}\sqrt{v} = -\sqrt{A}$$

wie von selbst klar ist.

2.
Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

§. 21.

Setzt man $n = 3$, so wird die Form der Wurzel

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

Um

Um diese Gleichung rational zu machen, nehme man zuvörderst den Cubus davon

$$x^3 = \mathfrak{A}^3 v + 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v} + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v^2} + \mathfrak{B}^3 v^2$$

Nun nehme man die cubische Gleichung

$$x^3 = Ax + B$$

woraus, wenn man für x den angenommenen Werth schreibt,

$$x^3 = A\mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + A\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2} + B$$

wird, und diese Formel muß nun jener gleich gemacht werden, so daß man sowohl die rationalen als die irrationalen Theile einander gleich setzt.

§. 22.

Die Vergleichung der rationalen Theile giebt

$$B = \mathfrak{A}^3 v + \mathfrak{B}^3 v^2$$

und die Vergleichung der irrationalen Theile

$$A\mathfrak{A} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v, \text{ und}$$

$$A\mathfrak{B} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}v;$$

aus beyden folgt

$$A = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v.$$

Wenn also die cubische Gleichung

$$x^3 = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^3 v^2 + \mathfrak{B}^3 v^2$$

gegeben wäre, so würde die eine Wurzel derselben

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

seyn; und wären 1, a und b die drey cubischen Wurzeln aus 1: so wären die beyden übrigen Wurzeln

$$x = \mathfrak{A}a\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}a^2\sqrt[3]{v^2}, \text{ und}$$

$$x = \mathfrak{A}b\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}b^2\sqrt[3]{v^2}.$$

Es ist aber

$$a = b^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \text{ und}$$

$$b = a^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

§. 23.

Es lassen sich aber auch umgekehrt, wenn eine cubische Gleichung

$$x^3 = Ax + B$$

gegeben ist, aus den Coefficienten A und B die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und v bestimmen, und so alle drey Wurzeln jener Gleichung angeben. Da man nur zwey Gleichungen hat, so kann man dabey einen von den Buchstaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ willkührlich bestimmen. Setzt man also $\mathfrak{A} = 1$, so giebt die Gleichung

$$A = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v = 3\mathfrak{B}v$$

für $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = \frac{A}{3v}, \text{ oder } \mathfrak{B}^3 = \frac{A^3}{27v^3}.$$

Bringt man ferner diesen Werth in die erste Gleichung

$$B = v + \mathfrak{B}^3 v^2$$

so erhält man

$$B = v + \frac{A^3}{27v}, \text{ oder } vv = Bv - \frac{A^3}{27}$$

und es wird demnach

$$v = \tfrac{1}{2}B \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 - \tfrac{1}{27}A^3)}$$

wo es gleich ist, was für ein Zeichen man annehmen will.

§. 24.

Da auf diese Art der Werth für v gefunden worden, und aus $\mathfrak{B} = \frac{A}{3v}$

$\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$

$$\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2} = \frac{A}{3\sqrt[3]{v}}$$

fließt, so werden die drey Wurzeln der Gleichung

$$x^3 = Ax + B$$

$$\text{I. } x = \sqrt[3]{v} + \frac{A}{3\sqrt[3]{v}}$$

$$\text{II. } x = a\sqrt[3]{v} + \frac{bA}{3\sqrt[3]{v}}$$

$$\text{III. } x = b\sqrt[3]{v} + \frac{aA}{3\sqrt[3]{v}}$$

Da aber

$$\frac{1}{v} = \frac{\frac{1}{2}B \mp \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 - \frac{1}{27}A^3)}}{\frac{1}{27}A^3}$$

ist, so wird

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 - \tfrac{1}{27}A^3)})} \text{ und}$$

$$\frac{A}{3\sqrt[3]{v}} = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 - \tfrac{1}{27}A^3)})}$$

und hieraus fließen die gewöhnlichen Formeln für die Auflösung der cubischen Gleichungen.

3.

Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

§. 25.

Nun wollen wir $n = 4$ setzen, wodurch unsere Wurzelform in

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

übergeht, und die Gleichung aufsuchen, deren Wurzel diese

Form hat. Um hier die Irrationalität wegzuschaffen bedarf es nur einer leichten Rechnung. Denn da $\sqrt[4]{v^2} = \sqrt{v}$ ist, so nehme man die Gleichung

$$x - \mathfrak{B}\sqrt{v} = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

und quadrire sie. Hierdurch wird

$$x^2 - 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}v = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\sqrt{v} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}v + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v\sqrt{v}$$

oder

$$x^2 + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\sqrt{v}.$$

Quadrirt man abermals, so bekommt man folgende rationale Gleichung

$$x^4 + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})vx^2 + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2vv$$
$$=$$
$$4\mathfrak{B}\mathfrak{B}vxx + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}vx + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2v$$

oder

$$x^4 = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})vxx + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^4v$$
$$- \mathfrak{B}^4vv + \mathfrak{C}^4v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv.$$

§. 26.

Von dieser biquadratischen Gleichung ist also die eine Wurzel

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

und wenn man die vier biquadratischen Wurzeln der Einheit 1, a, b und c nennt, also

$$a = +\sqrt{-1};\quad b = -1;\quad \text{und } c = -\sqrt{-1}$$

setzt, so wird

$$a^2 = -1 = b;\quad a^3 = -\sqrt{-1} = c$$
$$b^2 = +1;\quad b^3 = -1 = b;$$
$$c^2 = -1 = b;\quad c^3 = +\sqrt{-1} = a.$$

Folglich sind die übrigen Wurzeln jener Gleichung

x =

$$x = \mathfrak{A}a\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}b\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}c\sqrt[4]{v^3}$$

$$x = \mathfrak{A}b\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}b\sqrt[4]{v^3}$$

$$x = \mathfrak{A}c\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}b\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}a\sqrt[4]{v^3}$$

§. 27.

Es läßt sich aber auch umgekehrt jede biquadratische Gleichung auf jene Form zurückführen, und die Wurzeln derselben angeben. Denn sollen aus der Gleichung

$$x^4 = Ax^2 + Bx + C$$

die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und die Größe v bestimmt werden, als worauf es bey der Ecfindnng ihrer Wurzeln lediglich ankommt: so ist

$$A = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v;$$

$$B = 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}v$$

$$C = \mathfrak{A}^4v - \mathfrak{B}^4vv + \mathfrak{C}^4v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv$$

oder

$$C = (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2v - (\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2vv + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv.$$

Aus den beyden ersten Formeln fließt

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = \tfrac{1}{2}A$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4\mathfrak{B}v}$$

und setzt man diese Werthe in die dritte Gleichung, so wird

$$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \tfrac{1}{4}AA + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv$$

Nun giebt aber die erste Formel ebenfalls

$$4\mathfrak{A}\mathfrak{C}v = A - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}v$$

und substituirt man auch diesen Werth, so wird

$$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \tfrac{1}{4}AA + 2A\mathfrak{B}\mathfrak{B}v - 4\mathfrak{B}^4vv$$

so daß also schon die beyden Buchstaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ weggeschaft sind.

§. 28.

Da auf diese Art noch zwey unbekannte Größen $\mathfrak{B}$ und v übrig bleiben, so kann man $\mathfrak{B}$ willkührlich annehmen. Setzt man daher $\mathfrak{B} = 1$, so muß v aus der Gleichung

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

bestimmt werden, und hat man daraus v gefunden, so sind noch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ aus den vorhergehenden Gleichungen zu suchen. Da also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4v};\quad 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}\sqrt{v} = \frac{A - 2v}{2\sqrt{v}}$$

ist, so ergiebt sich durch die Addition, Subtraction und Extraction der Wurzel

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\sqrt{v} = \surd\left(\frac{B}{4v} + \frac{A}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}\right) \text{ und}$$

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{C}\sqrt{v} = \surd\left(\frac{B}{4v} + \frac{A}{2\sqrt{v}} + \sqrt{v}\right); \text{ also}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\sqrt{v}}\surd(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v} +$$

$$\frac{1}{4\sqrt{v}}\surd(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4v}\surd(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v} -$$

$$\frac{1}{4v}\surd(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v}.$$

§. 29.

Da also $\mathfrak{A}\sqrt[4]{v} \pm \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3} = (\mathfrak{A} \pm \mathfrak{C}\sqrt{v})\sqrt[4]{v}$ ist, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 = Ax^2 + Bx + C$$

nachdem man den Werth von v aus der Gleichung

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

gefun-

gefunden hat, folgende:

$$\text{I. } x = \sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$$

$$\text{II. } x = \sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$$

$$\text{III. } x = -\sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$$

$$\text{IV. } x = -\sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$$

Auf diese Art pflegt man bekannter Maßen die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf die Auflösung der cubischen Gleichungen zurückzuführen.

4.

Auflösung der Gleichungen des fünften Grades.

§. 30.

Setzt man $n = 5$, so verwandelt sich unsere Form in

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

und es kommt zuvörderst darauf an, eine Gleichung vom fünften Grade zu finden, deren Wurzel auf diese Art ausgedruckt wird, oder jene Form von ihrer Irrationalität zu befreyen. Allein hierbey zeigen sich große Schwierigkeiten, weil man gegenwärtig nicht mehr auf die Art verfahren kann, wie vorhin. Zwar lassen sich, wenn man

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

annimmt, und darin jenen Werth von x substituirt, vier Gleichungen machen, vermittelst welcher je vier Wurzelzeichen weggebracht werden können; aber die Bestimmung der angenommenen Buchstaben A, B, C, und D, geht nicht von statten.

§. 31.

§. 31.

Ich bin daher auf einen andern Weg verfallen, der bey jedem Grade Anwendung leidet, und wobey zugleich erhellet, daß die rationale Gleichung den $n$ten Grad nie übersteige. Es beruhet derselbe auf der Natur der Gleichungen selbst, und auf der Art die Coefficienten der Glieder aus allen Wurzeln zu bestimmen. Da wir nemlich alle fünf Wurzeln der gesuchten Gleichung kennen, so sind wir nach den bekannten Regeln auch im Stande, die Coefficienten der Glieder der Gleichung zu finden. Es seyen also 1, a, b, c und d die fünf Wurzeln des fünften Grades aus 1, oder die Wurzeln der Gleichung $z^5 - 1 = 0$: so ist, wenn man die Wurzeln der gesuchten Gleichung α, β, γ, δ und ε nennt,

$$\alpha = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

$$\beta = \mathfrak{A}a\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}a^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}a^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}a^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\gamma = \mathfrak{A}b\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}b^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}b^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}b^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\delta = \mathfrak{A}c\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}c^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}c^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}c^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\varepsilon = \mathfrak{A}d\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}d^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}d^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}d^4\sqrt[5]{v^4}$$

§. 32.

Diese Bestimmung der Wurzeln α, β, γ, δ und ε vorausgesetzt, nehme man die Gleichung

$$x^5 - \triangle x^4 + Ax^3 - Bx^2 + Cx - D = 0$$

an. Alsdann ist

$\triangle =$ der Summe der Wurzeln
$A =$ der Summe der Produkte aus je zweyen
$B =$ der Summe der Produkte aus je dreyen
$C =$ der Summe der Produkte aus je vieren
$D =$ dem Produkte aus allen fünf Wurzeln.

Nun

Nun sey der größern Leichtigkeit wegen

$$
\begin{aligned}
P &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon\\
Q &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2\\
R &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3\\
S &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4\\
T &= \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5
\end{aligned}
$$

so wird

$$
\begin{aligned}
A &= P\\
B &= \frac{\triangle P - Q}{2}\\
C &= \frac{AP - \triangle Q + R}{3}\\
D &= \frac{BP - AQ + \triangle R - S}{4}\\
E &= \frac{CP - BQ + AR - \triangle S + T}{5}
\end{aligned}
$$

§. 33.

Um die Werthe P, Q, R, S, T zu erforschen, muß man zuvor alle Potestäten der Wurzeln der Einheit 1, a, b, c, d, summiren. Da dieselben die Wurzeln der Gleichung $z^5 - 1 = 0$ sind: so ist

$$
\begin{aligned}
1 + a + b + c + d &= 0\\
1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 0\\
1 + a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= 0\\
1 + a^4 + b^4 + c^4 + d^4 &= 0\\
1 + a^5 + b^5 + c^5 + d^5 &= 5
\end{aligned}
$$

Die Summen der sechsten, der siebenten, 2c. bis zu den zehnten Potestäten verschwinden ebenfalls, die Summe der zehnten Potestäten aber wird wieder $= 5$, da $a^5 = 1$; $b^5 = 1$; $c^5 = 1$; $d^5 = 1$ ist. Der Kürze wegen können bey der gegenwärtigen Rechnung die Wurzelzeichen wegge-

lassen

lassen werden, wenn man nur vor Augen behält, daß am Ende mit den Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, die Größen $\sqrt[5]{v}$, $\sqrt[5]{v^2}$, $\sqrt[5]{v^3}$, $\sqrt[5]{v^4}$ verbunden werden müssen.

§. 34.

Addirt man nunmehr die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$: so wird

$$P = \mathfrak{A}(1 + a + b + c + d) + \mathfrak{B}(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \text{ꝛc.} = 0$$

und geht man zu den übrigen Potestäten fort, so findet man außerdem

$$P = 0$$
$$Q = 10(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$R = 15(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D})$$
$$S = 20(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 30(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}) + 120\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$
$$T = 5(\mathfrak{A}^5 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5) + 100(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3) + 150(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}).$$

Hier kommen keine andern Produkte vor als solche, welche bey Hinzufügung der Wurzelzeichen die Potestät von v rational machen; mit andern Worten, wenn man dem Buchstaben $\mathfrak{A}$ eine, dem Buchstaben $\mathfrak{B}$ zwey, dem Buchstaben $\mathfrak{C}$ drey, und dem Buchstaben $\mathfrak{D}$ vier Dimensionen giebt, so ist die Zahl der Dimensionen in allen diesen Produkten durch fünf theilbar, und der Coefficient eines jeden Produkts ist das fünffache des Coefficienten, welcher diesem Produkte nach den Gesetzen der Combinationen zukommen würde.

§. 35.

Da also $P = 0$ ist, so wird auch $\Delta = 0$, und für die übrigen Coefficienten ergiebt sich

A =

$$A = -\tfrac{1}{2}Q;\quad B = \tfrac{1}{3}R;$$

$C = -\tfrac{1}{4}AQ - \tfrac{1}{4}S$; und $D = -\tfrac{1}{5}BQ + \tfrac{1}{5}AR + \tfrac{1}{5}T$

Es ist demnach

$$A = -5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$B = 5(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D})$$
$$C = -5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2) - 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$
$$D = \mathfrak{A}^5 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5 - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}).$$

Mit diesen Gliedern aber müssen die zugehörigen Potestäten von v verbunden werden, wenn man ihren wahren Werth haben will.

§. 36.

Wenn also folgende Gleichung, worin A und C die entgegenstehenden Zeichen haben, gegeben ist

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

und die Coefficienten derselben folgende Werthe haben,

$$A = 5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})v$$
$$B = 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2v + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}v)v$$
$$C = 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3v + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3vv)v - 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2)vv + 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}v^2$$
$$D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{B}^5v^2 + \mathfrak{C}^5v^3 + \mathfrak{D}^5v^4 - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3v)v^2 + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2v + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{B}^2v)v^2,$$

so sind die fünf Wurzeln davon

$$\text{I. } x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

$$\text{II. } x = \mathfrak{A}a\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}a^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}a^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}a^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\text{III. } x = \mathfrak{A}b\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}b^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}b^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}b^4\sqrt[5]{v^4}$$

IV. $x = \mathfrak{A}c\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}c^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}c^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}c^4\sqrt[5]{v^4}$

V. $x = \mathfrak{A}d\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}d^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}d^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}d^4\sqrt[5]{v^4}$

wo a, b, c und d die fünften Wurzeln der Einheit außer 1 bedeuten, deren imaginäre Werthe bekannt sind.

§. 37.

Wenn man nun umgekehrt aus den gegebenen Coefficienten A, B, C, D, die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und v bestimmen könnte, so hätte man eine allgemeine Auflösung aller Gleichungen vom fünften Grade. Allein hierin besteht eben die Schwierigkeit, da man keinen Weg kennt, die Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, wovon einer willkührlich angenommen werden kann, nach und nach auf die Art wegzuschaffen, daß bloß die Größe v und die Coefficienten A, B, C und D in einer Gleichung zurückblieben, die keine überflüßige Wurzeln enthielte. Man hat indeß Grund zu vermuthen, daß man, bey gehörig angestellter Elimination endlich zur Bestimmung des Werths von v zu einer Gleichung vom vierten Grade gelangen würde. Denn wenn man eine Gleichung von einem höhern Grade fände, so würde der Werth von v Wurzelzeichen von eben diesem Grade enthalten, welches nicht statt finden kann. Da aber die Menge der Glieder diese Arbeit so schwer macht, daß kein Erfolg zu hoffen steht, so wird es nicht undienlich seyn, einige weniger allgemeine Fälle, die nicht zu so verwickelten Formeln führen, zu betrachten.

§. 38.

In dieser Absicht wollen wir den Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ solche Werthe beylegen, daß dadurch die Rechnung abgekürzt werden kann, und zuvörderst $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{D} = 0$ setzen. Auf diese Art bekommen wir

A=0;

$A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; und $D = \mathfrak{A}^5 v$

woraus $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{v}$ folgt. Wenn daher folgende Gleichung

$$x^5 = D$$

gegeben ist, so sind ihre fünf Wurzeln

$$\text{I. } x = \sqrt[5]{D}$$

$$\text{II. } x = a\sqrt[5]{D}$$

$$\text{III. } x = b\sqrt[5]{D}$$

$$\text{IV. } x = c\sqrt[5]{D}$$

$$\text{V. } x = d\sqrt[5]{D}$$

Da dieser Fall von selbst klar ist, so war es gut davon auszugehen, damit die Anwendbarkeit unserer Methode auf die bekannten Fälle einleuchtend würde.

§. 39.

Nun mögen von den Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zwey verschwinden, weil, wenn man drey $= 0$ werden läßt, sie mögen seyn welche sie wollen, allemal der vorige Fall wiederkehrt. Es sey also $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{D} = 0$, oder eine Gleichung zu suchen, deren Wurzel

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2}$$

ist. Bey dieser Voraussetzung wird

$$A = 0;\quad B = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v;\quad C = 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v;$$
$$D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

und die gesuchte Gleichung ist demnach

$$x^5 = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v x^2 + 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

Vergleicht man dieselbe mit folgender Form

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

so wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v = P \text{ und } \mathfrak{A}^3\mathfrak{B} v = Q$$

also

$$\mathfrak{A}^5 v = \frac{QQ}{P} \text{ und } \mathfrak{B}^5 v^2 = \frac{P^3}{Q}$$

folglich

$$R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}.$$

§. 40.

Hierdurch gelangen wir zur Auflösung folgender speciellen Gleichung des fünften Grades.

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$$

Denn da $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}}$, und $\mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} = \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$ ist, so werden die fünf Wurzeln derselben folgende:

$$\text{I. } x = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$$

$$\text{II. } x = a\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + a^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$$

$$\text{III. } x = b\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + b^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$$

$$\text{IV. } x = c\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + c^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$$

$$\text{V. } x = d\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + d^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}.$$

Diese Gleichung weicht von der Moivrischen nicht sehr ab, und da sie sich nicht in Faktoren auflösen läßt, so verdient die gegenwärtige Auflösung um so mehr bemerkt zu werden.

§. 41.

Man kann diese Gleichung auch von den Brüchen befreyen, wenn man $P = MN$ und $Q = M^2N$ setzt. Man bekommt nemlich durch diese Substitution die Gleichung

$$x^5 = 5MNxx + 5M^3Nx + M^3N + MN^2$$

deren Wurzel

$$x = \sqrt[5]{M^3N} + \sqrt[5]{MN^2}$$

ist. Bedeutet a irgend eine von den fünften Wurzeln der Einheit, so ist die allgemeine Form der übrigen Wurzeln

$$x = a\sqrt[5]{M^3N} + a^2\sqrt[5]{MN^2}$$

Setzt man z. B. $M = 1$ und $N = 2$, so ist die Wurzel der Gleichung

$$x^5 = 10xx + 10x + 6$$

allgemein ausgedruckt

$$x = a\sqrt[5]{2} + a^2\sqrt[5]{4}$$

und diese Gleichung ist von der Art, daß sie auf keinem andern Wege aufgelöset werden kann.

§. 42.

Wenn man 𝔅 und 𝔇 verschwinden läßt, so kommt man auf eben denselben Fall zurück. Es wird nemlich alsdann

$$A = 0; \quad B = 5\mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v; \quad C = 5\mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv$$

$$D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{C}^5v^3$$

und wenn man also die Gleichung

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

annimmt, so daß $P = \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v$ und $Q = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3v^2$ wird: so ergiebt sich

$$\frac{QQ}{P} = \mathfrak{C}^5v^3 \text{ und } \frac{P^3}{Q} = \mathfrak{A}^5v.$$

Hieraus fließt wie vorhin

$$R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$$

und eben so findet man dieselben Wurzeln. Ein gleiches findet statt, wenn man entweder $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$, oder $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{C} = 0$ setzt. Läßt man aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, oder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ verschwinden, so finden sich einige Verschiedenheiten, und es wird daher nützlich seyn, diese Fälle genauer zu erwägen.

§. 43.

Es sey also $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{C} = 0$. Alsdann bekommt man

$$A = 5\mathfrak{A}\mathfrak{D}v;\quad B = 0;\quad C = -5\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D}vv;$$

$$D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{D}^5 v^4.$$

Setzt man daher $\mathfrak{A}\mathfrak{D}v = P$, so wird

$$A = 5P \text{ und } C = -5PP,$$

ferner

$$DD - 4P^5 = (\mathfrak{A}^5 v - \mathfrak{D}^5 v^4)^2 \text{ und } \mathfrak{A}^5 v - \mathfrak{D}^5 v^4 = \sqrt{(DD - 4P^5)}.$$

Folglich

$$\mathfrak{A}^5 v = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)}$$

$$\mathfrak{D}^5 v^4 = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)}.$$

Ist daher folgende Gleichung gegeben

$$x^5 = 5Px^3 - 5PPx + D$$

so ist jede ihrer Wurzeln

$$x = \alpha\sqrt{(\tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)})} + \alpha^4\sqrt{(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)})}.$$

Dieses ist die Gleichung, deren Auflösung Moivre gelehret hat.

§. 44.

Es lassen sich aber aus der allgemeinen Formel unzählige Gleichungen vom fünften Grade ableiten, deren Wurzeln angegeben werden können, ohnerachtet die Gleichungen

selbst

selbst die Auflösung in Faktoren gar nicht zulassen. Denn haben die Coefficienten der Gleichung des fünften Grades

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

folgende Werthe:

$$A = \frac{5}{gk}(g^3 + k^3)$$

$$B = \frac{5}{2mnrr}((m+n)(m^2g^3 - n^2k^3) - (m-n)rr)$$

$$C = \frac{5}{mnggkkrr}(g^3(m^2g^3 - n^2k^3) - \\ \left(m(m+n)g^6 - (m^2 + mn - n^2)g^3k^3 \right. \\ \left. + n(m-n)k^6)rr - k^3r^4\right)$$

$$D = \frac{g^3}{mmnk^4g^3}\left((m^2g^3 - nnk^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + rn^2k^3) \right. \\ \left. - n^2k^3r^4\right) \\ + \frac{kk}{mnng^4r^3}(m^2g^3r^2(m^2g^3 - n^2k^3) - 2m^2g^3 + n^2k^3)r^4 + r^6) \\ + \frac{5(m-n)(g^3-k^2)(m^2g^3-n^2k^3)}{2mngkrr} - \frac{5(m+n)(g^3k^3)}{2mngk}$$

so kann man allemal die Wurzeln angeben.

§. 45.

Man setze, der Kürze wegen,

$$T = (m^2g^3 - n^2k^3)^2 - 2(m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^4$$

und dabey sey

$$P = \left.\begin{matrix} (m^2g^3 - n^2k^3)^3 \\ - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + 2n^2k^3)rr \\ - n^2k^3r^4 \\ + ((m^2g^3 - n^2k^3)^2 - n^2k^3rr)\sqrt{T} \end{matrix}\right\} : 2mnnr$$

$$Q = \left.\begin{array}{l} (m^2g^3 - n^2k^3)^3 \\ - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + 2n^2k^3)rr \\ - n^2k^3r^4 \\ - ((m^2g^3 - n^2k^3)^2 - n^2k^3rr)\sqrt{T} \end{array}\right\} : 2mnnr$$

$$R = \left.\begin{array}{l} (m^2g^3 - n^2k^3)m^2g^3 \\ - (2m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^4 \\ + (m^2g^3 - rr)\sqrt{T} \end{array}\right\} : 2mnnr$$

$$S = \left.\begin{array}{l} (m^2g^3 - n^2k^3)m^2g^3 \\ - (2m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^4 \\ - (m^2g^3 - rr)\sqrt{T} \end{array}\right\} : 2mnnr$$

so ist jede Wurzel der Gleichung

$$x = a\sqrt[5]{\frac{gg}{k^4}P} + a^2\sqrt[5]{\frac{kk}{g^4}R} + a^3\sqrt[5]{\frac{kk}{g^4}S} + a^4\sqrt[5]{\frac{gg}{k^4}Q}.$$

§. 46.

Um zur Erläuterung ein Paar Beyspiele hinzuzufügen, so fließet daraus:

I. daß die Wurzel der Gleichung

$$x^5 = 40x^3 + 70x^2 - 50x - 98$$

folgende

$$x = \sqrt[5]{(-31 - 3\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-18 + 10\sqrt{-7})}$$
$$+ \sqrt[5]{(-18 - \sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-31 - 3\sqrt{-7})}$$

und

II. die Wurzel der Gleichung

$$x^5 = 2625x + 16600$$

folgende sey,

$$x = \sqrt[5]{75(5 + 4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35 + 11\sqrt{10})} +$$
$$\sqrt[5]{225(35 - 11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75(5 - \sqrt{4}\sqrt{10})}.$$

Diese

Diese Fälle verdienen um so mehr bemerkt zu werden, weil ihre Auflösung auf keine andere Art möglich ist. Auf ähnliche Art lassen sich diese Untersuchungen auf die höhern Gleichungen ausdehnen, und es ist leicht von jedem Grade eine unzählige Menge von Gleichungen zu finden, deren Auflösung nach andern Methoden gar nicht von statten geht, davon man aber gleichwohl nach der gegenwärtigen nicht bloß eine, sondern alle Wurzeln angeben kann.

3. Von der Auflösung der numerischen Gleichungen.

Vom

Herrn la Grange.

Aus dem 23sten Bande der Memoiren der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Vieta ist der erste unter denen, welche eine allgemeine Methode numerische Gleichungen aufzulösen mitgetheilt haben; allein bey aller Vervollkommung und Simplificirung, welche seine Methode durch Harriot, Ougtred, Pell, und andere erfahren hat, ist sie doch noch immer so zusammengesetzt, und wegen der Menge von Operationen, welche sie erfordert, so abschreckend, daß die Mathematiker auf ihren Gebrauch Verzicht gethan zu haben scheinen. Die gewöhnlichste Methode, welche von Newton herrührt, ist sehr leicht und einfach. Es wird dabey vorausgesetzt, daß man den Werth der gesuchten Wurzel wenigstens bis auf ein Zehntel näherungsweise gefunden habe. Dann bringt man diesen Werth um eine neue unbekannte Größe vermehrt, in die gegebene Gleichung, und bekommt dadurch eine neue, deren Wurzel dasjenige ist, was man zu der vorigen hinzuthun muß, wenn sie genau seyn soll. Da aber dieser Theil nach der Voraussetzung kein Zehntel beträgt, so kann man in der gefundenen

Glei-

Gleichung das Quadrat und die höhern Potestäten der unbekannten Größe aus der Acht lassen, und auf diese Art verwandelt sich die Gleichung in eine Gleichung des ersten Grades, woraus man den Werth der Wurzel in Zehntheilen sehr leicht und bald findet. Indeß ist auch dieser Werth nicht genau, sondern nur näherungsweise gefunden; allein man kann sich desselben bedienen, um auf eben dem Wege einen genauern Werth zu erhalten. Geht man auf diese Art fort, so bekommt man bey jeder Operation einen neuen Decimalbruch, welchen man entweder zu dem vorhin gefundenen hinzusetzen oder davon wegnehmen muß, und findet also die Wurzel desto genauer, je weiter man fortgeht.

Man kann auch, wie Halley gethan hat, immer wieder zur gegebenen Gleichung zurückkehren, indem man darin anstatt der unbekannten Größe die immer genauer und genauer gefundene Wurzel, um eine unbekannte Größe vermehrt, setzt; und dieser Weg scheint in gewisser Absicht noch einfacher und bequemer.

Auf diese Art pflegt man die numerischen Gleichungen näherungsweise aufzulösen. Es hat viele Mathematiker gegeben, welche diese Methode noch genauer und leichter zu machen gesucht haben, indem sie theils auf die Glieder mit Rücksicht nehmen, in welchen die unbekannte Größe in der zweyten Potestät enthalten ist, theils allgemeine Formeln geben, vermittelst welcher man den Werth des zu der näherungsweise gefundenen Wurzel hinzuzufügenden Decimalbruchs auf einmal finden kann. Allein desto weniger hat man die Unbequemlichkeiten, oder vielmehr Unvollkommenheiten bemerkt, welche dieser Methode ankleben; wenigstens hat meines Wissens noch Niemand Mittel angegeben, denselben abzuhelfen.

Die erste und vornehmste dieser Unvollkommenheiten besteht darin, daß dabey die Erfindung des Werths der Wurzel bis auf ein Zehntel vorausgesetzt wird. Denn da man noch keine allgemeine und sichere Regel hat, von jeder gegebenen Gleichung den Werth einer jeden Wurzel näherungsweise zu finden, so ist jene Methode eigentlich nur in dem Falle anwendbar, wo man den Werth der gesuchten Wurzel schon zum voraus ungefähr zu bestimmen im Stande ist. Zwar hat Rolle eine Methode mitgetheilt, sich den Wurzeln der numerischen Gleichungen so sehr zu nähern, als man nur will; allein es ist dieselbe nicht allemal sicher, zumal, wenn die Gleichungen imaginäre Wurzeln haben. In diesem Falle läßt sie unentschieden, ob die Wurzeln reell sind oder nicht.

Die zweyte Unvollkommenheit betrift die Natur dieser Methode selbst. Man vernachläßiget darnach bey jeder Operation Glieder, deren Werth man nicht kennt, so daß man außer Stande ist, den Grad zu kennen, bis auf welchen man sich dem wahren Werthe genähert hat.

Auch könnte es sich vielleicht ereignen, daß die Reihe, welche die gesuchte Wurzel giebt, nur wenig convergirte, oder daß sie, nachdem sie eine Zeitlang convergirt hätte, zu divergiren anfienge. Man hat wenigstens noch nicht bewiesen, daß dieses nicht seyn könne.

Endlich mag diese Reihe immerfort convergiren, so giebt sie doch auch dann die Wurzel nur näherungsweise, wenn dieselbe eine Rationalzahl ist. Es ist freylich wahr, daß man für diese Wurzeln besondere Regeln hat; allein es bleibt gleichwohl immer ein Fehler der gedachten Methode, daß sie den Werth dieser Wurzeln nicht genau angiebt.

§. 1.

§. 1.

Methode, den Werth jeder reellen Wurzel einer jeden numerischen Gleichung in ganzen Zahlen so genau als möglich zu finden.

1. Erster Lehrsatz.

Ist eine Gleichung gegeben, und hat man zwey Zahlen von der Beschaffenheit, daß die Substitution derselben in der Gleichung statt der unbekannten Größe, Werthe von entgegengesetzter Art, oder mit entgegenstehenden Zeichen giebt: so hat die Gleichung zum wenigsten eine reelle Wurzel, und der Werth derselben liegt zwischen diesen Zahlen.

Dieses Theorem ist schon seit langer Zeit bekannt, und man pflegt dasselbe vermittelst der Theorie der Curven zu beweisen; es läßt sich aber der Beweis auch unmittelbar aus der Theorie der Gleichungen führen, und zwar auf folgende Art. Es sey x die unbekannte Größe der Gleichung, und α, β, γ, 2c. die Wurzeln derselben. Dies vorausgesetzt, so ist die Form der Gleichung, wie bekannt,

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots = 0.$$

Nun seyen p und q die Größen, welche, für x in die Gleichung gesetzt, Werthe von entgegenstehender Art geben, so müssen folgende beyde Größen

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\ldots\ldots$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)\ldots\ldots$$

entgegenstehende Zeichen haben, und es müssen daher zum wenigsten zwey zusammen gehörige Faktoren, wie $p-\alpha$ und $q-\alpha$, einander entgegengesetzt seyn. Es wird daher auch unter den Wurzeln der Gleichung zum wenigsten eine α seyn, die zwischen die Zahlen p und q fällt, das heißt kleiner

ner als die größere, und größer als die kleinere von ihnen ist; und diese Wurzel muß nothwendig reell seyn.

2. Erster Zusatz.

Wenn daher die Zahlen p und q bloß um eine Einheit oder um eine Zahl, die kleiner ist als die Einheit, verschieden sind, so ist die kleinste von diesen Zahlen, wenn dieselbe eine ganze Zahl ist, oder die ganze Zahl, die zunächst kleiner ist als die kleinste von beyden Zahlen, wenn diese keine ganze Zahl ist, die ganze Zahl, welche der einen Wurzel der Gleichung am nächsten liegt. Wenn die Differenz der Zahlen p und q größer ist als die Einheit, so nenne man die ganzen Zahlen, die zwischen p und q fallen, n, $n + 1$, $n + 2$, ꝛc. Setzt man darauf nach und nach in die Stelle der unbekannten Größe, p, n, $n + 1$, $n + 2$, ꝛc. in die Gleichung, so findet man nothwendiger Weise zwey unmittelbar auf einander folgende Zahlen, welche entgegengesetzte Werthe geben; und da diese beyde Zahlen bloß um eine Einheit unterschieden sind, so findet man aus ihnen nach dem Vorhergehenden die Wurzel der Gleichung in ganzen Zahlen so genau, als man sie finden kann.

3. Zweyter Zusatz.

Jede Gleichung, deren letztes Glied negativ ist, vorausgesetzt, daß das erste positiv sey, hat zum wenigsten eine reelle positive Wurzel, und man findet daher dieselbe, so weit sie in ganzen Zahlen gefunden werden kann, wenn man darin anstatt der unbekannten Größe nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ꝛc. setzt, bis man dadurch zwey Werthe bekommt, die entgegenstehende Zeichen haben.

Denn

Denn läßt man das erste Glied x^m und das letzte $-H$ seyn, so daß H eine positive Größe bedeutet: so hat man, wenn man $x = 0$ setzt, den negativen Werth $-H$, und wenn man $x = \infty$ macht, den positiven Werth ∞^m. Also ist in diesem Falle $p = 0$ und $q = \infty$; folglich die ganzen Zwischenzahlen 1, 2, 3, 4, ꝛc., so daß der zweyte Zusatz angewandt werden kann.

Hieraus erkennt man

1) daß jede Gleichung von einem ungeraden Grade, deren letztes Glied negativ ist, nothwendiger Weise Eine reelle positive Wurzel hat.

2) daß jede Gleichung von einem ungeraden Grade, deren letztes Glied positiv ist, nothwendiger Weise eine reelle negative Wurzel hat. Denn verwandelt man x in $-x$, so wird das erste Glied der Gleichung negativ, und folglich, wenn man nunmehr die Zeichen aller Glieder verändert, um das erste Glied wieder positiv zu machen, das letzte negativ. Es hat folglich diese veränderte Gleichung eine reelle positive und also die ursprüngliche eine reelle negative Wurzel.

3) daß jede Gleichung von einem geraden Grade, deren letztes Glied negativ ist, nothwendiger Weise zwey reelle Wurzeln, eine positive und eine negative hat. Denn einmal hat dieselbe eine reelle positive Wurzel, und da das erste Glied, wenn man x in $-x$ verwandelt, positiv bleibt, so hat diese veränderte Gleichung ebenfalls eine reelle positive und also die ursprüngliche Gleichung eine reelle negative Wurzel.

4. Anmerkung.

Da man allemal die negativen Wurzeln einer jeden Gleichung in positive verwandeln kann, indem dazu bloß das Zeichen der unbekannten Größe in das entgegenstehende verändert zu werden braucht: so wollen wir in der Folge der Kürze wegen bloß die positiven Wurzeln betrachten. Wenn also die Wurzeln einer Gleichung untersucht werden sollen, so wollen wir zuvörderst die positiven Wurzeln dieser Gleichung betrachten. Dann wollen wir die Zeichen aller derer Glieder, in welchen die unbekannte Größe in einer Potestät mit einem ungeraden Exponenten vorkommt, in die entgegenstehenden verwandeln, und die positiven Wurzeln dieser neuen Gleichung untersuchen. Diese Wurzeln negativ genommen sind nemlich die negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

5. Zweyter Lehrsatz.

Wenn man in einer Gleichung, die eine oder mehrere reelle und ungleiche Wurzeln hat, an die Stelle der unbekannten Größe nach und nach zwey Zahlen setzt, davon die eine größer, die andere aber kleiner ist, als die eine von diesen Wurzeln, und welche zugleich von einander um weniger unterschieden sind, als diese und irgend eine andere reelle Wurzel der Gleichung: so geben diese beyden Substitutionen nothwendiger Weise zwey einander entgegengesetzte Werthe.

Es sey α eine von den reellen und ungleichen Wurzeln der Gleichung, und β, γ, δ, ꝛc. die übrigen. Ferner sey ε der kleinste von den Unterschieden zwischen der Wurzel α und jeder der übrigen reellen Wurzeln. Alsdann ist klar, daß wenn man $p > \alpha$, $q < \alpha$ und $p - q < \varepsilon$ nimmt, die Größen $p - \alpha$ und $q - \alpha$ entgegenstehende Zeichen, die Größen

$p - \beta$,

$p - \beta$, $p - \gamma$ hingegen dieselben Zeichen haben werden, als die zugehörige Größen $q - \beta$, $q - \gamma$, ꝛc. Denn sollten $p - \beta$ und $q - \beta$ entgegengesetzte Größen seyn, so müßte β ebenfalls zwischen p und q fallen, welches unmöglich ist. Es haben also die beyden Größen

$$(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma) \ldots .$$
$$(q - \alpha)(q - \beta)(q - \gamma) \ldots .$$

d. h. die Werthe, welche man bekommt, wenn man p und q statt x in die Gleichung bringt, entgegengesetzte Zeichen.

6. Zusatz.

Wenn man daher in einer Gleichung an die Stelle der unbekannten Größe nach und nach die Glieder einer arithmetischen Progression

$$0,\ \triangle,\ 2\triangle,\ 3\triangle,\ 4\triangle,\ \text{ꝛc.} \ldots\ldots (A)$$

setzt, so werden die daher entstehenden Werthe eine Reihe bilden, in welcher eben so viel Abwechselungen der Zeichen sich befinden, als die Gleichung reelle positive und ungleiche Wurzeln hat, deren Unterschiede aber nicht kleiner sind, als die Differenz $\triangle$ der Progression. Nimmt man also $\triangle$ gleich oder kleiner an, als den kleinsten Unterschied zwischen den positiven reellen und ungleichen Wurzeln der Gleichung, so muß die gedachte Reihe nothwendiger Weise eben so viel Abwechslungen der Zeichen enthalten, als die Gleichung reelle positive und ungleiche Wurzeln hat.

Wenn folglich die Differenz $\triangle$ gleich oder kleiner ist als die Einheit, so findet man auf diesem Wege zugleich den Werth jeder von den reellen positiven und ungleichen Wurzeln der Gleichung, so weit sich derselbe in ganzen Zahlen ausdrucken läßt, nach Nr. 2. Zusatz 1.

Wenn eine Gleichung nicht mehr als eine reelle Wurzel haben kann, oder wenn die Unterschiede ihrer Wurzeln, im Fall sie deren mehrere hat, nicht kleiner sind als die Einheit, so ist klar, daß man $\triangle = 1$ setzen kann, d. h. man kann in diesem Fall die natürlichen Zahlen, 0, 1, 2, 3, ꝛc. nehmen, und sie nach und nach in der Gleichung an die Stelle der unbekannten Größe setzen. Allein wenn die Unterschiede der ungleichen Wurzeln einer Gleichung kleiner als die Einheit sind, so muß man $\triangle$ kleiner als die Einheit, und so annehmen, daß es dem kleinsten Unterschiede dieser Wurzeln gleich oder kleiner wird als derselbe. Also kommt es nunmehr darauf an, der Differenz $\triangle$ einen solchen Werth zu geben, der den kleinsten Unterschied zwischen den positiven und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung nicht übersteigt. Die Art und Weise davon soll der Gegenstand des folgenden Problems seyn.

7. Zusatz. 2.

Jede Gleichung, die nicht mehr als eine Abwechslung der Zeichen hat, kann auch nur eine reelle positive Wurzel haben.

Das ist zuvörderst sogleich klar, daß die Gleichung nothwendiger Weise eine reelle positive Wurzel haben muß, weil ihr letztes Glied ein Zeichen hat, welches das entgegengesetzte von dem Zeichen des ersten Gliedes ist.

Nun sey, vorausgesetzt, daß das erste Glied positiv ist, wie solches gewöhnlich statt findet, X die Summe aller positiven Glieder der Gleichung, und Y die Summe aller negativen, so daß die Gleichung durch $X - Y = 0$ ausgedruckt werden kann. Da nach der Voraussetzung nur eine Abwechswechslung der Zeichen statt finden soll, so ist klar, daß die Potestäten der unbekannten Größe x in dem Polinonium X insgesammt höhere Potestäten seyn müssen, als die in dem Polinonium Y. Wenn also x^r die niedrigste Potestät von x in X ist, und man sowohl X als Y durch x^r dividirt, so enthält die Größe $\frac{X}{x^r}$ lauter Potestäten von x mit positiven, und die Größe $\frac{Y}{x^r}$ lauter Potestäten von x mit negativen Exponenten. Hieraus folgt, daß der Werth von $\frac{X}{x^r}$ mit x wachsen und abnehmen wird, wofern nicht X bloß x^r enthält, denn in diesem Falle würde $\frac{X}{x^r}$ eine beständige Größe seyn; hingegen wird $\frac{Y}{x^r}$ wachsen, wenn x abnimmt, und abnehmen, wenn x zunimmt. Nun sey a eine reelle und positive Wurzel der Gleichung, so hat man

$$x = a;\ X = Y, \text{ und also auch}$$

$$\frac{X}{x^r} = \frac{Y}{x^r}$$

Setzt man daher anstatt x Zahlen, die größer sind als a, so wird allemal $\frac{X}{x^r} > \frac{Y}{x^r}$, und folglich $X - Y$ gleich einer positiven Zahl; setzt man aber anstatt x Zahlen, die kleiner sind als a, so wird allemal $\frac{X}{x^r} < \frac{Y}{x^r}$, und folglich $X - Y$ gleich einer negativen Zahl. Es ist also unmöglich, daß die Gleichung reelle positive Wurzeln habe, die größer oder kleiner wären als a.

8. Aufgabe.

Es ist eine Gleichung gegeben; man soll eine andere Gleichung finden, deren Wurzeln die Differenzen zwischen den Wurzeln jener Gleichung sind.

Es sey die gegebene Gleichung

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (B).$$

Da x ohne Unterschied jeder Wurzel dieser Gleichung gleich gesetzt werden kann, so bedeute x' irgend eine andere Wurzel eben dieser Gleichung, so daß man auch

$$x'^m - Ax'^{m-1} + Bx'^{m-2} - Cx'^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

habe, und dabey sey u die Differenz zwischen x und x', oder $x' = x + u$. Bringt man diesen Werth von x' in die letzte Gleichung, und ordnet dabey die Glieder derselben nach u, so bekommt man eine Gleichung für u von eben dem Grade m, welche, wenn man von dem letzten Gliede anfängt, folgende Form hat

$$X + Yu + Zu^2 + Vu^3 + \text{ꝛc.} + u^m = 0$$

und die Coefficienten X, Y, Z, ꝛc. sind Funktionen von x, so daß

$$X = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

$$Y = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \text{ꝛc.}$$

$$Z = \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

d. h.

$$Y = \frac{dX}{dx};\ Z = \frac{d^2X}{2dx^2};\ V = \frac{d^3X}{2.3dx^3};\ \text{ꝛc.}$$

ist. Da also wegen der gegebenen Gleichung (B) $X = 0$ ist, so verwandelt sich die vorhergehende, wenn man durch u dividirt, in

$$Y + Zu + Vu^2 + \text{ꝛc.} + u^{m-1} = 0 \ldots (C).$$

Wenn

Wenn man in dieser Gleichung für x eine von den Wurzeln der Gleichung (B) setzt, so sind ihre Wurzeln die Unterschiede zwischen jener Wurzel und den übrigen Wurzeln der Gleichung (B), und schaft man daher aus (B) und (C) auf dem Wege der Elimination x weg, so bekommt man eine Gleichung für u, deren Wurzeln die Unterschiede zwischen jeder von den Wurzeln der Gleichung (B) und allen übrigen Wurzeln eben dieser Gleichung sind. Es ist daher solches auch die gesuchte Gleichung.

Man hat indeß nicht nöthig, diese Elimination selbst vorzunehmen, sondern darf nur folgendes erwägen.

1) Wenn α, β, γ, ꝛc. die Wurzeln der Gleichung (B) sind, so sind die Wurzeln der Gleichung (C) $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$, ꝛc., $\beta - \alpha$, $\beta - \gamma$, ꝛc., $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$, ꝛc. ꝛc. Hieraus ist klar, daß die Zahl derselben $m(m-1)$ ist, und daß je zwey und zwey derselben einander gleich aber entgegengesetzt sind, so daß die Gleichung (C) kein Glied hat, worin u mit einem ungeraden Exponenten enthalten wäre. Setzt man daher $\frac{m(m-1)}{2} = n$, und $u^2 = v$, so bekommt die Gleichung, von welcher wir reden, folgende Form

$$v^n - av^{n-1} + bv^{n-2} - cv^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (D).$$

2) Da $(\alpha - \beta)^2$, $(\alpha - \gamma)^2$, $(\beta - \gamma)^2$ ꝛc. die verschiedenen Werthe von v in der Gleichung (D) sind, so ist der Coefficient

$$a = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + \text{ꝛc.}$$

Nun ist aber

$$(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + \text{ꝛc.}$$
$$=$$
$$(m-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{ꝛc.} - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{ꝛc.}$$

und dabey ist

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{rc.} = B, \text{ und}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{rc.} = A^2 - 2B$$

folglich ist auch

$$a = (m-1)(A^2 - 2B) - 2B = (m-1)A^2 - 2mB.$$

Auf ähnliche Art kann man den Werth der übrigen Coefficienten b, c, rc. finden.

Um dazu auf eine leichtere Art zu gelangen sey

$$A1 = \alpha + \beta + \gamma + \text{rc.}$$
$$A2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{rc.}$$
$$A3 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{rc.}$$

rc.

so ist bekannter Maßen

$$A1 = A$$
$$A2 = AA1 - 2B$$
$$A3 = AA2 - BA1 + 3C$$
$$A4 = AA3 - BA2 + CA1 - 4D$$

rc.

Nun sey ferner

$$a1 = (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2 + \text{rc.}$$
$$a2 = (\alpha-\beta)^4 + (\alpha-\gamma)^4 + (\beta-\gamma)^4 + \text{rc.}$$
$$a3 = (\alpha-\beta)^6 + (\alpha-\gamma)^6 + (\beta-\gamma)^6 + \text{rc.}$$

rc.

so hat man

$$a1 = (m-1)A2 - 2\left(\frac{(A1)^2 - A2}{2}\right)$$

$$a2 = (m-1)A4 - 4(A1A3 - A4) + 6\left(\frac{(A2)^2 - A4}{2}\right)$$

$$a3 = (m-1)A6 - 6(A1A5 - A6) + 15(A2A4 - A6) - 20\left(\frac{(A3)^2 - A6}{2}\right)$$

rc.

oder

oder

$$a1 = mA2 - 2\frac{(A1)^2}{2}$$

$$a2 = mA4 - 4A1A3 + 6\frac{(A2)^2}{2}$$

$$a3 = mA6 - 6A1A5 + 15A2A4 - 20\frac{(A3)^2}{2}$$

und überhaupt

$$a\mu = mA2\mu - 2\mu A1(A2\mu - 1)$$

$$+ \frac{2\mu\,2\mu - 1)}{2}A2(A2\mu - 2 - \text{rc.}$$

$$\pm \frac{2\mu(2\mu - 1)(2\mu - 2)\ldots(\mu + 1)}{1.2.3\ldots\mu} \cdot \frac{(A\mu)^2}{2}$$

Wenn man auf diese Art die Werthe von $a1$, $a2$, $a3$, rc. gefunden hat, so hat man dadurch die Werthe von a, b, c, rc. aus der Gleichung (D) nach folgenden Formeln

$$a = a1$$

$$b = \frac{aa1 - a2}{2}$$

$$c = \frac{ba1 - aa2 + a1}{3}$$

$$d = \frac{ca1 - ba2 + aa3 - a4}{4}$$

rc.

Auf diese Art kann man die Coefficienten a, b, c, rc. der Gleichung (C) unmittelbar aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung (B) erhalten. Man sucht zu dem Ende nach den vorhergehenden Formeln die Werthe der Größen $A1$, $A2$, $A3$, rc. bis zu $A2n$, dann die der Größen a, $a2$, $a3$ bis zu an, und nun endlich die von den Coefficienten a, b, c, rc.

9. Anmerkung.

Es verdient hier bemerkt zu werden, daß die Gleichung (D) auf gleiche Art die Unterschiede zwischen den positiven und den negativen Wurzeln der Gleichung (B) ausdruckt, so daß sie auch gültig bleibt, wenn man $-x$ für x setzt, um die negativen Wurzeln zu finden (Nr. 4.).

Ueberdem erhellet, daß die Gleichung (D) dieselbe bleibt, wenn man auch die Wurzeln der gegebenen Gleichung um irgend eine Größe vermehrt oder vermindert. Hat daher diese Gleichung das zweyte Glied, so kann man dasselbe wegschaffen, und wenn man darauf die Gleichung von v sucht, so bekommt man eben die, welche man gefunden haben würde, wenn man das zweyte Glied nicht weggeschaft hätte. Allein das Verschwinden des zweyten Gliedes erleichtert allemal die Erfindung der Coefficienten a, b, c, ꝛc. weil dabey $A = 0$ und folglich auch $A1 = 0$ ist. Hiedurch verwandeln sich die Formeln der vorhergehenden Nummer in folgende:

$$A1 = 0$$
$$A2 = -2B$$
$$A3 = 3C$$
$$A4 = -BA2 - 4D$$

ꝛc.

$$a1 = mA2$$
$$a2 = mA4 + 6\frac{(A2)^2}{2}$$
$$a3 = mA6 + 15A2A4 - 20\frac{(A3)^2}{2}$$

ꝛc.

$$a = a1$$
$$b = \frac{aa1 - a2}{3}$$

$$c = \frac{ba1 - aa2 + a3}{3}$$

etc.

10. Erster Zusatz.

Da die Wurzeln der Gleichung (D) die Quadrate der Differenzen zwischen den Wurzeln der gegebenen Gleichung (B) sind: so ist klar, daß die Differenzen zwischen den Wurzeln der Gleichung (B), wenn alle Glieder der Gleichung (D) dasselbe Zeichen hätten, in welchem Falle dieselbe gar keine reelle und positive Wurzel haben würde, insgesammt imaginär seyn würden. Es könnte also in diesem Falle die Gleichung (B) nicht mehr als eine reelle Wurzel haben, oder wenn sie deren mehrere hätte, so würden dieselben einander gleich seyn. Findet dies letztere statt, so sind die Methoden bekannt, wie man solches zu erkennen und die Auflösung zu verrichten hat, auch kann der folgende zweyte §. nachgesehen werden. Was den ersten Fall betrift, so folgt aus Nr. 6, daß man $\triangle = 1$ nehmen kann.

11. Zweyter Zusatz.

Wenn die Gleichung (B) ein oder mehrere Paare gleicher Wurzeln hat, so ist bekannt, daß dadurch in der Gleichung (D) ein oder mehrere Werthe von v gleich Null werden, so daß alsdenn die Gleichung ein oder mehrere Male durch v dividirt werden kann. Findet diese Division statt, so hat die Gleichung, welche man nach derselben erhält, rückwärts geschrieben, folgende Form

$$1 + \alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + \text{etc.} + \pi v^r = 0 \; . \; . \; . \; (E)$$

und r ist = oder < n. Man setze $v = \frac{1}{y}$ und ordne die Gleichung nach y, so bekommt man

 $y^r +$

$y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{ꝛc.} + \pi = 0 \ldots$ (F).
Ferner suche man nach den bekannten Methoden die Grenze der positiven Wurzeln dieser Gleichung, und setze dieselbe $= l$, so daß l größer sey als jeder positive Werth von y. Alsdann ist $\frac{1}{l}$ kleiner als jeder positive Werth von $\frac{1}{y}$ oder von v, und folglich kleiner als jeder der Werthe von u^2, weil $v = u^2$ gesetzt worden ist.

Dieses vorausgesetzt, so ist auch $\frac{1}{\sqrt{l}}$ nothwendiger Weise kleiner als jeder der Werthe von u, d. h. als jeder von den Unterschieden zwischen den reellen und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (B).

Ist daher 1) $\sqrt{l} < 1$, so ist man sicher, daß die Gleichung (B) keine reelle Wurzeln hat, die um weniger als um 1 verschieden wären, und man kann daher ohne Bedenken $\Delta = 1$ setzen, (Nr. 6).

2) Ist aber $\sqrt{l} =$ oder > 1, so kann es seyn, daß die Gleichung (B) Wurzeln hat, deren Unterschiede kleiner als eins sind; allein da der kleinste von diesen Unterschieden allemal nothwendiger Weise größer ist als $\frac{1}{\sqrt{l}}$, so kann man auch allemal nach der angeführten Nummer $\Delta =$ oder $< \frac{1}{\sqrt{l}}$ nehmen.

Ueberhaupt sey k die ganze Zahl, die entweder der $\sqrt{l}$ gleich oder zunächst größer als $\sqrt{l}$ ist, so kann man allemal $\Delta = \frac{1}{k}$ nehmen.

12. Erste

12. Erste Anmerkung.

Was die Art und Weise betrift, die Grenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, so ist die bequemste und genauste diejenige, welche von Newton herrührt, und wobey es darauf ankommt eine Zahl zu finden, die so beschaffen ist, daß, wenn man die Wurzeln der gegebenen Gleichung um dieselbe vermindert, die dadurch entstehende Gleichung keine Abwechslungen der Zeichen habe. Es kann nemlich in diesem Falle eine Gleichung bloß negative Wurzeln haben, und es muß folglich die Zahl, um welche man die Wurzeln der gegebenen Gleichung verkleinert hat, nothwendiger Weise größer seyn, als die größte von diesen Wurzeln.

Um also die Grenze l der Wurzeln der Gleichung

$$(F) \ldots y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

zu finden, setze man darin $y + l$ statt y, und ordne die dadurch erhaltene Gleichung nach y. Auf diese Art wird

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \text{ꝛc.} + y^r = 0$$

und es ist in dieser Gleichung

$$P = l^r + \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} + \gamma l^{r-3} + \text{ꝛc.} + \pi$$
$$Q = rl^{r-1} + (r-1)\alpha l^{r-2} + (r-2)\beta l^{r-3} + \text{ꝛc.}$$
$$R = \frac{r(r-1)}{2} l^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2}\alpha l^{r-3} + \text{ꝛc.}$$
$$S = \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} l^{r-3} + \text{ꝛc.}$$
ꝛc.

so daß man also bloß für l einen solchen Werth zu suchen hat, wobey die Größen P, Q, R, ꝛc. insgesammt positiv werden. Fängt man dabey von der letzten dieser Größen an, so hat dieselbe nur zwey Glieder, und geht man also stufenweise von ihr zu den vorhergehenden fort, so findet man die kleinste ganze Zahl leicht, die man für l setzen kann, und welche die gesuchte Grenze ist.

Will man alles Versuchen vermeiden, so darf man für l nur den größten Coefficienten der negativen Glieder der Gleichung (F) um eins vermehrt nehmen; denn es ist leicht zu beweisen, die Größen P, Q, R, ꝛc. bey diesem Werthe von l allemal positiv sind.

Diese Methode, die Grenze der Wurzeln einer jeden Gleichung zu finden, rührt, wie ich glaube, vom Maclaurin her; ich will aber eine andere mittheilen, welche öfters die Grenzen noch näher giebt.

Sind $-\mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \pi y^{r-p}$ — ꝛc. die negativen Glieder der Gleichung (F), so nehme man für l die Summe der beyden größten Größen aus $\sqrt[m]{\mu}$, $\sqrt[n]{\nu}$, $\sqrt[r]{\pi}$, ꝛc., oder irgend eine Zahl, die größer ist als diese Summe. Die Richtigkeit dieser Methode läßt sich auf eben die Art beweisen, als die der vorhergehenden, und so wäre es überflüßig, dabey zu verweilen.

Uebrigens muß bemerkt werden, daß man auf beyden Wegen selten die nächsten Grenzen der Wurzeln findet; um nähere zu bekommen, muß man nach und nach für l immer kleinere Zahlen setzen, und darunter die kleinste von denen, welche P, Q, R, ꝛc. insgesammt positiv geben, nehmen.

13. Zweyte Anmerkung.

Hat man nun die Grenze l der Gleichung (F) gefunden, und k gleich oder zunächst größer als $\sqrt{l}$ genommen, so mache man $\Delta = \frac{1}{k}$ (Nr. 10.) und setze in der gegebenen Gleichung an die Stelle der unbekannten Größe nach und nach die Zahlen o, $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$, $\frac{3}{k}$, ꝛc. Die Werthe, welche man auf diese Art findet, werden eine Reihe bilden, worin eben so viel Abwechslungen der Zeichen vorkommen, als die gegebene Gleichung reelle positive und ungleiche Wurzeln hat, und jede dieser Wurzeln wird zwischen zwey auf einander folgende Werthe mit entgegen gesetzten Zeichen fallen. Geben daher die Zahlen $\frac{h}{k}$ und $\frac{h+1}{k}$ entgegengesetzte Werthe, so giebt es auch eine Wurzel, welche zwischen $\frac{h}{k}$ und $\frac{h+1}{k}$ fällt, und es ist folglich die ganze Zahl, welche $\frac{h}{k}$ am nächsten kommt, der nächste Werth dieser Wurzel in ganzen Zahlen (Nr. 2.)

Man lernt also auf diese Art nicht bloß die Menge der positiven und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung kennen, sondern man findet auch zugleich dieselben in ganzen Zahlen so genau als möglich.

Ereignet es sich, daß einer oder mehrere von den sich ergebenden Werthen gleich o werden, so ist klar, daß die Zahlen, welche diese Werthe hervorgebracht haben, genaue Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Um die Rechnung leichter und kürzer zu machen, wollen wir noch folgendes anmerken.

1) Es fällt in die Augen, daß es bey der Erfindung der Grenze der positiven Wurzeln einer gegebenen Gleichung unnütz seyn würde, wenn man an die Stelle der unbekannten

Größe

Größe Zahlen setzen wollte, die größer wären als diese Grenze, ob es gleich leicht einzusehen ist, daß man dabey nie andere als positive Werthe bekommen wird. Ist daher λ die gedachte Grenze, so ist die Menge der vorzunehmenden Substitutionen $= \lambda k$, und folglich allemal eine endliche Menge.

Ueberhaupt ist es ohne die Grenze λ zu suchen, hinreichend, die Substitutionen so weit zu treiben, bis das erste Glied der Gleichung, oder die Summe der ersten Glieder, wenn es deren mehrere giebt, die eben dasselbe Zeichen haben, gleich oder größer ist als die Summe aller negativen Glieder. Denn nach Nr. 7. beweiset man leicht, daß die Substitution jedes größern Werths keine andere als positive Resultate geben kann.

2) Anstatt für die unbekannte Größe x die Brüche $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$ ꝛc. zu setzen, kann man dafür auch sogleich $\frac{x}{k}$ substituiren, oder welches eben darauf hinausläuft, den Coefficienten des zweyten Gliedes mit k, den Coefficienten des dritten Gliedes mit k^2, u. s. f. multipliciren, und dann an die Stelle von x die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc. setzen, bis die Grenze dieser Gleichung, oder auch das erste Glied, oder die Summe der ersten Glieder, wenn es mehrere mit einerley Zeichen giebt, der Summe der negativen Glieder gleich oder größer ist als dieselbe. Auf diese Art findet man die Resultate in lauter ganzen Zahlen, und die Wurzel der gegebenen Gleichung fällt nothwendiger Weise zwischen die Resultate mit entgegengesetzten Zeichen, wenn man dieselben durch k dividirt.

3. Es

3. Es sey m der Exponent der Gleichung, in welcher man nach und nach die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, rc. substituiren soll, so behaupte ich, daß man nach der Erfindung von m + 1 Resultaten, d. h. nachdem man für x die Zahlen 0, 1, 2, 3, rc m gesetzt hat, die übrigen durch eine bloße Addition finden kann.

Zu diesem Ende darf man nur die Differenzen der gefundenen Resultate suchen, deren man m bekommt, dann die Differenzen von diesen Differenzen, deren Zahl m — 1 ist, und so fortfahren bis zur mten Differenz.

Diese letzte Differenz ist deswegen nothwendiger Weise eine beständige Größe, weil der Exponent der höchsten Dignität der unbekannten Größe m ist, und man kann daher diese mten Differenzen so weit fortsetzen als man will, weil man dazu bloß die gefundene zu wiederholen hat. Hat man dieses gethan, so kann man vermittelst dieser mten Differenzen die (m — 1)ten, vermittelst dieser die (m — 2)ten und so weiter finden, bis man zu der ersten Reihe gelangt, welche die gesuchten Resultate enthält.

Es verdient hier bemerkt zu werden, daß wenn die zugehörigen Glieder der Reihen, welche man auf diese Art findet, einmal insgesammt positiv sind, die folgenden Glieder jeder Reihe ebenfalls positiv seyn werden. Da nun die letzte Differenz allemal positiv ist, so ist klar, daß man in jeder Reihe endlich einmal zu lauter positiven Gliedern kommen muß, und es ist folglich hinlänglich, die Reihen so weit fortzusetzen, bis alle zugehörige Glieder positiv geworden sind. Denn ist dies geschehen, so ist man versichert, daß die Reihe der Resultate, soweit man sie auch fortsetzen mag,

immer

immer positiv bleiben, und folglich keine Abwechselung der Zeichen mehr enthalten wird.

Um dies durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir die Gleichung

$$x^3 - 63x + 189 = 0$$

nehmen. Die Resultate, die zu $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, gehören, sind

189, 127, 71, 27, also

die ersten Differenzen

$-62 \quad -56 \quad -44$

die zweyten Differenzen

6 12

die dritte

Man formire also folgende Reihen

6	6	6	6	6	6	6	ꝛc.
6	12	18	24	30	36	42	ꝛc.
− 62	− 56	− 44	− 26	− 2	28	64	ꝛc.
189	127	71	27	1	− 1	27	ꝛc.

Das Gesetz, nach welchem sie gebildet worden, ist, daß jedes Glied die Summe aus dem vorhergehenden Gliede eben der Reihe und der über diesem befindlichen der vorhergehenden Reihe werde. Auf diese Art ist es leicht, die Reihen so weit fortzusetzen, als es irgend verlangt wird.

Nun ist die vierte Reihe, wie man sieht, die Reihe der Resultate, welche man durch die Substitution der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, für x in der gegebenen Gleichung bekommt; und da die Glieder der 2ten Columne, nemlich 6, 42, 64, 27, insgesammt positiv sind, so werden es die folgenden Glieder ebenfalls seyn, so daß daher diese Reihe, auch noch so weit fortgesetzt, keine Abwechslung der Zeichen ferner enthalten wird.

14. An-

14. Anmerkung.

Es ist bereits angemerkt worden, daß man den Werth aller reellen und ungleichen Wurzeln einer Gleichung finden kann, indem man in der Gleichung statt der unbekannten Größe die Glieder einer arithmetischen Progression substituirt; indeß konnte dies aus Mangel der Bestimmung dieser arithmetischen Progression von keinem sonderlichen Nutzen seyn. Jetzt kennen wir diejenige, welche in jedem Falle gewählt werden muß, und werden von eben dieser Aufgabe nun auch für die gleichen und imaginären Wurzeln Gebrauch zu machen suchen.

§. 2.

Von der Art und Weise die gleichen und imaginären Wurzeln einer Gleichung zu bekommen.

15.

Wir haben im vorhergehenden §. bloß die reellen und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (B) betrachtet, jetzt wollen wir annehmen, daß die Gleichuug gleiche Wurzeln habe. In diesem Falle muß nach Nr. 11. die Gleichung (D) so vielmal durch v dividirt werden können, als es Combinationen der gleichen Wurzeln zu zweyen giebt, und folglich müssen eben so viel von den letzten Gliedern in dieser Gleichung (D) fehlen. Auf diese Art erkennt man sehr leicht, wie viel gleiche Wurzeln in der Gleichung befindlich sind.

Da also in dem Falle, daß gleiche Wurzeln da sind, nothwendiger Weise $u = 0$ ist, (Nr. 8.) so giebt alsdann die Gleichung (C) $Y = 0$. Es müssen folglich die beyden Gleichungen für x, nemlich $X = 0$ und $Y = 0$, wenn x einer

von

von den gleichen Wurzeln der Gleichung (B) gleich ist, zu gleicher Zeit statt finden.

Man suche also auf den bekannten Wegen den größten gemeinschaftlichen Faktor der beyden vieltheiligen Größen X und Y, und setze darauf diesen Faktor $= 0$, so wird man eine Gleichung bekommen, die bloß aus den gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammengesetzt seyn wird, aber erhoben zu einer um eins niedrigern Potestät.

Es sey R der größte gemeinschaftliche Faktor von X nnd Y, und X' der Quotient aus X durch R dividirt, so ist leicht einzusehen, daß die Gleichung $X = 0$ eben dieselben Wurzeln enthalten wird, als die gegebene Gleichung $X = 0$, nur mit dem Unterschiede, daß die in dieser Gleichung öfters vorkommenden Wurzeln in jener nur einmal enthalten sind. Diese Gleichung läßt sich also nach den Regeln des vorhergehenden §. behandeln.

Wenn man will, so kann man auch zwey Gleichungen finden, davon die eine bloß die gleichen, und die andere bloß die ungleichen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ enthält. Zu diesem Ende darf man nur noch den größten gemeinschaftlichen Divisor von X' und Y suchen, und, indem man denselben R' nennt, den Quotienten $\frac{X'}{R'}$ nehmen. Setzt man $\frac{X'}{R'} = X''$, so sind die gedachten beyden Gleichungen $X'' = 0$ und $R' = 0$.

Die erste enthält bloß die ungleichen Wurzeln der Gleichung $X = 0$, und die andere bloß die gleichen Wurzeln eben derselben Gleichungen, aber jede nur einmal, so daß die beyden

den Gleichungen $X'' = 0$ und $R' = 0$ keine andere als ungleiche Wurzeln haben, und sich also nach den Regeln des vorhergehenden §. behandeln lassen.

16.

Kennt man die Anzahl der reellen, sowohl gleichen als ungleichen Wurzeln einer gegebenen Gleichung, und ist diese Anzahl kleiner als der Exponent der Gleichung, so hat man daran ein Kennzeichen, daß die übrigen Wurzeln imaginär sind.

Ueberhaupt, sollen die Wurzeln einer Gleichung (B) insgesammt reell seyn, so müssen die Werthe von u es ebenfalls seyn. Folglich müssen alsdann die Werthe von u^2 oder von v insgesammt reell oder positiv seyn, und also die Gleichung (D) Nr. 8. lauter reelle und positive Wurzeln haben. Hieraus fließt ferner, daß die Zeichen in dieser Gleichung abwechselnd positiv und negativ seyn müssen; und wenn also diese Bedingung nicht statt findet, so ist es ein sicheres Kennzeichen, daß die Gleichung (B) imaginäre Wurzeln hat.

Nun ist bekannt, daß die Anzahl der imaginären Wurzeln einer jeden Gleichung, eine gerade Zahl ist, und daß je zwey und zwey unter diese allgemeine Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ gebracht werden können, wo α und β reelle Größen sind. Hierdurch wird $u = \pm 2\beta\sqrt{-1}$, und folglich $v = -4\beta^2$. Auf diese Art erhellet, daß die Gleichung (D) nothwendig so viel reelle negative Wurzeln hat, als es in der Gleichung (B) Paare imaginärer Wurzeln giebt.

Setzt man daher $v = -w$, wodurch die Gleichung (D) in folgende verwandelt wird,

$$w^n - aw^{n-1} + bw^{n-2} - cw^{n-3} + \text{rc.} = 0 \;.\;.\;. \text{(G)}$$

 so

so hat diese Gleichung nothwendiger Weise so viel reelle positive Wurzeln, als die Gleichung (B) Paare von imaginären Wurzeln.

Hat also die Gleichung (G) nur eine Abwechslung der Zeichen, so hat die Gleichung (B) auch nicht mehr als zwey imaginäre Wurzeln (Nr. 7.).

17.

Es fließt aus dem Vorhergehenden, daß man bloß die reellen positiven Wurzeln der Gleichung (G) zu suchen nöthig hat, wenn man die imaginären Wurzeln der Gleichung (B) haben will. Es mögen w', w'', w''', ꝛc. diese Wurzeln bedeuten, so hat man in $\frac{\sqrt{w'}}{2}$, $\frac{\sqrt{w''}}{2}$, $\frac{\sqrt{w'''}}{2}$, ꝛc. die Werthe von β. Um die zugehörigen Werthe von α zu finden, setze man für x in der Gleichung (B) $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, und mache zwey Gleichungen, davon die eine alle reelle, und die andere alle diejenigen Glieder enthalte, die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt sind. Auf diese Art bekommt man für α zwey Gleichungen von folgender Form

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + \text{ꝛc.} = 0 \\ m\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + q\alpha^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots (H)$$

in welchen die Coefficienten P, Q, ꝛc., p, q, ꝛc. durch a, b, c, ꝛc. und β gegeben sind.

Giebt man daher β einen von den vorhergehenden Werthen, so müssen diese beyden Gleichungen zu gleicher Zeit statt haben, und es muß also auch einen gemeinschaftlichen Divisor von beyden geben. Man suche also den größten gemeinschaftlichen Faktor derselben, und setze ihn $= 0$, so bekommt man eine Gleichung zwischen α und β, woraus man, da β bekannt ist, α finden kann.

Sind

Sind die Werthe von β, welche man aus der Gleichung (G) gefunden hat, insgesammt einander ungleich, so kann zu jedem Werthe von β nicht mehr als ein Werth von α gehören, und es können daher auch die beyden Gleichungen (H) nur eine Wurzel gemein haben. Aus diesem Grunde kann ihr gemeinschaftlicher Faktor die erste Dignität nicht übersteigen.

Man setze daher die Division so lange fort, bis man zu einem Reste gelangt, worin α bloß in der ersten Dignität befindlich ist, und setze diesen Rest $= 0$. Diese Gleichung wird den gesuchten Werth von α geben.

Sind aber unter den Werthen, welche man aus der Gleichung (G) gefunden hat, z. B. zwey einander gleiche, so können zu diesen gleichen Werthen von β verschiedene Werthe von α gehören, und setzt man daher diesen doppelten Werth von β in die Gleichungen (H), so müssen dieselben für jeden der zugehörigen Werthe von α gültig seyn. Aus diesem Grunde müssen sie zwey gemeinschaftliche Wurzeln, und folglich einen gemeinschaftlichen Faktor vom zweyten Grade haben. In diesem Falle muß man daher die Division nicht weiter fortsetzen als bis zu einem Reste, worin α in der zweyten Dignität vorkommt. Setzt man diesen Rest $= 0$, so hat man eine Gleichung vom zweyten Grade, woraus man den doppelten Werth von α bestimmen kann, der allemal reell seyn wird.

Gäbe es drey gleiche Werthe von β, so dürfte man die Division, um α zu finden, nicht weiter als bis zu einem Reste fortsetzen, worin α in der dritten Dignität enthalten wäre. Dieser Rest, $= 0$ gesetzt, gäbe eine Gleichung vom dritten Grade, die drey reelle Werthe von α enthalten würde, und auf ähnliche Art verhält es sich ferner.

§. 3.

Neue Methode die Wurzeln numerischer Gleichungen näherungsweise zu finden.

18.

Es sey die Gleichung

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{rc.} + K = 0 \ldots (a)$$

gegeben, und eine reelle und positive Wurzel derselben entweder nach der vorhergehenden oder irgend einer andern Methode in ganzen Zahlen bekannt. Man nenne diesen ersten Werth p, so daß $x > p$ aber $< p + 1$ sey, und setze $x = p + \frac{1}{y}$. Bringt man diesen Werth für x in die gegebene Gleichung, multiplicirt darauf alle Glieder durch y^m und ordnet sie nach y, so bekommt man eine Gleichung von folgender Form:

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \text{rc.} + K' = 0 \ldots (b)$$

Da nun nach der Voraussetzung $\frac{1}{y} > 0$ und < 1 seyn soll, so ist $y > 1$ und es hat daher die Gleichung (b) zum wenigsten eine reelle Wurzel, die größer als eins ist.

Man suche also auf die §. 1. erklärte Art den Werth dieser Wurzel in ganzen Zahlen. Da dieselbe nothwendiger Weise positiv ist, so ist es genug y als positiv zu betrachten (Nr. 4).

Nachdem man auf diesem Wege den Werth von y in ganzen Zahlen gefunden hat, der q heißen mag, so setze man

man $y = q + \frac{1}{z}$, und bringe diesen Werth in die Gleichung (b). Hiedurch bekömmt man eine dritte Gleichung für z von folgender Form

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \text{ꝛc.} + K'' = 0 \ldots (c)$$

Diese Gleichung hat nothwendiger Weise zum wenigsten eine reelle Wurzel, die größer als eins ist, und man kann also auch den Werth dieser Wurzel in ganzen Zahlen finden.

Es heiße derselbe r. Setzt man $z = r + \frac{1}{u}$ und bringt diesen Werth in die Gleichung (c), so erhält man eine Gleichung für u, die wenigstens eine reelle Wurzel hat, welche größer ist als die Einheit, und eben so verhält es sich ferner.

Fährt man also auf diese Art fort, so nähert man sich dem Werthe der gesuchten Wurzel immer mehr und mehr. Ereignet es sich aber, daß eine von den Zahlen p, q, ꝛc. eine genaue Wurzel ist, so hat man $x = p$, oder $y = q$ u. s. w. und die Operation hört dann auf. In diesem Falle findet man also für x eine commensurable Zahl.

In allen übrigen Fällen ist der Werth der Wurzel nothwendig incommensurabel, und man kann sich demselben nur bis zu jeder beliebigen Grenze nähern.

19.

Hat die gegebene Gleichung mehrere reelle positive Wurzeln, so kann man nach der §. 1. erklärten Methode den Werth von jeder in ganzen Zahlen finden; und nennt man diese Werthe p, p', p'', ꝛc. so kann man sie nach und nach gebrauchen, um sich dem wahren Werthe immer mehr zu nähern. Man bemerke aber folgendes.

1) Wenn die Zahlen p, p', p'' ꝛc. insgesammt von einander verschieden sind, so haben die Gleichungen (b) (c) ꝛc. der vorhergehenden Nummer nicht mehr als eine reelle Wurzel, die zugleich größer ist als die Einheit. Denn sollte z. B. die Gleichung (b) zwey reelle Wurzeln haben, die größer wären als die Einheit, z. B. y' und y''; so hätte man $x = p + \frac{1}{y'}$ und $x = p + \frac{1}{y''}$, so daß diesen beyden Werthen von x einerley ganze Zahlen p wider die Voraussetzung zukäme. Auf ähnliche Art würde es sich mit der Gleichung (c) und jeder der übrigen verhalten, wenn sie zwey reelle Wurzeln hätten, die größer wären als die Einheit.

Um also die Werthe q, r, ꝛc. der Wurzeln der Gleichung (b) (c) ꝛc. in ganzen Zahlen zu finden, ist es in diesem Falle hinlänglich, für y, z, ꝛc. die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ꝛc. und zwar bloß positiv, zu setzen, bis man durch diese Substitutionen zwey Resultate mit entgegenstehenden Zeichen bekömmt.

2) Wenn es zwey Werthe von x giebt, welchen einerley ganze Zahl p zukommt, so haben, wenn man diese Zahl gebraucht, die Gleichungen (b) (c) ꝛc. jede zwey reelle Wurzeln, die größer als eins sind, bis man zu einer Gleichung kommt, worin die Werthe dieser beyden Wurzeln durch verschiedene ganze Zahlen ausgedruckt werden. Sobald dieses geschehen ist, giebt jeder dieser Werthe eine Reihe von Gleichungen, davon jede nicht mehr als eine reelle Wurzel hat die größer ist als eins.

Denn da x zwey verschiedene Werthe hat, die beyde die ganze Zahl p gemein haben, so lassen sich diese beyden Werthe

Werthe durch $p + \frac{1}{y}$ ausdrücken, und es muß folglich y nothwendig zwey reelle Werthe haben, die größer sind als eins. Haben nun diese beyden Werthe von y die ganze Zahl q gemein, so muß auch, wenn man $y = q + \frac{1}{z}$ setzt, z zwey verschiedene Werthe haben, die größer als eins sind, u. s. w.

Wenn aber die Werthe von y in ganzen Zahlen verschieden wären, so müßte man, wenn man dieselben q und q' nennte, $y = q + \frac{1}{z}$ und $y = q' + \frac{1}{z}$ setzen, und dabey fällt in die Augen, daß z in beyden Fällen nicht mehr als einen reellen Werth haben würde, der größer als eins wäre, weil sonst y, anstatt einen zweyfachen Werth zu haben, einen dreyfachen, vierfachen Werth u. s. w. bekommen würde.

Ist man daher durch die gedachten Substitutionen zu einer Gleichung gekommen, deren beyde Wurzeln, die größer als die Einheit sind, durch verschiedene ganze Zahlen ausgedruckt werden, so hat jede von den folgenden Gleichungen, die man durch diese beyden Werthe erhält, nicht mehr als eine reelle Wurzel, die größer ist als die Einheit. Folglich braucht man, um den Werth dieser Wurzeln in ganzen Zahlen zu finden, in den Gleichungen nur die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ꝛc. zu substituiren, bis man zwey Resultate mit entgegengesetzten Zeichen bekommt (Nr 6).

Aehnliche Anmerkungen lassen sich über die Fälle machen, wo die Gleichung (a) drey oder mehrere Wurzeln hätte, deren Werthe in ganzen Zahlen nicht von einander verschieden wären.

20.

Wir haben in der 18ten Nummer angenommen, daß die gesuchten Wurzeln positiv sind. Um die negativen Wurzeln zu finden, braucht man in der gegebenen Gleichung nur $-x$ für x zu setzen, und dann die positiven Wurzeln dieser neuen Gleichung zu suchen (Nr. 4).

Was die imaginären Wurzeln betrift, die allemal durch $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ausgedruckt werden können, so sind §. 2. Regeln gegeben worden, nach welchen man Gleichungen finden kann, die α und β zu Wurzeln haben. Man darf also nur die reellen Wurzeln dieser Gleichungen suchen, wenn man die imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung haben will.

21.

Um sich die Substitutionen Nr. 18. von $p + \frac{1}{y}$ für x, von $q + \frac{1}{z}$ für y ꝛc. zu erleichtern, bemerke man, daß sich die Coefficienten der Gleichung (b) unmittelbar aus den Coefficienten der Gleichung (a) herleiten lassen. Es ist nemlich

$$A' = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$B' = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$C' = \frac{m(m-1)}{2}Ap^{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Bp^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
ꝛc.

Eben so bekommt man die Coefficienten der Gleichung (c) aus den Coefficienten der Gleichung (b), wenn man in den vorhergehenden Formeln q für p, A'', B'', C'', ꝛc. für A', B', C', ꝛc., und A', B', C', ꝛc. für A, B, C, ꝛc. setzt, und auf ähnliche Art kann man weiter fortgehen.

Man

Man sieht hieraus, daß der erste Coefficient A′ oder A″ ꝛc. nie = o seyn wird, wofern nicht p oder q ꝛc. eine genaue Wurzel ist, denn in diesem Falle endigt sich mit dieser Zahl der continuirliche Bruch, welchen man auf dem beschriebenen Wege findet (Nr. 18.). Ist nemlich $A'' = 0$ oder $A'' = 0$ ꝛc, so bekommt man $y = \infty$ oder $z = \infty$, und folglich $x = p$ oder $y = q$ ꝛc.

22.

Sind also p, q, r, s, t, ꝛc. die Wurzeln der Gleichungen (a), (b), (c), ꝛc. so daß $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$, $z = r + \frac{1}{u}$ ꝛc. ist: so bekommt man, wenn man diese Werthe nach und nach in den Werth von x bringt,

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}$$

und es wird folglich der Werth von x oder der gesuchten Wurzel durch einen continuirlichen Bruch ausgedruckt. Es ist aber bekannt, daß diese Art Brüche sehr geschickt ist, jede rationale sowohl als irrationale Zahl auf die möglich einfachste und genaueste Weise auszudrucken.

Huygens scheint der erste gewesen zu seyn, der diese Eigenschaft der continuirlichen Brüche bemerkt und dieselben gebraucht hat, um die einfachsten Brüche zu finden, die einem gegebenen Bruche am nächsten kommen. Man sehe seine Abhandlung de Automato planetario.

Nach ihm haben viele große Mathematiker die Theorie dieser Brüche weiter entwickelt und mit Einsicht und Nutzen gebraucht. Allein noch hat man meines Wissens nicht daran gedacht, sich ihrer bey der Auflösung der Gleichungen zu bedienen.

23.

Verwandelt man die continuirlichen Brüche

$$\frac{p}{1}, \quad p + \frac{1}{q}, \quad p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}} \text{ etc.}$$

in gemeine Brüche, und setzt dabey

$$\begin{array}{ll} \alpha = p & \alpha' = 1 \\ \beta = q\alpha + 1 & \beta' = q\alpha' = q \\ \gamma = r\beta + \alpha & \gamma' = r\beta' + \alpha' \\ \delta = s\gamma + \beta & \delta' = s\gamma' + \beta', \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

so bekommt man

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'}, \text{ etc.}$$

Diese Brüche nähern sich nothwendiger Weise dem wahren Werthe von x, und zwar ist der erste von ihnen kleiner, der andere größer, und der dritte wieder kleiner, der vierte wieder größer u. s. w. als dieser Werth, so daß derselbe allemal zwischen zwey unmittelbar auf einander folgende Brüche fällt. Diese Behauptung läßt sich sehr leicht aus der Natur der Natur der continuirlichen Brüche herleiten.

Nun überzeugt man sich leicht, daß die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma,$ etc. und $\alpha', \beta', \gamma',$ etc. allemal so beschaffen sind, daß

$$\begin{array}{c} \beta\alpha' - \alpha\beta' = 1 \\ \beta\gamma' - \gamma\beta' = 1 \\ \delta\gamma' - \gamma\delta' = 1 \\ \text{etc.} \end{array}$$

ist. Hieraus folgt.

1) Daß diese Brüche bereits auf die kleinsten Zahlen gebracht sind. Denn wenn z. B. γ und γ' einen andern gemeinschaftlichen Divisor hätten als die Einheit, so müßte, da

da $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$ ist, auch die Einheit durch diesen Divisor theilbar seyn.

2) Ferner ist $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}$; $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'}$; $\frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}$; ꝛc., und es können daher die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, ꝛc. von dem wahren Werthe von x nicht weiter unterschieden seyn als um eine Größe, die kleiner ist als $\frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{1}{\beta'\gamma'}$, $\frac{1}{\gamma'\delta'}$, ꝛc. Hiernach läßt sich die Größe der jedesmaligen Näherung leicht beurtheilen.

Ueberhaupt da $\beta' > \alpha'$, $\gamma' > \beta'$ ꝛc. ist, so ist auch $\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'}$; $\frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'}$, ꝛc.; und es kann folglich die Abweichung eines jeden Bruchs von dem wahren Werthe der Wurzel nie so viel betragen als die Einheit durch das Quadrat des Nenners dieses Bruchs dividirt.

3) Es kommt nicht nur jeder Bruch dem Werthe von x näher als jeder der vorhergehenden Brüche, sondern auch näher als jeder Bruch, dessen Nenner kleiner ist. Denn sollte der Bruch $\frac{\mu}{\mu'}$ z. B. dem gedachten Werthe näher kommen als der Bruch $\frac{\gamma}{\gamma'}$ und γ' größer seyn als μ', so müßte $\frac{\mu}{\mu'}$ zwischen $\frac{\gamma}{\gamma'}$ und $\frac{\delta}{\delta'}$ fallen. Man hätte folglich $\frac{\mu}{\mu'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{1}{\gamma'\delta'}$ und > 0; also $\mu\gamma' - \mu'\gamma < \frac{\mu'}{\delta'} < 1$ und > 0, welches nicht statt finden kann.

24.

Die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, ꝛc. können Hauptbrüche genennt werden, weil sie sich dem gesuchten Werthe so sehr als möglich nähern; sind aber die Zahlen p, q, r, ꝛc. keine Einheiten, so kann man noch andere Brüche finden, die sich demselben Werthe ebenfalls nähern, und diesen kann man den Namen Nebenbrüche geben.

Ist z. B. $r > 1$, so kann man zwischen die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\gamma}{\gamma'}$ die beyde kleiner sind als der Werth von x, so viel Nebenbrüche einschalten, als $r - 1$ Einheiten enthält, indem man nach und nach $1, 2, 3,$ ꝛc. $r - 1$ anstatt r setzt. Da $\gamma = r\beta + \alpha$ und $\gamma' = r\beta' + \alpha'$ ist, so bekommt man auf diese Art folgende Reihe von Brüchen:

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\ \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\ \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}\ \text{ꝛc.}\ \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}.$$

Die beyden äußersten Glieder dieser Reihe enthalten die Hauptbrüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, die mittlern hingegen sind Nebenbrüche.

Sucht man nun die Differenz von zwey unmittelbar auf einander folgenden Brüche dieser Reihe, z. B. von $\frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}$ und $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, so findet man $\frac{1}{(2\beta'+\alpha')(3\beta'+\alpha')}$, so daß diese Differenz allemal positiv ist und desto kleiner wird, je weiter vom Anfang die Brüche genommen werden. Da folglich der Bruch $\frac{\gamma}{\gamma'}$ kleiner ist als der Werth von x, so

müssen

müssen auch die gedachten Brüche insgesammt kleiner seyn als dieser Werth, aber sich dabey gleichwohl demselben immer mehr nähern.

Diese Schlüsse passen auch auf alle übrige Hauptbrüche, und wenn man zu denselben diese beyden füget, $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$, wovon der erste allemal kleiner, der andere aber allemal größer ist als jede gegebene Größe: so kann man zwey Reihen von Brüchen machen, welche sich dem gesuchten Werthe nähern, und wovon die eine die Brüche enthält, die kleiner, und die andere diejenigen, welche größer sind als dieser Werth.

Brüche, die kleiner sind.

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1}\ \text{ꝛc.}\ \frac{p}{1}\ \ldots \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)$$

$$\frac{\beta + \alpha}{\beta' + \alpha'},\ \frac{2\beta + \alpha}{2\beta' + \alpha''},\ \frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'}\ \text{ꝛc.}\ \frac{r\beta + \alpha}{r\beta + \alpha'}\ \ldots \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)$$

$$\frac{\delta + \gamma}{\delta' + \gamma'},\ \frac{2\delta + \gamma}{2\delta' + \alpha''},\ \frac{3\delta + \gamma}{3\delta' + \gamma'}\ \text{ꝛc.}\ \frac{t\delta + \gamma}{t\delta' + \gamma}\ \ldots \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$$

ꝛc.

Brüche, die größer sind.

$$\frac{1}{0},\ \frac{\alpha + 1}{\alpha' + 1},\ \frac{2\alpha + 1}{2\alpha' + 1},\ \frac{3\alpha + 1}{3\alpha' + 1}\ \text{ꝛc.}\ \frac{q\alpha + 1}{q\alpha' + 1}\ \ldots \left(\frac{\beta}{\beta'}\right)$$

$$\frac{\gamma + \beta}{\gamma' + \beta'},\ \frac{2\gamma + \beta}{2\gamma' + \beta'},\ \frac{3\gamma + \beta}{3\gamma' + \beta'}\ \text{ꝛc.}\ \frac{s\gamma + \beta}{s\gamma' + \beta'}\ \ldots \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$$

ꝛc.

Was die Natur dieser Brüche betrift, so ist leicht zu beweisen, so wie wir bereits von den Hauptbrüchen bewiesen haben,

1) Daß

1) Daß jeder derselben auf die kleinsten Zahlen gebracht ist. Da also die Zähler und Nenner immer größer werden, je weiter man fortgeht, so folgt, daß diese Brüche immer durch desto größere Zahlen ausgedruckt werden, je weiter dieselben vom Anfang der Reihe entfernt sind.

2) Daß jeder Bruch der ersten Reihe dem Werthe von x näher kommen wird als jeder andere Bruch der kleiner ist als dieser Werth, und dabey einen kleinern Nenner hat, als eben dieser Bruch; so wie auch daß jeder Bruch der zweyten Reihe dem Werthe von x näher liegen muß als jeder andere Bruch, der größer ist als dieser Werth und einen kleinern Nenner hat als eben dieser Bruch.

Denn gäbe es einen Bruch $\frac{\mu}{\mu'}$ der kleiner wäre als der Werth von x, und sich zugleich diesem Werthe mehr näherte als z. B. der Bruch $\frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'}$, so müßte sich, wenn man $3\beta' + \alpha' > \mu'$ annähme, weil der Bruch $\frac{\beta}{\beta'}$ größer ist als der gedachte Werth, die Größe $\frac{\mu}{\mu'}$ zwischen den beyden Größen $\frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'}$ und $\frac{\beta}{\beta'}$ befinden. Sollte dieses seyn, so müßte

$$\frac{\mu}{\mu'} - \frac{3\beta + \alpha}{3\alpha' + \alpha'}$$

$$< \frac{\beta}{\beta'} - \frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'} < \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta(3\beta' + \alpha')} < \frac{1}{\beta'(3\beta' + \alpha')}$$

und folglich

$$\mu(3\beta' + \alpha') - \mu'(3\beta + \alpha) < \frac{\mu'}{3\beta' + \alpha'} < 1$$

seyn, welches nicht statt finden kann.

Uebri-

Uebrigens kann es sich ereignen, daß ein Bruch aus der einen Reihe dem Werthe von x nicht so nahe kommt als ein Bruch aus der andern, obgleich die Zahlen desselben kleiner sind; allein wenn der Bruch, der den größten Nenner hat, ein Hauptbruch ist, so findet dieser Umstand nie statt (Nr. 23).

§. 4.

Anwendung der erklärten Methode auf einige einzelne Fälle.

25.

Das erste Beyspiel mag die Gleichung seyn, welche Newton nach seiner Methode aufgelöset hat, nemlich

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Ich fange davon an, daß ich nach den Formeln der 8ten Nummer die Gleichung für v suche, die aus dieser Gleichung entspringt. Zu dem Ende setze ich

$$m = 3,\ A = 0,\ B = -2 \text{ und } C = 5.$$

Hierdurch erhalte ich

$$n = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3,\ A1 = 0,\ A2 = 4,\ A3 = 15,\ A4 = 8,$$

$$A5 = 50 \text{ und } A6 = 91$$

folglich

$$a1 = 12,\ a2 = 72,\ a3 = -1497$$

und hieraus

$$a = 12,\ b = 36,\ c = -643.$$

so daß die gesuchte Gleichung ist

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0$$

Da in dieser Gleichung die Zeichen nicht durchaus abwechseln, so schließe ich daraus sogleich, daß die gegebene Gleichung

chung nothwendiger Weise zwey imaginäre, und folglich nicht mehr als eine reelle Wurzel hat (Nr. 16).

Folglich sind die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, rc. diejenigen, welche man anstatt x zu setzen hat (Nr. 6).

Nehme ich nun x positiv, und suche nach der Nr. 12. erklärten Methode die Grenze der Werthe von x, so finde ich $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} < 3$; folglich ist 3 die gesuchte Grenze in ganzen Zahlen, und es ist daher genug, bey der gedachten Substitution bis 3 fortzugehen. Hierdurch findet man

$$-5, -6, -1, 16$$

und es erhellet auf diese Art, daß die gesuchte Wurzel zwischen 2 und 3 fallen wird. Es ist demnach 2 der Werth derselben in ganzen Zahlen (Nr. 2).

Nun setze ich, nach §. 3, $x = 2 + \frac{1}{y}$, und bekomme dadurch, wenn ich die Glieder nach y ordne, die Gleichung

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$$

worin ich die Zeichen verändert habe, um das erste Glied positiv zu erhalten.

Diese Gleichung hat nun nothwendiger Weise nur eine einzige Wurzel die größer ist als eins (Nr 19), so daß man darin, um den Werth von y durch die Näherung zu finden bloß die Zahlen 0, 1, 2, 3, rc. zu substituiren braucht, bis man zwey Resultate findet, die entgegengesetzte Zeichen haben.

Um nicht zu viel unnütze Substitutionen zu versuchen bemerke ich, daß $y = 0$ gesetzt, ein negatives Resultat giebt, und daß man dergleichen ebenfalls durch die Substitution $y = 10$ bekommt. Ich fange daher von $y = 10$ an, und finde

finde, indem ich nach und nach 10, 11 ꝛc. für y setze, die Resultate — 61, 54 ꝛc. Folglich ist der Werth von y in ganzen Zahlen 10, und also $q = 10$.

Setze ich nunmehr $y = 10 + \frac{1}{z}$, so bekomme ich die Gleichung

$$61z^3 - 94^2 - 20z - 1 = 0$$

und bringe ich in diese Gleichung für z nach und nach die Zahlen 1, 2, ꝛc., so ergeben sich die Resultate — 54, 71, ꝛc. und es ist daher $z = 1$.

Nun setze ich noch $z = 1 + \frac{1}{u}$, und bekomme dadurch

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$$

welche, $u = 1, 2$, ꝛc. genommen, die Resultate — 71, 293 ꝛc. giebt. Folglich ist $r = 1$, u. s. w.

Fährt man auf diese Art fort, so findet man die Zahlen 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, ꝛc., und es läßt sich daher die gesuchte Wurzel durch folgenden Bruch ausdrucken:

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{ꝛc.}}}}}$$

welcher nach Nr. 23. folgende Brüche giebt

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},$$
$$\frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \text{ꝛc.}$$

die wechselsweise kleiner und größer sind, als der Werth von x.

Der letzte Bruch $\frac{16415}{7837}$ ist größer als die gesuchte Wurzel, aber die Abweichung beträgt weniger als $\frac{1}{(7837)^2}$ (Nr. 23. 2.) d. h. weniger als 0,0000000163. Wenn man daher den Bruch $\frac{16415}{7837}$ in einen Decimalbruch verwandelt, so ist derselbe bis auf die 7te Stelle genau. Man findet aber durch diese Verwandlung 2,0945514865 . . . und es fällt daher die gesuchte Wurzel zwischen die Zahlen 2,09455149 und 2,09455147.

Newton fand durch seine Methode 2,09455147, und es giebt daher dieselbe hier ein sehr genaues Resultat Allein man würde sich täuschen, wenn man dieselbe Genauigkeit in allen Fällen von ihr erwarten wollte.

26.

Was die beyden übrigen Wurzeln eben dieser Gleichung betrift, so haben wir bereits gesehen, daß dieselben imaginär sind. Will man sie indeß finden, so enthält Nr. 17. den Weg, welchen man dazu zu betreten hat.

Man nehme also die oben gefundene Gleichung für v wieder zur Hand, und setze darin — w für v. Hierdurch bekommt man

$$w^3 + 12w^2 - 36w - 643 = 0$$

und es kommt hier bloß darauf an, daß man eine reelle und positive Wurzel von dieser Gleichung finde. Da nun das letzte Glied derselben negativ ist, so hat sie nothwendiger Weise eine reelle Wurzel, und man findet den Werth derselben in ganzen Zahlen, wenn man für w nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc. setzt (Nr. 3.) Setzt man w = 6, so so ist das Resultat $= -211$, und setzt man $w = 7$, so ist dasselbe $= + 40$. Folglich ist der Werth der positiven Wurzel dieser Gleichung in ganzen Zahlen $= 6$.

Man setze also $w = 6 + \frac{1}{u}$, wodurch man nach Veränderung der Zeichen

$$211u^3 - 216u^2 - 30u - 1 = 0$$

findet. Läßt man u nach und nach 0, 1, 2, 3, ꝛc. bedeuten, so findet man -1, -36 $+53$, und es ist daher 1 der Werth von u in ganzen Zahlen.

Setzt man also $u = 1 + \frac{1}{x}$, so erhält man, nach abermaliger Veränderung der Zeichen

$$36x^3 - 171x^2 - 417x - 211 = 0.$$

Substituirt man aber für x nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, ꝛc., so geben dieselben bis 6 negative Resultate, und $x = 7$ ein positives, nemlich 9218. Es ist folglich 6 der Werth von x in ganzen Zahlen.

Fährt man auf diese Art fort, so nähert man sich dem Werthe von w immer mehr und mehr, und findet dafür folgenden continuirlichen Bruch

$$w = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{ꝛc.}}}$$

welcher folgende Brüche giebt,

$$\frac{6}{1},\ \frac{7}{1},\ \frac{48}{7},\ \text{ꝛc.}$$

Hat man so w gefunden, so ist (Nr. 17.) $\zeta = \frac{\sqrt{w}}{2}$, und also ζ bekannt.

Nun bringt man $\alpha + 6\sqrt{-1}$ für x in die gegebene Gleichung, und formirt daraus zwey Gleichungen, so daß die eine die reellen und die andere die imaginären Glieder mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$ enthält. Hierdurch bekommt man

$$\alpha^3 - (36^2 - 2)\alpha - 5 = 0$$
$$3\alpha^2 - 6^2 - 2 = 0$$

Ferner sucht man den größten gemeinschaftlichen Divisor dieser beyden Gleichungen, und setzt dabey die Division bloß so weit fort, bis man einen Rest findet, worin α nur in der ersten Dignität enthalten ist. Dieser Rest ist

$$-\frac{86^2 + 4}{3}\alpha - 5$$

und $= 0$ gesetzt giebt derselbe

$$\alpha = -\frac{15}{4(26^2 + 1)}.$$

Auf diese Art hat man also nunmehr die beyden imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung $\alpha + 6\sqrt{-1}$ und $\alpha - 6\sqrt{-1}$.

27.

Jetzt wollen wir folgende Gleichung nehmen

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

wo

$$m = 3, \text{ und folglich } n = 3$$

ferner

$$A = 0, \quad B = -7, \quad C = -7$$
$$A1 = 0, \quad A2 = 14, \quad A3 = -21, \quad A4 = 98,$$
$$A5 = -245, \quad A6 = 833$$
$$a1 = 42, \quad a2 = 882, \quad a3 = 18669$$

und

$$a = 42, \quad b = 441, \quad c = 49$$

ist, so daß die Gleichung für v folgende wird:

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0.$$

Da die Zeichen in dieser Gleichung abwechseln, so hat man daran ein Kennzeichen, daß alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell seyn können (Nr. 16.), und da dieselbe nicht durch v theilbar ist, so folgt auch, daß die Gleichung für x keine gleiche Wurzeln hat (Nr. 15.).

Man setze also (Nr. 11.) $v = \frac{1}{y}$, so bekommt man, wenn man noch y ordnet,

$$y^3 - 9y^2 + \frac{42}{49}y - \frac{1}{49} = 0.$$

Da hier der größte negative Coefficient $= 9$ ist, so könnte man $l = 10$ setzen (Nr. 12.); man kann indeß eine genauere Grenze finden, wenn man die kleinste Zahl sucht, wobey folgende drey Größen positiv werden

$$l^3 - 9l^2 + \frac{42}{49}l - \frac{1}{49}$$

$$3l^2 - 18l + \frac{42}{49}$$

$$3l - 9$$

Thut man dieses, so ergliebt sich $l = 9$, und man hat also $k = 3$ (Nr. 11.) und folglich $\Delta = \frac{1}{3}$.

Bringt man demnach $\frac{x}{3}$ für x in die gegebene Gleichung, so bekommt man

$$x^3 - 63x + 189 = 0$$

worin man für x bloß die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, rc. zu substituiren braucht. Nach der Methode Nr. 13. 3. findet man, daß die Reihe der Resultate nicht mehr als zwey Abwechslungen der Zeichen hat, und es hat daher die gegebene Gleichung auch nicht mehr als zwey positive Wurzeln, wovon die eine zwischen die Zahlen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$, und die andere zwischen $\frac{5}{3}$ und $\frac{6}{3}$ fällt. Man sieht hieraus, daß der Werth von beyden Wurzeln in ganzen Zahlen $= 1$ ist.

Nun nehme man x negativ (Nr. 4.), um auch die negativen Wurzeln der Gleichung zu finden. Hierdurch bekommt man die Gleichung

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

Da das letzte Glied dieser Gleichung negativ ist, so muß sie nothwendig eine positive Wurzel haben (Nr. 3.); allein da wir bereits die beyden übrigen Wurzeln kennen, so wissen wir auch, daß sie deren nicht mehr haben kann. Man hat demnach auch, die gedachte positive Wurzel in ganzen Zahlen zu finden, bloß nöthig, für x die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, rc. zu substituiren, bis man zwey Resultate mit entgegengesetzten Zeichen findet (Nr. 3); und da die Zahlen 3 und 4 dergleichen Resultate geben, so ist 3 der Werth von x in $x^3 - 7x - 7 = 0$, und folglich $- 3$ der Werth von x in der gegebenen Gleichung.

Nachdem man auf diese Art gefunden, daß die Gleichung drey Wurzeln hat, zwey positive und eine negative, und zugleich den Werth dieser Wurzeln in ganzen Zahlen kennt: so kann man sich dem wahren Werthe einer jeden nach §. 3. so sehr nähern als man irgend will.

Wir wollen von den positiven Wurzeln anfangen, und in der Gleichung $x^3 - 7x + 7 = 0$, $x = 1 + \frac{1}{y}$ setzen. Dadurch bekommen wir

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$$

Da

Da 1 der Werth zweyer Wurzeln in ganzen Zahlen ist, so muß diese Gleichung (Nr. 19. 2.) zwey Wurzeln haben, die größer sind als eins.

Ich versuche also, ob sich die Werthe dieser beyden Wurzeln näherungsweise durch die Substitution der ganzen Zahlen 0, 1, 2, ꝛc. finden lassen. Da bloß das Glied $4y^2$ negativ ist, so ist es (Nr. 13. 1.) hinlänglich, diese Substitution nur so weit fortsetzen, bis $y^3 =$ oder $> 4y^2$ oder $y = 4$ wird. Setzt man nun $y = 0, 1, 2, 3, 4$, so sind die Resultate $1, 1, -1, 1, 13$; woraus folgt daß die gesuchten Wurzeln einmal zwischen 1 und 2, und zweytens zwischen 2 und 3 fallen. Folglich sind die Werthe von y in ganzen Zahlen 1 und 2.

Setzt man also $1) = 1 + \frac{1}{z}$, so bekommt man die Gleichung

$$z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0$$

und diese Gleichung hat nicht mehr als eine reelle Wurzel, die größer ist als eins (Nr. 19. 2.) Setzt man demnach $z = 1, 2,$ ꝛc. bis man zwey Resultate mit entgegen gesetzten Zeichen bekömmt, so findet man bey $z = 2, -1$, und bey $z = 3, +7$. Folglich ist 2 der Werth von z in ganzen Zahlen.

Man setze also $z = 2 + \frac{1}{u}$, so bekommt man nach Veränderung der Zeichen

$$u^3 + 3u^2 - 4u - 1 = 0$$

Setzt man $u = 1, 2,$ ꝛc. so findet man den Werth von u in ganzen Zahlen $= 1$. Auf ähnliche Art kann man weiter fortfahren.

Setzt man 2) $y = 2 + \frac{1}{z}$, so findet man, wenn man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung bringt, und die Zeichen verändert,

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$$

Diese Gleichung hat, so wie die vorhergehende Gleichung für z, nicht mehr als eine Wurzel, die größer ist als eins, so daß man nur $z = 1, 2,$ ꝛc. setzen darf. Hierdurch erhält man die Resultate $-1, +5$, und es ist also 1 der Werth von z in ganzen Zahlen.

Man setze daher $z = 1 + \frac{1}{u}$, so bekommt man nach Veränderung der Zeichen

$$u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0$$

und diese Gleichung, auf die vorhergehende Art behandelt, giebt für u in ganzen Zahlen 4.

Setzt man $u = 4 + \frac{1}{w}$ so läßt sich auf ähnliche Art der Werth von w finden, u. s. w.

Es sind demnach die beyden positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{ꝛc.}}}}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{ꝛc.}}}}$$

und diese Brüche kann man, wenn man will, wie Nr. 23. 24. verwandeln.

Um

Um nun den Werth der negativen Wurzel näherungsweise zu finden, nehme man wieder die Gleichung

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

zur Hand, wovon man schon weiß, daß x in ganzen Zahlen $= 3$ ist. Man setze also $x = 3 + \frac{1}{y}$, so bekommt man nach Veränderung der Zeichen

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0$$

und da diese Gleichung nur eine reelle Wurzel haben kann, die größer als eins ist (Nr. 19. 2.): so findet man den Werth von y in ganzen Zahlen, wenn man nach und nach $y = 1$, 2, ꝛc. setzt, bis man zwey Resultate mit entgegengesetzten Zeichen findet. Dies geschieht, wenn $y = 20$, 21 wird, und es ist daher der gedachte Werth von $y = 20$.

Fährt man nun auf eben die Art als vorhin fort, so findet man für die negative Wurzel der gegebenen Gleichung

$$x = -3 - \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{3 + 1 \text{ ꝛc.}}}$$

4. Zusätze zu der vorhergehenden Abhandlung.

Vom

Herrn de la Grange.

Aus dem vier und zwanzigsten Bande der Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Ich habe unter dem Titel: Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen, eine allgemeine Methode dieser Auflösung, woran es bis jetzt noch fehlte, mitgetheilt, und hoffe, daß dadurch die Lücke ausgefüllt seyn wird, welche der gemachten Versuche ungeachtet noch immer statt fand. Sie lehrt nemlich nicht nur, wie man die Menge der reellen positiven oder negativen, gleichen oder ungleichen Wurzeln in jede Gleichung finden kann, sondern sie macht auch mit den Wegen bekannt, sich dem Werthe dieser Wurzeln in rationalen Zahlen so weit zu nähern als man irgend will; und dies ist es meiner Meinung nach, worauf es bey der Auflösung der Gleichungen ankommt.

Da ich Gelegenheit gehabt habe über diesen Gegenstand weiter nachzudenken, so habe ich verschiedene Bemerkungen gesammlet, wodurch meine Methode noch vollkommner und leichter gemacht werden kann. Es scheinen mir diese Bemerkungen

kungen der Aufmerksamkeit der Mathematiker nicht unwerth, und ich will sie daher ebenfalls mittheilen.

§. 1.

Ueber die imaginären Wurzeln der Gleichungen.

Erste Anmerkung.

Wie man erkennen kann, daß eine Gleichung lauter reelle Wurzeln habe.

1.

Ich habe Nr. 8. der vorhergehenden Abhandlung allgemeine Formeln gegeben, vermittelst welcher man aus jeder gegebenen Gleichung eine andere herleiten kann, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Sind nun alle Wurzeln einer Gleichung reell, so ist klar, daß die Quadrate ihrer Differenzen insgesammt positiv seyn müssen; und es muß folglich die Gleichung, deren Wurzeln diese Quadrate sind, und welche in der Folge die Gleichung der Differenzen heißen soll, da sie keine andere als reelle positive Wurzeln hat, vom Anfang bis zu Ende lauter Abwechselungen der Zeichen enthalten, so daß daher die ursprüngliche Gleichung, wenn diese Bedingung nicht statt findet, nothwendiger Weise imaginäre Wurzeln hat.

2.

Da ferner die Anzahl der imaginären Wurzeln in den Gleichungen allemal eine grade Zahl, und die allgemeine Form dieser Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ ist, wo α und β reelle Größen bedeuten: so kann die allgemeine

meine Form der Differenz jeder zweyer zusammen gehörigen imaginären Wurzeln keine andere seyn, als $2\,6\sqrt{-1}$, und folglich das Quadrat dieser Differenz keine andere Form haben als -46^2, so daß dasselbe allemal eine reelle negative Größe wird. Wenn also die gegebene Gleichung imaginäre Wurzeln hat, so muß die Gleichung der Differenzen zum wenigsten eben so viel reelle negative Wurzeln enthalten, als es in der gegebenen Paare von imaginären Wurzeln giebt.

Dieses habe ich bereits im 2ten §. der gedachten Abhandlung bemerkt; allein es läßt sich daraus noch eine andere Folge herleiten, welche ich ihrer Wichtigkeit wegen hersetzen will.

3.

Wir haben gesehen, daß jedes Paar imaginärer Wurzeln einer gegebenen Gleichung zum wenigsten eine reelle negative Wurzel in der Gleichung ihrer Differenzen hervorbringt. Nun ist bekannt, daß eine jede Gleichung nicht mehr reelle positive Wurzeln als Abwechslungen ungleicher, und nicht mehr reelle negative Wurzeln als Folgen gleicher Zeichen haben kann. Wenn also eine Gleichung imagnäre Wurzeln hat, so kann die Anzahl derselben nie größer seyn, als die doppelte Anzahl der Folgen gleicher Zeichen in der Gleichung der Differenzen.

4.

Hieraus und aus dem Obigen fließt, daß die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, wenn die Gleichung der Differenzen lauter Abwechslungen ungleicher Zeichen enthält, und daß dagegen nothwendig imaginäre Wurzeln

in

in ihr angetroffen werden, wenn dieses nicht statt findet. Auf diese Art läßt sich also allemal beurtheilen, ob eine Gleichung imaginäre Wurzeln hat oder nicht.

Zweyte Anmerkung.

Regeln zur Bestimmung der Menge der imaginären Wurzeln der Gleichungen.

5.

Es seyen a, b, c, d, ꝛc. die reellen Wurzeln einer Gleichung, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$, ꝛc. die imaginären. Dann sind die Quadrate der Differenzen dieser Wurzeln

$$(a-b)^2,\quad (a-c)^2,\quad (a-d)^2, \text{ ꝛc.}$$
$$(b-c)^2,\quad (b-d)^2, \text{ ꝛc.}$$
$$(c-d)^2, \text{ ꝛc.}$$
$$-4\beta^2,\qquad -4\delta^2, \text{ ꝛc.}$$
$$(\alpha - a + \beta\sqrt{-1})^2,\quad (\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - b + \beta\sqrt{-1})^2,\quad (\alpha - b - \beta\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - c + \beta\sqrt{-1})^2,\quad (\alpha - c - \beta\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - d + \beta\sqrt{-1})^2,\quad (\alpha - d - \beta\sqrt{-1})^2$$
ꝛc.
$$(\gamma - a + \delta\sqrt{-1})^2,\quad (\gamma - a - \delta\sqrt{-1})^2$$
$$(\gamma - b + \delta\sqrt{-1})^2,\quad (\gamma - b - \delta\sqrt{-1})^2$$
$$(\gamma - c + \delta\sqrt{-1})^2,\quad (\gamma - c - \delta\sqrt{-1})^2$$
$$(\gamma - d + \delta\sqrt{-1})^2,\quad (\gamma - d - \delta\sqrt{-1})^2$$
ꝛc.
$$(\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2,\quad (\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2,\quad (\alpha - \gamma - (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$$
ꝛc.

und selbige also auch die Wurzeln der Gleichung der Differenzen.

Es sey m der Exponent der gegebenen Gleichung, wo also m gleich ist der Menge der Wurzeln a, b, c, ꝛc. $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{1}$, ꝛc; so ist der Exponent der Gleichung der Differenzen $\frac{m(m-1)}{2} = n$ (N. 8. d. vorherg. Abh.). Nun sey p die Anzahl der reellen Wurzeln a, b, c, ꝛc, und 2q die Anzahl der imaginären $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$, ꝛc, folglich $m = p + 2q$. Dies vorausgesetzt erhellet aus der vorstehenden Tabelle leicht, daß es unter den n Wurzeln der Gleichung der Differenzen $\frac{p(p-1)}{2}$ reelle und positive, q reelle und negative, und $2q(p + q - 1)$ imaginäre Wurzeln geben wird.

6.

Sucht man nun das Produkt aller dieser Wurzeln, so ist klar, daß das Produkt der $\frac{p(p-1)}{2}$ positiven Wurzeln allemal positiv, das Produkt der q negativen Wurzeln aber positiv oder negativ seyn wird, je nachdem q eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und was die $2q(p + q - 1)$ negative Wurzeln betrift, so ist das Produkt derselben ebenfalls allemal positiv. Da nemlich je zwey und zwey imaginäre Wurzeln unter die allgemeine Form $(A + B\sqrt{-1})^2$, $(A - B\sqrt{-1})^2$, gebracht werden können, so hat das Produkt aus je zweyen die Form $(A^2 + B^2)^2$, und es ist demnach das Produkt aller dieser Wurzeln allemal positiv.

Folglich ist das Total-Produkt allemal positiv oder negativ, je nachdem q eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Nun

Nun ist, wie bekannt, das letzte Glied einer Gleichung gleich den Produkten aller Wurzeln, und positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl dieser Wurzeln eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Es muß folglich das letzte Glied der Gleichung der Differenzen, deren Exponent n ist, positiv seyn, wenn n und q beyde entweder gerade oder ungerade Zahlen sind, negativ aber, wenn die eine von diesen Zahlen gerade und die andere ungerade ist.

7.

Wenn nun die Zahlen n und q entweder beyde gerade oder beyde ungerade Zahlen sind, so ist $n - q$ nothwendig eine gerade Zahl, ist aber die eine von ihnen gerade und die andere ungerade, so ist $n - q$ nothwendig eine ungerade Zahl. Da also $n = \frac{m(m-1)}{2}$, und $m = p + 2q$ ist, so wird $n - q = \frac{p(p-1)}{2} + 2q(p + q - 1)$, und es ist folglich $n - q$ allemal eine gerade oder eine ungerade Zahl, je nachdem $\frac{p(p-1)}{2}$ gerade oder ungerade ist.

Auf diese Art muß also nothwendig das letzte Glied der Gleichung der Differenzen positiv oder negativ seyn, je nachdem $\frac{p(p-1)}{2}$ gerade oder ungerade ist, d. h. je nachdem die Menge der Combinationen der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung zu zwey durch eine gerade oder durch eine ungerade Zahl ausgedruckt wird.

8. An-

8.

Angenommen also 1) daß das gedachte letzte Glied positiv sey, so muß $\frac{p(p-1)}{2}$ eine gerade Zahl, und folglich entweder

$$\frac{p}{2} = 2\lambda \text{ und } p = 4\lambda, \text{ oder } \frac{p-1}{2} = 2\lambda \text{ und } p = 4\lambda + 1$$

seyn. Hieraus folgt, daß in diesem Falle die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn der Exponent der Gleichung eine gerade Zahl ist, ein Vielfaches von 4, wenn aber dieser Exponent eine ungerade Zahl ist, ein Vielfaches von 4 um 1 vermehrt seyn muß. Es kann also in diesem Falle die Gleichung nicht 2 oder 3 oder 6 oder 7 reelle Wurzeln u. s. f. haben.

Ist aber 2) das letzte Glied der Gleichung der Differenzen negativ und also $\frac{p(p-1)}{2}$ eine ungerade Zahl; so muß entweder

$$\frac{p}{2} = 2\lambda + 1 \text{ und } p = 4\lambda + 2, \text{ oder } \frac{p-1}{2} = 2\lambda + 1 \text{ und}$$
$$p = 4\lambda + 3$$

seyn. Es ist also in diesem Falle die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung nothwendiger Weise entweder ein Vielfaches von 4 um 2 vermehrt, wenn der Exponent der Gleichung eine gerade, oder ein Vielfaches von 4 um 3 vermehrt, wenn der Exponent der Gleichung eine ungerade Zahl ist. Es kann also die Gleichung in diesem Falle nicht 1 oder 4 oder 5 oder 8 oder 9 reelle Wurzeln u. s. w. haben.

9.

Auf diese Art ist man im Stande beym bloßen Anblicke der Zeichen der Gleichung der Differenzen zu beurtheilen

1) ob alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind oder nicht.

2) ob die Menge der reellen Wurzeln eine von den Zahlen 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 2c. oder von diesen 2, 3, 6, 7, 10, 11, 2c. ist. Dieses reicht hin zur Bestimmung der Menge der reellen und imaginären Wurzeln derer Gleichungen, welche den fünften Grad nicht übersteigen, und überhaupt, wenn man zum voraus weiß, daß die Anzahl der imaginären Wurzeln nicht größer als 4 seyn kann.

Vielleicht lassen sich, wenn man diese Theorie weiter fortsetzt, sichere Regeln finden, um die Anzahl der reellen Wurzeln einer jeden Gleichung zu bestimmen, wozu die bisherigen Regeln entweder nicht hinreichend sind, wie die von Newton, Maclaurin 2c., oder nicht würklich gebraucht werden können, wie die von Stirling, Gua u. s. w. weil dabey die Auflösung der Gleichungen der niedrigern Grade vorausgesetzt wird.

Dritte Anmerkung.

Anwendung des Bisherigen auf die Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade.

10.

Es sey eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben, deren allgemeine Form diese ist,

$$x^2 - Ax + B = 0.$$

Die Gleichung der Differenzen ist eine Gleichung des Grades $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, und, nach der 8ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung,

$$v - a = 0$$

wo man also

$$4a = A^2 - 4B$$

hat. Folglich sind die Wurzeln dieser Gleichung entweder beyde reell oder beyde imaginär, je nachdem $A^2 - 4B > 0$ oder < 0, und beyde einander gleich, wenn $A^2 = 4B$ ist.

11.

Es sey die allgemeine Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

gegeben. Die Gleichung ihrer Differenzen gehört zu dem Grade $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, und ist, nach der gedachten Methode gesucht,

$$v^3 - av^2 + bv - c = 0$$

so daß

$$4a = 2(A^2 - 3B)$$

$$16b = (A^2 - 3B)^2$$

$$4^3c = \frac{4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2}{3}$$

ist. Sollen also alle drey Wurzeln reell seyn, so muß

1) $A^2 - 3B > 0$, und

2) $4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0$

werden. Fehlt eine von diesen Bedingungen, so hat die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln.

12.

Nun sey die allgemeine Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

gegeben, worin das zweyte Glied fehlt. Die Gleichung der Differenzen ist eine Gleichung von 6ten Grade, und ihre Form folgende

v^6 —

$$v^6 - av^5 + bv^4 - cv^3 + dv^2 - ev + f = 0$$

so daß

$$4a = -8B$$
$$16b = 22B^2 + 8D$$
$$4^3c = -18B^3 + 16BD + 26C^2$$
$$4^4d = 17B^4 + 24B^2D - 7.16D^2 + 3.16BC^2$$
$$4^5e = -4B^5 - 2.27C^2B^2 - 8.27C^2D + 3.4^3BD^2 - 2.4^2B^3D$$
$$4^6f = 4D^3 - 2^3.4^2B^2D^2 + 4^2.3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4$$

bedeutet. Wenn daher die Größe

$$4D^3 - 2^3 . 4^2B^2D^2 + 4^2 . 3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 4^3C^4$$

negativ ist, so hat die gegebene Gleichung nothwendig zwey reelle und zwey imaginäre Wurzeln; ist sie aber positiv, so sind entweder alle Wurzeln reell oder alle imaginär.

Nun sind alle Wurzeln reell, wenn die Werthe aller Coefficienten a, b, c, d, e, f, positiv sind, und werden also insgesammt imaginär seyn, wenn f positiv ist, und sich dabey unter den übrigen ein negativer befindet.

Es sey also der Coefficient f positiv, so daß man

$$4D^3 - 2^3.4^2B^2D^2 + 4^2.3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4 > 0$$

habe; so findet man, daß die übrigen Coefficienten ebenfalls positiv seyn werden, wenn zu gleicher Zeit

$$B < 0 \text{ und } B^2 - 4D > 0$$

ist, und daß hingegen einer von ihnen negativ werden muß, wenn

$$B > 0 \text{ oder } B^2 - 4D < 0$$

ist.

Es sind daher im ersten Falle alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell, und im zweyten insgesammt imaginär.

Man könnte auf ähnliche Art die Bedingungen finden, bey welchen die Wurzeln der Gleichungen des fünften Grades entweder insgesammt reell, oder zum Theil reell zum Theil imaginär sind; allein da die Gleichung der Differenzen eine Gleichung von $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ten Grade seyn würde, so wird die Rechnung sehr weitläuftig und verwickelt.

Vierte Anmerkung.

Ueber die Art, die imaginären Wurzeln der Gleichungen zu finden.

13.

Wir haben in der zweyten Anmerkung gesehen, daß jedes Paar zusammen gehörige imaginäre Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ eine reelle negative Wurzel $-4\beta^2$ in der Gleichung der Differenzen hervorbringt. Sucht man also die reellen negativen Wurzeln dieser Gleichung, so findet man jedesmal die Werthe von $-4\beta^2$, und vermittelst des daraus leicht zu erhaltenden Werthes von β bekommt man ferner, nach den Vorschriften der 17ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung, α. Auf diese Art erhält man also Ausdrücke für jede imaginäre Wurzel, deren Erfindung öfters und insbesondere in der Integral-Rechnung nothwendig ist. Hier will ich eine Anmerkung hinzufügen, welche diese Methode noch in ein helleres Licht setzen, und zu gleicher Zeit alle Zweifel zerstreuen wird, die man etwa wegen ihrer Genauigkeit und Allgemeinheit haben könnte.

14.

Wenn die reellen Theile α, γ, ꝛc. der imaginären Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, ꝛc. sowohl unter einander als auch von den reellen Wurzeln a, b, c, ꝛc. unterschieden sind, so erhellet aus der Tabelle der vorhergehenden Anmerkung, daß die Gleichung der Differenzen keine andere reelle negative Wurzeln haben kann, als $-4\beta^2$, $-4\delta^2$, ꝛc., so daß die Anzahl dieser Wurzeln mit der Anzahl der Paare der imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung übereinkömmt.

Allein ereignet es sich, daß sich unter den Größen α, γ, ꝛc. solche befinden, die entweder unter einander oder den Größen a, b, c, ꝛc. gleich sind; so hat die Gleichung der Differenzen nothwendiger Weise mehr negative Wurzeln, als die gegebene Paare von imaginären.

Denn es sey $a = \alpha$, so werden die beyden imaginären Wurzeln $(\alpha - a + \beta\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2$, beyde $-\beta^2$, und also reelle und negative Größen, so daß, wenn die gegebene Gleichung bloß die beyden imaginären Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ enthält, die Gleichung der Differenzen, wenn $\alpha = a$ ist, außer der reellen negativen Wurzel $-4\beta^2$ auch noch diese beyden gleichen Wurzeln $-\beta^2$, $-\beta^2$ in sich schließt.

Hat also die Gleichung der Differenzen drey reelle negative Wurzeln, davon zwey einander gleich sind, so hat die gegebene Gleichung entweder drey Paare oder ein Paar imaginäre Wurzeln.

Enthält die gegebene Gleichung vier imaginäre Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha - \beta\sqrt{-1}$$
$$\gamma + \delta\sqrt{-1}, \quad \gamma - \delta\sqrt{-1}$$

so bekommt deswegen die Gleichung der Differenzen die beyden reellen negativen Wurzeln $-4\beta^2$, $-4\delta^2$. Ist ferner $\alpha = a$, so hat sie auch noch diese beyde, $-\beta^2$, $-\beta^2$; ist $\gamma = b$, so hat sie noch $-\delta^2$, $-\delta^2$; und ist endlich $\alpha = \gamma$, so gehen die vier imaginären Wurzeln

$$(\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - \gamma - (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$$

in

$$-(\beta - \delta)^2, \; -(\beta - \delta)^2, \; -(\beta + \delta)^2, \; -(\beta + \delta)^2$$

über, das heißt, sie werden reell und negativ und zu zwey genommen einander gleich.

15.

Hieraus läßt sich leicht folgendes schließen.

1) Wenn alle reelle negative Wurzeln der Gleichung der Differenzen unter einander ungleich sind, so hat die gegebene Gleichung nothwendiger Weise so viel Paar imaginäre Wurzeln, als jene Wurzeln hat.

Nennt man in diesem Falle irgend eine dieser Wurzeln $-w$, so hat man sogleich $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$, und bringt man diesen Werth in die beyden Gleichungen (H) der 17ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung, so ist man im Stande α zu entwickeln, und also durch jede negative Wurzel $-w$ zwey imaginäre Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ zu finden.

2) Wenn

2) Wenn sich unter den reellen negativen Wurzeln der Gleichung der Differenzen einander gleiche befinden, so giebt jede von den ungleichen Wurzeln, wenn dergleichen da sind, ein Paar imaginäre Wurzeln, wie vorhin; allein jedes Paar gleicher Wurzeln kann auch entweder zwey Paare imaginäre Wurzeln geben oder keins. Folglich geben zwey gleiche Wurzeln entweder vier imaginäre Wurzeln oder gar keine, drey gleiche, entweder sechs imaginäre Wurzeln oder zwey, vier gleiche, entweder acht imaginäre Wurzeln oder vier, u. s. f.

16.

Nun seyen z. B. $-w$, $-w$ zwey gleiche negative Wurzeln der Gleichung der Differenzen. Man setze $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$ wie oben, substituire diesen Werth von β in den Gleichungen (H) der angeführten Nr., und suche den gemeinschaftlichen Divisor derselben, indem man die Division bloß bis zu einem Reste fortsetzt, wo α nur in der zweyten Dimension vorkommt, weil β nur einen doppelten Werth hat.

Setzt man diesen Rest $= 0$, so bekommt man zur Bestimmung von α eine Gleichung des zweyten Grades, die also entweder zwey reelle oder zwey imaginäre Wurzeln hat. Im ersten Falle nenne man ihre Wurzeln α' und α'', so sind die vier imaginären Wurzeln

$$\alpha' + \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha' - \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha'' + \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha'' - \beta\sqrt{-1}$$

Im andern Falle sind die Werthe von α wider die Voraussetzung negativ, und dies ist ein Kennzeichen, daß die beyden gleichen Wurzeln $-w$, $-w$ keine imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung geben.

17.

Wenn die Gleichung der Differenzen drey gleiche negative Wurzeln $- w$, $- w$, $- w$ hätte, so müßte man, wenn man $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$ setzte, die bekannte Division bloß bis zu einem Reste fortsetzen, worin α in der dritten Dimension enthalten wäre. Setzte man darauf diesen Rest $= 0$, so hätte man eine Gleichung des dritten Grades für α, woraus man entweder drey reelle, oder einen reellen und zwey imaginäre Werthe finden würde. Im ersten Falle hätte man sechs imaginäre Wurzeln, im andern aber nur zwey; denn die imaginären Werthe von α dürfen nicht gebraucht werden, weil sie sich nicht mit der Annahme vertragen. Auf ähnliche Art verhält es sich ferner.

§. 2.

Ueber die Methode, sich den Wurzeln der Gleichungen in Zahlen zu nähern.

18.

Wir haben in der 3ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung gesehen, wie man die Wurzeln der numerischen Gleichungen in continuirliche Brüche verwandeln kann, und wie vorzüglich diese Reductionen vor allen andern sind. Jetzt will ich noch einige Anmerkungen mittheilen, wodurch diese Theorie alle mögliche Allgemeinheit und Einfachheit bekommen wird.

Erste Anmerkung.

Ueber die periodischen continuirlichen Brüche.

19.

Wir haben schon unter der 18. Nr. der vorhergehenden Abhandlung bemerkt, daß der continuirliche Bruch, wodurch

die

die Wurzel einer Gleichung ausgedruckt wird, endlich seyn muß, wenn diese Wurzel eine commensurable Zahl ist, und man also dieselbe genau angeben kann; allein es giebt noch einen andern Fall, wo man nicht weniger den Werth der Wurzeln genau haben kann, ob gleich der continuirliche Bruch, wodurch er ausgedruckt wird, ohne Ende fortläuft. Dies findet statt, wenn der continuirliche Bruch ein periodischer Bruch ist, das heißt, wenn bey ihm dieselben Nenner in eben der Ordnung ohne Ende wiederkehren. Hätte man z. B. den Bruch

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \text{ꝛc.}}}}}$$

so ist klar, daß wenn man den Werth dieses Bruchs x nennt,

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}}$$

seyn wird. Es fließt aber hieraus die Gleichung

$$qx^2 - pqx - p = 0$$

woraus sich x bestimmen läßt. Eben so würde es sich verhalten, wenn die Menge der wiederkehrenden Glieder größer wäre, man bekommt allemal zur Bestimmuug von x eine Gleichung des zweyten Grades Es kann sich aber auch ereignen, daß der continuirliche Bruch in seinen ersten Gliedern irregulär fortgehet, und nur erst nach einer bestimmten Menge derselben periodisch wird. In diesem Falle kann man den Werth des Bruchs auf eben die Art finden, und er wird allemal von einer Gleichung des zweyten Grades abhangen. Es sey z. B. der Bruch folgender

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}}}}$$

Setzt man den ganzen Bruch $= x$, und den periodischen Theil desselben, oder

$$r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}}$$

$= y$, so hat man

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}$$

woraus

$$y = \frac{x - p}{1 - q(x - p)}$$

fließt. Nun hat man auch

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y}}$$

und dieses giebt

$$sy^2 - rsy - r = 0$$

oder, wenn man für y seinen durch x ausgedruckten Werth setzt,

$$s(x - p)^2 - rs(x - p)(1 - q(x - p)) -$$
$$r(1 - q(x - p)^2 = 0.$$

Wenn

Wenn man diese Gleichung entwickelt und nach x ordnet, so hat man eine Gleichung vom zweyten Grade.

20.

Man sieht aus dem, was so eben gesagt worden ist, daß der gedachte Fall allemal statt finden muß, wenn unter den Gleichungen (a), (b), (c), (d), ꝛc. der 18ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung zwey Gleichungen vorkommen, welche dieselben Wurzeln haben. Denn ist z. B. die Wurzel der Gleichung (c) nemlich z dieselbe als die Wurzel x der Gleichung (a) so hat man

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}}.$$

Wenn daher in einem continuirlichen Bruche gewisse Zahlen in eben der Ordnung wiederkehren, so kann man sich auf die Art davon überzeugen, ob der continuirliche Bruch ein periodischer sey oder nicht, daß man untersucht, ob die Wurzeln der beyden Gleichungen, welche in ganzen Zahlen einander gleich sind, solches auch durchaus sind, d. h ob die beyden Gleichungen eine Wurzel gemein haben. Dies erkennt man leicht, wenn man den größten gemeinschaftlichen Divisor derselben sucht, weil derselbe alle gemeinschaftliche Wurzeln enthalten muß, wenn es dergleichen giebt; und da wir gesehen haben, daß jeder periodische Bruch eine Gleichung vom zweyten Grade giebt, so folgt, daß der größte gemeinschaftliche Divisor, davon hier die Rede ist, nothwendiger Weise zum zweyten Grade gehören wird.

21.

Vorausgesetzt also, daß man schon wisse, daß es unter den Gleichungen (a), (b), (c), (d), ꝛc. zwey gebe, die eine

Wurzel

Wurzel gemein haben, so ist man auch versichert, daß der gesuchte continuirliche Bruch ein periodischer Bruch seyn muß, so daß man also denselben durch bloße Wiederholung der wiederkehrenden Glieder so weit fortsetzen kann als man will. Allein nun wollen wir auch untersuchen, wie man die Reihe der convergirenden Brüche, deren Nr. 23. der vorhergehenden Abhandlung gedacht worden ist, fortsetzen kann, ohne einen nach den andern besonders zu berechnen.

22.

Zu diesem Ende wollen wir annehmen, daß man allgemein habe

$$x = \lambda' + \frac{1}{x'},\ x' = \lambda'' + \frac{1}{x''},\ x'' = \lambda''' + \frac{1}{x'''} \text{ ꝛc.}$$

so daß x die gesuchte Wurzel, x', x'', x''', ꝛc. aber die Wurzeln der Gleichungen (b), (c), (d), ꝛc. sind, welche wir oben durch y, z, u, ꝛc. bezeichnet haben. Alsdann hat man

$$x = \lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \cfrac{1}{\lambda''' \text{ ꝛc.}}}$$

Setzt man also, wie oben

$$\left.\begin{array}{ll}
l = 1 & L = 0 \\
l' = \lambda' & L' = 1 \\
l'' = \lambda''l' + 1 & L'' = \lambda''L' \\
l''' = \lambda'''l'' + l' & L''' = \lambda'''L'' + L' \\
l^{\text{iv}} = \lambda^{\text{iv}}l''' + l'' & L^{\text{iv}} = \lambda^{\text{iv}}L''' + L'' \\
\text{ꝛc.} & \text{ꝛc.}
\end{array}\right\} \ldots (A)$$

so hat man folgende Brüche, die sich x nähern

$$\frac{l}{L'},\ \frac{l'}{L'},\ \frac{l''}{L''},\ \frac{l'''}{L'''},\ \frac{l^{\text{iv}}}{L^{\text{iv}}} \text{ ꝛc.}$$

23. Nun

23.

Nun giebt die Gleichung $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$

$$xx' = x'\lambda' + 1 = x'l' + 1.$$

Setzt man daher für x' in dem zweyten Gliede dieser Gleichung seinen Werth $\lambda'' + \frac{1}{x''}$ und multiplicirt darauf mit x'', so bekommt man

$$xx'x'' = (\lambda''l' + 1)x'' + l' = l''x'' + l'$$

und eben so findet man, wenn man für x'' in dem zweyten Gliede dieser Gleichung $\lambda''' + \frac{1}{x'''}$ setzt,

$$xx'x''x''' = l'''x''' + l''$$

und so ferner.

Auf ähnliche Art giebt die Gleichung $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$

$$x'x'' = \lambda''x'' + 1 = L''x'' + L'$$

und substituirt man in dem zweyten Gliede $\lambda''' + \frac{1}{x'''}$ für x'' und multiplicirt darauf durch x''', so bekommt man

$$x'x''x''' = (\lambda''L'' + L')x''' + L'' = L''x''' + L''$$

und so ferner.

Hieraus folgt, daß man allgemein haben wird, der continuirliche Bruch mag periodisch seyn oder nicht,

$$\left.\begin{array}{l} xx'x''x''' \ldots x^\rho = l^\rho x^\rho + l^{\rho-1} \\ x'x''x''' \ldots x^\rho = L^\rho x^\rho + L^{\rho-1} \end{array}\right\} \ldots (B)$$

24.

Dieses vorausgesetzt wollen wir annehmen, daß man z. B. $x^{\mu+\nu} = x^\mu$ gefunden habe, d. h., daß die Wurzel der $(\mu+\nu)$ten Gleichung aus der Reihe (b), (c), 2c. der Wurzel der μten Gleichung eben dieser Reihe gleich sey; so hat man auch

$$x^{\mu+\nu+1} = x^{\mu+1}$$

$$x^{\mu+\nu+2} = x^{\mu+2}$$

2c.

$$x^{\mu+2\nu} = x^{\mu}$$

2c.

und überhaupt

$$x^{\mu+\nu n+\pi} = x^{\mu+\pi}$$

also auch

$$\lambda^{\mu+\nu+1} = \lambda^{\mu+1}$$

$$\lambda^{\mu+\nu+2} = \lambda^{\mu+2}$$

und überhaupt

$$\lambda^{\mu+n\nu+\pi} = \lambda^{\mu+\pi}$$

so daß daher seyn wird

$$x = \lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \text{2c.} + \cfrac{1}{\lambda^{\mu+1} + \cfrac{1}{\lambda^{\mu+2} + \text{2c.} + \cfrac{1}{\lambda^{\mu+\nu} + \cfrac{1}{\lambda^{\mu+1} + \text{2c.}}}}}}$$

25.

Setzt man nun überhaupt $\varrho = \mu + n\nu + \pi$, so ist leicht einzusehen, daß dadurch die beyden Gleichungen (B) der vorhergehenden Nummer in folgende verwandelt werden

xx'x''

$$xx'x'' \ldots x^{\mu} . x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\pi} . (x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\nu})^{n}$$
$$= l^{\rho} x^{\mu+\pi} + l^{\rho-1}$$

und

$$x'x'' \ldots x^{\mu} . x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\pi} . (x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\nu})^{n}$$
$$= L^{\rho} x^{\mu+\pi} + L^{\rho-1}.$$

Nun hat man, wenn man in den Formeln (B) der vorhergehenden Nr. $\varrho = \mu$ annimmt,

$$x x'x'' \ldots x^{\mu} = l^{\mu} x^{\mu} + l^{\mu-1}$$
$$x'x'' \ldots x^{\mu} = L^{\mu} x^{\mu} + L^{\mu-1}.$$

Da ferner $x^{\mu} = \lambda^{\mu+1} + \frac{1}{x^{\mu+1}}$, $x^{\mu+1} = \lambda^{\mu+2} + \frac{1}{x^{\mu+2}}$

rc. ist, so hat man, wenn man

$$\left.\begin{array}{ll} h = 1 & H = 0 \\ h' = \lambda^{\mu+1} & H' = 1 \\ h'' = \lambda^{\mu+2} h' + h & H'' = \lambda^{\mu+2} H' \\ h''' = \lambda^{\mu+3} h'' + h' & H''' = \lambda^{\mu+3} H'' + H \\ h^{\text{IV}} = \lambda^{\mu+4} h''' + h'' & H^{\text{V}} = \lambda^{\mu+4} H''' + H'' \\ \text{rc.} & \text{rc.} \end{array}\right\} \ldots (C)$$

setzt, allgemein

$$(D) \ldots \begin{cases} x^{\mu} x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\sigma} = h^{\sigma} x^{\mu+\sigma} + h^{\sigma-1} \\ x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\sigma} = H^{\sigma} x^{\mu+\sigma} + H^{\sigma-1} \end{cases}$$

Folglich ist

$$x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\pi} = H^{\pi} x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1}$$

und weil $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ seyn soll

$$x^{\mu+1} x^{\mu+2} \ldots x^{\mu+\nu} = H^{\nu} x^{\mu} + H^{\nu-1}$$

26.

Bringt man demnach diese Werthe in die beyden obigen Gleichungen, so erhält man

$$(l^\mu x^\mu + l^{\mu-1})(H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1})(H^\nu x^\mu + H^{\nu-1})^n$$
$$= l^\rho x^{\mu+\pi} + l^{\rho-1}$$

und

$$(L^\mu x^\mu + L^{\mu-1})(H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1})(H^\nu x^\mu + H^{\nu-1})^n$$
$$= L^\rho x^{\mu+\pi} + L^{\rho-1}$$

27.

Nun geben die Gleichungen (D), durch einander dividirt,

$$x^\mu = \frac{h^\sigma x^{\mu+\sigma} + h^{\sigma-1}}{H^\sigma x^{\mu+\sigma} + H^{\sigma-1}} \ldots (E)$$

und hieraus fließt

$$x^{\mu+\sigma} = \frac{H^{\sigma-1} x^\mu - h^{\sigma-1}}{h^\sigma - H^\sigma x^\mu}$$

Setzt man daher $\sigma = \pi$, so bekommt man

$$x^{\mu+\pi} = \frac{H^{\pi-1} x^\mu - h^{\pi-1}}{h^\pi - H^\pi x^\mu}$$

und hieraus

$$H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1} = \frac{h^\pi H^{\pi-1} - H^\pi h^{\pi-1}}{h^\pi - H^\pi x^\mu}$$

Da also aus der Natur der Größen h, h', h'', ꝛc. H, H', H'' ꝛc. erhellet, daß

$$H'h - h'H = 1,\ H''h' - h''H' = -1,\ H'''h'' - h'''H'' = 1 \text{ ꝛc.}$$

ist, so hat man allgemein

$$h^\pi H^{\pi-1} - H^\pi h^{\pi-1} = \pm 1$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn π eine gerade, und das untere, wenn π eine ungerade Zahl ist.

Braucht man also diese Substitutionen in den beyden Gleichungen der 26sten Nummer, so wird

$$\pm (l^{\mu} x^{\mu} + l^{\mu-1})(H^{\nu} x^{\mu} + H^{\nu-1})^{n}$$
$$=$$
$$(l^{\rho} H^{\pi-1} - l^{\rho-1} H^{\pi}) x^{\mu} + l^{\rho-1} h^{\pi} - l^{\rho} h^{\pi-1}.$$

$$\pm (L^{\mu} x^{\mu} + L^{\mu-1})(H^{\nu} x^{\mu} + H^{\nu-1})^{n}$$
$$=$$
$$(L^{\rho} H^{\pi-1} - L^{\rho-1} H^{\pi}) x^{\mu} + L^{\rho-1} h^{\pi} - L^{\rho} h^{\pi-1}$$

und die Zeichen $+$ und $-$ gelten eben so wie vorhin.

28.

Setzt man nun in der Gleichung (E) der vorhergehenden Nummer $\sigma = \nu$, so bekommt man, da $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ ist,

$$x^{\mu} = \frac{h^{\nu} x^{\mu} + h^{\nu-1}}{H^{\nu} x^{\mu} + H^{\nu-1}}$$

Dieses giebt folgende Gleichung für x^{μ}

$$H^{\nu}(x^{\mu})^2 - (h^{\nu} - H^{\nu-1}) x^{\mu} - h^{\nu-1} = 0 \ldots (F)$$

woraus

$$x^{\mu} = \frac{h^{\nu} - H^{\nu-1} + \sqrt{((h^{\nu} - H^{\nu-1})^2 + 4H^{\nu} h^{\nu-1})}}{2H^{\nu}}$$

fließt. Es sey der Kürze wegen

$$P = \frac{h^{\nu} - H^{\nu-1}}{2H^{\nu}},\ Q = P^2 + \frac{h^{\nu-1}}{H^{\nu}}$$

und also

$$x^{\mu} = P + \sqrt{Q},$$

so bekommt man, wenn man diesen Werth in die beyden letzten Gleichungen der 27sten Nummer bringt,

$$\pm (l^{\mu} P + l^{\mu-1} + l^{\mu} \sqrt{Q})(H^{\nu} P + H^{\nu-1} + H^{\nu} \sqrt{Q})^{n}$$
$$=$$
$$l^{\rho} H^{\pi-1} - l^{\rho-1} H^{\pi})(P + \sqrt{Q}) + l^{\rho-1} h^{\pi} - l^{\rho} h^{\pi-1};$$

$$\pm (L^{\mu} P + L^{\mu-1} + L^{\mu} \sqrt{Q})(H^{\nu} P + H^{\nu-1} + H^{\nu} \sqrt{Q})^{n}$$
$$=$$
$$(L^{\rho} H^{\pi-1} - L^{\rho-1} H^{\pi})(P + \sqrt{Q}) + L^{\rho-1} h^{\pi} - L^{\rho} h^{\pi-1}.$$

Da die Wurzelgröße $\sqrt{Q}$ einen zwiefachen Werth hat, so hat man hierin vier Gleichungen, um die Werthe von l^{ρ}, $l^{\rho-1}$, L^{ρ}, $L^{\rho-1}$ zu finden.

29.

Denn setzt man der Kürze wegen

$$l^{\mu} P + l^{\mu-1} = f^{\mu}$$
$$L^{\mu} P + L^{\mu-1} = F^{\mu}$$

und

$$H^{\nu} P + H^{\nu-1} = K^{\nu}$$

so bekommt man folgende vier Gleichungen

$$l^{\rho} H^{\pi-1} - l^{\rho-1} H^{\pi} =$$
$$\pm \left\{ \begin{matrix} (f^{\mu} + l^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \\ -(f^{\mu} - l^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} - H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \end{matrix} \right\} : 2\sqrt{Q}$$

$$l^{\rho-1} h^{\pi} - l^{\rho} h^{\pi-1} =$$
$$\pm \left\{ \begin{matrix} (P + \sqrt{Q})(f^{\mu} - l^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} - H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \\ -(P - \sqrt{Q})(f^{\mu} + l^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \end{matrix} \right\} : 2\sqrt{Q}$$

$$L^{\rho}H^{\pi-1} - L^{\rho-1}H^{\pi} =$$

$$\pm\left\{\begin{matrix}(F^{\mu} + L^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \\ -(F^{\mu} - L^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} - H^{\nu}\sqrt{Q})^{n}\end{matrix}\right\} : 2\sqrt{Q}$$

$$L^{\rho-1}h^{\pi} - L^{\rho}h^{\pi-1} =$$

$$\pm\left\{\begin{matrix}(P+\sqrt{Q})(F^{\mu}-L^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu}-H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \\ -(P-\sqrt{Q})(F^{\mu}-L^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu}-H^{\nu}\sqrt{Q})^{n}\end{matrix}\right\} : 2\sqrt{Q}$$

Addirt man demnach die erste Gleichung, durch h^{π} multiplicirt, zur zweyten, durch H^{π} multiplicirt, desgleichen das Produkt aus der dritten in h^{π} zur vierten in H^{π}, und setzt man dabey der Kürze wegen

$$-H^{\pi}P + h^{\pi} = G^{\pi}$$

so ist, weil $h^{\pi}H^{\pi-1} - H^{\pi}h^{\pi-1} = \pm 1$ (Nr. 27.)

$$l^{\rho} =$$

$$\left.\begin{matrix}(f^{\mu} + l^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \\ -(f^{\mu} - l^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi} - H^{\pi}\sqrt{Q})(K^{\pi} - H^{\pi}\sqrt{Q})^{n}\end{matrix}\right\} : 2\sqrt{Q}$$

$$L^{\rho} =$$

$$\left.\begin{matrix}(F^{\mu} + L^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \\ -(F^{\mu} - L^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi} - H^{\pi}\sqrt{Q})(K^{\pi} - H^{\pi}\sqrt{Q})^{n}\end{matrix}\right\} : 2\sqrt{Q}$$

wo $\rho = \mu + n\nu + \pi$ ist.

30.

Hat man also vermittelst der Größen λ', λ'', λ''', ꝛc. $\lambda^{\mu+1}$ nach den Formeln (A), (C) die Größen l, l', l'', ꝛc. L, L', L'', ꝛc. bis zu l^{μ} und L^{μ}, und h, h', h'', ꝛc. H, H', H'', ꝛc. bis zu h^{ν}, H^{ν} berechnet, so kann man nach den vor-

 herge-

hergehenden Formeln die Werthe von l^ρ und L^ρ, d. h. der Glieder des Bruchs $\frac{l^\rho}{L^\rho}$ finden, ρ mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will. Man darf nemlich nur μ von ρ abziehen und die Differenz durch ν dividiren, weil man auf diese Art in dem Quotienten die Zahl n, und in dem Reste die Zahl π erhält, welche daher allemal kleiner ist als ν.

31.

Um übrigens allgemein die Gleichung des zweyten Grades zu finden, wodurch die Wurzel x der gegebenen Gleichung bestimmt werden kann, wenn $x^{\mu+\nu} = x^\mu$, wie Nr. 24; darf man nur bemerken, daß die Gleichungen (B) Nr. 23, durch einander dividirt, allgemein geben

$$x = \frac{l^\rho x^\rho + l^{\rho-1}}{L^\rho x^\rho + L^{\rho-1}} \ldots (G)$$

Nimmt man $\rho = \mu$, so fließt hieraus

$$x^\mu = \frac{L^{\mu-1} x - l^{\mu-1}}{l^\mu - L^\mu x}$$

und bringt man diesen Werth von x^μ in die Gleichung (E) der 27sten Nummer, so bekommt man

$$H^\nu (L^{\mu-1} x - l^{\mu-1})^2 - (h^\nu - H^{\nu-1})(L^{\mu-1} x - l^{\mu-1})$$
$$(l^\mu - L^\mu x) - h^{\nu-1}(l^\mu - L^\mu x)^2 = 0$$

oder

$$(H^\nu (L^{\mu-1})^2 + (h^\nu - H^{\nu-1}) L^{\mu-1} L^\mu - h^{\nu-1}(L^\mu)^2) x^2$$
$$-(2H^\nu L^{\mu-1} l^{\mu-1} + (h^\nu + H^{\nu-1})(L^{\mu-1} l^\mu + l^{\mu-1} L^\mu)$$
$$-(2h^{\nu-1} L^\mu l^\mu) x + H^\nu (l^{\mu-1})^2 + (h^\nu - H^{\nu-1}) l^{\mu-1} l^\mu$$
$$- h^{\nu-1}(l^\mu)^2 = 0$$

und

und diese Gleichung ist nothwendiger Weise ein Divisor der gegebenen Gleichung.

Zweyte Anmerkung.

Eine sehr einfache Methode, die Wurzeln der Gleichungen des zweyten Grades in continuirliche Brüche zu verwandeln.

32.

Es sey die allgemeine Gleichung des zweyten Grades

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

gegeben, wo E', ε, und E, damit die Wurzeln reell seyn mögen, solche ganze Zahlen bedeuten sollen, daß $\varepsilon^2 + EE' > 0$ ist. Diese Gleichung giebt

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 + EE')}}{E'}$$

und in diesem Ausdrucke kann die Wurzelgröße entweder positiv oder negativ seyn. Es sey die gesuchte Wurzel positiv, und λ' die ganze Zahl, die zunächst kleiner ist als der Werth von x. Setzt man bey diesen Umständen $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$, und bringt diesen Werth in die gegebene Gleichung, so bekommt man eine neue Gleichung, worin die unbekannte Größe x' ist. Multiplicirt man aber diese neue Gleichung durch x'^2, verändert darauf die Zeichen, und läßt der Kürze wegen

$$\varepsilon' = \lambda'E' - \varepsilon$$
$$E'' = E + 2\varepsilon\lambda' - E'\lambda'^2$$

seyn: so bekommt man die Gleichung

$$E''x'^2 - 2\varepsilon'x' - E' = 0$$

und diese giebt

$$x' = \frac{\varepsilon' + \sqrt{(\varepsilon'^2 + E'E'')}}{E''}.$$

Man kann also auch hier wieder die ganze Zahl λ'' suchen, die zunächst kleiner ist als der Werth von x', dann $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$ setzen, und auf ähnliche Art weiter handeln.

Substituirt man nun in dem Ausdrucke $\varepsilon'^2 + E'E''$ die Werthe von ε' und E'' und läßt die Größen weg, die sich aufheben, so bekommt man $\varepsilon^2 + EE'$, und also denselben Ausdruck welchen man in der Bestimmung von x hatte. Hieraus ist leicht abzunehmen, daß die Wurzelgröße in den Werthen von x, x', x'', ꝛc. allenthalben dieselbe seyn wird.

33.

Setzt man daher der Kürze wegen

$$B = \varepsilon^2 + EE'$$

und außerdem, wenn das Zeichen $<$ die Bedeutung hat, daß man die zunächst kleinere ganze Zahl nehmen solle,

$$\lambda' < \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'},\quad \varepsilon' = \lambda'E' - \varepsilon$$

$$E'' = E + 2\varepsilon\lambda' - E'\lambda'^2,\quad \lambda'' < \frac{\varepsilon' + \sqrt{B}}{E''},\quad \varepsilon'' = \lambda''E'' - \varepsilon'$$

$$E''' = E' - 2\varepsilon'\lambda'' - E''\lambda''^2,\quad \lambda''' < \frac{\varepsilon'' + \sqrt{B}}{E'''},\quad \varepsilon''' = \lambda'''E''' - \varepsilon''$$

$$E^{IV} = E'' - 2\varepsilon''\lambda''' - E'''\lambda'''^2,\quad \lambda^{IV} < \frac{\varepsilon''' + \sqrt{B}}{E^{IV}},\quad \varepsilon^{IV} = \lambda^{IV}E^{IV} - \varepsilon'''$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

so bekommt man

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'} = \lambda' + \frac{1}{x'}$$

$$x' = \frac{\varepsilon' + \sqrt{B}}{E''} = \lambda'' + \frac{1}{x''}$$

$x'' =$

$$x'' = \frac{\varepsilon'' + \sqrt{B}}{E'''} = \lambda''' + \frac{1}{x'''}$$

rc.

folglich

$$x = \lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \cfrac{1}{\lambda''' + \text{rc.}}}$$

Was die Wurzelgröße $\sqrt{B}$ betrift, so muß man ihr jedesmal das Zeichen geben, welches man bey derselben in dem Werthe der gesuchten Wurzel x angenommen hatte.

Da man $\varepsilon'^2 + E'E'' = \varepsilon^2 + EE' = B$ gefunden hat, so ist $E'' = \frac{B - \varepsilon'^2}{E'}$, und auf ähnliche Art auch

$$E''' = \frac{B - \varepsilon''^2}{E''},\ E^{\prime v} = \frac{B - \varepsilon'''^2}{E'''}$$

rc.

Findet man es daher bequemer, so kann man auch diese Formeln statt der oben gegebenen gebrauchen, um die Werthe von E', E'', rc. zu bekommen.

34.

Nun behaupte ich, daß der continuirliche Bruch, welcher den Werth von x ausdruckt, allemal und nothwendiger Weise ein periodischer Bruch seyn wird.

Um diesen Lehrsatz zu beweisen, wollen wir zuvörderst allgemein darthun, daß man bey einer jeden Gleichung, wenn man sie auf die §. 3. der vorhergehenden Abhandlung Nr. 18 beschriebene Art verändert, unter den veränderten Gleichungen solche antreffen wird, deren erstes und letztes Glied entgegengesetzte Zeichen haben. Wir haben nemlich in der gedachten

dachten Abhandlung Nr. 19. gesehen, daß man allemal auf eine veränderte Gleichung kommt, die nicht mehr als eine Wurzel hat, welche größer ist als die Einheit, und daß nach ihr allen übrigen veränderten Gleichungen ebenfalls nicht mehr als eine Wurzel zukommt, die größer als die Einheit ist. Es sey also

$$au^m + bu^{m-1} + cu^{m-2} + \text{ꝛc.} + k = 0$$

eine von diesen veränderten Gleichungen, die nicht mehr als eine Wurzel haben, welche größer ist als die Einheit, und dabey sey s der Werth von u in ganzen Zahlen. Setzt man, um die folgende veränderte Gleichung zu finden, $u = s + \frac{1}{w}$ und bringt diesen Werth in die angeführte Gleichung, so ist das erste Glied der dadurch erhaltenen Gleichung

$$(as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \text{ꝛc.} + k)w^m$$

und das letzte a. Da nun der wahre Werth von u in der Gleichung

$$au^m + bu^{m-1} + cu^{m-2} + \text{ꝛc.} + k = 0$$

zwischen $u = s$ und $u = \infty$ fällt, und zwischen diesen beyden Werthen kein anderer Werth von u statt findet: so muß man, wenn man dieselben in die Gleichung für u bringt, nothwendiger Weise Resultate mit entgegengesetzten Zeichen bekommen. Denn es ist leicht einzusehen, daß in diesem Falle nur einer von den Faktoren dieser Gleichung bey dem Uebergange von dem einen Werthe von u zu dem andern das Zeichen verändern kann (Nr. 5. der vorhergehenden Abhandlung). Nun giebt die Substitution $u = \infty$ das Resultat au^m (denn alle übrige Glieder verschwinden gegen dieses) und dieses Resultat hat dasselbe Zeichen welches a hat; folglich muß $u = s$ ein Resultat geben, dessen Zeichen dem Zeichen von a entgegensteht. Da also dieses Resultat $as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \text{ꝛc.} + k$ gleich, und diese Größe auch der

Coeffi-

Coefficient des ersten Gliedes der veränderten Gleichung für w ist, welche a zum letzten Gliede hat: so folgt, daß diese veränderte Gleichung in ihren beyden äußersten Gliedern nothwendiger Weise entgegengesetzte Zeichen haben muß.

Auf eben die Art aber läßt sich beweisen, daß dieser Umstand noch vielmehr bey den folgenden veränderten Gleichungen statt finden muß.

35.

Dieses vorausgesetzt, so giebt die Gleichung

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

folgende veränderte Gleichungen (Nr. 32.)

$$E''x'^2 - 2\varepsilon'x' - E' = 0$$
$$E'''x''^2 + 2\varepsilon''x'' - E'' = 0$$
$$\text{rc.}$$

und nach dem, was so eben (Nr. 34.) gesagt worden ist, muß man nothwendiger Weise zu Gleichungen gelangen, wie

$$E^{\gamma+1}(x^{\gamma})^2 - 2\varepsilon^{\gamma}x^{\gamma} - E^{\gamma} = 0$$
$$E^{\gamma+2}(x^{\gamma+1})^2 - 2\varepsilon^{\gamma+1}x^{\gamma+1} - E^{\gamma+1} = 0$$
$$\text{rc.}$$

wo das erste und letzte Glied dieselben Zeichen haben, so daß daher die Größen E^{γ}, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$, rc. insgesammt von einerley Art sind. Nun ist (Nr. 33.)

$$B = (\varepsilon^{\gamma})^2 + E^{\gamma}E^{\gamma+1} = (\varepsilon^{\gamma+1})^2 + E^{\gamma+1}E^{\gamma+2} = \text{rc.}$$

und folglich, da E^{γ}, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$, rc. von einerley Art sind, die Produkte $E^{\gamma}E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+1}E^{\gamma+2}$, rc. nothwendiger Weise positiv. Hieraus folgt

1) daß $(\varepsilon^{\gamma})^2 < B$, $(\varepsilon^{\gamma+1})^2 < B$, rc., d. h. wenn man von dem Zeichen abstrahirt, $\varepsilon^{\gamma} < \sqrt{B}$, $\varepsilon^{\gamma+1} < \sqrt{B}$ u. s. w. ohne Ende ist.

2) daß auch, da E, E', E'', ꝛc. ganze Zahlen sind, $E^{\gamma} < B$, $E^{\gamma+1} < B$, $E^{\gamma+2} < B$ ꝛc. seyn wird. Da also B gegeben ist, so ist die Menge der ganzen Zahlen, die kleiner als B und $\sqrt{B}$ sind, begrenzt, und es können daher die Zahlen E^{γ}, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$, ꝛc. ε^{γ}, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$, ꝛc. nur eine bestimmte Menge verschiedener Werthe haben, so daß in der einen dieser Reihen sowohl als in der andern, wenn man sie ohne Ende fortsetzt, dieselben Glieder unzähligemal wiederkehren müssen. Aus eben dem Grunde muß auch dieselbe Combination der zugehörigen Glieder in beyden Reihen unzähligemal wiederkehren, und es wird also z. B. nothwendiger Weise

$$E^{\gamma+\delta+\nu} = E^{\gamma+\delta}, \text{ und } \varepsilon^{\gamma+\delta+\nu} = \varepsilon^{\gamma+\delta}$$

oder, wenn man $\gamma + \delta = \mu$ setzt,

$$E^{\mu+\nu} = E^{\mu} \text{ und } \varepsilon^{\mu+\nu} = \varepsilon^{\mu}.$$

Da also $B = (\varepsilon^{\mu})^2 + E^{\mu}E^{\mu+1} = (\varepsilon^{\mu+\nu})^2 + E^{\mu+\nu}E^{\mu+\nu+1}$ ist, so hat man auch $E^{\mu+\nu+1} = E^{\mu+1}$. Nun ist aber

$$x^{\mu} = \frac{\varepsilon^{\mu} + \sqrt{B}}{E^{\mu+1}} \text{ und } x^{\mu+\nu} = \frac{\varepsilon^{\mu+\nu} + \sqrt{B}}{E^{\mu+\nu+1}}$$

folglich ist auch $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ und also der continuirliche Bruch nothwendiger Weise periodisch.

36.

Man siehet aus den Formeln der 33sten Nummer, daß, wenn

$$E^{\mu+\nu} = E^{\mu} \text{ und } \varepsilon^{\mu+\nu} = \varepsilon^{\mu}$$

ist, auch

$$E^{\mu+\nu+1} = E^{\mu+1}, \; \gamma^{\mu+\nu+1} = \gamma^{\mu+1}, \; \varepsilon^{\mu+\nu+1} = \varepsilon^{\mu+1}$$

und

und so ferner ist, so daß überhaupt die Glieder dieser drey Reihen

$$E, E', E'', \text{ꝛc.} \quad \nu, \varepsilon', \varepsilon'', \text{ꝛc.} \quad \gamma', \gamma'', \text{ꝛc.}$$

welche zum Exponenten $\gamma + n\nu + \pi$ haben, dieselben sind, als die vorhergehenden, deren Exponenten $\mu + \pi$ sind, wenn n irgend eine ganze positive Zahl bedeutet.

Also wird eine jede dieser drey Reihen von E^{μ}, ε^{μ}, $\gamma^{\mu+1}$ an periodisch, und jede Periode enthält n Glieder, nach welcher dieselben Glieder ohne Ende in derselben Ordnung wiederkehren.

37.

Wir haben bewiesen, daß man bey der Fortsetzung der Reihe der Zahlen E, E', E'', ꝛc. nothwendiger Weise auf einander folgende Glieder mit einerley Zeichen bekommen muß, und daß darauf die Reihe allemal periodisch wird. Ist man nun in dieser Reihe zu zwey auf einander folgenden Gliedern E^{γ}, $E^{\gamma+1}$ mit einerley Zeichen gekommen, so behaupte ich, daß das eine von diesen beyden Gliedern schon eins von den periodischen Gliedern seyn und also in jeder Periode wieder erscheinen wird.

Da E^{γ} und $E^{\gamma+1}$ dasselbe Zeichen haben, so ist klar, daß die veränderte Gleichung

$$E^{\gamma+1}(x^{\gamma})^2 - 2\varepsilon^{\gamma}x^{\gamma} - E^{\gamma} = 0$$

nothwendiger Weise eine positive und negative Wurzel hat, und daß sie also nicht mehr als eine Wurzel haben kann, die größer als eins ist. Folglich haben die folgenden veränderten Gleichungen in ihren äußersten Gliedern nothwendiger Weise entgegengesetzte Zeichen (Nr. 34.) und also die Zahlen

len E^{ν}, $E^{\nu+1}$, $E^{\nu+2}$, ꝛc. dieselben Zeichen, so daß jede von ihnen kleiner als B, und jede von den Zahlen ε^{ν}, $\varepsilon^{\nu+1}$, $\varepsilon^{\nu+2}$, ꝛc. kleiner als $\sqrt{B}$ ist (Nr. 35.)

38.

Da nun $B = (\varepsilon^{\nu})^2 + E^{\nu}E^{\nu+1}$ ist, so sind die beyden Zahlen E^{ν} und $E^{\nu+1}$ entweder beyde kleiner als $\sqrt{B}$. oder wenn die eine von ihnen größer ist, so muß doch die andere kleiner seyn, und es ist daher zum wenigsten allemal eine von ihnen kleiner als $\sqrt{B}$.

Es sey $E^{\nu} < \sqrt{B}$, so läßt sich beweisen, daß die Zahlen E^{ν}, $E^{\nu+1}$, $E^{\nu+2}$, ꝛc. ε^{ν}, $\varepsilon^{\nu+1}$, $\varepsilon^{\nu+2}$, ꝛc. insgesammt eben dasselbe Zeichen haben müssen, welches die Wurzelgröße $\sqrt{B}$ hat. Denn da die Wurzeln der veränderten Gleichungen x', x'', x''', ꝛc. wegen der Natur des continuirlichen Bruchs insgesammt größer seyn müssen als die Einheit, so ist auch

$$x^{\nu} > 1,\ x^{\nu+1} > 1, \text{ ꝛc.}$$

folglich

$$\frac{\varepsilon^{\nu} + \sqrt{B}}{E^{\nu+1}} > 1,\ \frac{\varepsilon^{\nu+1} + \sqrt{B}}{E^{\nu+2}} > 1 \text{ ꝛc.}$$

und da

$$B = (\varepsilon^{\nu})^2 + E^{\nu}E^{\nu+1} = (\varepsilon^{\nu+1})^2 + E^{\nu+1}E^{\nu+2} = \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$\frac{\varepsilon^{\nu} + \sqrt{B}}{E^{\nu+1}} = \frac{E^{\nu}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu}},\ \frac{\varepsilon^{\nu+1} + \sqrt{B}}{E^{\nu+2}} = \frac{E^{\nu+1}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu+1}} \text{ ꝛc.}$$

also

also auch

$$\frac{E^{\nu}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu}} > 1, \quad \frac{E^{\nu+1}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu+1}} > 1 \text{ ꝛc.}$$

Da nun ε^{ν}, $\varepsilon^{\nu+1}$ ꝛc. kleiner sind als $\sqrt{B}$, so müssen, was auch ε^{ν}, $\varepsilon^{\nu+1}$ ꝛc. für ein Zeichen haben, die Nenner $\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu}$, $\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu+1}$ ꝛc. nothwendig eben das Zeichen haben als die $\sqrt{B}$, und eben dieses Zeichen muß also auch den Zählern E^{ν}, $E^{\nu+1}$ ꝛc. zukommen.

Der Kürze wegen wollen wir $\sqrt{B}$ positiv annehmen, so daß daher auch E^{ν}, $E^{\nu+1}$ ꝛc. insgesammt positiv seyn müssen; ich behaupte, daß ε^{ν}, $\varepsilon^{\nu+1}$, $\varepsilon^{\nu+2}$ ꝛc. es ebenfalls seyn werden. Denn wäre $\varepsilon^{\nu} = -\eta$ (wo η eine positive Zahl bedeutet) so müßte, da $E^{\nu} < \sqrt{B}$ ist, noch mehr $E^{\nu} < \sqrt{B} + \eta$, und also $\frac{E^{\nu}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu}} = \frac{E^{\nu}}{\sqrt{B} + \eta} < 1$ seyn, welches nicht statt finden kann, da diese Größe > 1 seyn muß. Es kann daher auch ε^{ν} nicht anders als positiv seyn. Ferner sey $\varepsilon^{\nu+1} = -\eta'$. Da nach Nr. 33. $\varepsilon^{\nu+1} = \lambda^{\nu+1} E^{\nu+1} - \varepsilon^{\nu}$ ist, so hat man $\lambda^{\nu+1} E^{\nu+1} = \varepsilon^{\nu} - \eta'$; folglich (da ε^{ν} und η' positive Zahlen und kleiner als $\sqrt{B}$ sind, und $\lambda^{\nu+1}$ ebenfalls eine positive Zahl ist) $E^{\nu+1}$ kleiner als $\sqrt{B}$, und in diesem Falle beweiset man eben so als vorhin, daß $\varepsilon^{\nu+1}$ positiv seyn muß. Auf ähnliche Art kann man weiter fortgehen.

Wenn

Wenn $\sqrt{B}$ negativ genommen wäre, so bewiese man auf eben die Art, daß ε^{γ}, $\varepsilon^{\gamma+1}$ ꝛc. negativ seyn müßten; ja ohne von neuem zu rechnen darf man nur bemerken, daß die Formeln der vorhergehenden Nr. dieselben bleiben, wenn man darin die Zeichen aller dieser Größen E, E', E'', ꝛc. ε, ε', ε'', ꝛc. und der Wurzelgröße $\sqrt{B}$ verändert, so daß man die Wurzelgröße allemal als positiv betrachten kann, wenn man die Größen E, E', E'', ꝛc. ε, ε', ε'' ꝛc. mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt.

39.

Dieses vorausgesetzt, behaupte ich, daß alle vorhergehenden Glieder der Reihen E^{γ}, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$, ꝛc. ε^{γ}, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$ ꝛc. gegeben sind, sobald man zwey zusammengehörige Glieder dieser Reihen kennt.

Es sey z. B. $E^{\gamma+3}$ und $\varepsilon^{\gamma+3}$ gegeben, denn der Beweis bleibt allgemein, die gegebenen Glieder mögen seyn, welche sie wollen, so lassen sich nach den Formeln der 33sten Nummer und den Bedingungen der vorigen die vor diesen Gliedern vorhergehende finden. Man hat nemlich sogleich

$$\varepsilon^{\gamma+3} = \lambda^{\gamma+3}E^{\gamma+3} - \varepsilon^{\gamma+2}, \text{ also}$$

$$\varepsilon^{\gamma+2} = \lambda^{\gamma+3}E^{\gamma+3} - \varepsilon^{\gamma+3}.$$

Nun muß $\varepsilon^{\gamma+2} < \sqrt{B}$ seyn, und es ist demnach auch

$$\lambda^{\gamma+3} < \frac{\varepsilon^{\gamma+3} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+3}}$$

Eben so ist

$$\varepsilon^{\gamma+1} = \lambda^{\gamma+2}E^{\gamma+2} - \varepsilon^{\gamma+2}$$

folglich, da $\varepsilon^{\gamma+1} < \sqrt{B}$ ist,

$\lambda^{\gamma+2}$

$$\lambda^{\nu+2} < \frac{s^{\nu+2} + \sqrt{B}}{E^{\nu+2}}$$

und da wegen der Natur des continuirlichen Bruchs $\lambda^{\nu+2}$ eine ganze positive Zahl seyn muß, so muß auch $s^{\nu+2} + \sqrt{B} > E^{\nu+2}$ seyn. Nun hat man auch

$$E^{\nu+2}E^{\nu+3} = B - (s^{\nu+2})^2 = (\sqrt{B} + s^{\nu+2})(\sqrt{B} - s^{\nu+2})$$

folglich $\sqrt{B} - s^{\nu+2} < E^{\nu+3}$, oder indem man für $s^{\nu+2}$ seinen vorigen Werth $\lambda^{\nu+3}E^{\nu+3} - s^{\nu+3}$ setzt

$$\sqrt{B} - \lambda^{\nu+3}E^{\nu+3} + s^{\nu+3} < E^{\nu+3}$$

und daraus bekömmt man

$$\lambda^{\nu+3} > \frac{s^{\nu+3} + \sqrt{B}}{E^{\nu+3}} - 1$$

Da also $\lambda^{\nu+3}$ eine ganze Zahl seyn muß, so ist klar, daß sie bloß der ganzen Zahl gleich seyn kann, die zunächst kleiner ist als $\frac{s^{\nu+3} + \sqrt{B}}{E^{\nu+3}}$; also ist $\lambda^{\nu+3}$ gegeben: und da $E^{\nu+2} = \frac{B - (s^{\nu+2})^2}{E^{\nu+3}}$ ist, so erhellet, daß man auch $E^{\nu+2}$ habe.

Nun ist $$s^{\nu} = \lambda^{\nu+1}E^{\nu+1} - s^{\nu+1}$$

und also, da $s^{\nu} < \sqrt{B}$ ist

$$\lambda^{\nu+1} < \frac{s^{\nu+1} + \sqrt{B}}{E^{\nu+1}}$$

Soll also $\lambda^{\nu+1}$ eine solche ganze Zahl seyn als verlangt wird, so muß

$$s^{\nu+1} + \sqrt{B} > E^{\nu+1}$$

und folglich, da $E^{\nu+1}E^{\nu+2} = B - (s^{\nu+1})^2$ ist,

$\sqrt{B}$ —

$$\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu+1} < E^{\nu+2}$$

oder, wenn man für $\varepsilon^{\nu+1}$ seinen obigen Werth setzt

$$\sqrt{B} - \lambda^{\nu+2} E^{\nu+2} + \varepsilon^{\nu+2} < E^{\nu+2}$$

und folglich

$$\lambda^{\nu+2} > \frac{\varepsilon^{\nu+2} + \sqrt{B}}{E^{\nu+2}} - 1$$

seyn. Es kann demnach $\lambda^{\nu+2}$ keine andere ganze Zahl seyn als diejenige, die zunächst kleiner ist als die gegebene Größe $\frac{\varepsilon^{\nu+2} + \sqrt{B}}{E^{\nu+2}}$, und es ist daher diese Zahl gegeben und mit ihr auch $\varepsilon^{\nu+1}$ und $\varepsilon^{\nu+1}$.

Da endlich $E^{\nu} < \sqrt{B}$ ist, so ist auch um so mehr $\varepsilon^{\nu} + \sqrt{B} > E^{\nu}$, und also, da $E^{\nu} E^{\nu+1} = B - (\varepsilon^{\nu})^2$ ist,

$$\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu} < E^{\nu}$$

oder, wenn man für ε^{ν} seinen vorhin gefundenen Werth setzt,

$$\sqrt{B} - \lambda^{\nu+1} E^{\nu+1} + \varepsilon^{\nu+1} < E^{\nu}$$

und also

$$\lambda^{\nu+1} > \frac{\varepsilon^{\nu+1} + \sqrt{B}}{E^{\nu+1}} - 1$$

Es kann demnach $\lambda^{\nu+1}$ keine andere ganze Zahl seyn, als diejenige, die zunächst kleiner ist als die gegebene Größe $\frac{\varepsilon^{\nu+1} + \sqrt{B}}{E^{\nu+1}}$, und es ist folglich die Zahl gegeben und also auch ε^{ν} und E^{ν}.

40. Wir

40.

Wir haben gesehen, (Nr. 35.) daß bey der Fortsetzung der Reihen E^{γ}, $E^{\gamma+1}$ ꝛc. ε^{γ}, $\varepsilon^{\gamma+1}$ ꝛc. nach einer bestimmten Anzahl von Gliedern nothwendig zwey zusammengehörige Glieder, wie $E^{\gamma+\delta}$, $\varepsilon^{\gamma+\delta}$, wiederkehren, so daß z. B.

$$E^{\gamma+\nu+\delta} = E^{\gamma+\delta}; \quad \varepsilon^{\gamma+\nu+\delta} = \varepsilon^{\gamma+\delta}$$

wird. Nach dem, was so eben bewiesen worden ist, hat man daher auch rückwärts

$$E^{\gamma+\nu+\delta-1} = E^{\gamma+\delta-1}; \quad \varepsilon^{\gamma+\nu+\delta-1} = \varepsilon^{\gamma+\delta-1}$$

$$E^{\gamma+\nu+\delta-2} = E^{\gamma+\delta-2}; \quad \varepsilon^{\gamma+\nu+\delta-2} = \varepsilon^{\gamma+\delta-2}$$

ꝛc. ꝛc.

$$E^{\gamma+\nu} = E^{\gamma}, \qquad \varepsilon^{\gamma+\nu} = \varepsilon^{\gamma}$$

41.

Wenn man also in der Reihe der Zahlen E, E', E'', ꝛc. zwey auf einander folgende Zahlen mit demselben Zeichen findet, so ist allemal diejenige von ihnen, welche kleiner als $\sqrt{B}$ ist, nothwendig periodisch.

Wenn also in der Gleichung

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

die Coefficienten E und E' einerley Zeichen hätten, so würde die Reihe vom ersten oder vom zweyten Gliede an periodisch seyn.

42.

Wenn $\varepsilon = 0$, also $x = \sqrt{\frac{E}{E'}}$ ist, so wird $B = EE'$, und es ist also von den beyden Zahlen E und E' die kleinere nothwendig kleiner und die größere nothwendig größer als $\sqrt{B}$.

Ist daher die Zahl $\frac{E}{E''}$, wovon die Quadratwurzel gesucht werden soll, kleiner als die Einheit, so ist die Reihe vom ersten Gliede an, ist aber $\frac{E}{E'}$ größer als die Einheit, so ist die Reihe vom zweyten Gliede an periodisch.

43.

Man hat schon längst bemerkt, daß sich jeder periodische continuirliche Bruch auf eine Gleichung vom zweyten Grade zurückführen läßt, aber Niemand hat meines Wissens den umgekehrten Satz bewiesen, nemlich daß jede Gleichung vom zweyten Grade allemal nothwendiger Weise einen periodischen continuirlichen Bruch giebt. Zwar hat Herr **Euler** im 9ten Bande der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften bemerkt, daß die Quadratwurzel einer ganzen Zahl sich allemal auf einen periodischen continuirlichen Bruch zurückbringen lasse; allein er hat diesen Satz, der nur einen speciellen Fall enthält, nicht bewiesen, und es kann derselbe auch, wie mir scheint, nicht anders als vermittelst der oben festgesetzten Principien bewiesen werden.

44.

Wir haben oben allgemeine Formeln zur leichten Erfindung der Glieder der Brüche mitgetheilt, die sich der Wurzel einer gegebenen Gleichung immer mehr nähern, vorausgesetzt, daß man weiß, der continuirliche Bruch, welcher diese Wurzel ausdruckt, sey ein periodischer Bruch.

Ist nun die Gleichung eine Gleichung vom zweyten Grade, und bedient man sich dabey der Methode der 33sten

Nummer,

Nummer, so kann man die Rechnungen der 24sten und der folgenden Nummern um vieles vereinfachen.

Denn da man

$$x^{\mu} = \frac{\sqrt{B} + \varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} \text{ und } x^{\mu+\pi} = \frac{\sqrt{B} + \varepsilon^{\mu+\pi}}{E^{\mu+\pi+1}}$$

hat, wo ε^{μ}, $\varepsilon^{\mu+\pi}$, $E^{\mu+1}$, $E^{\mu+\pi+1}$ bekannt sind (π ist kleiner als ν): so braucht man nur diese Werthe in die beyden Gleichungen Nr. 26. zu bringen, und der Kürze wegen

$$\frac{l^{\mu}\varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + l^{\mu-1} = f^{\mu}$$

$$\frac{L^{\mu}\varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + L^{\mu-1} = F^{\mu}$$

$$\frac{H^{\nu}\varepsilon^{\mu}}{E^{\mu+1}} + H^{\nu-1} = K^{\nu}$$

$$H^{\pi}\varepsilon^{\mu+\pi} + H^{\pi-1}E^{\mu+\pi+1} = G^{\pi}$$

setzen. Thut man dieses, so bekommt man

$$\left(f^{\mu} + \frac{l^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K^{\nu} + \frac{H^{\nu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{n}$$

$$=$$

$$l^{\rho}\varepsilon^{\mu+\pi} + l^{\rho-1}E^{\mu+\pi+1} + l^{\rho}\sqrt{B}$$

$$\left(F^{\mu} + \frac{L^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)\left(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K^{\nu} + \frac{H^{\nu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{n}$$

$$=$$

$$L^{\rho}\varepsilon^{\mu+\pi} + L^{\rho-1}E^{\mu+\pi+1} + L^{\rho}\sqrt{B}$$

und wegen des doppelten Werths der Wurzelgröße $\sqrt{B}$ findet man hieraus sogleich

$$l^\rho =$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(f^\mu + \dfrac{l^\mu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^\pi + H^\pi\sqrt{B})\left(K^\nu + \dfrac{H^\nu\sqrt{B}}{E^{\mu-1}}\right)^n \\ -\left(f^\mu - \dfrac{l^\mu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^\pi - H^\pi\sqrt{B})\left(K^\nu - \dfrac{H^\nu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{B}$$

$$L^\rho =$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(F^\mu + \dfrac{L^\mu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^\pi + H^\pi\sqrt{B})\left(K^\nu + \dfrac{H^\nu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^n \\ -\left(F^\mu - \dfrac{L^\mu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^\pi - H^\pi\sqrt{B})\left(K^\nu - \dfrac{H^\nu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{B}$$

und ϱ ist wie oben $= \mu + n\nu + \pi$.

45.

Der Werth von L^ρ läßt sich auch vermittelst l^ρ und $l^{\rho-1}$ ohne neue Rechnung bestimmen. Denn da

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'} = \frac{E}{\sqrt{B} - \varepsilon}, \text{ und eben so}$$

$$x^\rho = \frac{E^\rho}{\sqrt{B} - \varepsilon^\rho}$$

ist, so hat man aus der Gleichung (G) der 31sten Nummer

$$\frac{E}{\sqrt{B} - \varepsilon} = \frac{l^\rho E^\rho + l^{\rho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon^\rho)}{L^\rho E^\rho + L^{\rho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon^\rho)}$$

oder

$$E(L^\rho E^\rho + L^{\rho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon^\rho)) = l^\rho E^\rho(\sqrt{B} - \varepsilon) +$$

$$l^{\rho-1}(B + \varepsilon\varepsilon^\rho - (\varepsilon^\rho + \varepsilon)\sqrt{B})$$

Vergleicht man also die rationalen Theile und dann die irrationalen Theile unter einander, so bekommt man

$L^{\rho-1}$

$$L^{\rho-1} = \frac{l^\rho E^\rho - l^{\rho-1}(\varepsilon^\rho + \varepsilon)}{E}, \text{ und}$$

$$L^\rho E^\rho - L^{\rho-1}\varepsilon^\rho = \frac{-l^\rho E^\rho \varepsilon + l^{\rho-1}(B + \varepsilon\varepsilon^\rho)}{E}$$

und da $B - (\varepsilon^\rho)^2 = E^\rho E^{\rho+1}$ ist, so hat man

$$L^\rho = \frac{l^\rho(\varepsilon^\rho - \varepsilon) + l^{\rho-1}E^{\rho+1}}{E}$$

Nun ist $\rho = \mu + n\nu + \pi$, und also $\varepsilon^\rho = \varepsilon^{\mu+\pi} E^{\rho+1} = E^{\mu+\pi+1}$; so daß ε^ρ und $E^{\rho+1}$ für jede Bedeutung von ρ bekannt sind.

46.

Um die Anwendung der vorhergehenden Formeln an einem Beyspiele zu zeigen, wollen wir annehmen, daß die Quadratwurzel aus $\frac{11}{3}$ durch einen continuirlichen Bruch gesucht werden soll.

Setzt man $x = \sqrt{\frac{11}{3}}$, so hat man die Gleichung $3x^2 - 11 = 0$; also (Nr. 32) $E = 11$, $E' = 3$, $\varepsilon = 0$. Man nehme demnach $B = 33$, und rechne (Nr. 33.) auf folgende Art.

$E = 11 \qquad \varepsilon = 0$

$E' = \frac{33-0}{11} = 3, \ \lambda < \frac{\sqrt{33}+0}{3} = 1, \ \varepsilon' = 1.3 - 0 = 3$

$E'' = \frac{33-9}{3} = 8, \ \lambda'' < \frac{\sqrt{33}+3}{8} = 1, \ \varepsilon'' = 1.8 - 3 = 5$

$E''' = \frac{33-25}{8} = 1, \ \lambda''' < \frac{\sqrt{33}+5}{1} = 10, \ \varepsilon''' = 10.1 - 5 = 5$

$$E'''' = \frac{33-25}{1} = 8,\ \lambda'''' < \frac{\sqrt{33}+5}{8} = 1,\ \varepsilon'''' = 1 \cdot 8 - 5 = 3$$

$$E^{v} = \frac{33-9}{8} = 3,\ \lambda^{v} < \frac{\sqrt{33}+3}{3} = 2,\ \varepsilon^{v} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

Man bleibt hier stehen, weil man sieht, daß $E^{v} = E'$ und $\varepsilon^{v} = \varepsilon'$ ist, und man hat also in diesem Falle $\mu = 1$ und $\nu = 4$; folglich

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \text{etc.}}}}}}}$$

47.

Dies lst also der continuirliche Bruch, welcher den Werth von $\sqrt{\frac{11}{3}}$ ausdruckt. Will man aber die Brüche finden, welche sich diesem Werthe immer mehr nähern, so nehme man in den Formeln der 44sten Nummer $\mu = 1$, $\nu = 4$, und π nach und nach $= 0, 1, 2, 3$, weil $\pi < 4$ seyn muß.

Man hat also $l^{\mu} = l' =$ (Nr. 22. Form. (A)) $\lambda' = 1$, $l^{\mu-1} = l = 1$; $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon' = 3$, $E^{\mu+1} = E'' = 8$, folglich $f^{\mu} =$ (Nr. 44.) $\frac{1 \cdot 3}{8} + 1 = \frac{11}{8}$. Auf ähnliche Art findet man $L^{\mu} = 1$ und $F^{\mu} = \frac{3}{8}$. Nun berechne man die Werthe von H, H' etc. bis zu $H^{\nu} = H''''$ nach den Formeln (C) der 25sten Nummer, wodurch man bekommt

$H = 0$

$$
\begin{aligned}
H &= 0\\
H' &= 1\\
H'' &= \lambda''' H' = 10\\
H''' &= \lambda'''' H'' + H' = 11\\
H'''' &= \lambda^{V} H''' + H'' = 32
\end{aligned}
$$

Es ist demnach $H^{\nu} = 32$, $H^{\nu - 1} = 11$, und daher $K^{\nu} = \frac{32 \cdot 3}{8} + 11 = 23$. Nun sey

1) $\pi = 0$, so hat man $H^{\pi} = 0$, und $H^{\pi - 1} = 1$ (Nr. 25. (C)); also $G^{\pi} = E^{\mu + 1} = 8$. Ferner sey

2) $\pi = 1$, so hat man $H^{\pi} = 1$, $H^{\pi - 1} = 0$; also $G^{\pi} = \varepsilon^{\mu + 1} = \varepsilon'' = 5$. Es sey

3) $\pi = 2$, so hat man $H^{\pi} = 10$, $H^{\pi - 1} = 1$; also $G^{\pi} = 10\varepsilon^{\mu + 2} + 1 . E^{\mu + 3} = 10\varepsilon''' + E'''' = 58$. Endlich sey

4) $\pi = 3$, so hat man $H^{\pi} = 11$, $H^{\pi - 1} = 10$; also $G^{\pi} = 11\,\varepsilon'''' + 10 E^{V} = 63$.

Bringt man diese Werthe in die Ausdrücke für l^{ρ} und L^{ρ} (Nr. 44.) und multiplicirt die beyden Faktoren

$$f^{\mu} \pm \frac{l^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu + 1}},\quad G^{\pi} \pm H^{\pi}\sqrt{B}$$

so wie auch

$$F^{\mu} \pm \frac{L^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu + 1}},\quad G^{\pi} \pm H^{\pi}\sqrt{B}$$

mit einander, wodurch man folgende Faktoren bekömmt

$$f^{\mu} G^{\pi} + \frac{l^{\mu} H^{\pi} B}{E^{\mu + 1}} \pm \left(f^{\mu} H^{\pi} + \frac{l^{\mu} G^{\pi}}{E^{\mu + 1}}\right)\sqrt{B}$$

$$F^\mu G^\pi + \frac{L^\mu H^\pi B}{E^{\mu+1}} \pm (f^\mu H^\pi + \frac{L^\mu G^\pi}{E^{\mu+1}})\sqrt{B}$$

so findet man folgende Formeln:

$$l^{4n+1} = \left.\begin{array}{l}(11 + \sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n\\ -(11 - \sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$L^{4n+1} = \left.\begin{array}{l}(3 + \sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n\\ -(3 - \sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$l^{4n+2} = \left.\begin{array}{l}(11 + 2\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n\\ -(11 - 2\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$L^{4n+2} = \left.\begin{array}{l}(6 + \sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33}\ ^n\\ -(6 - \sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33}\ ^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$l^{4n+3} = \left.\begin{array}{l}(121 + 21\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n\\ -(121 - 21\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$L^{4n+3} = \left.\begin{array}{l}(63 + 11\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n\\ -(63 - 11\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$l^{4n+4} = \left.\begin{array}{l}(132 + 23\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33}\ ^n\\ -(132 - 23\sqrt{33})\ 23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$L^{4n+4} = \left.\begin{array}{l}(69 + 12\sqrt{33}\ (23 + 4\sqrt{33})^n\\ -(69 - 12\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

Vermittelst dieser Formeln kann man den Werth jedes von folgenden Brüchen $\frac{l'}{L'}, \frac{l''}{L''}, \frac{l'''}{L'''}$ ꝛc. finden, welche sich der $\sqrt{\frac{11}{3}}$ immer mehr nähern.

Macht man nemlich zuerst $n = 0$, so bekommt man die vier ersten Glieder. Setzt man ferner $n = 1$, so findet man die vier folgenden Glieder, u. s. w. Man findet aber auf diese Art folgende Brüche

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{23}{11},\ \frac{23}{12},\ \frac{67}{35},\ \frac{90}{47},\ \frac{967}{505},\ \frac{1057}{552}\ \text{ꝛc.}$$

48. Wollte

48.

Wollte man z. B. das 50ste Glied dieser Reihe, d. i. den Bruch $\frac{l^{50}}{L^{50}}$ haben, so dürfte man nur 50 durch 4 dividiren, wodurch man 12 zum Quotienten und 2 zum Reste bekommen würde, und $n = 12$ annehmen. Entwickelte man die 12te Potestät von $23 \pm 4\sqrt{33}$, und setzte der Kürze wegen

$$\begin{aligned} M = {} & (23)^{12} + 66(33)(4)^2(23)^{10} + 495(33)^2(4)^4(23)^8 \\ & + 938(33)^3(4)^6(23)^6 + 495(33)^4(4)^8(24)^4 \\ & + 66(33)^5(4)^{10}(23)^2 + (33)^6(4)^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = {} & 12(4)(23)^{11} + 220(33)(4)^3(23)^9 + 729(33)^2(4)^5(23)^7 \\ & + 792(33)^3(4)^7(23)^5 + 220(33)^4(4)^9(23)^3 \\ & + 12(33)^6(4)^{11}(23) \end{aligned}$$

so bekäme man $(23 \pm 4\sqrt{33})^n = M \pm N\sqrt{33}$, und diese Werthe in die Ausdrücke für l^{4n+2} und L^{4n+2} gesetzt, geben für den gesuchten Bruch

$$\frac{2M + 11N}{M + 6N}.$$

49.

Ich beschließe diese Anmerkung mit folgendem mir merkwürdig scheinenden Zusatze. Wenn die gegebene Gleichung commensurable Divisoren vom ersten Grade hat, so sind die continuirlichen Brüche, welche die Wurzeln dieser Divisoren geben, nothwendiger Weise begrenzte Brüche, und wenn die Gleichung commensurabe Divisoren vom zweyten Grade mit reellen Wurzeln hat, so sind die continuirlichen Brüche, welche diese Wurzeln ausdrucken, nothwendiger Weise periodische Brüche. Auf diese Art hat die Methode die Wurzeln der Gleichungen durch continuirliche Brüche auszudrucken, nicht bloß den Vorzug, daß sie der gesuchten Wurzel so nahe als möglich kommende Werthe giebt, sondern auch den, daß man durch sie alle commensurable Divisoren des ersten und zweyten Grades findet, welche die gegebene Gleichung enthalten kann. Es wäre zu wünschen, daß man ein Kennzeichen entdecken könnte, welches zur Auffindung der commensurablen Divisoren des dritten, des vierten Grades u. s. f. diente, wenn dergleichen Divisoren in der gegebenen Gleichung enthalten wären; es ist dies wenigstens ein Gegenstand, der verdient, von den Mathematikern untersucht zu werden.

Dritte Anmerkung.

Verallgemeinerung der Theorie der continuirlichen Brüche.

50.

Im 3ten §. der vorhergehenden Abhandlung haben wir vorausgesetzt, daß die Zahlen p, q, r, rc. die Werthe der Wurzeln x, y, z, rc. in ganzen Zahlen, aber zunächst kleiner wären als diese Wurzeln; es fällt aber in die Augen, daß man darunter durch die zunächst größern ganzen Zahlen verstehen könnte.

51.

Angenommen also, daß p die ganze Zahl bedeutet, die zunächst größer ist als x, so daß $p > x$ und $p - 1 < x$ ist: so ist klar, daß man alsdann

$$x = p - \frac{1}{y}$$

setzen, d. h. y negativ nehmen muß. Da nun $x < p$ und $> p - 1$ ist, so wird $\frac{1}{y} > 0$ und < 1, und folglich $y > 1$, so wie in dem Falle (Nr. 18. der vorhergehenden Abhandlung) wo p zunächst kleiner als x war. Man kann also von neuem die Zahl q nehmen, die entweder zunächst kleiner oder zunächst größer ist als y. Im ersten Fall setzt man $y = q + \frac{1}{z}$, und im andern $y = q - \frac{1}{z}$, u. s. f.

Auf diese Art hätte man

$$x = p \pm \frac{1}{y},\ y = q \pm \frac{1}{z},\ z = r \pm \frac{1}{u}\ \text{ꝛc.}$$

und erhielte so den continuirlichen Bruch

$$x = p \pm \cfrac{1}{q \pm \cfrac{1}{r \pm \cfrac{1}{s \pm \text{ꝛc.}}}}$$

wo bemerkt werden muß, daß jeder der Nenner q, r, ꝛc. auf welchen das Zeichen — folgt, nothwendiger Weise entweder = oder > 2 seyn muß. Denn da $y > 1$ ist, so hat man, wenn man $y = q - \frac{1}{z}$ setzt, $q - \frac{1}{z} > 1$, also $q > 1 + \frac{1}{z}$, und folglich da q eine ganze Zahl seyn muß, nothwendiger Weise q entweder = oder > 2. Eben so kann man in den übrigen Fällen schließen.

52.

Es lassen sich aber die Brüche, bey welchen auf diese Art bald addirt bald subtrahirt wird, allemal sehr leicht in solche Brüche verwandeln, die durch die bloße Addition gebildet sind.

Zu diesem Ende wollen wir überhaupt

$$a - \frac{1}{t} = A + \frac{1}{T}$$

setzen,

setzen, wo a und A ganze Zahlen, und t und T solche Zahlen bedeuten die größer sind als eins. Dieses angenommen ist

$$a - A = \frac{1}{t} + \frac{1}{T},$$

und da $\frac{1}{t} < 1$ und $\frac{1}{T} < 1$ ist, so ist auch

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{T} < 2$$

und es kann daher $a - A$ nur $= 1$ seyn. Dieses giebt $A = a - 1$, und dadurch wird

$$a - \frac{1}{t} = a - 1 + \frac{1}{T}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{t}, \text{ und } T = \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$$

Auf diese Art hat man also allgemein

$$a - \frac{1}{t} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t-1}}$$

und vermittelst dieser Formel kann man aus jedem continuirlichen Bruche alle Zeichen — wegschaffen.

Es sey z. B. der Bruch

$$p - \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

gegeben. Setzt man $a = p$, und $t = q + \frac{1}{r} + \text{etc.}$, so bekommt man

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 1 + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}$$

Wie

Wäre der Bruch

$$p - \cfrac{1}{q - \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

gegeben, so bekäme man statt desselben sogleich

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 1 - \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}$$

und darauf

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r - 1 + \text{etc.}}}}}$$

Eben so verhält es sich bey andern ähnlichen Brüchen. Es verdient aber hier angemerkt zu werden, daß bey diesen Verwandlungen Nenner verschwinden können, und so oft dieses geschieht, wird dadurch der Bruch einfacher.

Es sey z. B. der Bruch

$$p - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

zu verwandeln. Der Bruch, welchen man findet, ist

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}$$

oder

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + r + \text{etc.}}$$

Auf

Auf ähnliche Art giebt der Bruch

$$p - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{r + \text{rc.}}}$$

diesen

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r - 1 + \text{rc.}}}}}$$

oder

$$p - 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{r - 1 + \text{rc.}}}$$

und so in andern Fällen auf ähnliche Art.

53.

Die vorhin gefundene Formel, welcher man diese Form geben kann,

$$a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t}} = a + 1 - \frac{1}{t + 1}$$

zeigt, daß ein continuirlicher Bruch, worin alle Glieder das Zeichen + haben, oft durch die Einführung des Zeichens − abgekürzt werden kann, und zwar findet dieses statt, wenn Nenner vorkommen, welche = 1 sind. Es sey z. B. der Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r + \text{rc.}}}$$

gegeben: so verwandelt sich derselbe nach der vorstehenden Formel in

p +

$$p + 1 - \cfrac{1}{r + 1}$$

welcher, wie der Ausdruck lehrt, ein Glied weniger hat. Hätte man daher den Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}$$

so würde sich derselbe in folgenden

$$p + 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}$$

und wäre der Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}}$$

gegeben, so würde sich dieser sogleich in

$$p + 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}$$

und darauf dieser in folgenden

$$p + 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{s + 1}}$$

verwandeln lassen.

Man kann also, wie sich hieraus leicht schließen läßt, jeden continuirlichen Bruch, worin bloß das Zeichen + vorkommt, und Nenner, die $= 1$, enthalten sind, allemal in einen andern Bruch verwandeln, der so viel Glieder weniger hat, als es dergleichen Nenner in ihm giebt, wofern dieselben nicht unmittelbar auf einander folgen. Denn wenn zwey unmittelbar auf einander folgen, so kann man nur ein Glied, wenn drey unmittelbar auf einander folgen, nur zwey Glieder, und überhaupt, wenn $2n$ oder $2n + 1$ auf einander folgen, nur n oder $n + 1$ Glieder wegschaffen.

54.

Da also der continuirliche Bruch, welcher das Verhältniß des Umfangs des Kreises zum Radius ausdruckt,

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

ist, so läßt sich derselbe in folgenden verwandeln, welcher schon drey Glieder weniger hat,

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}}}$$

55.

Um die continuirlichen Brüche, welche bloß das Zeichen $+$ enthalten, mit denen, worin auch das Zeichen $-$ vor-

kommt,

kommt, unter eine allgemeine Form zu bringen, ist es gut, diese letzten auf die Art zu verwandeln, daß die Zeichen — bloß zu den Nennern gehören. Dies kann sehr leicht geschehen. Denn ist z. B. der Bruch

$$p - \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r - \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

gegeben, so ist klar, daß man denselben sogleich in

$$p + \cfrac{1}{-q - \cfrac{1}{r - \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

und diesen darauf in

$$p + \cfrac{1}{-q + \cfrac{1}{-r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

verwandeln kann, und so auch in andern ähnlichen Fällen.

Auf diese Art ist die allgemeine Form der continuirlichen Brüche, von denen wir bisher geredet haben,

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

wo p, q, r, etc. insgesammt ganze Zahlen bedeuten, aber dabey sowohl positiv als negativ seyn können, dagegen dieselben bey den obigen Brüchen durchaus positiv waren.

Man muß indeß bemerken, daß allemal, wenn einer von den Nennern q, r, etc. der Einheit, positiv oder negativ genommen, gleich ist, der folgende Nenner eben dasselbe Zeichen haben muß, und dies folgt daraus, weil ein positiver

Nenner, der $= 1$ ist, niemals das Zeichen — nach sich haben kann (Nr. 51.)

56.

Es kann also die Approximations-Methode des 3ten §. der vorhergehenden Abhandlung auf folgende Art allgemeiner gemacht werden.

Es sey x die gesuchte Wurzel. Man setze den Werth derselben in ganzen Zahlen p, d. h. man mache p gleich einer von den ganzen Zahlen, zwischen welche der Werth von x fällt und welche man allemal nach §. 1. der vorhergehenden Abhandlung finden kann, und setze darauf $x = p + \frac{1}{y}$. Auf diese Art bekommt man eine veränderte Gleichung, deren unbekannte Größe y ist, und diese Gleichung hat nothwendig eine positive oder negative Wurzel, die größer als 1 ist. Eben so lasse man q den Werth von y in ganzen Zahlen seyn, so daß q entweder zunächst größer oder zunächst kleiner ist als y, und setze $y = q + \frac{1}{z}$, und so ferner.

Wenn die Gleichung für x mehrere Wurzeln hätte, so hätte man über die veränderten Gleichungen für y und z ähnliche Schlüsse zu machen als Nr. 19. der vorhergehenden Abhandlung.

57.

Ist daher

$$x = p + \frac{1}{y},\ y = q + \frac{1}{z},\ z = r + \frac{1}{u},\ \text{rc.}$$

so hat man

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}$$

wo die Nenner q, r, ꝛc. positiv und negativ seyn können, wie wir schon angemerkt haben; und dieser Bruch läßt sich hernach allemal in einen andern verwandeln, worin die Nenner insgesammt positiv sind und bloß das Zeichen + vorkommt (Nr. 52.).

Der Vortheil, welchen diese gegenwärtige Methode gewährt, besteht darin, daß es dabey frey steht, für p, q, r, ꝛc. unter den beyden ganzen Zahlen, zwischen welchen die Wurzeln x, y, z, ꝛc. fallen, nach Belieben zu wählen, und hierdurch erlangt man öfters Abkürzungen des Calculs, wie weiter unten gezeigt werden wird.

58.

Wollte man übrigens den kürzesten continuirlichen Bruch und also auch denjenigen haben, der sich dem gesuchten Werthe am stärksten näherte, so müßte man die Zahlen p, q, r, ꝛc. allemal kleiner als die Wurzeln x, y, z, ꝛc. nehmen, wenn diese Zahlen von der Einheit verschieden wären; allein wenn sie der Einheit gleich gefunden würden, so müßte man die vorhergehende um eins vermehren, das heißt, dieselbe zunächst größer annehmen als die zugehörige Wurzel. Dieses fließt aufs deutlichste aus dem, was wir (Nr. 53.) über diesen Punkt gesagt haben.

59.

Setzt man nun, wie Nr. 23. der vorhergehenden Abhandlung

$$\alpha = 1 \qquad \alpha' = 1$$
$$\beta = \alpha q + 1 \qquad \beta' = \alpha' q$$

$$\gamma = \beta r + \alpha \qquad \gamma' = \beta' r + \alpha'$$
$$\delta = \gamma s + \beta \qquad \delta' = \gamma' s + \beta'$$
$$\text{2c.} \qquad \text{2c.}$$

so hat man nach Hinzufügung des Bruchs $\frac{1}{0}$, welcher größer ist als jede gegebene Größe, die Brüche

$$\frac{1}{0}, \ \frac{\alpha}{\alpha'}, \ \frac{\beta}{\beta'}, \ \frac{\gamma}{\gamma'}, \ \frac{\delta}{\delta'}, \ \text{2c.}$$

welche sich dem Werthe von x nothwendig nähern.

60.

Zur Beurtheilung der Natur dieser Brüche ist zu bemerken,

1) daß allemal

$$\alpha 0 - 1 \alpha' = -1$$
$$\beta \alpha' - \alpha \beta' = 1$$
$$\gamma \beta' - \beta \gamma' = -1$$
$$\delta \gamma' - \gamma \delta' = 1$$
$$\text{2c.}$$

ist. Hieraus erhellet, daß die Zahlen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, 2c. keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, und daß folglich die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, 2c. bereits auf die kleinsten Zahlen gebracht sind.

2) daß die Zahlen α, β, γ, 2c., α', β', γ', 2c. positiv oder negativ seyn können (wenn der Werth von x positiv ist, so haben beyde Glieder des Bruchs dasselbe Zeichen, und dagegen entgegenstehende, wenn der Werth von x negativ ist) und daß dieselben, wenn man von den Zeichen abstrahirt, immer größer werden.

3) daß

3) daß, da $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$ ꝛc. ist

$$x = \frac{\alpha y + 1}{\alpha' y}$$
$$x = \frac{\beta z + \alpha}{\beta' z + \alpha'}$$
$$x = \frac{\gamma u + \beta}{\gamma' u + \beta'}$$
ꝛc.

seyn wird.

61.

Wenn daher überhaupt π, ϱ, σ drey auf einander folgende Glieder der Reihe α, β, γ, ꝛc., π', ϱ', σ' aber die gehörigen Glieder aus der Reihe α', β', γ' ꝛc. und also $\frac{\pi}{\pi'}, \frac{\varrho}{\varrho'}, \frac{\sigma}{\sigma'}$ drey auf einander folgende und dem Werthe von x sich nähernde Brüche sind: so ist

$$\varrho\pi' - \pi\varrho' = \pm 1 \text{ und}$$
$$\sigma\varrho' - \varrho\sigma' = \pm 1$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn die Ordnungszahl des Bruchs $\frac{\varrho}{\varrho'}$, vom ersten Bruch $\frac{1}{0}$ an gerechnet, eine ungerade, und die untern, wenn diese Zahl eine gerade Zahl ist. Außerdem hat man, wenn man die Zeichen bey Seite setzt,

$$\varrho > \pi, \quad \sigma > \varrho, \quad \varrho' > \pi', \quad \sigma' > \varrho'$$

Endlich ist, wenn t das zugehörige Glied in der Reihe x, y, z, ꝛc. bedeutet, in völliger Strenge

$$x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$$

und, wenn k den Werth von t in ganzen Zahlen ausdruckt, es mag k größer oder kleiner seyn als t,

$$\sigma = \rho k + \pi, \quad \sigma' = \rho' k + \pi'.$$

62.

Dieses vorausgesetzt wollen wir den Bruch $\frac{\rho}{\rho'}$ betrachten, und untersuchen, um wie weit derselbe von dem wahren Werthe von x unterschieden ist. Hiezu haben wir

$$x - \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho t + \pi}{\rho' t + \pi'} - \frac{\rho}{\rho} = \frac{\rho'\pi - \rho\pi'}{\rho'(\rho' t + \pi')}$$

$$= \pm \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}$$

Folglich beträgt die Abweichung $\pm \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}$. Wenn also ϑ und $\vartheta + 1$ die beyden Zahlen sind, zwischen welche der wahre Werth von t fällt, so ist klar, daß die Größe $\rho' t + \pi'$ zwischen diese beyden $\rho'\vartheta + \pi'$ und $\rho'(\vartheta + 1) + \pi'$ fallen, und also die Abweichung des Bruchs $\frac{\rho}{\rho'}$ zwischen diesen Grenzen

$$\mp \frac{1}{\rho'(\rho'\vartheta + \pi')} \text{ und } \mp \frac{1}{\rho(\rho'(\vartheta + 1) + \pi')}$$

enthalten seyn wird. Nun kann man $k = \vartheta$ oder $k = \vartheta + 1$ nehmen, so daß man entweder $\sigma' = \rho\vartheta + \pi'$ oder $\sigma = \rho'(\vartheta + 1) + \pi'$ hat. Wenn man also, um diese beyden Fälle von einander zu unterscheiden, den Nenner des Bruchs, der auf $\frac{\rho}{\rho'}$ folgt, σ' nennt, wenn man den kleinern, und Σ', wenn man den größern Werth von t nimmt, so ist der Fehler bey dem Bruche $\frac{\rho}{\rho'}$ nothwendiger Weise zwischen diesen Grenzen

$\mp$

$$\mp \frac{1}{\varrho'\sigma'} \text{ und } \mp \frac{1}{\varrho'\Sigma'}$$

enthalten.

63.

Man sieht hieraus, daß dieser Fehler immer kleiner und kleiner wird, so wie man von einem Bruche zu dem folgenden fortgeht, weil die Nenner ϱ', σ' oder Σ' ꝛc. nothwendiger Weise immer größer werden. Auch erhellet daraus, da $\sigma' > \varrho'$ und $\Sigma' > \varrho'$ ist, daß der Fehler allemal kleiner als $\mp \frac{1}{\varrho'^2}$ seyn, d. h. daß die Abweichung eines jeden Bruchs weniger betragen wird, als die Einheit durch das Quadrat des Nenners dieses Bruchs dividirt. Hieraus läßt sich sehr leicht schliessen, daß der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$ dem Werthe von x näher kömmt, als jeder andere Bruch, der durch kleinere Zahlen ausgedruckt wird. Denn sollte der Bruch $\frac{m}{n}$ der Wurzel x näher kommen als der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$ und dabey n kleiner seyn als ϱ'; so müßte, da x zwischen $\frac{\varrho}{\varrho'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho'^2}$ oder zwischen $\frac{\varrho}{\varrho'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho'^2}$ enthalten ist, auch $\frac{m}{n}$ zwischen diese Grenzen fallen. Folglich müßte der Unterschied zwischen $\frac{\varrho}{\varrho'}$ und $\frac{m}{n} < \frac{1}{\varrho'^2}$ seyn. Nun ist aber diese Differenz $= \frac{n\varrho - m\varrho'}{\varrho' n}$, wo der Zähler nie kleiner als eins seyn kann, und der Nenner nothwendig größer seyn muß als ϱ'^2, weil $\varrho' > n$ ist. Auf

 diese

diese Art erhellet also die Wahrheit der vorstehenden Behauptung.

64.

Uebrigens muß bemerkt werden, daß die Fehler wechselsweise positiv und negativ sind, wenn die Nenner α' β' γ' rc. alle dasselbe Zeichen haben, oder die Zeichen bey ihnen abwechseln. Aus diesem Grunde sind auch die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ in diesem Falle wechselsweise kleiner oder größer als der wahre Werth von x, wie Nr. 23. der vorhergehenden Abhandlung. Allein dieser Umstand fällt weg, sobald von den Zahlen α', β', γ' rc. nicht je zwey dieselben oder entgegenstehende Zeichen haben, und dieses findet sich allemal nothwendiger Weise, wenn unter den Nennern q, r, s, rc. des continuirlichen Bruchs einige positiv und andere negativ sind, d. h. wenn man die Näherungs-Werthe von x, y, z, rc. bald größer bald kleiner als die wahren Werthe angenommen hat.

65.

Wollte man statt der convergirenden Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ rc. lieber eine Reihe abnehmender Glieder haben, so ist

$$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'\beta'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma'} - \frac{\beta}{\beta'} = \frac{1}{\beta'\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}$$

rc.

folglich, da $\alpha' = 1$ ist

$$\frac{\beta}{\beta'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\gamma'\delta'}$$

$$\frac{\delta}{\delta'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} + \frac{1}{\gamma'\delta'},$$

und überhaupt

$$\frac{\varsigma}{\varsigma'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\gamma'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} + \frac{1}{\gamma'\delta'} - \text{ꝛc.} \pm \frac{1}{\pi'\varsigma'}$$

Man hat also den Werth von x in der Reihe $\alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} +$ ꝛc. welche sich demselben um so mehr nähert, je weiter sie getrieben wird. Will man nach der Fortsetzung dieser Reihe bis zu einem gewissen Gliede $\pm \frac{1}{\pi'\varsigma'}$ wissen, um wie viel sie noch von dem wahren Werthe verschieden ist, so leidet es keinen Zweifel, daß die Abweichung zwischen diesen Grenzen $\mp \frac{1}{\varsigma'\sigma'}$ und $\mp \frac{1}{\varsigma'\Sigma'}$ (Nr. 62.) enthalten seyn, und also allemal weniger betragen wird, als $\frac{1}{\varsigma'^2}$.

66.

Jedes Glied der Reihe $\alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} +$ ꝛc. entspricht einem Gliede des continuirlichen Bruchs

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}$$

aus welchem man die Reihe hergeleitet hat, und es wird sich also die Reihe dem wahren Werthe desto stärker nähern, je stärker es der continuirliche Bruch thut. Nun ist oben (Nr. 53.) das Mittel angegeben worden, einen continuirlichen Bruch so convergent als möglich zu machen, und man kann daher auch eine so stark convergirende Reihe finden als möglich ist.

67.

Um z. B. die möglichst convergirende Reihe für das Verhältniß des Umfangs des Kreises zum Durchmesser desselben zu finden, nehme man die Reihe, welche dieses Verhältniß ausdruckt, und behandele sie nach Nr. 54. Auf diese Art bekommt man

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{-294 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-3 + \text{etc.}}}}}}$$

und hat also

$$p = 3, \quad q = 7, \quad r = 16, \quad s = -294, \text{ etc.}$$

Hieraus findet man

$$\alpha' = 1, \ \beta' = 7, \ \gamma' = 7.16 + 1 = 113, \ \delta' = 113 \times - 294 + 7 = -33215, \ \varepsilon' = -33215 \times 3 + 113 = -99532, \ \zeta' = -99532 \times -3 - 33215 = 265371 \text{ etc.}$$

und es ist demnach die gesuchte Reihe

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{113.33215} - \frac{1}{33215.99532} - \frac{1}{99532.265371} \text{ etc.}$$

Vierte Anmerkung.

Verschiedene Methoden, die Rechnung mit continuirlichen Brüchen zu vereinfachen.

68.

Wenn $\frac{\pi}{\pi'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'}$ zwey auf einander folgende convergirende Brüche für den Werth x sind, so hat man nach Nr. 61. allgemein

$$x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$$

Setzt man daher diesen Ausdruck von x in die Gleichung, deren Wurzel man sucht, so bekommt man eine Gleichung für t, welche keine andere seyn kann als diejenige, welche man erhalten haben würde, wenn man nach und nach $p + \frac{1}{y}$ für x, $q + \frac{1}{z}$ für y ꝛc. (Nr. 56.) gesetzt hätte; und um den folgenden Bruch $\frac{\sigma}{\sigma'}$ zu erhalten, muß man den Werth von t in ganzen Zahlen suchen. Thut man dieses und ist k die gedachte ganze Zahl, so wird

$$\sigma = k\varrho + \pi, \quad \sigma' = k\varrho' + \pi'.$$

Kennt man demnach die beyden ersten Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\beta}{\beta'}$, welche allemal $\frac{1}{0}$ und $\frac{p}{1}$ sind (Nr. 59.) so kann man nach und nach alle übrige bloß vermittelst der Gleichung für x finden.

Uebrigens mag man nach und nach die Substitutionen $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$, rc. brauchen, oder den allgemeinen Ausdruck $\frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$ für x setzen, so besteht die Schwierigkeit allemal darin, von jeder veränderten Gleichung den Werth ihrer positiven oder negativen Wurzel, die größer als 1 ist, und welche diese Gleichungen allemal nothwendig enthalten, in ganzen Zahlen zu finden. Kommt der erste näherungsweise gesuchte Werth p nicht mehr als einer Wurzel zu, so haben auch alle übrige veränderte Gleichungen für y, z, rc. nicht mehr als eine Wurzel, die größer ist als eins, so daß man die Werthe dieser Wurzeln in ganzen Zahlen insgesammt durch die bloße Substitution der natürlichen Zahlen zu finden im Stande ist (Nr. 19. der vorhergehenden Abhandlung). Allein wenn p mehrern Wurzeln zugehört, so haben die veränderten Gleichungen nothwendig mehr als eine Wurzel, die größer ist als die Einheit, bis man zu einer Gleichung kommt, die nicht mehr als eine Wurzel von dieser Art hat. Denn in diesem Falle haben alle folgende Gleichungen ebenfalls nicht mehr als eine Wurzel dieser Gattung.

Ehe man zu einer solchen veränderten Gleichung gelangt ist, ist die bloße Substitution der natürlichen Zahlen öfters nicht hinreichend, die Werthe, welche man haben will, in ganzen Zahlen zu finden, weil die Gleichung Wurzeln enthält, die um weniger als eins von einander verschieden sind. In diesem Falle scheint die Methode des 1sten §. der vorhergehenden Abhandlung nothwendig. Allein da man dieselbe schon bey der Erfindung der ersten Werthe von x in der gegebenen Gleichung gebraucht hat, so kann man bey den veränderten Gleichungen einer neuen

Rechnung

Rechnung überhoben seyn; und dieser Umstand verdient aus- einander gesetzt zu werden.

70.

Macht man von der gedachten Methode Gebrauch, so findet man die Grenzen, zwischen welchen jede reelle Wurzel der gegebenen Gleichung enthalten ist, so daß sich zwischen diesen Grenzen nicht mehr als eine einzige Wurzel befindet (Nr. 13. der vorhergehenden Abhandlung.)

Es seyen λ und Λ die Grenzen der gesuchten Wurzel. Da der Ausdruck $x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$, $t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$ giebt, so ist der Werth von t zwischen den Grenzen $\frac{\pi' \lambda - \pi}{\varrho - \varrho' \Lambda}$ und $\frac{\pi' \Lambda - \pi}{\varrho - \varrho' \Lambda}$ enthalten. Wenn also diese letzten Grenzen von einander um weniger als um eins verschieden sind, so hat man so- gleich den Werth von t in ganzen Zahlen; sind sie aber von einander um eins oder um mehr als eins unterschieden, so ist solches ein Kennzeichen, daß die gesuchte Wurzel t von den übrigen Wurzeln der veränderten Gleichung für t um Größen unterschieden ist, die der Einheit gleich, oder größer als die Einheit sind. In diesem Falle ist man folglich ver- sichert, den Werth dieser Wurzel in ganzen Zahlen durch die bloße Substitution der natürlichen Zahlen für t zu finden, und dieses um so mehr bey den folgenden veränderten Glei- chungen.

71.

Die Formel $t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$ kann auch mit Vortheil ge- braucht werden, wenn irgend eine Größe x, die zwischen ge- gebenen

gebenen Grenzen enthalten ist, in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden soll, wenigstens so weit, als die Glieder dieses Bruchs durch die gedachten Grenzen gegeben seyn können. Denn nennt man diese Grenzen von x wieder λ und Λ, so hat man

$$\frac{\pi'\lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\lambda} \text{ und } \frac{\pi'\Lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\Lambda}$$

für die Grenzen von t, so daß man, wenn der Unterschied dieser beyden Grenzen nicht größer ist als eins, den Werth von t in ganzen Zahlen genau zu finden im Stande ist. Nimmt man also $\frac{1}{0}$ und $\frac{p}{1}$ (wo p den Werth von x in ganzen bedeutet) zu den beyden ersten Brüchen an, so kann man die Reihe der convergirenden Brüche, und folglich auch den continuirlichen Bruch, so weit fortsetzen, bis die gedachten Grenzen von einander um mehr als eins unterschieden sind. Ereignet sich dieses, so muß man aufhören weiter zu gehen, weil die Grenzen λ und Λ dem Werthe von x keine größere Genauigkeit geben.

Bey dieser Methode hat man nicht zu befürchten, den continuirlichen Bruch weiter zu treiben als man soll, wie solches sehr leicht geschehen kann, wenn man, um diesen Bruch zu finden, sich begnügt, eine von den Zahlen λ und Λ zu nehmen, und, der gewöhnlichen Methode bey der Verwandlung gemeiner Brüche in continuirliche gemäß, dieselbe Operation zu brauchen, durch welche man den größten gemeinschaftlichen Faktor findet.

Wollte man dieses mit Sicherheit thun, so müßte man dieselbe Operation mit den beyden Zahlen λ und Λ vornehmen, und dann bloß den Theil des continuirlichen Bruchs behal-

behalten, welchen man bey beyden auf einerley Art fände. Es scheint aber die vorhergehende Methode bequemer und einfacher zu seyn.

72.

Jetzt wollen wir noch andere Mittel zur Erleichterung der Erfindung der Werthe der veränderten Gleichungen in ganzen Zahlen kennen zu lernen suchen. Es sey

$$t^n - a t^{n-1} + b t^{n-2} - \text{2c.} = 0$$

eine von diesen veränderten Gleichungen, wo es darauf ankommt, den Werth von t in ganzen Zahlen zu finden. Wir wollen denselben allgemein k nennen. Da die angenommene Gleichung aus der gegebenen Gleichung für x abgeleitet ist, so gehört sie mit dieser zu eben dem Grade, und wir setzen also voraus, daß dieser Grad der nte sey.

Nun haben wir Nr. 70. allgemein $t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$ gefunden, und es ist daher auch

$$t = \frac{\pi'}{\varrho'} \times \frac{x - \frac{\pi}{\pi'}}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x} = \frac{\pi'}{\varrho'} \times \left(\frac{\frac{\varrho}{\varrho'} - \frac{\pi}{\pi'}}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x} - 1 \right)$$

Nun ist aber $\frac{\varrho}{\varrho'} - \frac{\pi}{\pi'} = \pm \frac{1}{\varrho' \pi'}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn die Ordnungszahl des Bruchs $\frac{\varrho}{\varrho'}$ eine gerade, und das untere, wenn diese Zahl eine ungerade Zahl ist. Folglich ist

$$t = \pm \frac{1}{\varrho'^2 \left(\frac{\varrho}{\varrho'} - x \right)} - \frac{\pi'}{\varrho'}$$

Bedeutet daher x die gesuchte Wurzel, und x′, x″, ꝛc. die übrigen Wurzeln der Gleichung für x, deren Menge = n ist, endlich t, t′, t″, ꝛc. die zugehörigen Werthe von t: so ist

$$t = \pm \frac{1}{\varrho'^2\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - x\right)} - \frac{\pi'}{\varrho'}$$

$$t' = \pm \frac{1}{\varrho'^2\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - x'\right)} - \frac{\pi'}{\varrho'}$$

$$t'' = \pm \frac{1}{\varrho'^2\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - x''\right)} - \frac{\pi'}{\varrho'}$$

ꝛc.

Nun ist aber, wie bekannt, $a = t + t' + t'' +$ ꝛc., und setzt man also die gefundenen Werthe von t′, t″, ꝛc. deren Menge $n - 1$ ist, für t′, t″, ꝛc.: so bekommt man

$$a = t - \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$$

$$\pm \frac{1}{\varrho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x''} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x'''} + \text{ꝛc.}\right)$$

Nun haben wir (Nr. 62.) $\frac{\varrho}{\varrho'} = x \pm \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$, oder wenn man

$$\varrho' t + \pi' = \psi \varrho'$$

setzt, $\frac{\varrho}{\varrho'} = x \pm \frac{1}{\psi \varrho'^2}$ gefunden, und da $\varrho' t + \pi'$ zwischen den Grenzen σ' und Σ' enthalten ist, die beyde größer als ϱ' sind, so muß ψ nothwendiger Weise größer seyn als eins. Braucht man daher diese Substitution in der vorhergehenden Formel, so wird

t =

$$t = a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$$

$$\pm \left(\frac{1}{\varrho'^2(x-x') \pm \frac{1}{\psi}} + \frac{1}{\varrho'^2(x-x'') \pm \frac{1}{\psi}} + \text{ꝛc.} \right)$$

Da aber die Größen $x - x'$, $x - x''$ gegeben sind, und ϱ' immer größer wird, $\frac{1}{\psi}$ aber kleiner ist als eins: so muß auch jede der Größen

$$\frac{1}{\varrho'^2(x-x') \pm \frac{1}{\psi}},\ \frac{1}{\varrho'^2(x-x'') \pm \frac{1}{\psi}},\ \text{ꝛc.}$$

und die Summe der $n - 1$ dieser Größen nothwendiger Weise immer kleiner und endlich auch kleiner als $\frac{1}{2}$ werden.

Man gelangt daher nothwendiger Weise zu einer veränderten Gleichung von der Art, daß die Wurzel derselben t, bis auf $\frac{1}{2}$ näherungsweise bestimmt, $= a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$ wird, wo a den Coefficienten des zweyten Gliedes, negativ genommen, bedeutet; d. h. daß diese Wurzel zwischen den Grenzen

$$a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'} + \frac{1}{2} \text{ und } a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'} - \frac{1}{2}$$

enthalten ist, und eben dieses muß um so mehr bey allen folgenden veränderten Gleichungen statt finden.

So bald man daher zu einer solchen veränderten Gleichung gelangt ist, so braucht man nur die ganze Zahl zu nehmen, welche $a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$ am nächsten kommt, oder zwischen den Grenzen $a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'} + \frac{1}{2}$ und $a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$

$-\frac{1}{2}$ enthalten ist. Es ist nemlich diese Zahl nothwendiger Weise eine von den beyden auf einander folgenden Zahlen, zwischen welchen der wahre Werth von t liegt, so daß man sie mit voller Sicherheit für k nehmen kann (Nr. 68.). Auf diese Art kann man also die Näherung soweit man will, ohne alles Versuchen, fortsetzen.

73.

Da $a = t + t' + t''$ rc. ist, so hat man, wenn man die Werthe von t, t' rc. (Nr. 72.) substituirt,

$$a = \pm \frac{1}{\rho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''} + \text{rc.}\right) - \frac{n\pi'}{\rho'}$$

Nun sey

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \text{rc.} = 0$$

die gegebene Gleichung. Setzt man die erste Hälfte dieser Gleichung $= X$, so ist aus der Theorie der Gleichungen leicht einzusehen, daß $\frac{dX}{Xdx}$, wenn man nach der Differenziation $\frac{\rho}{\rho'}$ an die Stelle von x setzt,

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''} + \text{rc.}$$

wird, weil x, x', x'', rc. die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind. Man hat demnach

$$a = \pm \frac{dX}{\rho'^2 X dx} - \frac{n\pi'}{\rho'}, \text{ und folglich}$$

$$a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} = \pm \frac{dX}{\rho'^2 X dx} - \frac{\pi'}{\rho'}$$

Setzt man daher

$$R = \frac{n\rho^{n-1} - (n-1)A\rho^{n-2}\rho' + (n-2)B\rho^{n-3}\rho'^2 - \text{rc.}}{\rho^n - A\rho^{n-1}\rho' + B\rho^{n-2}\rho'^2 - \text{rc.}}$$

so

so bekommt man $a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} = \frac{\pm R - \pi'}{\rho'}$, und für die Grenzen, wovon in der vorhergehenden Nummer geredet worden,

$$\frac{\pm R - \pi'}{\rho'} + \frac{1}{2} \text{ und } \frac{\pm R - \pi'}{\rho'} - \frac{1}{2}.$$

Man kann also diese Grenzen unabhängig von der veränderten Gleichung für t, bloß vermittelst der gegebenen Gleichung für x finden und diesen Umstand zur Verkürzung der Rechnung benutzen.

74.

Nun ist noch übrig zu untersuchen, wie man erkennen kann, ob die Wurzel t zwischen den gedachten Grenzen liegt. Dieses ist leicht, sobald man die beyden auf einander folgenden ganzen Zahlen ϑ und $\vartheta + 1$ kennt, zwischen welchen diese Wurzel enthalten ist. Denn es seyen $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ die gegebenen Grenzen, so ist klar, daß λ, wenn t sich zwischen diesen Grenzen finden soll, zwischen ϑ und $\vartheta + 1$, und zugleich derjenigen von diesen beyden Zahlen am nächsten liegen muß, der t am nächsten ist. Man untersuche daher

1. ob λ zwischen ϑ und $\vartheta + 1$ fällt.

2. Wenn dieses statt findet, so nehme man von diesen beyden Zahlen diejenige, der λ am nächsten kommt, für den Näherungswerth von t, welchen wir k nennen wollen, setze $t = k + \frac{1}{w}$, und untersuche, ob die veränderte Gleichung für w eine positive oder negative Wurzel hat, die größer als 2 ist. Findet diese letzte Bedingung statt, so kann man versichert seyn, daß die Wurzel t zwischen die Grenzen $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ falle, und die Rechnung nach dem, was Nr. 72. gesagt worden ist, fortsetzen.

75.

Man kann sich aber auch auf folgende Art davon überzeugen, ob die Wurzel t zwischen den Grenzen $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ falle. Es erhellet aus Nr. 72., daß man dazu bloß zu wissen braucht, daß die Summe der Größen $\frac{1}{\frac{p}{p'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{p}{p'} - x''}$ rc., dividirt durch p'^2, kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Folglich hat man nur nöthig eine Größe zu suchen, die größer ist als diese Summe, und dann zu sehen, ob dieselbe kleiner ist als $\frac{p'^2}{2}$.

Nun seyen x, x', x'' rc. die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, und ihre Anzahl $= \mu$, ferner $\xi + \psi\sqrt{-1}$, $\xi - \psi\sqrt{-1}$, $\xi' + \psi'\sqrt{-1}$, $\xi' - \psi'\sqrt{-1}$ rc. die imaginären Wurzeln eben dieser Gleichung und ihre Anzahl $= 2\nu$, also $\mu + 2\nu = n$. Da der Bruch $\frac{p}{p'}$ von der Wurzel x um weniger als $\frac{1}{p'^2}$ unterschieden ist (Nr. 63.) so ist klar, daß, wenn Δ eine Größe bedeutet, die gleich oder kleiner ist als der kleinste Unterschied zwischen den reellen Wurzeln eben derselben Gleichung, jede der reellen Größen $\frac{1}{\frac{p}{p'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{p}{p'} - x''}$ rc. nothwendig kleiner ist als $\frac{1}{\Delta \pm \frac{1}{p'^2}}$, und daher ist denn auch die Summe dieser Größen, deren es $\mu - 1$ giebt, kleiner als $\frac{\mu - 1}{\Delta \pm \frac{1}{p'^2}}$.

Was die imaginären Größen betrift, deren je zwey und zwey unter die Form

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - \xi - \psi\sqrt{-1}}, \quad \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - \xi + \psi\sqrt{-1}}$$

gehören, weswegen man also ν Größen von der Form

$\frac{2(\frac{\rho}{\rho'} - \xi)}{(\frac{\rho}{\rho'} - \xi)^2 + \psi^2}$ hat: so ist allemal, die Zahlen $\frac{\rho}{\rho'}$, ξ und ψ mögen seyn, welche sie wollen $\frac{2(\frac{\rho}{\rho'} - \xi)}{(\frac{\rho}{\rho'} - \xi)^2 + \psi^2}$ kleiner als $\frac{1}{\psi}$. Denn setzt man in $\frac{2y}{y^2 + \psi^2}$, $y = \psi \operatorname{tang.} \phi$, so bekömmt man $\frac{2 \sin. \cos. \phi}{\psi} = \frac{\sin. 2\phi}{\psi}$, und da der größte Werth von $\sin. 2\phi$ der Einheit gleich ist, so folgt das Uebrige leicht.

Bedeutet also Π eine Größe, die gleich oder kleiner ist als die kleinste von den Größen ψ, ψ' ꝛc., so ist die Größe $\frac{\nu}{\Pi}$ nothwendig größer als die Summe aller der imaginären Größen, wovon hier die Rede ist.

Also ist überhaupt die Größe $\frac{\mu - 1}{\Delta \pm \frac{1}{\rho'^2}} + \frac{\nu}{\Pi}$ größer als die Summe aller dieser Größen $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''}$ ꝛc.

Wenn man daher

$$\frac{\mu - 1}{\rho'^2 \Delta - 1} + \frac{\nu}{\rho'^2 \Pi} = \text{oder} < \tfrac{1}{2}$$

hat, und dabey Δ und Π positiv genommen werden, so hat man daran ein sicheres Kennzeichen, daß die Wurzel t zwischen den gegebenen Grenzen liegt.

Um die Zahlen Δ und Π zu finden, wenn man die Wurzeln der gegebenen Gleichung nicht zum voraus kennt, braucht man nur in der Gleichung der Differenzen (D) (Nr. 8. der vorhergeh. Abhandlung) die Grenze l der positiven und die Grenze $-h$ der negativen Wurzeln zu suchen. Hat man dies gethan, so kann man $\Delta =$ oder $< \frac{1}{\sqrt{l}}$ und $\Pi =$ oder $< \frac{2}{\sqrt{h}}$ nehmen.

76.

Wenn man $\frac{\mu - 1}{\Delta - 1} + \frac{\nu}{\Pi} < \tfrac{1}{2}$ hätte, so fände die erforderte Bedingung vom Anfang der Reihe an statt, so daß man sich dem Werthe von x ganz ohne alles Versuchen nähern könnte. Man rechnete alsdann auf folgende Art.

Nachdem man den ersten Werth von x in ganzen Zahlen gefunden, so hätte man, vorausgesetzt, daß man diesen Werth, er möchte größer oder kleiner seyn als x, p nennte, die beyden ersten Brüche $\frac{1}{0}$, $\frac{p}{1}$.

Nun setzte man

1) $\pi = 1$, $\pi' = 0$, $\rho = p$, $\rho' = 1$, brächte diese Werthe in den Ausdruck für R (Nr. 73.) und nähme die ganze

Zahl

Zahl, welche $\frac{-R-\pi'}{\rho'}$, d. h. $-R$ am nächsten käme. Nennte man diese ganze Zahl k, so hätte man den Bruch $\frac{k\rho+\pi}{k\rho'+\pi} = \frac{kp+1}{k}$.

2) Setzte man $\pi = p$, $\pi' = 1$, $\rho = kp+1$, $\rho' = k$, brächte diese Werthe in den Ausdruck für R, und nähme die ganze Zahl, welche $\frac{R-\pi'}{\rho'}$ d. h. $\frac{R-1}{k}$ am nächsten käme. Es sey diese Zahl $= k'$, so hätte man den Bruch $\frac{k'\rho+\pi}{k'\rho'+\pi'} = \frac{k'(kp+1)+p}{k'k+1}$.

3) Setzte man $k = kp+1$, $\pi' = k$, $\rho = k'(kp+1)+p$, $\rho' = k'k+1$, substituirte und nähme die ganze Zahl, welche $\frac{-R-\pi'}{\rho'}$ oder $\frac{-R-k}{kk'+1}$ am nächsten käme. Nennte man diese Zahl k'', so hätte man den Bruch $\frac{k''\rho+\pi}{k''\rho'+\pi'} =$ rc. u. s. f.

Auf diese Art würde x durch folgenden continuirlichen Bruch

$$p + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k' + \cfrac{1}{k'' + \text{rc.}}}}$$

oder durch diese convergirenden Brüche ausgedruckt

$$\frac{1}{0},\ \frac{p}{1},\ \frac{kp+1}{k},\ \frac{k'(kp+1)+p}{k'k+1},\ \text{rc.}$$

77.

Wenn man nicht sogleich $\frac{\mu - 1}{\Delta - 1} + \frac{\nu}{\pi} < \frac{1}{2}$ hat, so darf man nur den continuirlichen Bruch nach der gewöhnlichen Methode so weit suchen, bis man zu einem Bruche gelangt, bey dessen Nenner ρ' $\frac{\mu - 1}{\rho'^2 \Delta - 1} + \frac{\nu}{\rho'^2 \pi} < 1$ ist, oder bis man zu einer veränderten Gleichung kommt, welche die Nr. 74. beschriebene Beschaffenheit hat. Alsdann läßt sich die Rechnung nach der vorhergehenden Methode fortsetzen.

Da übrigens, wenn man alle Wurzeln einer Gleichung in irgend einem Verhältnisse vergrößert, die Unterschiede dieser Wurzeln dadurch in eben dem Verhältnisse vergrößert werden, so erhellet, daß bey der Substitution von $\frac{x}{f}$ für x in der gegebenen Gleichung und der dadurch hervorgebrachten Vergrößerung ihrer Wurzeln in dem Verhältnisse von 1 : f, die Zahlen Δ und π, welche der neuen Gleichung zukommen, in eben dem Verhältnisse vergrößert werden, und also in $f\Delta$ und $f\pi$ übergehen müssen. Man kann demnach die Bedingung der 76sten Nummer erhalten, wenn man f einen solchen Werth giebt, daß

$$\frac{\mu - 1}{f\Delta - 1} + \frac{\nu}{f\pi} = \text{oder} < \frac{1}{2}$$

wird. Thut man dieses, so kann man sich allemal der vorhergehenden Methode bedienen, um den Werth von x ohne alles Versuchen auf dem Wege der Näherung zu finden; nur muß man den gefundenen Werth darauf noch durch f dividiren, um den Werth der Wurzel der gegebenen Gleichung, zu bekommen. Zwar erhält man auf diese Art die Wurzel nicht mehr in einem bloßen continuirlichen Bruche, aber doch

dem

dem wahren Werthe so sehr genähert als man irgend will, und dieses reicht für den gewöhnlichen Gebrauch hin.

78.

Es sey die Gleichung

$$x^n - A = 0$$

gegeben, wo also die nte Wurzel von A zu finden ist.

Es sey 1) n eine gerade Zahl und $= 2m$, so hat die Gleichung, wie bekannt, zwey reelle Wurzeln $+ \sqrt[n]{A}$ und $- \sqrt[n]{A}$, und $n - 2$ imaginäre Wurzeln, welche sich auf folgende Art ausdrucken lassen,

$$(\cos.\frac{sc}{n} \pm \sin.\frac{sc}{n}\sqrt{-1})\sqrt[n]{A}$$

wenn c den Umfang eines Kreises oder einen Winkel von 360° bedeutet, und für s nach und nach alle natürliche Zahlen, 1, 2, 3, rc. bis $m - 1$ gesetzt werden. Man hat also in diesem Falle (Nr. 75.) $\mu = 2$, $\nu = m - 1$, und da $\sin.\frac{c}{n}$ der kleinste von allen $\sin.\frac{sc}{n}$ ist, so kann man $\triangle = 2\sqrt[n]{A}$, $\pi = \sin.\frac{c}{n}\sqrt[n]{A}$ nehmen. Es findet demnach die Bedingung des 76sten §. statt, wenn

$$\frac{1}{2\sqrt[n]{A} - 1} + \frac{m-1}{\sin.\frac{c}{n}\sqrt[n]{A}} = \text{oder} < \tfrac{1}{2},$$

und also sicher allemal, wenn

$$A = \text{oder} > \frac{n}{\sin.\frac{360^\circ}{n}})^n$$

ist.

Ferner sey 2) n eine ungerade Zahl und $= 2m + 1$. In diesem Falle hat die Gleichung nicht mehr als eine reelle Wurzel $\sqrt[n]{A}$, und 2m imaginäre, deren Form

$$(\cos.\frac{sc}{n} \pm \sin.\frac{sc}{n}\sqrt{-1})\sqrt[n]{A}$$

ist, wenn für s nach und nach 1, 2, 3, ꝛc. bis m gesetzt wird. Man hat also für diesen Fall $\mu = 1$, $\nu = m$; und da unter den $\sin.\frac{sc}{n}$ der $\sin.\frac{mc}{2} = \sin.\frac{180^\circ}{n}$ (weil $n = 2m + 1$) der kleinste ist, so kann man $\pi = \sin.\frac{180^\circ}{n}\sqrt[n]{A}$ nehmen. Folglich hat die vorhin gedachte Bedingung statt, wenn

$$\frac{m}{\sin.\frac{180^\circ}{n}\sqrt[n]{A}} = \text{oder} < \tfrac{1}{2}, \text{ d. h. wenn}$$

$$A = \text{oder} > \left(\frac{n-1}{\sin.\frac{180^\circ}{n}}\right)^n \text{ ist.}$$

Ist daher die Zahl A nicht kleiner als die Grenzen, welche wir so eben gefunden haben, so kann man jedesmal ohne alles Versuchen nach der Methode der 76sten Nr. die nte Wurzel dieser Zahl finden; und ist sie kleiner, so kann man sie allemal größer machen, indem man sie durch eine Zahl multiplicirt, welche eine genaue Potestät von eben dem oder vom nten Grade ist. Denn hat man die Wurzel von diesem Produkte gefunden, so darf man dieselbe nur durch die Wurzel des gebrauchten Multiplicators dividiren, um die gesuchte Wurzel von A zu finden.

Der Werth von R (Nr. 72.) für die Gleichung $x^n - A = 0$ ist übrigens

$$R = \frac{n\rho^{n-1}}{\rho^n - A\rho'^n}$$

79. Da

79.

Da der Fall, wenn $n = 2$ ist, nach der Methode der 2ten Anmerkung aufgelöset werden kann, so übergehen wir ihn hier. Es sey also

1. $n = 4$, so hat man $\sin.\frac{360^\circ}{4} = 1$, und also

$A =$ oder $> 4^4$. Ferner sey

2. $n = 6$, so hat man $\sin.\frac{360^\circ}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und also

$A =$ oder $> 3^3 . 4^6$. Nun sey

3. $n = 8$, so hat man $\sin.\frac{360^\circ}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, und also

$A =$ oder $> 2^4 . 4^8$

ꝛc.

Eben so, wenn

1. $n = 3$ ist, so hat man $\sin.\frac{360^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und also

$A =$ oder $> \frac{4^3}{3\sqrt{3}}$. Ist

2. $n = 5$, so hat man $\sin.\frac{360^\circ}{5} = \sin. 72^\circ$, und rechnet man mit den Logarithmen, so findet man

$A =$ oder > 1315

u. s. f.

80.

Gesetzt z. B. es sollte die Cubikwurzel aus 17 gesucht werden, so ist $17 > \frac{4^3}{3\sqrt{3}}$, weil $3\sqrt{3} > 4$ ist. Man kann also sogleich die Methode der 76sten Nr. brauchen, und hat, da $n = 3$ und $A = 17$ ist (Nr. 78.)

$$R = \frac{3\rho^2}{\rho^3 - 17\rho'^3}.$$

Nun

Nun ist die ganze Zahl, welche der Cubikwurzel von 17 am nächsten kommt, 2 oder 3, so daß man also $p = 2$ oder $p = 3$ setzen kann.

Es sey $p = 2$, so sind die beyden ersten Brüche $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, folglich

1) $\pi = 1$, $\pi' = 0$, $\rho = 2$, $\rho' = 1$; also $R = \frac{3 \cdot 4}{8 - 17}$ $= -\frac{4}{3}$, und die ganze Zahl, welche $\frac{-R - \pi'}{\rho'} = \frac{4}{3}$ am nächsten kommt, ist $= 1$. Es wird demnach $k = 1$, und $\frac{kp + 1}{k} = \frac{3}{1}$. Ferner ist

2) $\pi = 2$, $\pi' = 1$, $\rho = 3$, $\rho' = 1$; also $R = \frac{39}{10}$ und $\frac{R - \pi'}{\rho'} = \frac{17}{10}$. Da also die ganze Zahl, welche $\frac{17}{10}$ am nächsten kommt, 2 ist, so setze man $k' = 2$, wodurch man den Bruch $\frac{k'\rho + \pi}{k'\rho' + \pi'} = \frac{8}{3}$ bekommt. Nun sey

3) $\pi = 3$, $\pi' = 1$, $\rho = 8$, $\rho' = 3$, also $R = \frac{3 \cdot 8^2}{8^3 - 17 \cdot 3^3}$ $= \frac{192}{33}$ und $\frac{-R - \pi'}{\rho'} = -\frac{245}{159}$. Die ganze Zahl, welche diesem Bruche am nächsten kommt, ist -2, und also ist der Bruch $\frac{k''\rho + \pi}{k''\rho' + \pi'} = \frac{-13}{-5}$. Nun kann man

4) $\pi = 8$,

4) $\pi = 8$, $\pi' = 3$, $\rho = -13$, $\rho' = -5$ setzen, und auf ähnliche Art damit verfahren wie vorher.

Auf diese Art erhält man für $\sqrt[3]{17}$ die convergirenden Brüche

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{-13}{-5}, \text{etc.}$$

und den continuirlichen Bruch

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{-2 + \text{etc.}}}}$$

---

5. Neue Methode der Auflösung der Gleichungen vermittelst der Reihen.

Vom

Herrn de la Grange.

Aus dem 24sten Bande der Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Ich will in dieser Abhandlung eine sehr einfache und sehr allgemeine Methode mittheilen, die Wurzeln algebraischer Gleichungen in ohne Ende fortlaufende Reihen zu verwandeln; ein Gegenstand, der bereits viel Mathematiker beschäftiget hat.

Meine Methode hat, wo ich nicht irre, vor allen bis jetzt bekannten Methoden beträchtliche Vorzüge. Denn einmal erhält man dadurch einen Ausdruck für jede Wurzel der gegebenen Gleichung, da die übrigen hingegen gewöhnlicher Weise nur zu einem Ausdrucke für eine einzige Wurzel leiten. Zum andern giebt sie die gesuchten Wurzeln in regulären Reihen, d. h. in solchen, deren Glieder nach einem allgemeinen und bekannten Gesetze fortschreiten, so daß es leicht ist, dieselben so weit fortzusetzen als man irgend will. Drittens sind diese Reihen so beschaffen, daß man die Form ihrer letzten Glieder leicht finden und daraus die Bedingungen herleiten kann, wobey sie entweder convergiren oder divergiren.

giren. Auch kann man viertens durch eben diese Methode einen Ausdruck für jede Potestät, ja für jede Funktion der gesuchten Wurzel finden. Endlich läßt sich dieselbe fünftens auch bey den transcendenten Gleichungen, welche Logarithmen und Kreisbogen enthalten, anwenden, und kann gebraucht werden, verschiedene wichtige Probleme dieser Gattung auf eine viel einfachere und genauere Art aufzulösen, als man es bis jetzt gekonnt hat.

§. 1.

Von der Erfindung der Summen der Potestäten eines jeden Grades von allen Wurzeln einer gegebenen Gleichung.

Die Auflösung dieses Problems ist bereits hinlänglich bekannt; ich theile sie indeß gleichwohl auch hier mit, theils weil dieselbe mit dem Gegenstande dieser Abhandlung in Verbindung steht, theils weil meine Methode in verschiedener Rücksicht einfacher und allgemeiner ist als die gewöhnliche.

1.

Es sey

$$o = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{ꝛc.} \ldots (A)$$

eine Gleichung von irgend einem Grade, und ihre Wurzeln p, q, r, ꝛc.: so ist nach der Theorie von den Gleichungen

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$a\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \ldots\ldots (B)$$

Dividirt man demnach durch a, so wird

$$1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{ꝛc.}}{a} =$$

(1 —

$$(1 - \frac{x}{p})(1 - \frac{x}{q})(1 - \frac{x}{r}) \ldots\ldots$$

und nimmt man von beyden Seiten die Logarithmen, so bekömmt man

$$l(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{ꝛc.}}{a}) =$$

$$l(1 - \frac{x}{p}) + l(1 - \frac{x}{q}) + l(1 - \frac{x}{r}) + \text{ꝛc.}$$

Nun ist allgemein

$$l(1 - u) = - u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \text{ꝛc.}$$

und also

$$l(1 + \frac{x}{p}) + l(1 - \frac{x}{q}) + l(1 - \frac{x}{r}) + \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$- x\,(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{ꝛc.})$$

$$- \frac{x^2}{2}(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{ꝛc.})$$

$$- \frac{x^3}{3}(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{ꝛc.})$$

$$\text{ꝛc.}$$

Setzt man daher

$$- l(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{ꝛc.}}{a}) =$$

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ꝛc.}$$

so wird

$$A = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{ꝛc.}$$

$$2B = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{ꝛc.}$$

$$3C = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\text{ꝛc.}$$

2. Da

2.

Da

$$-\,l\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{ꝛc.}}{a}\right) =$$

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ꝛc.}$$

angenommen worden ist, so findet man, wenn man beyde Seiten dieser Gleichung differenziirt und durch dx dividirt

$$\frac{b - 2cx + 3dx^2 - \text{ꝛc.}}{a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{ꝛc.}} =$$

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man daher übers Creuz und vergleicht die Glieder, so bekommt man,

$$A = \frac{b}{a}$$

$$2B = \frac{Ab - 2c}{a}$$

$$3C = \frac{2Bb - Ac + 3d}{a}$$

u. s. f. Man findet auf diese Art die bekannten Newtonianischen Formeln.

Ein jeder Coefficient setzt dabey alle vor ihm vorhergehende voraus; will man auf einmal den Ausdruck für den Coefficienten der Potestät x^m haben, welchen wir M nennen wollen und der folglich

$$\frac{\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{ꝛc.}}{m}$$

gleich seyn wird: so kann man diese Absicht auf folgendem Wege erreichen.

§. 3.

Man erwäge, daß

$$l\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a}\right) =$$

$$l\left(1 - \frac{bx}{a}\right) + l\left(1 - \frac{-cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a\left(1 - \frac{bx}{a}\right)}\right)$$

ist. Ferner setze man der Kürze wegen

$$\frac{-cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a} = X$$

wodurch man

$$l\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a}\right) =$$

$$l\left(1 - \frac{bx}{a}\right) + l\left(1 - \frac{X}{1 - \frac{bx}{a}}\right)$$

bekommt. Verwandelt man nun diese beyden letzten Logarithmen in eine Reihe, so wird

$$-l\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a}\right)$$

$$=$$

$$\frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^3x^3}{3a^3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{X}{1 - \frac{bx}{a}} + \frac{X^2}{2\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^2} + \frac{X^3}{3\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^3} + \text{etc.}$$

$$=$$

$$A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} + Mx^m + \text{etc.}$$

Nun ist bekannt, daß

$$\frac{1}{1 - \frac{bx}{a}} = 1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{bx}{a})^2} = 1 + \frac{2bx}{a} + \frac{3b^2x^2}{a^2} + \frac{4b^3x^3}{a^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{bx}{a})^3} = \tfrac{1}{2}(1.2 + \frac{2.3bx}{a} + \frac{3.4b^2x^2}{a^2} + \frac{4.5b^3x^3}{a^3} + \text{ꝛc.})$$

$$\frac{1}{(1-\frac{bx}{a})^4} = \frac{1}{2.3}(1.2.3 + \frac{2.3.4bx}{a} + \frac{3.4.5b^2x^2}{a^2} + \frac{4.5.6b^3x^3}{a^3}$$
$$+ \text{ꝛc.})$$

ꝛc.

ist. Setzt man daher der größern Leichtigkeit wegen

$$X = \alpha x^2 + \alpha' x^3 + \alpha'' x^4 + \text{ꝛc.}$$
$$X^2 = \beta x^4 + \beta' x^5 + \beta'' x^6 + \text{ꝛc.}$$
$$X^3 = \gamma x^6 + \gamma' x^7 + \gamma'' x^8 + \text{ꝛc.}$$

so fällt in die Augen, daß der Coefficient der Potestät x^m in der nach den Potestäten von x entwickelten Größe $\frac{X}{1-\frac{bx}{a}}$ durch

$$\alpha(\frac{b}{a})^{m-2} + \alpha'(\frac{b}{a})^{m-3} + \text{ꝛc.} + \alpha^{m'-2'}$$

der Coefficient eben dieser Potestät in der Größe $\frac{X^2}{2(1-\frac{bx}{a})^2}$

$$\tfrac{1}{2}((m-3)\beta(\frac{b}{a})^{m-4} + (m-4)\beta'(\frac{b}{a})^{m-5} + \text{ꝛc.} + \beta^{m'-4'})$$

und in der Größe $\frac{X^3}{3(1-\frac{bx}{a})^3}$

$$\frac{1}{2.3}((m-4)(m-5)\gamma(\frac{b}{a})^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma'(\frac{b}{a})^{m-7} +$$
$$\text{ꝛc.} + 1.2\gamma^{m'-6'})$$

und so ferner seyn wird.

Hieraus fließt

$$M = \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$+ \alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \alpha'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \text{ꝛc.} + \alpha^{m'-2'}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left((m-3)\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + (m-4)\beta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \text{ꝛc.} + \beta^{m'-4'}\right)$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left((m-4)(m-5)\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \text{ꝛc.} + 1.2\gamma^{m'-6'}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Da also $Mm = \frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{ꝛc.}$ ist, so hat man allgemein

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{ꝛc.} =$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m + m\alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + m\alpha'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \text{ꝛc.} + m\alpha^{m'-2'}$$

$$+ \frac{m(m-3)}{2}\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + \frac{m(m-4)}{2}\beta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \text{ꝛc.} + \frac{m}{2}\beta^{m'-4'}$$

$$+ \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)}{2.3}\gamma'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \text{ꝛc.} + \frac{m}{3}\gamma^{m'-6'}$$

$$+ \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}\delta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-8} + \frac{m(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3.4}\delta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-9} + \text{ꝛc.} + \frac{m}{4}\delta^{m'-8'}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

3. Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung des zweyten Grades

$$a - bx + cx^2 = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist $X = \frac{-cx^2}{a}$, folglich

$$X^2 = \frac{c^2x^4}{a^2}; \quad X^3 = -\frac{c^3x^6}{a^3}, \text{ ꝛc.}$$

also

$$\alpha = -\frac{c}{a}, \ \beta = \frac{c^2}{a^2}, \ \gamma = -\frac{c^3}{a^3}, \text{ ꝛc.}$$

und alle übrige Größen α', β' ꝛc. $= 0$. Sind daher p und q die Wurzeln dieser Gleichung, so hat man allgemein

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} = (\frac{b}{a})^m - \frac{mc}{a}(\frac{b}{a})^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-3)c^2}{2a^2}(\frac{b}{a})^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)c^3}{2.3a^3}(\frac{b}{a})^{m-6}$$

$$+ \text{ ꝛc.}$$

bis man zu Potestäten von $\frac{b}{a}$ mit negativen Exponenten kommt.

4. Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung des dritten Grades

$$a - bx + cx^2 - dx^3 = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist

$$X = \frac{-cx^2 + dx^3}{a} = -\frac{x^2}{a}(c - dx)$$

folglich

$$X^2 = \frac{x^4}{a^2}(c^2 - 2cdx + d^2x^2)$$

$$X^3 = \frac{x^6}{a^3}(c^3 - 3c^2dx + 3cd^2x^2 - d^3x^3)$$

ꝛc.

also

$$\alpha = -\frac{c}{a},\quad \alpha' = \frac{d}{a}$$

$$\beta = \frac{c^2}{a^2},\quad \beta' = -\frac{2cd}{a^2},\quad \beta'' = \frac{d^2}{a^2}$$

$$\gamma = -\frac{c^3}{a^3},\quad \gamma' = \frac{3c^2d}{a^3},\ \text{rc.}$$

Nennt man demnach die drey Wurzeln der gegebenen Gleichung p, q und r, so hat man allgemein

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m}$$

$$=$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m - \frac{mc}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \frac{md}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3}$$

$$+ \frac{m(m-3)}{2a^2}c^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} - \frac{m(m-4)}{2a^2} \cdot 2cd\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5}$$

$$+ \frac{m(m-5)}{2a^2}d^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3a^3}c^3\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6}$$

$$+ \frac{m(m-5)(m-6)}{2.3.a^3} \cdot 3c^2d\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7}$$

$$- \frac{m(m-6)(m-7)}{2.3a^3} \cdot 3cd^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-8}$$

$$+ \frac{m(m-7)(m-8)}{2.3a^3}d^3\left(\frac{b}{a}\right)^{m-9} + \text{rc.}$$

und diese Reihe läuft fort, bis man zu negativen Potestäten von $\frac{b}{a}$ kommt.

5. Drittes Exempel.

Es sey die Gleichung

$$a - bx - x^n = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist

X =

$$X = \frac{x^n}{a}, \text{ folglich}$$

$$X^2 = \frac{x^{2n}}{a^2}, \quad X^3 = \frac{x^{3n}}{a^3}, \text{ ꝛc.}$$

folglich

$$\alpha^{n'-2'} = \frac{1}{a}, \quad \beta^{2n'-4'} = \frac{1}{a^2}, \text{ ꝛc.}$$

und alle übrige Größen $= 0$. Demnach ist

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m + \frac{m}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-n} + \frac{m(m-2n+1)}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2n}$$

$$+ \frac{m(m-3n+2)(m-3n+1)}{2.3a^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3n}$$

$$+ \frac{m(m-4n+3)(m-4n+2)(m-4n+1)}{2.3.4a^4}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4n}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

bis man zu negativen Potestäten von $\frac{b}{a}$ kommt.

Ohnerachtet wir übrigens hier bloß die Formel für die Summe der Potestäten $\frac{1}{p^m}$, $\frac{1}{q^m}$, $\frac{1}{r^m}$ ꝛc. gegeben haben, wo p, q, r, ꝛc. die Wurzeln einer gegebenen Gleichung sind: so läßt sich doch auch daraus die Summe der Potestäten p^m, q^m, r^m, ꝛc. sehr leicht finden. Zu diesem Ende braucht man bloß die Wurzeln der gegebenen Gleichung in ihre reciproken Größen zu verwandeln, indem man $\frac{1}{x}$ für x setzt. Denn nennt man die Wurzeln der veränderten Gleichung p', q', r' ꝛc., so hat man

$$\frac{1}{p'^m} + \frac{1}{q'^m} + \frac{1}{r'^m} + \text{ꝛc.} = p^m + q^m + r^m + \text{ꝛc.}$$

6.

Da

$$X = \alpha x^2 + \alpha' x^3 + \text{ꝛc.}$$
$$X^2 = \beta x^4 + \beta' x^5 + \text{ꝛc.}$$
$$X^3 = \gamma x^6 + \gamma' x^7 + \text{ꝛc.}$$

ist (Nr. 3.) so erhellet, daß in dem Falle, wenn man $x = \frac{1}{y}$ setzt, und Y die Funktion von y bedeuten läßt, worin X verwandelt wird,

$$Y y^m = \alpha y^{m-2} + \alpha' y^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$\frac{d.Y^2 y^{m+1}}{dy} = (m-3)\beta y^{m-4} + (m-4)\beta' y^{m-5} + \text{ꝛc.}$$
$$\frac{d^2.Y^3 y^{m+2}}{dy^2} = (m-4)(m-5)\gamma y^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma' y^{m-7} + \text{ꝛc.}$$

ist. Hieraus folgt, daß man die Formel der angeführten Nummer auch auf diese Art ausdrucken kann

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$=$$
$$\frac{y^m}{m} + Y y^m + \frac{d.Y^2 y^{m+1}}{2dy} + \frac{d^2.Y^3 y^{m+2}}{2.3dy^2} + \text{ꝛc.}$$

wenn man nach der Differenziation $\frac{b}{a}$ für y setzt und alle Glieder wegläßt, welche negative Potestäten von y oder $\frac{b}{a}$ enthalten würden. Auf diese Art lassen sich also die Summen der Wurzeln einer jeden Gleichung, und zwar dieser Wurzeln in jeder beliebigen Potestät sehr leicht finden.

§. 2.

§. 2.

Methode, die Wurzeln einer jeden Gleichung durch eine Reihe darzustellen.

7.

Wir wollen wieder die Gleichung

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{etc.} \; \ldots\ldots \; (A)$$

zur Hand nehmen, die Wurzeln derselben p, q, r, etc. nennen, und sehen, wie man den Werth einer jeden dieser Wurzeln insbesondere finden kann.

Es ist, wie wir im vorhergehenden §. gesehen haben,

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{etc.}$$

$$=$$

$$a(1 - \frac{x}{p})(1 - \frac{x}{q})(1 - \frac{x}{r}) \ldots\ldots (B)$$

Dividirt man diese Gleichung durch bx und verändert darin die Zeichen, so wird

$$1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \text{etc.}}{b}$$

$$=$$

$$-\frac{a}{bx}(1 - \frac{x}{p})(1 - \frac{x}{q})(1 - \frac{x}{r}) \ldots\ldots$$

$$=$$

$$\frac{a}{bp}(1 - \frac{p}{x})(1 - \frac{x}{q})(1 - \frac{x}{r}) \ldots\ldots$$

Nimmt man ferner von beyden Seiten die Logarithmen, so wird

$$l(1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \text{etc.}}{b})$$

$$=$$

$$l\frac{a}{bp} + l(1 - \frac{p}{x}) + l(1 - \frac{x}{q}) + l(1 - \frac{x}{r}) + \text{ꝛc.} \ldots (C)$$

Setzt man demnach der Kürze wegen

$$X = \frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 - \text{ꝛc.}$$

und verwandelt $l(1 - \frac{X}{b})$, $l(1 - \frac{p}{x})$, $l(1 - \frac{x}{q})$, ꝛc. in Reihen, so ist nach Veränderung der Zeichen,

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$l\frac{bp}{a} + \frac{p}{x} + \frac{p^2}{2x^2} + \frac{p^3}{3x^3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ x(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{ꝛc.})$$

$$+ \frac{x^2}{2}(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{ꝛc.})$$

$$+ \frac{x^3}{3}(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{ꝛc.})$$

$$+ \text{ꝛc.} \ldots\ldots\ldots (D)$$

Nun muß diese Gleichung identisch seyn, da die Gleichung (B) es ist; und wenn man daher an die Stelle von X den Werth desselben, oder $\frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 + \text{ꝛc.}$ wieder setzt und dabey

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{ꝛc.} =$$

$$\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^2} + \text{ꝛc.}$$

$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.}$$

annimmt, so giebt die Vergleichung der Glieder

α =

$$\alpha = l\frac{bp}{a},\quad \beta = p,\quad \gamma = \frac{p^2}{2},\quad \delta = \frac{p^3}{3} \text{ ꝛc.}$$

Auf diese Art lernt man also nicht nur den Werth der Wurzel p, sondern auch das Quadrat, den Cubus ꝛc., so wie auch den Logarithmen derselben kennen. Dieser Logarithme ist

$$lp = \alpha - l\frac{b}{a} = \alpha + l\frac{a}{b}.$$

8. Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung des zweyten Grades

$$a - bx + cx^2 = 0$$

gegeben. Hier ist

$$X = \frac{a}{x} + cx, \text{ folglich}$$

$$X^2 = \frac{a^2}{x^2} + 2ac + c^2x^2,$$

$$X^3 = \frac{a^3}{x^3} + \frac{3a^2c}{x} + 3ac^2x + c^3x^3$$

$$X^4 = \frac{a^4}{x^4} + \frac{4a^3c}{x^2} + 6a^2c^2 + 4ac^3x^3 + c^4x^4$$

ꝛc.

und also

$$\alpha = \frac{2ac}{2b^2} + \frac{4.3a^2c^2}{2.4b^4} + \frac{6.5.4a^3c^3}{2.3.6b^6} + \text{ꝛc.}$$

$$\beta = \frac{a}{b} + \frac{3a^2c}{3b^3} + \frac{5.4a^3c^2}{2.5b^5} + \frac{7.6.5a^4c^3}{2.3.7b^7} + \text{ꝛc.}$$

$$\gamma = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{4a^3c}{4b^4} + \frac{6.5a^4c^2}{2.6b^6} + \frac{8.7.6a^6c^3}{2.3.8b^8} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Setzt man demnach x in die Stelle von p, so wird

$$lx = l\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{5\cdot 4a^3c^3}{2\cdot 3b^6} + \text{etc.}$$

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \frac{6\cdot 5a^4c^3}{2\cdot 3b^7} + \text{etc.}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3c}{b^4} + \frac{5a^4c^2}{2b^6} + \frac{7\cdot 6a^5c^3}{2\cdot 3b^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{a^3}{3b^3} + \frac{a^4c}{b^5} + \frac{6a^5c^2}{2b^7} + \frac{8\cdot 7a^6c^3}{2\cdot 3b^9} + \text{etc.}$$

etc.

und überhaupt

$$\frac{x^m}{m} = \frac{a^m}{mb^m} + \frac{a^{m+1}c}{b^{m+2}} + \frac{(m+3)a^{m+2}c^2}{2b^{m+4}}$$
$$+ \frac{(m+5)(m+4)a^{m+3}c^3}{2\cdot 3\cdot b^{m+6}} + \text{etc.}$$

Löset man die gegebene Gleichung auf, so findet man

$$x = \frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2c}$$

und verwandelt man die Wurzelgröße in eine Reihe, so bekommt man

$$b - \frac{2ac}{b} - \frac{(2ac)^2}{2b^3} - \frac{1\cdot 3(2ac)^3}{2\cdot 3b^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5(2ac)^4}{2\cdot 3\cdot 4b^7} - \text{etc.}$$

oder

$$b - 2\left(\frac{ac}{b} + \frac{a^2c^2}{b^3} + \frac{4a^3c^3}{2b^5} + \frac{6\cdot 5a^4c^4}{2\cdot 3b^7} + \text{etc.}\right)$$

so daß die beyden Werthe von x sind

$$\frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{2b^5} - \frac{6\cdot 5a^4c^3}{2\cdot 3b^7} - \text{etc.}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \frac{6\cdot 5a^4c^3}{2\cdot 3b^7} + \text{etc.}$$

Es ist aber dieser letzte Werth mit dem, welchen wir gefunden haben, durchaus einerley.

9.

Da die ganze Schwierigkeit hierbey in der Erfindung der Coefficienten α, β, γ, rc. der negativen Potestäten von x in $\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{rc.}$ (Nr. 7.) liegt, so wollen wir suchen, diese Erfindung so leicht und zugleich so allgemein zu machen als möglich ist. Zu dem Ende wiederhole ich, daß

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{rc.} = -\,l\left(1 - \frac{X}{b}\right)$$

ist. Da nun

$$X = \frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 - \text{rc.}$$

ist, so wird, wenn man der Kürze wegen

$$\xi = \frac{cx - dx^2 + ex^3 - \text{rc.}}{b}$$

setzt

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{rc.} = -\,l\left(1 - \frac{a}{bx} - \xi\right)$$

$$=$$

$$-\,l\left(1 - \frac{a}{bx}\right) - l\left(1 - \frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}}\right).$$

Verwandelt man aber diese beyden Logarithmen in Reihen so erhält man

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{rc.}$$

$$=$$

$$\frac{a}{bx} + \frac{a^2}{2b^2x^2} + \frac{a^3}{3b^3x^3} + \text{rc.}$$

$$+ \frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}} + \frac{\xi^2}{2\left(1 - \frac{a}{bx}\right)^2} + \frac{\xi^3}{3\left(1 - \frac{a}{bx}\right)^3} + \text{rc.}$$

=

$$=$$

$$l\frac{bp}{a} + \frac{p}{x} + \frac{p^2}{2x^2} + \frac{p^3}{3x^3} + \text{rc.}$$

$$+ x\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{rc.}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{rc.}\right)$$

$$+ \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{rc.}\right) + \text{rc.} \ldots\ldots (E)$$

Man vergleiche hierbey Nr. 7. Nun ist, in eine Reihe verwandelt,

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{bx}} = 1 + \frac{a}{bx} + \frac{a^2}{b^2x^2} + \frac{a^3}{b^3x^3} + \text{rc.}$$

$$\frac{1}{(1 - \frac{a}{bx})^2} = 1 + \frac{2a}{bx} + \frac{3a^2}{b^2x^2} + \frac{4a^3}{b^3x^3} + \text{rc.}$$

$$\frac{1}{(1 - \frac{a}{bx})^3} = \tfrac{1}{2}\left(1.2 + \frac{2.3a}{bx} + \frac{3.4.a^2}{b^2x^2} + \text{rc.}\right)$$

rc.

Setzt man demnach allgemein

$$\xi = \pi + \pi'x + \pi''x^2 + \pi'''x^3 + \text{rc.}$$
$$\xi^2 = \rho + \rho'x + \rho''x^2 + \rho'''x^3 + \text{rc.}$$
$$\xi^3 = \sigma + \sigma'x + \sigma''x^2 + \sigma'''x^3 + \text{rc.}$$

rc.

so findet man, indem man von eben den Gliedern, welche positive Potestäten von x enthalten würden, abstrahirt,

$$\frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}} = \pi + \pi'\frac{a}{b} + \pi''\frac{a^2}{b^2} + \pi'''\frac{a^3}{b^3} + \text{rc.}$$

$$+ \frac{1}{x}\left(\pi\frac{a}{b} + \pi'\frac{a^2}{b^2} + \pi''\frac{a^3}{b^3} + \text{rc.}\right)$$

+

$$+ \frac{1}{x^2}\left(\pi\frac{a^2}{b^2} + \pi'\frac{a^3}{b^3} + \pi''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\xi^2}{2\left(1 - \frac{a}{bx}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\left(\rho + 2\rho'\frac{a}{b} + 3\rho''\frac{a^2}{b^2} + 4\rho'''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2x}\left(2\rho\frac{a}{b} + 3\rho'\frac{a^2}{b^2} + 4\rho''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2x^2}\left(3\rho\frac{a^2}{b^2} + 4\rho'\frac{a^3}{b^3} + 5\rho''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\xi^3}{3\left(1 - \frac{a}{bx}\right)^3} = \frac{1}{2.3}\left(1.2\sigma + 2.3\sigma'\frac{a}{b} + 3.4\sigma''\frac{a^2}{b^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3x}\left(2.3\sigma\frac{a}{b} + 3.4\sigma'\frac{a^2}{b^2} + 4.5\sigma''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3x^2}\left(3.4\sigma\frac{a^2}{b^2} + 4.5\sigma'\frac{a^3}{b^3} + 5.6\sigma''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

und so ferner.

Bringt man daher diese Werthe in die Gleichung (E) und vergleicht die Glieder, worin x^0, x^{-1}, x^{-2} ꝛc., vorkommt, so findet man, weil $l\frac{bp}{a} = lp - l\frac{a}{b}$ ist,

$$lp = l\frac{a}{b} + \pi + \pi'\frac{a}{b} + \pi''\frac{a^2}{b^2} + \pi'''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\rho + 2\rho'\frac{a}{b} + 3\rho''\frac{a^2}{b^2} + 4\rho'''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left(1.2\sigma + 2.3\sigma'\frac{a}{b} + 3.4\sigma''\frac{a^2}{b^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}\left(1.2.3\tau + 2.3.4\tau'\frac{a}{b} + 3.4.5\tau''\frac{a^2}{b^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

p =

$$p = \frac{a}{b} + \pi\frac{a}{b} + \pi'\frac{a^2}{b^2} + \pi''\frac{a^3}{b^3} + \text{etc.}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(2\rho\frac{a}{b} + 3\rho'\frac{a^2}{b^2} + 4\rho''\frac{a^3}{b^3} + \text{etc.})$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 3}(2.3\sigma\frac{a}{b} + 3\cdot 4\sigma'\frac{a^2}{b^2} + 4\cdot 5\sigma''\frac{a^3}{b^3} + \text{etc.})$$

$$+ \text{etc.}$$

$$p^2 = \frac{a^2}{b^2} + 2(\pi\frac{a^2}{b^2} + \pi'\frac{a^3}{b^3} + \pi''\frac{a^4}{b^4} + \text{etc.})$$

$$+ \frac{2}{2}(3\rho\frac{a^2}{b^2} + 4\rho'\frac{a^3}{b^3} + 5\rho''\frac{a^4}{b^4} + \text{etc.})$$

$$+ \frac{2}{2\cdot 3}(3\cdot 4\sigma\frac{a^2}{b^2} + 4\cdot 5\sigma'\frac{a^3}{b^3} + 5\cdot 6\sigma''\frac{a^4}{b^4} + \text{etc.})$$

$$+ \text{etc.}$$

$$p^3 = \frac{a^3}{b^3} + 3(\pi\frac{a^3}{b^3} + \pi'\frac{a^4}{b^4} + \pi''\frac{a^5}{b^5} + \text{etc.})$$

$$+ \frac{2}{3}(4\rho\frac{a^3}{b^3} + 5\rho'\frac{a^4}{b^4} + 6\rho''\frac{a^5}{b^5} + \text{etc.})$$

$$+ \frac{3}{2\cdot 3}(4.5\sigma\frac{a^3}{b^3} + 5\cdot 6\sigma'\frac{a^4}{b^4} + 6\cdot 7\sigma''\frac{a^5}{b^5} + \text{etc.})$$

$$+ \text{etc.}$$

und so ferner.

10.

Da man nun

$$\xi = \pi + \pi'x + \pi''x^2 + \text{etc.}$$
$$\xi^2 = \rho + \rho'x + \rho''x^2 + \text{etc.}$$
$$\xi^3 = \sigma + \sigma'x + \sigma''x^2 + \text{etc.}$$

und so ferner angenommen hat, so ist leicht einzusehen, daß wenn $x = \frac{a}{b}$ gesetzt wird

lp =

$$lp = lx + \xi + \frac{d.\xi^2 x}{2dx} + \frac{d^2.\xi^3 x^2}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}$$

$$p = x + \xi x + \frac{d.\xi^2 x^2}{2dx} + \frac{d^2.\xi^3 x^3}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}$$

$$p^2 = x^2 + 2(\xi x^2 + \frac{d.\xi^2 x^3}{2dx} + \frac{d^3.\xi^3 x^4}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}$$

$$p^3 = x^3 + 3(\xi x^3 + \frac{d.\xi^2 x^4}{2dx} + \frac{d^2.\xi^3 x^5}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

und überhaupt

$$p^m = x^m + m(\xi x^m + \frac{d.\xi^2 x^{m+1}}{2dx} + \frac{d^2.\xi^3 x^{m+2}}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}) \quad \ldots . (F)$$

ist

Auf diese Art ist p eine Wurzel der Gleichung $0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{ꝛc.}$, oder da $\xi = \frac{cx - dx^2 + \text{ꝛc.}}{b}$, von der Gleichung

$$a - bx + bx\xi = 0$$

wo ξ eine Funktion von x ist.

II. Zweytes Exempel.

Es sey z. B. die Gleichung

$$a - bx + cx^n = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist $bx\xi = cx^n$, und folglich $\xi = \frac{cx^{n-1}}{b}$. Läßt man daher p eine Wurzel von dieser Gleichung seyn, so ist überhaupt

$$p^m = x^m + m(\frac{cx^{m+n-1}}{b} + \frac{c^2 d.x^{m+2n-1}}{2b^2 dx} + \frac{c^3 d^2.x^{m+3n-1}}{2.3b^3 dx^2} + \text{ꝛc.})$$

 wenn

wenn man nach der Differenziation $\frac{a}{b}$ für x setzt. Also hat man, wenn man x für p setzt

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m\Big(\frac{c a^{m+n-1}}{b^{m+n}} + \frac{(m+2n-1)c^2 a^{m+2n-2}}{2 b^{m+2n}}$$
$$+ \frac{(m+3n-1)(m+3n-2)c^3 a^{m+3n-3}}{2 \cdot 3 b^{m+3n}}$$
$$+ \frac{(m+4n-1)(m+4n-2)(m+4n-3)c^4 a^{m+4n-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 b^{m+4n}}$$
$$+ \text{rc.}$$

Wenn man $x = \frac{1}{y}$ setzt, so daß man die Gleichung

$$a y^n - b y^{n-1} + c = 0$$

hat, so wird $y^m = x^{-m}$, und um y^m zu finden braucht man folglich in der vorhergehenden Formel nur m negativ zu nehmen. Auf diese Art findet man

$$y^m = \frac{b^m}{a^m} - m\Big(\frac{c b^{m-n}}{a^{m-n+1}} - \frac{(m-2n+1)c^2 b^{m-2n}}{2 a^{m-2n+2}}$$
$$+ \frac{(m-3n+1)(m-3n+2)c^3 b^{m-3n}}{2 \cdot 3 a^{m-3n+3}} - \text{rc.}$$

Diese letzte Formel hat mir vor einiger Zeit Hr. Lambert allein ohne Beweis mitgetheilt.

12. Drittes Exempel.

Es sey folgende Gleichung von vier Gliedern gegeben

$$a - bx + cx^n - x^r = 0.$$

Setzt man $bx\xi = cx^n - x^r$, und folglich

$$\xi = \frac{cx^{n-1} - x^{r-1}}{b}$$

so wird

$$\xi^2 = \frac{c^2 x^{2n-2} - 2cx^{n+r-2} + x^{2r-2}}{b^2}$$

$\xi^3 =$

$$\zeta^3 = \frac{c^3x^{3n-3} - 3c^2x^{2n+r-3} + 3cx^{n+2r-3} - x^{3r-3}}{b^3}$$

etc.

und also, wenn man x an die Stelle von p bringt,

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m\left(\frac{ca^{m+n-1}}{b^{m+n}} - \frac{a^{m+r-1}}{b^{m+r}}\right)$$

$$+ \frac{m}{2}\left(\frac{(m+2n-1)c^2a^{m+2n-2}}{b^{m+2n}} - 2\frac{(m+n+r-1)ca^{m+n+r-2}}{b^{m+n+r}} + \frac{(m+2r-1)a^{m+2r-2}}{b^{m+2r}}\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3}\left(\frac{(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{m+3n-3}}{b^{m+3n}}\right.$$

$$- 3\frac{(m+2n+r-1)(m+2n+r-2)c^2a^{m+2n+r-3}}{b^{m+2n+r}}$$

$$+ 3\frac{(m+n+2r-1)(m+n+2r-2)ca^{m+n+2r-3}}{b^{m+n+2r}}$$

$$\left. - \frac{(m+3r-1)(m+3r-2)a^{m+3-3}}{b^{m+3r}}\right)$$

$+$ etc.

14. Viertes Exempel.

Es sey die allgemeine Gleichung

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.} = 0$$

gegeben. Hier ist $bx\zeta = cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.}$, und folglich

$$\zeta = \frac{cx - dx^2 + ex^3 - fx^4 + \text{etc.}}{b}$$

$$\zeta^2 = \frac{c^2x^2 - 2cdx^3 + (d^2 + 2ce)x^4 - \text{etc.}}{b^2}$$

$$\zeta^3 = \frac{c^3x^3 - 3cdx^4 + \text{etc.}}{b^3}$$

$$z^4 = \frac{c^4x^4 - \text{ꝛc.}}{b^4}$$

ꝛc.

Also

$$x^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$+ m\left(\frac{a^{m+1}c}{b^{m+2}} - \frac{a^{m+2}d}{b^{m+3}} + \frac{a^{m+3}e}{b^{m+4}} - \frac{a^{m+4}f}{b^{m+5}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{m}{2}\left(\frac{(m+3)a^{m+2}c^2}{b^{m+4}} - \frac{(m+4)a^{m+3}2cd}{b^{m+5}}\right.$$

$$\left. + \frac{(m+5)a^{m+4}(a^2+2ce)}{b^{m+6}} - \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3}\left(\frac{(m+5)(m+4)a^{m+3}c^3}{b^{m+6}} - \frac{(m+6)(m+5)a^{m+4}3cd}{b^{m+7}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3.4}\left(\frac{(m+7)(m+6)(m+5)a^{m+4}c^4}{b^{m+8}} - \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Wenn $m = 1$ ist, so hat man die bekannte Newtonianische Formel

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} - \frac{a^3d}{b^4} + \frac{a^4fe}{b^5} - \frac{a^6f}{b^6} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{2a^3c^2}{b^5} - \frac{5a^4cd}{b^6} + \frac{3a^5(d^2+2ce)}{b^7} - \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{5a^4c^3}{b^7} - \frac{21a^5cd}{b^8} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{14a^5c^4}{b^9} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

14.

Nun wollen wir die allgemeine Gleichung

$$\alpha - x + \varphi x = 0$$

betrach-

betrachten, wo φx irgend eine Funktion von x bedeutet. Vergleicht man diese Gleichung mit $a - bx + bx\xi = 0$ Nr 10. oder mit $\frac{a}{b} - x + x\xi = 0$: so hat man $\alpha = \frac{a}{b}$ und $\xi = \frac{\varphi x}{x}$. Bedeutet demnach p eine Wurzel von der gegebenen Gleichung, so ist aus der Formel (F) der angeführten Nummer

$$p^m = x^m + m(x^{m-1}\varphi x + \frac{d.x^{m-1}(\varphi x)^2}{2dx} + \frac{d^2.x^{m-1}(\varphi x)^3}{2.3dx^2} + \text{rc.})$$

wenn man nach der Differenziation $x = \alpha$ setzt

Da nun $mx^{m-1} = \frac{d.x^m}{dx}$ ist, so läßt sich die vorhergehende Formel auch auf diese Art ausdrucken:

$$p^m = x^m + \frac{d.x^m}{dx}\varphi x + \frac{d.\frac{d.x^m}{dx}(\varphi x)^2}{2dx} + \frac{d^2.\frac{d.x^m}{dx}(\varphi x)^3}{2.3dx^2} + \text{rc.}$$

Hieraus fließt auf eine leichte Art, daß eine jede Funktion von p, z. B. ψp durch folgende Reihe ausgedruckt wird

$$\psi p = \psi x + \frac{d.\psi x}{dx}\varphi x + \frac{d.\frac{d.\psi x}{dx}(\varphi x)^2}{2dx} + \frac{d^2.\frac{d.\psi x}{dx}(\varphi x)^3}{2.3dx^2} + \text{rc.}$$

wofern man, wie gesagt, nach der Differenziation α für x setzt. Auf diese Art gelangt man zu folgendem, wegen seiner Simplicität und Allgemeinheit merkwürdigen Lehrsatze.

15. Lehrsatz.

Es sey die Gleichung

$$\alpha - x + \varphi x = 0 \; \ldots \; (H)$$

gegeben, und φx bedeute darin irgend eine Funktion von x. Ferner sey p eine von den Wurzeln dieser Gleichung, und dabey werde nach dem Werthe jeder Funktion von p, z. B. ψp gefragt. Bezeichnet man der Kürze wegen die Größe $\frac{d.\psi x}{dx}$ durch $\psi' x$, so hat man allgemein

$$\psi p = \psi x + \varphi x \psi' x + \frac{d.(\varphi x)^2 \psi' x}{2dx} + \frac{d^2.(\varphi x)^3 \psi' x}{2.3 dx^2}$$
$$+ \frac{d^3.(\varphi x)^4 \psi' x}{2.3.4 dx^3} + \text{etc.} \; \ldots \ldots \; (I)$$

wo man statt x nach der Differenziation α setzen muß.

16.

Wenn man $x = \alpha y$ setzt, so daß die Gleichung (H) in folgende $1 - y + \frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha} = 0$ übergeht, und q den Werth von y bedeutet: so erhält man den Ausdruck für die Funktion ψq, wenn man in der Formel (I) q anstatt p, y anstatt x und $\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}$ anstatt φx setzt, und nach der Differenziation $y = 1$ annimmt.

Da also $q = y = \frac{x}{\alpha}$, so ist

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi y + \frac{\varphi(\alpha y)\psi' y}{\alpha} + \frac{d.\varphi(\alpha y)^2\psi' y}{2\alpha^2 dy}$$
$$+ \frac{d^2.\varphi(\alpha y)^3\psi' y}{2.3\alpha^3 dy^2} + \frac{d^3.\varphi(\alpha y)^4\psi' y}{2.3.4\alpha^4 dy^3}$$
$$+ \text{ꝛc.} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (K)$$

wo nach der Differenziation $y = 1$ genommen werden muß.

17.

Da also $\psi y = \int \psi' y\, dy$ ist, so bekommt man den Werth von $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, wo x eine Wurzel der Gleichung (H) ist, wenn man den Bruch

$$\frac{\psi' y}{z\left(1 - z\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}\right)}$$

nach den Potestäten von z entwickelt, wodurch man

$$\frac{\psi' y}{z} + \frac{\varphi(\alpha y)\psi' y}{\alpha} + z\frac{\varphi(\alpha y)^2\psi' y}{\alpha^2} + z^2\frac{\varphi(\alpha y)^3\psi' y}{\alpha^3} + \text{ꝛc.}$$

bekommt, dann $\frac{1}{z}$ in $\int dy$, z in $\frac{d}{2dy}$, z^2 in $\frac{d^2.}{2.3dy^2}$, z^3 in $\frac{d^3.}{2.3.4dy^3}$ verwandelt, und, nachdem man alle angezeigten Differenziationen vorgenommen hat, $y = 1$ annimmt.

Man kann aber die Reihe, welche den Werth von $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ ausdruckt, nach jedem beliebigen Buchstaben ordnen, denn es ist dazu weiter nichts erforderlich, als die Reihe, welche aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1 - z\frac{\varphi(\alpha x)}{\alpha}}$

 ent-

entspringt, nach eben dem Buchstaben zu ordnen. Folgende Exempel werden dieses zeigen.

18. Fünftes Exempel.

Nimmt man wieder die allgemeine Gleichung

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{rc.}$$

zur Hand, und vergleichet dieselbe mit der Gleichung (H), so hat man nach der Division durch b

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \varphi x = \frac{cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{rc.}}{b}$$

Folglich ist

$$\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha} = \frac{cay^2}{b^2} - \frac{da^2y^3}{b^3} + \frac{ea^3y^4}{b^4} - \frac{fa^4y^5}{b^5} + \text{rc.}$$

und der Bruch

$$\frac{1}{1 - z\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}} =$$

$$\frac{1}{1 - z\frac{cay^2}{b^2} + z\frac{da^2y^3}{b^3} - z\frac{ea^3y^4}{b^4} + \text{rc.}}$$

Verwandelt man diesen Bruch in eine Reihe, und setzt man dabey voraus, daß die Reihe nach dem Buchstaben b geordnet sey, so erhellet, da y und $\frac{1}{b}$ allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, daß die Form der Reihe folgende seyn wird

$$1 + \frac{Py^2}{b^2} - \frac{Qy^3}{b^3} + \frac{Ry^4}{b^4} - \frac{Sy^5}{b^5} + \text{rc.}$$

Multiplicirt man demnach übers Creuz, und vergleicht darauf die Glieder, so findet man

P =

$$P = zcz$$
$$Q = a^2dz$$
$$R = a^3ez + aczP$$
$$S = a^3fz + a^2dzP + aczQ$$
$$T = a^5gz + a^3czP + a^2dzQ + aczR$$
ꝛc.

Entwickelt man nun diese Werthe und ordnet dabey dieselben nach z, so erkennt man leicht, daß sie sich auf folgende Art ausdrucken lassen

$$P = Az$$
$$Q = Bz$$
$$R = Cz + C'z^2$$
$$S = Dz + D'z^2$$
$$T = Ez + E'z^2 + E''z^3$$
ꝛc.

und findet dabey

$$A = ac$$
$$B = a^2d$$
$$C = a^3e,\ C' = acA$$
$$D = a^4f,\ D' = a^2dA + acB$$
$$E = a^5g,\ E' = a^3eA + a^2dB + acC,\ E'' = acC'$$
ꝛc.

Folglich wird

$$\frac{\psi'y}{z\left(1 - \frac{z\phi(\alpha y)}{\alpha}\right)} = \frac{\psi'y}{z} + \frac{A}{b^2}y^2\psi'y - \frac{B}{b^3}y^3\psi'y$$
$$+ \frac{C + C'z}{b^4}y^4\psi'y - \frac{D + D'z}{b^5}y^5\psi'y$$
$$+ \frac{E + E'z + E''z^2}{b^6}y^6\psi'y - \text{ꝛc.}$$

Verwandelt man demnach $\frac{1}{z}$ in $\int dy$, z in $\frac{d}{2dy}$ ꝛc. (Nummer 17.), so bekommt man

$$\psi\left(\frac{bx}{a}\right) = \psi y$$
$$+ \frac{A}{b^2}y^2\psi' y$$
$$- \frac{B}{b^3}y^3\psi' y$$
$$+ \frac{C}{b^4}y^4\psi' y + \frac{C'}{b^4} \cdot \frac{d.y^4\psi' y}{2dy}$$
$$- \frac{D}{b^5}y^5\psi' y - \frac{D'}{b^5} \cdot \frac{d.y^5\psi' y}{2dy}$$
$$+ \frac{E}{b^6}y^6\psi' y + \frac{E'}{b^6} \cdot \frac{d.y^6\psi' y}{2dy}$$
$$+ \frac{E''}{b^6} \cdot \frac{d^2.y^6\psi' y}{2.3dy^2}$$
$$- \text{2c.}$$

wo man nur nach der Differenziation $y = 1$ zu nehmen hat.

Da die Coefficienten A, B, C, 2c. den Buchstaben b nicht in sich schließen, so ist klar, daß diese Reihe nach den negativen Potestäten von b geordnet ist.

Setzt man $\psi y = y^m$, wodurch $\psi' y = my^{m-1}$ wird, so bekommt man

$$\frac{b^m x^m}{a^m} = 1$$
$$+ \frac{mA}{b^2}$$
$$- \frac{mB}{b^3}$$
$$+ \frac{mC + \frac{m(m+3)}{2}C'}{b^4}$$

—

$$- \frac{mD + \frac{m(m+4)}{2} D'}{b^5}$$

$$+ \frac{mE + \frac{m(m+5)}{2} E' + \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3} E''}{b^6}$$

— 2c.

Setzt man $\psi y = ly$, so wird $\psi' y = \frac{1}{y}$ und

$$l\frac{bx}{a} = 1$$

$$+ \frac{A}{b^2}$$

$$- \frac{B}{b^3}$$

$$+ \frac{C + \frac{3}{2}C'}{b^4}$$

$$- \frac{D + \frac{4}{2}D'}{b^5}$$

$$+ \frac{E + \frac{5}{2}E' + \frac{4.5}{2.3}E''}{b^6}$$

— 2c.

19.

Die gefundenen Reihen sind nach den Potestäten von b geordnet; wollte man sie nach dem Buchstaben a ordnen, so dürfte man nur auf eben diese Art die Reihe ordnen, welche aus diesem Bruche sich ergiebt

$$\frac{1}{1 - z\frac{cay^2}{b^2} + z\frac{da^2y^3}{b^3} - z\frac{ea^3y^4}{b^4} + 2c.}$$

Da

Da nun darin jede Potestät von a durch eine gleiche Potestät von $\frac{y}{b}$ multiplicirt ist, so fällt in die Augen, daß die Form dieser Reihe

$$1 + P\frac{ay}{b} + Q\frac{a^2y^2}{b^2} + R\frac{a^3y^3}{b^3} + S\frac{a^4y^4}{b^4} + \text{ꝛc.}$$

seyn wird, und dabey ergiebt sich

$$P = \frac{czy}{b}$$

$$Q = P\frac{czy}{b} - \frac{dzy}{b}$$

$$R = Q\frac{czy}{b} - P\frac{dzy}{b} + \frac{ezy}{b}$$

$$S = R\frac{czy}{b} - Q\frac{dzy}{b} + P\frac{ezy}{b} - \frac{fzy}{b}$$

ꝛc.

Entwickelt man nun diese Werthe nach den Dimensionen von $\frac{zy}{b}$, so lassen sich dieselben auf folgende Art ausdrucken

$$P = A\frac{zy}{b}$$

$$Q = B\frac{zy}{b} + B'(\frac{zy}{b})^2$$

$$R = C\frac{zy}{b} + C'(\frac{zy}{b})^2 + C''(\frac{zy}{b})^3$$

$$S = D\frac{zy}{b} + D'(\frac{zy}{b})^2 + D''(\frac{zy}{b})^3 + D'''(\frac{zy}{b})^4$$

ꝛc.

und man hat daher

$$A = c$$
$$B = -d$$
$$C = e$$
$$D = -f$$

ꝛc.

B' =

$$B' = cA$$
$$C' = -\ dA + cB$$
$$D' = eA - dB + cC$$
ꝛc.
$$C'' = cB'$$
$$D'' = -\ dB' + cC'$$
ꝛc.
$$D''' = cC''$$
ꝛc.

Folglich bekommt man

$$\frac{\psi' y}{z\left(1 - \frac{z\phi\,\alpha y)}{\alpha}\right)} = \frac{\psi' y}{z} + a\frac{Ay^2}{b^2}\psi' y$$
$$+ a^2\left(\frac{By^3}{b^3} + \frac{B'zy^4}{b^4}\right)\psi' y$$
$$+ a^3\left(\frac{Cy^4}{b^4} + \frac{C'zy^5}{b^5} + \frac{C''zy^6}{b^6}\right)\psi' y$$
$$+ a^4\left(\frac{Dy^5}{b^5} + \frac{D'zy^6}{b^6} + \frac{D''z^2y^7}{b^7} + \frac{D'''z^3y^8}{b^8}\right)\psi' y$$
+ ꝛc.

Auf diese Art wird die allgemeine Formel (Nr. 17.)

$$\psi\left(\frac{bx}{a}\right) = \psi y$$
$$+ a\frac{A}{b^2}y^2\psi' y$$
$$+ a^2\left(\frac{B}{b^3}y^3\psi' y + \frac{B'}{b^4}\cdot\frac{d.\,y^4\psi' y}{2dy}\right.$$
$$+ a^3\left(\frac{C}{b^4}y^4\psi' y + \frac{C'}{b^5}\cdot\frac{d.\,y^5\psi' y}{2dy} + \frac{C''}{b^6}\cdot\frac{d^2y^6\psi' y}{2.3dy^2}\right)$$
$$+ a^4$$

$$+ a^4\left(\frac{D}{b^5}y^5\psi'y + \frac{D'}{b^6}\cdot\frac{d\ y^6\psi'y}{2dy} + \frac{D''}{b^7}\cdot\frac{d.y^7\psi'y}{2.3dy^2}\right.$$
$$\left. + \frac{D'''}{b^8}\cdot\frac{d.y^3\psi'y}{2.3.4dy^3}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

wo nach der Differenziation $y = 1$ gesetzt werden muß.

Es sey z. B. $\psi y = y^m$ und also $\psi'y = my^{m-1}$, so bekommt man

$$\frac{b^m x^m}{x^m} = 1$$
$$+ \frac{mA}{b}\cdot\frac{a}{b}$$
$$+ \left(\frac{mB}{b} + \frac{m(m+3)B'}{2b^2}\right)\frac{a^2}{b^2}$$
$$+ \left(\frac{mC}{b} + \frac{m(m+4)C'}{2b^2} + \frac{m(m+4)(m+5)C''}{2.3b^3}\right)\frac{a^3}{b^3}$$
$$+ \left(\frac{mD}{b} + \frac{m(m+5)D'}{2b^2} + \frac{m(m+5)(m+6)D''}{2.3b^3}\right.$$
$$\left. + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^4}{b^4}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Setzt man daher $m = 1$ und multiplicirt mit $\frac{a}{b}$, so wird

$$x = \frac{a}{b}$$
$$+ \frac{A}{b}\cdot\frac{a^2}{b^2}$$
$$+ \left(\frac{B}{b} + \frac{4B'}{2b^2}\right)\frac{a^3}{b^3}$$
$$+ \left(\frac{C}{b} + \frac{5C'}{2b^2} + \frac{5.6C''}{2.3b^2}\right)\frac{a^4}{b^4}$$

+

$$+ \left(\frac{D}{b} + \frac{6D'}{2b^2} + \frac{6.7D''}{2.3b^3} + \frac{6.7.8D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^5}{b^5}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

und wenn man $\psi y = ly$ setzt, so wird, weil $ly = 0$ ist, wenn $y = 1$ genommen wird,

$$l\frac{bx}{a} = \frac{A}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

$$+ \left(\frac{B}{b} + \frac{3B'}{2b^2}\right)\frac{a^2}{b^2}$$

$$+ \left(\frac{C}{b} + \frac{4C'}{2b^2} + \frac{4.5C''}{2.3b^3}\right)\frac{a^3}{b^3}$$

$$+ \left(\frac{D}{b} + \frac{5D'}{2b^2} + \frac{5.6D''}{2.3b^3} + \frac{5.6.7D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^4}{b^4}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Uebrigens sind die Werthe von x^m, welche wir hier und in der vorhergehenden Nummer gefunden haben, im Grunde eben die, welche wir oben im 4ten Exempel bekamen; allein hier ist ihre Form einfacher und bequemer, insbesondere im letzten Falle, und man nimmt dabey sehr leicht das Fortschreitungsgesetz wahr, so daß die Berechnung der verschiedenen Glieder und ihre Fortsetzung, so weit man will, sehr leicht ist.

20. Sechstes Exempel.

Es sey die Gleichung

$$0 = \alpha - x + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{ꝛc.}$$

gegeben. Vergleicht man dieselbe mit der Gleichung (H) Nr. 15., so hat man

$$\phi x = \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{ꝛc.}$$

folglich

$$\frac{\phi(\alpha y)}{\alpha} = \beta\alpha^{p-1}y^p + \gamma\alpha^{p+q-1}y^{p+q} + \delta x^{p+2q-1}y^{p+2q}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

und

und

$$\frac{1}{1 - z\frac{\phi(\alpha y)}{\alpha}} =$$

$$\frac{1}{1 - \beta\alpha^{p-1}y^{p}z - \gamma\alpha^{p+q-1}y^{p+q}z - \text{rc.}}$$

Es sey der Kürze wegen $\alpha^{p-q-1}y^{p-q}z = u$, so hat man den Bruch

$$\frac{1}{1 - \beta u(\alpha y)^{q} - \gamma u(\alpha y)^{2q} - \delta u(\alpha y)^{3q} - \text{rc.}}$$

Entwickelt man denselben nach den Potestäten von αy, so bekommt man dadurch

$$1 + P(\alpha y)^{q} + Q(\alpha y)^{2q} + R(\alpha y)^{3q} + S(\alpha y)^{4q} + \text{rc.}$$

und dabey

$$P = \beta u$$
$$Q = P\beta u + \gamma u$$
$$R = Q\beta u + P\gamma u + \delta u$$
$$S = R\beta u + Q\gamma u + P\delta u + \varepsilon u$$
rc.

Entwickelt man von neuem diese Werthe nach den Potestäten von u, so erhält man

$$P = Au$$
$$Q = Bu + B'u^{2}$$
$$R = Cu + C'u^{2} + C''u^{3}$$
$$S = Du + D'u^{2} + D''u^{3} + D'''u^{4}$$
$$T = Eu + E'u^{2} + E''u^{3} + E'''u^{4} + E''''u^{5}$$
rc.

wenn die Coefficienten A, B, C, rc. auf die Art bestimmt werden, daß

$$A = \beta$$
$$B = \gamma,\quad B' = \beta A$$
$$C = \delta,\quad C' = \gamma A + \beta B,\quad C'' = \beta B'$$

D =

$$D = \varepsilon,\ D' = \delta A + \gamma B + \beta C,\ D'' = \beta B' + \beta C',$$
$$D''' = \beta C''$$
$$E = \zeta,\ E' = \varepsilon A + \delta B + \gamma C + \beta D,\ E'' = \delta B' + \gamma C' + \beta D',\ E''' = \gamma C'' + \beta D'',\ E'''' = \beta D'''$$
ꝛc.

ist. Setzt man demnach wieder an die Stelle von u den Werth desselben, so wird

$$\frac{\psi' y}{z\left(1 - z\frac{\phi(\alpha y)}{\alpha}\right)} = \frac{\psi' y}{z} + A\alpha^{p-1}y^{p}\psi' y$$
$$+ B\alpha^{p+q-1}y^{p+q}\psi' y + B'\alpha^{2p-2}zy^{2p}\psi' y$$
$$+ C\alpha^{p+2q-1}y^{p+2q}\psi' y + C'\alpha^{2p+q-2}zy^{2p+q}\psi' y$$
$$+ C''\alpha^{3p-3}z^{2}y^{3p}\psi' y$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Verwandelt man dieses Resultat nach den Vorschriften der 17ten Nummer, so bekommt man den Werth von $\psi(\frac{x}{\alpha})$ durch folgende Reihe ausgedruckt, wo man aber nicht vergessen muß, nach Vollbringung aller angezeigten Differenziationen $y = 1$ zu setzen.

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi y$$
$$+ A\alpha^{p-1}y^{p}\psi' y$$
$$+ B\alpha^{p+q-1}y^{p+q}\psi' y + B'\alpha^{2p-2} . \frac{d.y^{2p}\psi' y}{2dy}$$
$$+ C\alpha^{p+2q-1}y^{p+2q}\psi' y + C'\alpha^{2p+q-2} . \frac{d.y^{2p+q}\psi' y}{2dy}$$
$$+ C''\alpha^{3p-3} . \frac{d^{2}.y^{3p}\psi' y}{2.3dy^{2}}$$
$$+ D\alpha^{p+3q-1}y^{p+3q}\psi' y + D'\alpha^{2p+2q-2}$$
$$\frac{d.y^{2p+2q}\psi' y}{2dy} + D''\alpha^{3p+q-3} . \frac{d^{2}.y^{3p+q}\psi' y}{2.3dy^{3}}$$
$$+ D'''\alpha^{4p-4} . \frac{d^{3}.y^{4p}\psi' y}{2.3.4dy^{3}}$$

$$+ E\alpha^{p+4q-1}y^{p+4q}\psi'y + E'\alpha^{2p+3q-2}.\frac{d\,y^{2p+3q}\psi'y}{2dy}$$

$$+ E''\alpha^{3p+2q-3}.\frac{d^2.y^{3p+2q}\psi'y}{2.3dy^2}$$

$$+ E'''\alpha^{4p+q-4}.\frac{d^3\;y^{3p+q}\psi'y}{2.3.4dy^3}$$

$$+ E''''\alpha^{5p-5}.\frac{d^4.y^{5p}\psi'y}{2.3.4.5dy^4}$$

$+$ ꝛc.

Setzt man $\psi y = y^m$, wodurch $\psi'y = my^{m-1}$ wird, so bekommt man

$$\frac{x^m}{\alpha^m} = 1$$

$$+ mA\alpha^{p-1}$$

$$+ mB\alpha^{p+q-1} + \frac{m(m+2p-1)}{2}B'\alpha^{2p-2}$$

$$+ mC\alpha^{p+2q-1} + \frac{m(m+2p+q-1)}{2}C'\alpha^{2p+q-2}$$

$$+ \frac{m(m+3p-1)(m+3p-2)}{2.3}C''\alpha^{3p-3}$$

$$+ mD\alpha^{p+3q-1} + \frac{m(m+2p+2q-1)}{2}D'\alpha^{2p+2q-2}$$

$$+ \frac{m(m+3p+q-1)(m+3p+q-2)}{2.3}D''\alpha^{3p+q-3}$$

$$+ \frac{m(m+4p-1)(m+4p-2)(m+4p-3)}{2.3.4}D'''\alpha^{4p-4}$$

$$+ mE\alpha^{p+4q-1} + \frac{m(m+2p+3q-1)}{2}E'\alpha^{2p+3q-2}$$

$$+ \frac{m(m+3p+2q-1)(m+3p+2q-2)}{2.3}E''\alpha^{3p+2q-3}$$

$+$

$$+ \frac{m(m+4p+q-1)(m+4p+q-2)(m+4p+q-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} E''' \alpha^{4p+q-4}$$

$$+ \frac{m(m+5p-1)(m+5p-2)(m+5p-3)(m+5p-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} E'''' \alpha^{5p-5}$$

$+$ ꝛc.

und setzt man $\psi y = ly$, so bekommt man, weil $ly = 0$ ist,

$$l\frac{x}{\alpha} = A\alpha^{p-1}$$

$$+ B\alpha^{p+q-1} + \frac{2p-1}{2} B'\alpha^{2p-2}$$

$$+ C\alpha^{p+2q-1} + \frac{2p+q-1}{2} C'\alpha^{2p+q-2}$$

$$+ \frac{(3p-1)(3p-2)}{2 \cdot 3} C''\alpha^{3p-3}$$

$$+ D\alpha^{p+3q-1} + \frac{2p+2q-1}{2} D'\alpha^{2p+2q-2}$$

$$+ \frac{(3p+q-1)(3p+q-2)}{2 \cdot 3} D''\alpha^{3p+q-3}$$

$$+ \frac{(4p-1)(4p-2)(4p-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} D'''\alpha^{4p-4}$$

$$+ E\alpha^{p+4q-1} + \frac{2p+3q-1}{2} E'\alpha^{2p+3q-2}$$

$$+ \frac{(3p+2q-1)(3p+2q-2)}{1 \cdot 3} E''\alpha^{3p+2q-3}$$

$$+ \frac{(4p+q-1)(4p+q-2)(4p+q-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} E'''\alpha^{4p+q-4}$$

$$+ \frac{(5p-1)(5p-2)(5p-3)(5p-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} E''''\alpha^{5p-5}$$

$+$ ꝛc.

21. Siebentes Exempel.

Hätte man die Gleichung

$$o = \alpha - x^r + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{etc.}$$

so könnte man dieselbe auf das vorhergehende Exempel zurück führen, indem man $x^r = t$ setzte. Dadurch wird nemlich

$$o = \alpha - t + \beta t^{\frac{p}{r}} + \gamma t^{\frac{p+q}{r}} + \delta t^{\frac{p+2q}{r}} + \varepsilon t^{\frac{p+3q}{r}} + \text{etc.}$$

und man hat daher bloß nöthig in den vorhergehenden Formeln t für x, $\frac{p}{r}$ für p, $\frac{q}{r}$ für q u. s. w. zu setzen, um sie auf den angeführten Fall anwenden zu können.

Setzt man der größern Einfachheit wegen $\alpha = \varrho^r$, so bekommt man, wenn man x^r an die Stelle von t setzt, und dieselben Werthe der Coefficienten A, B, B′ beybehält

$$\psi\left(\frac{x^r}{\varrho^r}\right) = \psi y$$

$$+ A\varrho^{p-r} y^{\frac{p}{r}} \psi' y$$

$$+ B\varrho^{p+q-r} y^{\frac{p+q}{r}} \psi' y + B'\varrho^{2p-2r} . \frac{d . y^{\frac{2p}{r}} \psi' y}{2 dy}$$

$$+ C\varrho^{p+2q-r} y^{\frac{p+2q}{r}} \psi' y + C'\varrho^{2p+q-2r} . \frac{d . y^{\frac{2p+q}{r}} \psi' y}{2 dy}$$

$$+ C''\varrho^{3p-3r} . \frac{d^2 . y^{\frac{3p}{r}} \psi' y}{2 . 3 dy^2}$$

$$+ D\varrho^{q+3q-r} y^{\frac{p+3q}{r}} \psi' y + D'\varrho^{2p+2q-2r} . \frac{d . y^{\frac{2p+2q}{r}} \psi' y}{2 dy}$$

$$+ D''$$

$$+ D''\varrho^{3p+q-3r} . \frac{d^2 . y^{\frac{3p+q}{r}} \psi' y}{2.3 dy^2}$$

$$+ D'''\varrho^{4p-4r} . \frac{d^3 . y^{\frac{4p}{r}} \psi' y}{2.3.4 dy^2}$$

$+$ rc.

wo nach der Differenziation $y = 1$ genommen werden muß.

Setzt man $\psi y = y^{\frac{m}{r}}$, so hat man $\psi(\frac{x^r}{\varrho^r}) = \frac{x^m}{\varrho^m}$ und findet demnach

$$\left(\frac{x}{\varrho}\right)^m = 1$$

$$+ \frac{m}{r} A\varrho^{p-r}$$

$$+ \frac{m}{r} B\varrho^{p+q-r} + \frac{m(m+2p-r)}{2r^2} B'\varrho^{2p-2r}$$

$$+ \frac{m}{r} C\varrho^{p+2q-r} + \frac{m(m+2p+q-r)}{2r^2} C'\varrho^{2p+q-2r}$$

$$+ \frac{m(m+3p-r)(m+3p-2r)}{2.3r^3} C''\varrho^{3p-3r}$$

$$+ \frac{m}{r} D\varrho^{p+3q-r} + \frac{m(m+2p+2q-r)}{2r^2} D'\varrho^{2p+2q-2r}$$

$$+ \frac{m(m+3p+q-r)(m+3p+q-2r)}{2.3r^3} D''\varrho^{3p+q-3r}$$

$$+ \frac{m(m+4p-r)(m+4p-2r)(m+4p-3r)}{2.3.4r^3} D'''\varrho^{4p-4r}$$

$+$ rc.

Setzt man $\psi y = ly$, wodurch $\psi(\frac{x^r}{\varrho^r}) - l\frac{x^r}{\varrho^r} = rl\frac{x}{\varrho}$ wird, so bekommt man, wenn man durch r dividirt

$$l\frac{x}{\varrho} = \frac{1}{r}A\varrho^{p-r}$$

$$+ \frac{1}{r}B\varrho^{p+q-r} + \frac{2p-r}{2r^2}B'\varrho^{2p-2r}$$

$$+ \frac{1}{r}C\varrho^{p+q-r} + \frac{2p+q-r}{2r^2}C'\varrho^{2p+q-2r}$$

$$+ \frac{(3p-r)(3p-2r)}{2.3r^3}C''\varrho^{3p-3r}$$

$$+ \frac{1}{r}D\varrho^{p+3q-r} + \frac{2p+2q-r}{2r^2}D'\varrho^{2p+2q-2r}$$

$$+ \frac{(3p+q-r)(3p+q-2r)}{2.3r^3}D''\varrho^{3p+q-3r}$$

$$+ \frac{(4p-r)(4p-2r)(4p-3r)}{2.3.4r^4}D'''\varrho^{4p-4r}$$

$+$ ꝛc.

22.

Die Formeln, welche wir bey den beyden letzten Exempeln gefunden haben, verdienen sehr gemerkt zu werden, theils wegen ihrer Allgemeinheit, theils wegen ihres Gebrauchs bey der Erfindung aller Wurzeln der Gleichungen, welche der Gegenstand des folgenden §. seyn wird.

Vorher aber müssen wir noch eine Bemerkung machen, welche die Coefficienten A, B, B', ꝛc. betrift. Sie besteht darin, daß diese Coefficienten ganz und gar nicht von der Größe α abhängen, sondern bloß von den Größen β, γ, δ, ꝛc. so daß die gefundenen Reihen in Rücksicht auf den Buchstaben α allezeit schon von selbst geordnet sind, die Funktion von $\frac{x}{\alpha}$, welche sie ausdrucken, mag seyn welche sie will.

Hat

Hat man überdies diese Coefficienten einmal gefunden, so dienen sie für alle mögliche Funktionen von $\frac{x}{u}$, und da das Gesetz, nach welchem sie sich richten, sehr einfach ist, so ist es leicht sie so weit zu berechnen als man irgend will. Man findet z. B.

$A = \beta$

$B = \gamma,\ B' = \beta^2$

$C = \delta,\ C' = 2\beta\gamma,\quad C'' = \beta^3$

$D = \varepsilon,\ D' = 2\beta\delta + \gamma^2,\ D'' = 3\beta^2\gamma,\quad D''' = \beta^4$

$E = \zeta,\ E' = 2\beta\varepsilon + 2\delta\gamma,\ E'' = 3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2,\ E''' = 4\beta^3\gamma$

ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$E'''' = \beta^5$

ꝛc.

§. 3.

Methode vermittelst der Reihen alle Wurzeln einer jeden Gleichung zu finden.

23.

Wir haben im vorhergehenden §. gesehen, wie man vermittelst der Reihen den Ausdruck für eine von den Wurzeln einer jeden Gleichung finden kann, jetzt wollen wir die Mittel kennen lernen, alle Wurzeln, welche eine Gleichung haben kann, zu finden. Zu diesem Endzwecke müssen wir einige allgemeine Anmerkungen über die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung und über die Art diese Wurzeln von einander zu unterscheiden, vorausschicken.

Wir wollen die allgemeine Gleichung

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{ꝛc.}$$

betrachten, welches eine Gleichung vom mten Grade seyn

 mag,

mag, die alle ihre Glieder hat, so daß keiner von den Coefficienten a, b, c, ꝛc. = o ist. Gesetzt man hätte den Ausdruck für jede Wurzel dieser Gleichung gefunden, so ist klar, daß diese Ausdrücke, deren es m giebt, Funktionen von a, b, c, ꝛc. seyn werden; aber es frägt sich, wie man diese verschiedenen Funktionen von einander unterscheiden könne?

Hier bemerke ich zuvörderst, daß die Gleichung, wenn man a = o setzt, in folgende übergeht,

$$0 = - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{ꝛc.}$$

welche sich in diese beyden zerfällen läßt

$$0 = x$$

$$0 = - b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{ꝛc.}$$

Es macht also die Annahme a = o, daß eine von den Wurzeln verschwindet, und es muß folglich unter den Funktionen, welche die Wurzeln der obigen Gleichung ausdrucken, eine geben, die verschwindet wenn man a = o setzt. Auch ist klar, daß es nicht mehr als eine Funktion darunter geben kann, welche diese Eigenschaft hat, weil das Verschwinden von a nur eine einzige Wurzel auf Null bringt.

Behält man die Voraussetzung, daß a = o sey, und abstrahirt dabey von der bereits gefundenen Wurzel x = o, so werden die übrigen Wurzeln durch die Gleichung bestimmt

$$0 = - b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun auch b = o, so zerfällt diese Gleichung von neuem in folgende zwey

$$0 = x$$

$$0 = c - dx + ex^2 - \text{ꝛc.}$$

Es macht also diese Annahme, daß wieder eine neue Wurzel verschwindet, und es muß also auch unter den Funktionen, welche

welche die Wurzeln der obigen Gleichung ausdrucken, eine geben, die verschwindet, wenn man $a = o$ und $b = o$ setzt.

Schließt man auf diese Art weiter, so sieht man, daß es unter den Funktionen, wovon hier die Rede ist, eine geben muß, die verschwindet, wenn man $a = o$, $b = o$, $c = o$ setzt, so wie auch eine, welche verschwindet, wenn man $a = o$, $b = o$, $c = o$, $d = o$ setzt, u. s. w.

24.

Da es gleich ist, wie man die Glieder einer Gleichung ordnet, so wollen wir die Gleichungen in der Folge allezeit auf die Art geordnet annehmen, daß die Exponenten der unbekannten Größe eine steigende arithmetische Progression bilden. Auf diese Art ist das erste Glied der Gleichung dasjenige, worin sich die unbekannte Größe nicht findet, das zweyte das, welches die unbekannte Größe in einer Dimension enthält u. s. f. Dies vorausgesetzt, wollen wir allgemein unter der ersten Wurzel einer Gleichung diejenige verstehen, welche Null wird, wenn man das erste Glied der Gleichung $= o$ nimmt; unter der zweyten Wurzel diejenige, welche Null wird, wenn man die beyden ersten Glieder der Gleichung zugleich $= o$ seyn läßt; unter der dritten Wurzel diejenige, welche verschwindet, wenn die drey ersten Glieder der Gleichung zugleich $= o$ werden u. s. f.

Auf diese Art kann man die verschiedenen Wurzeln einer jeden Gleichung allemal von einander unterscheiden, und auch, wenn man mehrere Ausdrücke für die Wurzeln einer und derselben Gleichung hat, beurtheilen, ob sie eine und dieselbe oder ob sie verschiedene Wurzeln darstellen.

25.

Wir haben so eben gesehen, daß die Annahme von $a = 0$ und $b = 0$ zwey Wurzeln der gegebenen Gleichung verschwindend macht, und diese Wurzeln sind hierdurch von allen übrigen hinlänglich unterschieden. Läßt man daher sogleich $b = 0$ seyn, so ist klar, daß die Annahme $a = 0$ zwey Wurzeln zu gleicher Zeit in Null verwandelt. Die Art und Weise, diese Wurzeln in diesem Falle von einander zu unterscheiden, ist folgende. Setzt man $b = 0$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$0 = a + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{rc.}$$

Anstatt $a = 0$ zu setzen, nehme man es unendlich klein an, wo denn einleuchtend ist, daß die beyden gedachten Wurzeln ebenfalls unendlich klein seyn werden, weil sie sonst nicht verschwinden könnten, wenn $a = 0$ würde. Nimmt man also x unendlich klein an, und läßt die Glieder weg, welche man bey dieser Annahme weglassen muß, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$a + cx^2 = 0$$

und diese Gleichung giebt die beyden Wurzeln $+\sqrt{-\frac{a}{c}}$ und $-\sqrt{-\frac{a}{c}}$. Auf diese Art hat man ein neues Kennzeichen die beyden ersten Wurzeln der gegebenen Gleichung sowohl unter sich als auch von allen übrigen zu unterscheiden. Es müssen folglich die Funktionen, welche diese beyden Wurzeln vorstellen, von der Art seyn, daß sie die Wurzeln der Gleichung $a + cx^2 = 0$ werden, wenn man $b = 0$ und a unendlich klein annimmt.

Auf ähnliche Art beweiset man, daß die Funktionen, welche die drey ersten Wurzeln ausdrucken, von der Art

seyn

seyn müssen, daß sie die Wurzeln der Gleichung $a - dx^3 = 0$ werden, wenn man $b = 0$, $c = 0$ und a unendlich klein nimmt.

Da ferner die zweyte und dritte Wurzel Null werden, wenn man $b = 0$ und $c = 0$ annimmt, nachdem man schon $a = 0$ gesetzt hat, so ist klar, daß die Annahme von $b = 0$ nach der Annahme von $c = 0$ diese beyden Wurzeln zu gleicher Zeit in Null verwandelt. Setzt man daher b unendlich klein, so müssen auch diese beyden Wurzeln unendlich klein werden. Nimmt man aber in der Gleichung

$$0 = - b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{etc.}$$

aus welcher man bereits die erste Wurzel durch die Annahme $a = 0$ abgesondert hat, $c = 0$ und b und x unendlich klein an, so verwandelt sich dieselbe in

$$- b - dx^2 = 0$$

und es müssen folglich die Funktionen, welche die zweyte und dritte Wurzel ausdrucken, so beschaffen seyn, daß sie die Wurzeln der Gleichung $- b - dx^2 = 0$ werden, wenn man darin $a = 0$, $c = 0$ und b unendlich klein annimmt. Dieser Umstand kann gebraucht werden um diese Wurzeln zu erkennen und von allen übrigen zu unterscheiden.

Setzt man $c = 0$, $d = 0$ und b unendlich klein, (vorausgesetzt, daß $a = 0$ bleibe) so findet man, daß die Funktionen, welche die zweyte, dritte und vierte Wurzel ausdrucken, Wurzeln der Gleichung

$$- b + ex^3 = 0$$

seyn müssen, u. s. f. Ferner erkennt man auf ähnliche Art, daß die dritte und vierte Wurzel der gegebenen Gleichung durch solche Funktionen ausgedruckt seyn müssen, daß sie die Wurzeln der Gleichung

$$c + ex^2 = 0$$

werden,

werden, wenn man erst $a = 0$, $b = 0$ dann $d = 0$ und c unendlich klein annimmt, u. s. f.

Diese Methode die Wurzeln einer Gleichung von einander zu unterscheiden ist viel allgemeiner als die der 23sten Nr., welche in vielen Fällen nicht gebraucht werden kann, insbesondere, wenn in der Gleichung ein Zwischenglied fehlt, weil alsdann das Verschwinden eines einzigen Buchstabens mehrere Wurzeln auf einmal in Null verwandelt, wie wir so eben gesehen haben.

Nach diesen Anmerkungen über die Art, die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung von einander zu unterscheiden, wollen wir die Wege kennen zu lernen suchen, diese Wurzeln selbst zu finden. Um alles desto verständlicher zu machen, wollen wir dieselben sogleich bey den Gleichungen einschlagen, welche wir in dem vorhergehenden §. betrachtet haben.

28.

Erste Aufgabe.

Die beyden Wurzeln der Gleichung

$$a - bx + cx^2 = 0$$

zu finden.

Erste Auflösung.

Nr. 8. haben wir gesehen, daß der eine von den Werthen von x durch folgende Reihe ausgedruckt wird

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^3}{b^5} + \text{rc.}$$

Ehe man den andern Werth aufsucht ist es nützlich zu wissen, was für eine Wurzel durch diese Reihe ausgedruckt werde. Zu dem Ende setze ich nach der Methode der 23sten

Nr.

Nr. $a = 0$, und da diese Voraussetzung alle Glieder jener Reihe in Null verwandelt, so schließe ich daraus, daß diese Reihe die erste Wurzel der gegebenen Gleichung ausdruckt. Es ist also die zweyte Wurzel zu finden übrig.

Um dieselbe zu erhalten gebe ich der obigen Gleichung die Form

$$b - cx - \frac{a}{x} = 0$$

welche man auf die Gleichung der 11ten Nr. zurück führen kann, wenn man darin $n = -1$ setzt, a in b, b in c und c in $-a$ verwandelt. Auf diese Art erhält man aus der Formel derselben Nummer, wenn man $m = 1$ nimmt,

$$\frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{b^5} - \frac{5 \cdot 6a^4c^3}{2 \cdot 3b^7} - \text{etc.}$$

Setzt man nun hier zuvörderst $a = 0$, so verschwindet diese Reihe bis auf ihr erstes Glied $\frac{b}{c}$, und dieses verschwindet ebenfalls, wenn man $b = 0$ nimmt. Es druckt daher diese Reihe nothwendiger Weise die zweyte Wurzel der gegebenen Gleichung aus, und dieses stimmt aufs vollkommenste mit dem überein, was wir oben Nr. 8. durch die Auflösung der Gleichung selbst gefunden haben.

Nennt man daher die erste und zweyte Wurzel der Gleichung

$$a - bx + cx^2 = 0$$

x' und x'', so hat man nach den angeführten Nrn.

$$x'^m = \frac{a^m}{b^m} + \frac{ma^{m+1}c}{b^{m+2}} + \frac{m(m+3)a^{m+2}c^2}{2b^{m+4}}$$
$$+ \frac{m(m+4)(m+5)a^{m+3}c^3}{2 \cdot 3b^{m+6}} + \text{etc.}$$

x''^m

$$x''^m = \frac{b^m}{c^m} - \frac{m b^{m-2} a}{c^{m-1}} + \frac{m(m-3) b^{m-4} a^2}{c^{m-2}}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5) b^{m-3} c^3}{2 \,.\, 3 c^{m-3}} + \text{rc.}$$

und will man die Logarithmen von x' und x'' haben, so ist

$$lx' = l\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{4 \,.\, 5a^3c^3}{2 \,.\, 3b^6} + \frac{5 \,.\, 6 \,.\, 7a^4c^4}{2 \,.\, 3 \,.\, 4b^8}$$

$$+ \text{rc.}$$

$$lx'' = l\frac{b}{c} - \frac{ac}{b^2} - \frac{3a^2c^2}{2b^4} - \frac{4 \,.\, 5a^3c^3}{3 \,.\, 3b^6} - \frac{5 \,.\, 6 \,.\, 7a^4c^4}{2 \,.\, 3 \,.\, 4b^8}$$

$$- \text{rc.}$$

Zweyte Auflösung.

Setzt man $x^2 = t$, so wird $x = \sqrt{t}$, und die gegebene Gleichung dadurch in folgende verwandelt

$$a + ct - b\sqrt{t} = 0$$

welche man wieder mit der Nr. 11. vergleichen kann, wenn man b in $-c$, c in $-b$, x in t und n in $\frac{1}{2}$ verwandelt. Setzt man demnach der Kürze wegen $\sqrt{(\frac{-a}{c})} = \varrho$, so hat man

$$t^m = \varrho^{2m} - 2m\varrho^{2m+1}(\frac{b}{2a}) + \frac{2m \,.\, 2m}{2}\varrho^{2m+2}(\frac{b}{2a})^2$$

$$- \frac{2m(2m-1)(2m+1)}{2 \,.\, 3}\varrho^{2m+3}(\frac{b}{2a})^3$$

$$+ \frac{2m(2m-2)(2m)(2m+2)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4}\varrho^{2m+4}(\frac{b}{2a})^5$$

$$- \frac{2m(2m-3)(2m-1)(2m+1)(2m+3)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}\varrho^{2m+5}(\frac{b}{2a})^5$$

$$+ \text{rc.}$$

Da nun $x = \sqrt{t}$ ist, so hat man nur nöthig $m = \frac{1}{2}$ zu setzen, nm

$x =$

$$x = \varrho - \varrho^2\left(\frac{b}{2a}\right) + \tfrac{1}{2}\varrho^3\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4}\varrho^5\left(\frac{b}{2a}\right)^4$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\varrho^7\left(\frac{b}{2a}\right)^6 - \text{rc.}$$

zu finden. Weil aber $\varrho = \sqrt{\left(\frac{-a}{\varrho c}\right)}$ ist, so fällt in die Augen, daß der Werth von ϱ eben sowohl positiv als negativ genommen werden kann, und braucht man demnach diesen doppelten Werth, so bekommt man für x folgende doppelte Reihe

$$\frac{b}{c} \pm \left(1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{4ac} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{2^4a^2c^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \times \right.$$

$$\left. \frac{b^6}{2^6a^3c^3} - \text{rc.}\right) \sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$$

Setzt man $b = 0$, so erhält man statt dieser beyden Reihen $\pm\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$, welches ein Kennzeichen ist, daß sie die erste und zweyte Wurzel unserer Gleichung wirklich darstellen. Hiervon kann man sich auch auf die Art leicht überzeugen, daß man die Wurzelgröße $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$, welche in dem Ausdrucke für x (Nr. 8.) befindlich ist, in eine Reihe verwandelt, und dabey $- 4ac$ als das erste und b^2 als das zweyte Glied des Binomiums betrachtet.

Setzt man daher $\varrho = \pm\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$ so hat man allgemein in der Gleichung

$$a - bx + cx^2 = 0$$

folgenden doppelten Werth für x^m:

$$x^m = \varrho^m\left(1 - \frac{m^2}{2} \cdot \frac{b^2}{4ac} + \frac{m^2(m^2 - 4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{2^4a^2c^2}\right.$$

$$\left. - \frac{m^2(m^2 - 4)(m^2 - 16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{b^6}{2^6a^3c^3} + \text{rc.}\right)$$

— $m\varrho$

$$-m\varrho^{m+1}\frac{b}{2c}\Big(1-\frac{m^2-1}{2.3}\cdot\frac{b^2}{4ac}+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}$$
$$\times\frac{b^4}{2^4a^2c^2}-\frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{2^6a^3c^3}{b^6}+\text{\&c.}\Big)$$

Und für den Logarithmen von x bekommt man

$$lx=l\varrho-\varrho\frac{b}{2a}\Big(1+\frac{1.1}{2.3}\cdot\frac{b^2}{4ac}+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\cdot\frac{b^4}{2^4a^2c^2}$$
$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{b^6}{2^6a^3c^3}+\text{\&c.}\Big)$$

Anmerkung.

Die Reihen, welche wir bey der ersten Auflösung gefunden haben, besitzen den Vorzug, daß sie keine andere als rationale Größen enthalten, dahingegen diejenigen, welche die zweyte Auflösung gegeben hat, die irrationale Größe $\sqrt{-\frac{a}{c}}$ in sich schließen, welche imaginär wird, wenn a und c einerley Zeichen haben, obgleich übrigens die Wurzeln der Gleichung reell seyn können. Es scheinen daher die Reihen der ersten Auflösung vorzüglicher zu seyn als die der zweyten, indeß sind beyde nur alsdann brauchbar, wenn sie convergirende Reihen sind. Hiervon wird weiter hin im 4ten §. geredet werden.

29.

Bey einiger Aufmerksamkeit auf die Art, wie wir das vorhergehende Problem aufgelöset haben, erkennt man leicht allgemein, daß sich bey jeder Gleichung so viel verschiedene Reihen für die Wurzeln derselben finden lassen, als die Gleichung Combinationen ihrer Glieder zu zweyen darbietet, und daß jede dieser Reihen eine einfache oder doppelte oder dreyfache Reihe u. s. w. seyn wird, je nachdem er zu einer Combination

bination gehört, die Exponenten von x in den beyden Gliedern von einander um eins oder um zwey oder um drey u. s. f. unterschieden sind.

Es ist nemlich klar, daß man so viel Reihen für den Werth von x finden kann, als es Arten giebt, die gegebene Gleichung mit der allgemeinen Formel $\alpha - x + \phi x = 0$ (Nr. 15.) zu vergleichen. Da man nun für ϕx jede Funktion von x setzen kann, so folgt, daß man auch für die beyden ersten Glieder $\alpha - x$ in jener Formel jede zwey Glieder der gegebenen Gleichung nach Gefallen zu nehmen berechtiget ist. Hieraus fließt aber, daß man die Vergleichung auf so viel verschiedene Arten anstellen kann, als es angeht, die Glieder der Gleichung zu zwey zu combiniren.

28.

Es seyen überhaupt $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu}$ irgend zwey Glieder der gegebenen Gleichung, und X bedeute die Summe aller übrigen Glieder, so daß die gegebene Gleichung folgende Form bekomme

$$Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu} + X = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch Nx^{μ}, so verwandelt sie sich in

$$\frac{M}{N} - x^{\nu} + \frac{Xx^{-\mu}}{N} = 0$$

und setzt man nunmehr $x^{\nu} = t$, folglich $x\sqrt[\nu]{t}$, und läßt dabey T die Funktion von t bedeuten, worin sich die Größe X verwandelt, wenn man $\sqrt[\nu]{t}$ für x setzt, so bekommt man

$$\frac{M}{N} - t + \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N} = 0$$

Diese Gleichung aber läßt sich mit der allgemeinen Form $\alpha - x + \varphi x = 0$ vergleichen, wenn man

$$\alpha = \frac{M}{N},\ x = t,\ \text{und}\ \varphi x = \varphi t = \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N}$$

annimmt. Auf diese Art erhält man nach Nr. 15, wenn man t oder x^ν an die Stelle von p setzt,

$$\psi.x^\nu = \psi t + \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N} + \frac{d.(T^2 t^{-\frac{2\mu}{\nu}} \psi' t)}{2N^2 dt}$$

$$+ \frac{d^2.(T^3 t^{-\frac{3\mu}{\nu}} \psi' t)}{2.3N^3 dt^2}$$

wo man nach Vollbringung der angezeigten Differenziationen $t = \frac{M}{N}$ setzen muß.

Nimmt man demnach $\psi t = t^{\frac{1}{\nu}}$ und mithin $\psi' t = \frac{t^{\frac{1-\nu}{\nu}}}{\nu}$ um nemlich $\psi.x^\nu = x$ zu erhalten, so wird

$$x = t^{\frac{1}{\nu}} + \frac{Tt^{\frac{1-\mu-\nu}{\nu}}}{\nu N} + \frac{d.(T^2 t^{\frac{1-2\mu-\nu}{\nu}})}{\nu N^2 dt}$$

$$+ \frac{d^2.(T^3 t^{\frac{1-3\mu-\nu}{\nu}})}{\nu N^3 dt^2} + \text{rc.} \ldots, \quad (L)$$

und dieses ist der Ausdruck, welchen die Combination der Glieder $Mx^\mu - Nx^{\mu+\nu}$ der gegebenen Gleichung für x giebt.

29.

Jetzt ist offenbar, daß der für x gefundene Ausdruck nothwendig die Wurzelgröße $\sqrt[n]{\frac{M}{N}}$ enthalten muß, weil man darin $\frac{M}{N}$ für t zu setzen hat, so wie man sich auch leicht davon überzeugt, daß derselbe keine andere Wurzelgröße enthalten kann. Denn da X eine rationale Funktion von x ist, so ist auch T eine rationale Funktion von $\sqrt[n]{t}$, und mithin auch die ganze Reihe eine rationale Funktion von $\sqrt[\nu]{t}$ oder von $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$.

Nun ist bekannt, daß die Wurzelgröße $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$, ν verschiedene Werthe hat, welche die Wurzeln der Gleichung

$$M - Nx^{\nu} = 0$$

sind, und, wie bekannt, allgemein durch die Formel

$$(\cos.\frac{\lambda.360^{0}}{\nu} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{\lambda.360^{0}}{\nu})\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$$

gefunden werden, wenn man darin für λ nach und nach 1, 2, 3 u. s. w. bis ν setzt.

Setzt man also diese Größe für $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ so verwandelt sich die Reihe, welche den Werth von x ausdruckt, in ν Reihen, welche eben so viel verschiedene Werthe von x geben.

30.

Nun behaupte ich, daß diese ν Reihen oder Ausdrücke für x, welche sich aus der Betrachtung der Glieder $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu}$ der gegebenen Gleichung ergeben, d. h. welche man findet, indem man diese beyden Glieder als die ersten Glieder der allgemeinen Form (H) ansieht, nothwendig ν verschiedene Wurzeln dieser Gleichung darstellen, und namentlich die μte, die $(\mu + 1)$te, die $(\mu + 2)$te ꝛc. bis zur $(\mu + \nu - 1)$ten (Nr. 24.).

Dieses zu beweisen hat man nach der Methode der 25sten Nr. nur nöthig darzuthun, daß sich der allgemeine Ausdruck für x in der Formel (L), wenn man darin die Coefficienten derer Glieder der gegebenen Gleichung, worin die Exponenten von x kleiner sind als μ, so wie auch die Coefficienten derjenigen Glieder, die zwischen Mx^{μ} und $Nx^{\mu+\nu}$ fallen, $= 0$ setzt, und zugleich M unendlich klein annimmt, in $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ oder die allgemeine Wurzel der Gleichung $M - Nx^{\nu} = 0$ verwandeln.

Nun ist klar, daß die Größe X nach Vertilgung der so eben gedachten Glieder keine andere Potestäten von x als solche, die größer sind als $x^{\mu+\nu}$, und folglich die Größe T keine andern Potestäten von t als solche, die größer sind als $t^{\frac{\mu+\nu}{\nu}}$, enthalten wird; woher denn folgt, daß die Funktionen

$$Tt^{\frac{1-\mu-\nu}{\nu}} \quad \frac{d.(T^2 t^{\frac{1-2\mu-\nu}{\nu}})}{dt} \text{ ꝛc. in der Formel (L)}$$

lauter Potestäten von t enthalten müssen, die größer sind als $t^{\frac{1}{\nu}}$. Setzt man demnach $t = \frac{M}{N}$ und M das heißt t unendlich klein, so ist einleuchtend, daß alle diese Potestäten von t in in Vergleichung mit der ersten $t^{\frac{1}{\nu}}$ verschwinden und also der Ausdruck für x in $t^{\frac{1}{\nu}}$ oder $(\frac{M}{N})^{\frac{1}{\nu}}$ übergehen wird, weil $t = \frac{M}{N}$ ist.

31.

Hieraus läßt sich leicht folgern, daß man, um vermittelst unserer Reihen alle Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu finden, nur das erste Glied der Gleichung mit dem letzten zu combiniren braucht. Wir nennen aber hier zwey Glieder einer gegebenen Gleichung combiniren, diese Glieder als die beyden ersten Glieder der allgemeinen Form (H) betrachten, und in eben diesem Verstande wollen wir uns dieser Redensart in der Folge bedienen. Nimmt man das erste und letzte Glied, so bekommt man eine Reihe, welche alle Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdruckt. Man kann aber auch das erste Glied mit irgend einem Mittelgliede und darauf dieses mit dem letzten oder wieder mit einem Mittelgliede verbinden, und so fortgehen, bis man endlich zu dem letzten Gliede gelangt. Jede Combination giebt eine einfache oder doppelte oder dreyfache Reihe u. s. w. und druckt dem gemäß entweder eine oder zwey oder drey Wurzeln u. s. w. aus, je nachdem der Zwischenraum zwischen beyden genommenen Gliedern beschaffen ist, so daß man, man mag eine Combinationsart wählen, was für eine man will, nie mehr und nie weniger Wurzeln findet, als die Gleichung wirklich haben muß.

32.

Es verdient hier angemerkt zu werden, daß die Reihen, welche man durch die Combination irgend zweyer Glieder einer gegebenen Gleichung findet, eben so viel reelle und eben so viel imaginäre Werthe haben, als diejenige Gleichung reelle und imaginäre Wurzeln hat, welche man bekommt, wenn man diese beyden Glieder $= 0$ setzt (Nr. 29). Ferner ist klar, daß man nur dann durchaus rationale Reihen findet, wenn man zwey Glieder wie diese $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+1}$ combinirt, und daß man also, wenn die Gleichung alle Glieder hat, lauter rationale Reihen für alle ihre Wurzeln finden kann, wenn man jedes Glied mit dem unmittelbar darauf folgenden combinirt. Wenn hingegen in der Gleichung Glieder fehlen, z. B. wenn auf Mx^{μ} unmittelbar $- Nx^{\mu+\nu}$ folgt und also dazwischen $\nu - 1$ Glieder fehlen, so geben diese beyden auf einander folgenden Glieder eine Reihe, welche die Wurzelgröße $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ in sich schließt, und welche folglich so viel verschiedene Wurzeln ausdruckt, als man durch die Betrachtung aller Zwischenglieder gefunden haben würde, wenn von denselben keins gefehlt hätte.

In diesem Falle hat man demnach so viel imaginäre Reihen, als die Wurzelgröße $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ imaginäre Werthe hat, d. h. als es imaginäre Wurzeln in der Gleichung $x^{\nu} - \frac{M}{N} = 0$ giebt. Nun weiß man, daß eine Gleichung, in welcher Glieder fehlen, nothwendiger Weise so viel imaginäre Wurzeln hat, als es deren in der Gleichung geben würde, welche man bekäme, indem man die Summe der beyden Glieder zwischen welchen die fehlenden liegen müßten, $= 0$ setzte.

Folgt

Folgt daher auf das Glied Mx^{μ} unmittelbar das Glied $-Nx^{\mu+\nu}$, so hat die Gleichung nothwendig eben so viel imaginäre Wurzeln als es deren in der Gleichung $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu} = 0$ oder $\frac{M}{N} - x^{\nu} = 0$ giebt.

Wenn man also alle auf einander folgende Glieder einer Gleichung zu zwey combinirt, so findet man nie anders imaginäre Ausdrücke für die Wurzeln, als wenn die Gleichung wirklich imaginäre Wurzeln hat. Anders hingegen verhält es sich, wenn die beyden combinirten Glieder nicht unmittelbar auf einander folgen, denn in diesem Falle findet man öfters eine imaginäre Reihe, ohnerachtet die Wurzeln reell sind, wie wir solches bereits in der Anmerkung am Ende der vorhergehenden Aufgabe gesehen haben.

33.

Endlich ergiebt sich aus dem, was wir Nr. 30. gesagt haben, daß die Reihen, welche wir bey den Exempeln des vorhergehenden §. gefunden haben, bloß die ersten Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrucken, weil alle diese Reihen durch die Combination der beyden ersten Glieder gefunden worden sind. Um die übrigen Wurzeln zu finden müßte man das zweyte Glied entweder unmittelbar mit dem letzten oder mit einem der folgenden und dann dieses mit dem letzten combiniren, so wie solches bereits vorhin bemerkt worden ist.

34.

Zweyte Aufgabe.

Alle Wurzeln der Gleichung

$$a - bx + cx^n = 0$$

zu finden, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Erste Auflösung.

Combinirt man zuvörderst die beyden ersten Glieder dieser Gleichung, nemlich $a - bx$, so findet man für x dieselbe Reihe, welche wir bereits oben im 2ten Exempel Nr. 11. gefunden haben. Dieser Werth von x ist demnach die erste Wurzel der vorstehenden Gleichung (Nr. 33.) und nennt man ihn x', so ist überhaupt

$$x'^m = \frac{a^m}{b^m}\Big(1 + \frac{m c a^{n-1}}{b^n} + \frac{m(m+2n-1)c^2 a^{2n-2}}{2b^{2n}}$$
$$+ \frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)c^3 a^{3n-3}}{2.3\,b^{3n}} + \text{rc.}\Big)$$

Um die übrigen $n - 1$ Wurzeln eben dieser Gleichung zu finden, muß man die beyden Glieder $- bx + cx^n$ combiniren. Zu dem Ende wollen wir (Nr. 28.) die Gleichung erst auf diese Form

$$\frac{b}{c} - x^{n-1} - \frac{ax^{-1}}{c} = 0$$

und dann auf diese

$$\frac{b}{c} - t - \frac{at^{\frac{1}{1-n}}}{c} = 0$$

bringen, indem wir $t = x^{n-1}$ und folglich $x = t^{\frac{1}{n-1}}$ setzen.

Da nun diese Gleichung mit der vorhergehenden für x einerley Form hat, so können wir eben dieselbe Formel brauchen und den Werth für t daraus abzuleiten. Setzt man demnach b für a, c für b, $-a$ für c, t für x und $\frac{1}{1-n}$ für n, so hat man überhaupt

$t^m =$

$$t^m = \frac{b^m}{c^m}\Big(1 - \frac{m a b^{\frac{n}{1-n}}}{c^{\frac{1}{1-n}}} + \frac{m(m + \frac{1+n}{1-n})a^2 b^{\frac{2n}{1-n}}}{2c^{\frac{2}{1-n}}}$$

$$- \frac{m(m + \frac{2+n}{1-n})(m + \frac{1+2n}{1-n})a^3 b^{\frac{3n}{1-n}}}{2 \cdot 3 c^{\frac{3}{1-n}}} + \text{ꝛc.}\Big)$$

Da nun $t = x^{n-1}$ ist, so wollen wir $\frac{m}{n-1}$ für m, und der Kürze wegen $(\frac{b}{c})^{\frac{1}{n-1}} = \varrho$ setzen. Dadurch bekommt man

$$x^m = \varrho^m\Big(1 - \frac{ma}{(n-1)b\varrho} + \frac{m(m-n-1)a^2}{2(n-1)^2 b^2 \varrho^2}$$

$$- \frac{m(m-n-2)(m-2n-1)}{2 \cdot 3(n-1)^3 b^3 \varrho^3} + \text{ꝛc.}\Big)$$

Da nun ϱ der $(n-1)$ten Wurzel aus $\frac{b}{c}$ gleich ist, so hat es auch $n-1$ verschiedene Werthe, deren allgemeiner Ausdruck

$$\varrho = (\text{cos.}\frac{\lambda . 360^\circ}{n-1} + \text{sin.}\frac{\lambda . 360^\circ}{n-1}\sqrt{-1})\sqrt[n-1]{\frac{b}{c}}$$

ist, wenn man λ nach und nach $= 1, 2, 3,$ ꝛc. bis $n-1$ setzt.

Substituirt man demnach diesen Ausdruck für ϱ in der vorhergehenden Formel, so bekommt man $n-1$ verschiedene Werthe für x^m, und dieses sind die Werthe für x''^m, x'''^m ꝛc. $(x^n)^m$, wenn x'', x''' ꝛc. (x^n) die zweyte, die dritte, ꝛc. und die nte Wurzel der gegebenen Gleichung anzeigen.

Auf diese Art hat man also alle n Wurzeln der gegebenen Gleichung, ja selbst eine jede Potestät von einer jeden dieser Wurzel. Man kann auch vermittelst unserer Formeln eine jede Funktion dieser Wurzeln finden, indeß ist es nicht nöthig, die Art und Weise davon ausführlich zu zeigen.

Zweyte Auflösung.

Nun wollen wir die beyden äußersten Glieder $a + cx^n$ nehmen, wodurch wir auf einmal alle n Wurzeln der gegebenen Gleichung bekommen werden.

Zu dem Ende bringen wir die Gleichung auf die Form

$$\frac{a}{c} + x^n - \frac{bx}{c} = 0$$

und dann, indem wir $x^n = t$, und folglich $x = t^{\frac{1}{n}}$ setzen, auf diese,

$$\frac{a}{c} + t - \frac{bt^{\frac{1}{n}}}{c} = 0$$

Diese Gleichung läßt sich mit der ursprünglichen $a - bx + cx^n = 0$ vergleichen, und es erfordert daher die Erfindung des Werths t^m aus dem Werthe von x'^m bloß die Verwandlung von x' in t, von b in $-c$, von c in $-b$ und von n in $\frac{1}{n}$. Auf diese Art bekommt man sogleich

$$t^m = \frac{a^m}{(-c)^m}\left(1 - \frac{mba^{\frac{1-n}{n}}}{(-c)^{\frac{1}{n}}} + \frac{m(m+\frac{2-n}{n})b^2a^{\frac{2-2n}{n}}}{2(-c)^{\frac{2}{n}}} - \frac{m(m+\frac{3-n}{n})(m+\frac{3-2n}{n})c^3a^{\frac{3-3n}{n}}}{2 \cdot 3(-c)^{\frac{3}{n}}} + \text{etc.}\right)$$

Nun

Nun ist $t = x^n$, und setzt man daher $\frac{m}{n}$ für m, und der Kürze wegen $\left(\frac{a}{-c}\right)^{\frac{1}{n}} = \varrho$, so erhält man

$$x^m = \varrho^m\left(1 - \frac{mb\varrho}{na} + \frac{m(m+2-n)b^2\varrho^2}{2n^2a^2} - \frac{m(m+3-n)(m+3-2n)b^3\varrho^3}{2.3n^3a^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

Da nun überhaupt

$$\varrho = \left(\cos.\frac{\lambda.360^0}{n} + \sin.\frac{\lambda.360^0}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{\frac{a}{-c}}$$

ist, wenn man für λ nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, ꝛc. bis n setzt, so findet man durch die Substitution dieses Werthes in dem vorhergehenden Ausdrucke n verschiedene Werthe für x^m, und dieses sind die Werthe von x'^m, x''^m, x'''^m ꝛc. $(x^n)^m$.

35.

Dritte Aufgabe.

Alle Wurzeln der Gleichung

$$a - bx + cx^n - ex^s = 0$$

zu finden, wenn n und s ganze Zahlen sind und $n < s$ ist.

Erste Auflösung.

1) Da sich diese Gleichung mit der im 6ten Exempel Nr. 20. vergleichen läßt, wenn man

$$\alpha = \frac{a}{b},\ \beta = \frac{c}{b},\ \gamma = -\frac{e}{b},\ \delta = 0, \text{ꝛc.}$$

$$p = n,\ q = s - n$$

setzt, so hat man auch nur nöthig, diese Substitutionen in den

den Formeln jenes Exempels vorzunehmen, um sogleich den Ausdruck für eine jede Funktion von $\frac{x}{\alpha}$ zu bekommen, wo x nothwendig die erste Wurzel der gegebenen Gleichung vorstellt, (Nr 33.)

2) Um die übrigen Wurzeln zu finden nehme man die beyden Glieder $- bx + cx^n$ zu den ersten Gliedern an, und bringe also die gegebene Gleichung auf die Form

$$b - cx^{n-1} - ax^{-1} + ex^{s-1} = 0$$

Dann setze man $x^{n-1} = t$, wodurch die Gleichung die Form des angeführten Exempels bekommt, oder vergleiche diese Gleichung mit der im siebenten Exempel, indem man

$$\alpha = \frac{b}{c}, \quad \beta = \frac{-a}{c}, \quad \gamma = \frac{e}{c}, \quad \delta = 0, \text{ ꝛc.}$$

$$r = n - 1, \quad p = -1, \quad q = s$$

setzt. Auf diese Art findet man sogleich den Werth einer jeden Funktion von $\frac{x}{\varrho}$, wo $\varrho = \sqrt[r]{\alpha} = (\frac{b}{c})^{\frac{1}{n-1}}$ ist. Giebt man demnach dem Buchstaben ϱ die r Werthe, welche ihm zukommen, und welche sich insgesammt durch die Formel darstellen lassen

$$\varrho = (\text{cos}.\frac{\lambda . 360^0}{r} + \text{sin}.\frac{\lambda . 360^0}{n}\sqrt{-1})\sqrt[r]{\alpha}$$

wenn man für λ nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. bis r setzt, so bekommt man r oder $n - 1$ Formeln, welche die 2te, 3te bis nte Wurzel der gegebenen Gleichung ausdrucken.

Endlich nehme man die beyden letzten Glieder $cx^n - ex^s$ zu den beyden ersten Gliedern an, und schreibe die Gleichung auf folgende Art,

$$c - ex^{s-n} - bx^{1-n} + ax^{-n} = 0$$

Ver=

Vergleicht man diese Gleichung mit der im 7ten Exempel, so hat man

$$\alpha = \frac{c}{e}, \quad \beta = -\frac{b}{e}, \quad \gamma = \frac{a}{e}, \quad \delta = 0, \text{ꝛc.}$$

$$s - n = r, \quad 1 - n = p, \quad q = 1$$

und findet dadurch den Ausdruck für jede Funktion von $\frac{x}{\varrho}$, wo ϱ allemal $= \sqrt[r]{\alpha} = (\frac{c}{e})^{\frac{1}{s-n}}$ ist. Setzt man darin die r oder $s - n$ verschiedene Werthe von ϱ, so bekommt man eben so viel verschiedene Ausdrücke für die $s - n$ letzten Wurzeln der Gleichung.

Auf diese Art bekommt man drey Formeln, davon die erste die erste Wurzel, die andere die $n - 1$ folgenden, und die dritte die $s - n$ letzten Wurzeln in sich faßt; so daß man nicht bloß alle Wurzeln der gegebenen Gleichung, sondern auch jede Funktion einer jeden dieser Wurzeln auf dem beschriebenen Wege kennen lernt.

Zweyte Auflösung.

Bey der vorhergehenden Auflösung combinirten wir jedesmal zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder; die Combination anderer Gliederpaare wird uns daher noch andere Auflösungen an die Hand geben.

Nun fällt in die Augen, daß man nach der Combination der beyden ersten Glieder $a - bx$, wodurch wir vorhin die erste Wurzel fanden, sogleich das zweyte $- bx$ mit dem letzten $- ex^s$ zusammen nehmen kann, um die noch übrigen Wurzeln zu bekommen. Betrachtet man demnach diese beyden Glieder als die ersten, und schreibt folglich die Gleichung auf diese Art,

$$b + ex^{s-1} - ax^{-1} - cx^{n-s} = 0$$

so giebt die Vergleichung derselben mit dem 7ten Exempel

$$\alpha = \frac{b}{e},\ \beta = -\frac{a}{e},\ \gamma = -\frac{c}{e},\ \delta = 0,\ \text{rc.}$$

$$r = s - 1,\ p = -1,\ q = n - s + 1$$

Substituirt man daher diese Werthe in dem allgemeinen Ausdrucke einer jeden Funktion von $\frac{x}{\varrho}$, wo $\varrho = \alpha^{\frac{1}{r}} = (\frac{b}{e})^{\frac{1}{s-1}}$ ist, so bekommt man durch die $s - 1$ Werthe von ϱ, $s - 1$ verschiedene Ausdrücke für die gesuchten $s - 1$ Wurzeln.

Combinirt man daher die Formel 1) der vorhergehenden Auflösung mit der gegenwärtigen, so findet man den Werth einer jeden Funktion einer jeden der s Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Dritte Auflösung.

Jetzt wollen wir das erste Glied mit dem Gliede cx^n combiniren, oder diese beyden Glieder als die ersten Glieder unserer allgemeinen Formel betrachten. Vergleicht man die Gleichung bey dieser Voraussetzung mit dem 7ten Exempel, so hat man

$$\alpha = \frac{a}{c},\ \beta = -\frac{b}{c},\ \gamma = -\frac{e}{c},\ \delta = 0,\ \text{rc.}$$

$$r = n,\ p = 1,\ q = s - 1$$

Substituirt man diese Werthe, so bekommt eine Formel, welche überhaupt jede Funktion von $\frac{x}{\varrho}$ ausdruckt, wenn $\varrho = \sqrt[r]{\alpha} = (\frac{a}{c})^{\frac{1}{n}}$ ist. Setzt man demnach für ϱ jeden der n Werthe, welche diese Größe haben kann, so bekommt man eben

eben so viel Formeln für die n ersten Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Um die übrigen $s - n$ Wurzeln zu finden muß man das Glied cx^n mit dem letzten $- ex^s$ combiniren. Da aber diese Combination schon bey Nr. 3. der ersten Auflösung gebraucht worden ist, so hat man nur nöthig, die daselbst gefundene Formel zu nehmen.

Man hat also hier in allem zwey allgemeine Formeln, so wie bey der vorhergehenden Auflösung, und man kann vermittelst dieser Formeln nicht nur jede Wurzel insbesondere sondern auch jede Funktion dieser Wurzeln finden.

Vierte Auflösung.

Es ist noch eine Combination übrig, nemlich die der beyden äußersten Glieder a und $- ex^s$, welche unmittelbar alle Wurzeln der Gleichung geben wird.

Vergleicht man bey dieser Voraussetzung die gegebene Gleichung mit dem 7ten Exempel, so hat man

$$\alpha = \frac{a}{e}, \quad \beta = -\frac{b}{e}, \quad \gamma = \frac{c}{e}, \quad \delta = 0, \text{ etc.}$$

$$r = s, \quad p = 1, \quad q = n - 1$$

und findet vermittelst dieser Substitutionen eine allgemeine Formel für den Ausdruck einer jeden Funktion von $\frac{x}{\varrho}$, wo

$\varrho = \sqrt[r]{\alpha} = (\frac{a}{e})^{\frac{1}{s}}$ ist, so daß man, wenn man nach und nach die s Werthe von ϱ braucht, eben so viel besondere Formeln für die s Wurzeln der gegebenen Gleichung bekommt. Auf diese Art reicht also eine einzige allgemeine Formel hin,

um

um den Werth einer jeden Funktion einer jeden Wurzel zu finden.

Da wir alle Combinationen zu zwey, welche sich mit den Gliedern der gegebenen Gleichung machen lassen, gebraucht haben, so lassen sich außer den gegebenen Auflösungen, wenigstens vermittelst unserer Formeln, keine andere geben. Wir verweilen daher nicht länger bey diesem Gegenstande, weil die erklärten Beyspiele hinlänglich scheinen, um den Gebrauch unserer Methode deutlich vor Augen zu legen.

§. 4.

Ueber die Convergenz oder Divergenz der Reihen, welche die Funktionen der Wurzeln der Gleichungen ausdrucken.

36.

Es ist nicht genüg, daß man die Wurzeln der Gleichungen oder ihre Funktionen durch reguläre Reihen ausdrucken kann, deren Fortschreitungsgesetz bekannt ist, man muß auch aus eben diesem Gesetze zu beurtheilen im Stande seyn, ob die Reihen ohne Ende convergiren oder divergiren. Denn soll eine Reihe den Werth einer Größe in der That ausdrucken, so muß sie eine convergirende Reihe seyn, d. h. ihre letzten Glieder müssen unendlich klein oder kleiner werden als jede Größe, die sich angeben läßt. Aus diesem Grunde wollen wir daher nunmehr untersuchen, woran man erkennen kann, ob die Reihen des vorhergehenden §. diese Eigenschaft haben oder nicht.

Um unserer Untersuchung den höchst möglichen Grad der Allgemeinheit zu geben, wollen wir die allgemeine Gleichung (H) der 15ten Nr. oder

$$\alpha - x + \phi x = 0$$

betrachten, welche die allgemeine Formel (K) Nr. 16. giebt,

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi y + \frac{\phi(\alpha y)\psi' y}{\alpha} + \frac{d.(\phi(\alpha y)^2 \psi' y)}{2\alpha^2 dy}$$
$$+ \frac{d^2.(\phi(\alpha y)^3 \psi' y)}{2.3\alpha^3 dy^2} + \text{ꝛc.}$$

wo nach der Differenziation $y = 1$ gesetzt werden muß.

Es sey demnach

$$\frac{d.^{i-1}(\phi(\alpha y)^i \psi' y)}{1.2.3\ldots.i\alpha dy^{i-1}}$$

irgend ein Glied dieser Reihe und sein Anzeiger $i + 1$. Ferner sey die Funktion ϕx irgend eine Reihe von Potestäten von x, oder

$$\phi x = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{ꝛc.}$$

wo A, B, C, ꝛc. jede Coefficienten und a, b, c, ꝛc. jede Exponenten vorstellen. Alsdann hat man gleichfalls

$$\phi(\alpha y) = A\alpha^a y^a + B\alpha^b y^b + C\alpha^c y^c + \text{ꝛc}$$

und es ist folglich ein jedes Glied der iten Potestät dieser Größe, das heißt des Werths von $\phi(\alpha y)^i$

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots i}{1.2.3\ldots.m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots p\ldots} A^m B^n C^p \ldots (\alpha y)^{am+bn+cp}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

wenn m, n, p, ꝛc. solche ganze positive Zahlen bedeuten, daß $m + n + p + \text{etc.} = i$ ist.

Nun wollen wir ferner annehmen, daß auch die Funktion $\psi' y$ durch eine Reihe von Gliedern wie Fy^f ausgedruckt werde. Multiplicirt man also die vorhergehende Größe durch Fy^f, so bekommt man für jedes Glied des Werths von $\phi(\alpha y)^i \psi' y$ den Ausdruck

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots iF.A^m B^n C^p \ldots \alpha^u}{1.2.3\ldots.m.1.2.3\ldots.n.1.2.3\ldots p\ldots} y^{u+f}$$

wenn man der Kürze wegen

$$ma + nb + pc + \text{etc.} = u$$

setzt. Differenzirt man demnach diese Größe $(i - 1)$mal, so daß man y veränderlich und dy beständig seyn läßt, und dividirt darauf durch $1.2.3\ldots\ldots i\alpha^i dy^{i-1}$, so bekommt man für den Werth eines jeden Gliedes

$$\frac{d.^{i-1}(\varphi(\alpha y)^i \psi y)}{1.2.3\ldots\ldots i\alpha^i dy^{i-1}}$$

nachdem $y = 1$ gesetzt worden, die Größe

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)}{1.2.3..m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots p..} FA^m B^n C^p \ldots \alpha^{u-i}$$

Es kommt also nunmehr alles darauf an, daß man untersuche, was diese Größe wird, wenn man i unendlich groß werden läßt.

37.

Zu dem Ende bemerke ich, daß, wenn π das Verhältniß des Umfangs des Kreises zum Durchmesser ausdruckt,

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \text{etc.} + lx =$$

$$(x + \tfrac{1}{2})lx - x + \tfrac{1}{2}l\pi + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{etc.}$$

ist, wie Stirling, Moivre und andere, insbesondere Euler in seiner Anleitung zur Differenzial Rechnung bewiesen haben. Wenn daher x unendlich groß ist, so hat man ohne merklichen Fehler

$$l1 + l2 + l3 + \text{etc.} + lx = (x + \tfrac{1}{2})lx - x + \tfrac{1}{2}l\pi =$$
$$(x + \tfrac{1}{2})lx - le^x + \tfrac{1}{2}l\pi$$

und geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so folgt aus eben der Voraussetzung

$$1.2.3\ldots\ldots x = \frac{\sqrt{\pi}\,.\,x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x}$$

Ferner

Ferner ist überhaupt, x und y mögen beschaffen seyn wie sie wollen,

$$lx + l(x-1) + l(x-2) + \text{etc.} + l(x-y+1)$$

$$=$$

$$(x+\tfrac{1}{2})lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{etc.}$$

$$-(x-y+\tfrac{1}{2})l(x-y) + x - y - \frac{1}{12(x-y)} + \frac{1}{360(x-y)^3}$$

$$-\text{etc.}$$

und nimmt man also x und y unendlich groß an, so wird

$$lx + l(x-1) + l(x-2) + \text{etc.} + l(x-y+1)$$

$$=$$

$$(x+\tfrac{1}{2})lx - (x-y+\tfrac{1}{2})l(x-y) - y$$

und folglich, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht

$$x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-y+1)$$

$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-y}}{(x-y)^{x-y+\frac{1}{2}}}.$$

Hieraus fließt, um dies gelegentlich zu berühren, daß der Coefficient des $(y+1)$ten Gliedes des Binomiums in der $x$ten Potestät wenn x und y sehr groß sind,

$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}.(x-y)^{x-y+\frac{1}{2}}.y^{y+\frac{1}{2}}}$$

ist, so daß dieser Coefficient, wenn man $y = px$ setzt und oben und unten durch $x^{x+\frac{1}{2}}$ dividirt

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}(1-p)^{x+\frac{1}{2}}(\frac{p}{1-p})^y\sqrt{y}}$$

wird.

38.

Dieses vorausgesetzt erhellet, daß m, n, p, ꝛc. u, wenn i unendlich groß angenommen wird, ebenfalls unendlich groß seyn müssen, weil $m + n + p +$ ꝛc. $= i$ und $am + bm + cp +$ ꝛc. $= u$ ist. Auf diese Art hat man

$$1 . 2 . 3 \ldots\ldots m = \frac{\sqrt{\pi} . m^{m + \frac{1}{2}}}{e^{m}}$$

und eben so in den übrigen Fällen.

Setzt man ferner $g = f + 1$, so hat man

$$(u + f)(u + f - 1)(u + f - 2) \ldots . (u + f - i + 2)$$
$$=$$
$$\frac{(u + g)(u + g - 1)(u + g - 2) \ldots . (u + g - i + 1)}{u + g}$$
$$=$$
$$\frac{(u + g)^{u + g - \frac{1}{2}}}{(u + g - 1)^{u + g - i + \frac{1}{2}} e^{i}}$$

und folglich, wenn man i unendlich groß annimmt,

$$\frac{(u + f)(u + f - 1)(u + f - 2) \ldots . (u + f - i + 2)}{1.2.3 \ldots m . 1.2.3 \ldots n . 1.2.3 \ldots p ..}$$
$$=$$
$$\frac{(u + g)^{u + g - \frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{\lambda}{2}}(u + g - i)^{u + g - i + \frac{1}{2}} m^{m + \frac{1}{2}} n^{n + \frac{1}{2}} p^{p + \frac{1}{2}}}$$

wo λ die Menge der Größen m, n, p, ꝛc. d. h. die Menge der Glieder der Funktion φx bedeutet.

Setzt man demnach der Kürze wegen

$$V = \frac{(u + g)^{2g - 1}}{\pi^{\lambda}(u + g - i)^{2g + 1} mnp \ldots}$$

so geht die Größe

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n.1.2.3..\,p\ldots} FA^m B^n C^p \ldots \alpha^{u-1}$$

wenn i unendlich groß wird, in

$$F\sqrt{V}.\frac{(u+g)^u A^m B^n C^p \ldots\ldots \alpha^{u-1}}{(u+g-i)^{u-1} m^m n^n p^p \ldots\ldots}$$

über.

39.

Setzt man nunmehr

$$\frac{m}{i} = \mu;\ \frac{n}{i} = \nu;\ \frac{p}{i} = \pi \text{ rc. } \frac{u}{i} = \upsilon$$

so hat man, weil $m + n + p +$ rc. $= i$, und $am + bn + cp$ $+$ rc. $= u$ ist

$$\mu + \nu + \pi + \text{rc.} = 1$$
$$\mu a + \nu b + \pi c + \text{rc.} = \upsilon$$

woraus erhellet, daß die Zahlen μ, ν, π, rc. ächte Brüche sind. Braucht man diese Substitutionen in dem Ausdrucke

$$\frac{(u+g)^u A^m B^n C^p \ldots\ldots \alpha^{u-1}}{(u-i+g)^{u-1} m^m n^n p^p \ldots}$$

und dividirt oben und unten durch i^u, so erhält man

$$\left\{\frac{(\upsilon + \frac{g}{i})^\upsilon A^\mu B^\nu C^\pi \ldots\ldots \alpha^{\upsilon-1}}{(\upsilon - 1 + \frac{g}{i})^{\upsilon-1}.\mu^\mu.\nu^\nu.\pi^\pi\ldots}\right\}^i$$

oder, wenn man das Glied $\frac{g}{i}$ wegläßt, weil es unendlich klein wird wenn i unendlich groß ist

$$\left(\frac{\upsilon^\upsilon \alpha^{\upsilon-1} A^\mu B^\nu C^\pi \ldots\ldots}{(\upsilon-1)^{\upsilon-1}\mu^\mu.\nu^\nu.\pi^\pi\ldots}\right)^i$$

Durch eben diese Substitutionen verwandelt sich die Größe V, wenn man oben und unten durch i^{2g-1} dividirt, in

 $(\upsilon +$

$$\frac{(\upsilon + \frac{g}{i})^{2g-1}}{i^{\lambda+2}\pi^{\lambda}(\upsilon - 1 + \frac{g}{i})^{2g+1}\mu\nu\pi\ldots}$$

oder, wenn man das unendlich kleine Glied $\frac{g}{i}$ wegläßt, und für g seinen Werth f + 1 wieder setzt, in

$$\frac{\upsilon^{2f+1}}{i^{\lambda+2}\pi^{\lambda}(\upsilon - 1)^{2f+2}\mu\nu\pi\ldots}$$

40.

Setzt man daher

$$M = \frac{\upsilon^{2f+1}}{\pi^{\lambda}(\upsilon - 1)^{2f+3}\mu\nu\pi\ldots} \text{ und}$$

$$N = \upsilon\left(\frac{\upsilon\alpha}{\upsilon - 1}\right)^{\upsilon - 1}\left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu}\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\pi}\ldots,$$

so hat man für ein jedes Glied des Werths von

$$\frac{d.^{i-1}(\phi(\alpha y)^i\psi'y)}{1.2.3\ldots i\alpha^i dy^{i-1}}$$

wenn i unendlich groß ist, den sehr einfachen Ausdruck

$$\frac{F\sqrt{M}\,.\,N^i}{i^{\frac{\lambda+2}{2}}}$$

worin λ die Zahl der Glieder der Funktion ϕx bedeutet, und wo μ, ν, π, ꝛc. positive Zahlen sind, so daß

$$\mu + \nu + \pi + \text{ꝛc.} = 1, \text{ und}$$
$$a\mu + b\nu + c\pi + \text{ꝛc.} = \upsilon$$

ist. Folglich wird diese Größe unendlich groß oder = 0 seyn, je nachdem N einen positiven oder negativen Werth hat, der größer oder nicht größer ist als die Einheit.

Man

Man sieht hieraus, daß die Reihe, welche den Werth von $\psi(\frac{x}{\alpha})$ Nr. 36. ausdruckt, convergiren wird, wenn ohne auf das Zeichen zu sehen

$$N = \text{oder} < 1$$

ist, im entgegenstehenden Falle divergirt sie.

Da nun die Größe N bloß von den Coefficienten A, B, C, ꝛc. und den Exponenten a, b, c, ꝛc. abhängt, welche in der Funktion von φx enthalten sind, und ganz und gar nicht von denen, welche der Funktion von ψx zugehören, und welche F, f, ꝛc. sind: so folgt, daß wenn die Reihe, welche den Werth irgend einer Funktion von $\frac{x}{\alpha}$ ausdruckt, convergirt, selbige auch für jede andere Funktion von $\frac{x}{\alpha}$ convergiren wird.

41.

Ob übrigens gleich die Coefficienten A, B, C, ꝛc. so wie auch die Größe α positiv oder negativ seyn können, so kommt es doch hier bloß auf den absoluten Werth von der Größe

$$\frac{(u+f)\ldots\ldots(u+f-i+2)}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.n\ldots} FA^m B^n C^p \ldots \alpha^{u-1}$$

(Nr. 36.) an, und es ist daher gleich, ob man sie positiv oder negativ nimmt. Um daher die imaginären Größen in dem Werthe von N zu vermeiden, wollen wir die Coefficienten A, B, C, ꝛc. positiv nehmen, weil μ, ν, π, ꝛc. ihrer Natur nach positiv seyn müssen, und was α betrift, so wollen wir es so genommen voraussetzen, daß $\frac{v\alpha}{v-1}$ positiv sey. Hierdurch werden wir für den Werth von N, die Größen μ, ν, π, ꝛc.

und ν mögen seyn, welche sie wollen, allemal eine reelle Form bekommen.

42.

Angenommen daß die Funktion ϕx nicht mehr als ein Glied Ax^α habe und daß also die Gleichung

$$\alpha - x + Ax^\alpha = 0$$

sey: so hat man

$$N = \nu\left(\frac{\nu\alpha}{\nu - 1}\right)^{\nu - 1}\left(\frac{A}{\mu}\right)^\mu$$

und $\mu = 1$, $\alpha\mu = \nu$; folglich $\mu = 1$ und $\nu = a$; folglich

$$N = a\left(\frac{\alpha a}{a - 1}\right)^{a-1} A.$$

Es wird demnach die Reihe convergiren, wenn

$$A = \text{oder} < \frac{1}{a}\left(\frac{a-1}{\alpha a}\right)^{a-1}$$

ist. Dies ist der Fall der zweyten Aufgabe des vorhergehenden §. Nun hat man in der ersten Auflösung sogleich

$$\alpha = \frac{a}{b},\quad A = \frac{c}{b},\quad a = n.$$

Folglich wird die erste Reihe dieser Auflösung, d. h. diejenige welche sich auf die erste Wurzel bezieht, convergirend seyn, wenn

$$\frac{c}{b} = \text{oder} < \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)b}{an}\right)^{n-1}$$

ist, das heißt, wenn ohne auf die Zeichen zu sehen

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{oder} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

ist, und a, b, c, positiv genommen werden.

Ist

Ist $n = 2$, so muß $\frac{ac}{b^2} =$ oder $< \frac{1}{2^2}$, d. h. $b^2 =$ oder $> 4ac$ seyn. Dies ist aber genau die Bedingung, unter welcher die Reihe convergirt, welche man durch die Entwickelung der Wurzelgröße $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ erhält, und welche die nemliche ist als die, welche wir nach unserer Methode gefunden haben.

In der zweyten Reihe eben derselben Auflösung hat man, wenn man die Gleichung

$$\frac{b}{c} - t - \frac{a}{c} t^{\frac{1}{1-n}} = 0$$

mit der obigen allgemeinen Formel vergleicht,

$$\alpha = \frac{b}{c},\ A = -\frac{a}{c},\ a = \frac{1}{1-n}$$

und es wird daher diese Reihe convergiren, wenn ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$\frac{a}{c} = \text{oder} < (1 - n(\frac{nc}{b})^{\frac{n}{1-n}}$$

oder

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} = \text{oder} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

ist. Diese Bedingung ist eben dieselbe als die vorhergehende.

In der zweyten Auflösung hat man, wenn man die Gleichung

$$\frac{a}{c} + t - \frac{bt^{\frac{1}{n}}}{c} = 0$$

mit derselben allgemeinen Formel vergleicht,

$$\alpha = -\frac{a}{c},\ A = \frac{b}{c} \text{ und } a = \frac{1}{n}$$

Sollen daher die Reihen convergiren, so muß ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$\frac{b}{c} = \text{oder} < n\left(\frac{(n-1)c}{a}\right)^{\frac{1-n}{n}}$$

oder

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} = \text{oder} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

seyn, und diese Bedingung steht der bey der ersten Auflösung gerade entgegen.

Wenn man daher 1) in der Gleichung

$$a - bx + cx^n = 0$$

ohne Rücksicht auf die Zeichen der Größen a, b, c

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{oder} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

hat, so muß man die erste Auflösung der zweyten Aufgabe brauchen. Diese wird allemal convergirende und also den Wurzeln selbst gemäße Reihen darbieten, so daß diese Wurzeln reell oder imaginär seyn werden, je nachdem die Reihen, wodurch sie ausgedruckt werden, solches sind.

Es hat daher in diesem Falle die gegebene Gleichung so viel reelle und so viel imaginäre Wurzeln, als es dergleichen in den Gleichungen giebt, die man durch die Combination zweyer ihrer auf einander folgenden Glieder, wenn man dieselben = 0 setzt, erhält. Diese Gleichungen sind

$$a - bx = 0, \text{ und } b - cx^{n-1} = 0$$

und es muß daher zum wenigsten eine Wurzel reell seyn.

Wenn 2) $\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{oder} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$ ist, so muß man die zweyte Auflösung brauchen, deren Reihen dabey nothwendig convergiren. In diesem Falle hat daher die

Gleichung so viel reelle und so viel imaginäre Wurzeln, als es dergleichen in der Gleichung giebt, die man bekömmt, wenn man das erste und letzte Glied mit einander combinirt und $= 0$ setzt, d. h. eben so viel, als der Gleichung $a + cx^n = 0$ zukommen.

43.

Hätte man die Gleichung

$$a - bx^m + cx^{m+n} = 0$$

so dürfte man nur wie Nr. 21., $x^m = t$ annehmen, wodurch die gedachte Gleichung in

$$a - bt + ct^{\frac{m+n}{n}} = 0$$

verwandelt würde. Auf diese Art hätte man wieder den Fall der vorhergehenden Nr. Setzt man daher $\frac{m+n}{n}$ für n, so ergiebt sich, daß die erste Auflösung brauchbar ist, wenn

$$\frac{a^{\frac{n}{m}} c}{b^{\frac{m+n}{n}}} = \text{oder} < \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}}}{\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{m+n}{n}}}$$

oder

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \text{oder} < \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

und die zweyte dagegen, wenn

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \text{oder} > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

ist. Im ersten Falle hat daher die gegebene Gleichung so viel reelle und so viel imaginäre Wurzeln als es dergleichen in den beyden Gleichungen

$$a - bx^m = 0 \text{ und } b - cx^n = 0$$

und in dem zweyten so viel, als es dergleichen in der Gleichung

$$a + cx^{m+n} = 0$$

giebt.

44.

Wenn $\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ wäre, so kämen beyde Bedingungen mit einander überein. In diesem Falle müßte man sagen, daß die Gleichung so viel reelle und so viel imaginäre Wurzeln habe, als es dergleichen in den Gleichungen

$$a - bx^m = 0, \text{ und } b - cx^n = 0$$

und in der Gleichung

$$a + cx^{m+n} = 0$$

giebt. Wäre also die Anzahl der imaginären Wurzeln in jenen beyden Gleichungen verschieden von der Anzahl dieser Wurzeln in der letzten Gleichung, so würde folgen, daß die gegebene Gleichung so viel gleiche Wurzeln hätte, als es mehr imaginäre Wurzeln auf der einen Seite gäbe. Denn da die gleichen Wurzeln die Grenzen zwischen den reellen und imaginären Wurzeln sind, so kann man sie gewissermaßen als zu beyden gehörig betrachten.

45.

Wir haben gesehen (Nr. 40.) daß N nicht > 1 seyn darf, wenn die Reihe convergirend seyn soll. Man suche daher in jedem Falle den größten Werth von N, indem man die Größen μ, ν, π, ꝛc. als veränderlich betrachtet, und schließe, wenn derselbe nicht größer sich ergiebt als 1, daß die Reihe convergire, und im entgegenstehenden Falle, daß sie divergire.

Läßt

Läßt man bloß μ und ν veränderlich seyn, so hat man $\frac{dN}{N} = dv\,l\frac{\alpha v}{v-1} + d\mu(l\frac{A}{\mu} - 1) + d\nu(l\frac{B}{\nu} - 1)$. Da nun $\mu + \nu + \pi +$ ꝛc. $= 1$, und $a\mu + b\nu + c\pi +$ ꝛc. $= \nu$ seyn muß, so wird $d\mu + d\nu = 0$, $ad\mu + bd\nu = dv$; folglich $d\mu = \frac{dv}{a-b}$, und $d\nu = \frac{dv}{b-a}$. Substituirt man diese Werthe und läßt dabey das Differenzial $dN = 0$ werden, so bekommt man

$$l\frac{\alpha v}{v-1} + \frac{l\frac{A}{\mu} - l\frac{B}{\nu}}{a-v} = 0$$

woraus fließt,

$$(\frac{\alpha v}{v-1})^a\frac{A}{\mu} = (\frac{\alpha v}{v-1})^b\frac{B}{\nu}$$

Ließe man μ und π veränderlich seyn, so fände man auf ähnliche Art

$$(\frac{\alpha v}{v-1})^a\frac{A}{\mu} = (\frac{\alpha v}{v-1})^c\frac{C}{\pi}$$

u. s. f.

Auf diese Art sind die Bedingungen des Größten und Kleinsten in folgenden Gleichungen enthalten,

$$(\frac{\alpha v}{v-1})^a\frac{A}{\mu} = (\frac{\alpha v}{v-1})^b\frac{B}{\nu} = (\frac{\alpha v}{v-1})^c\frac{C}{\pi} \text{ ꝛc.}$$

Läßt man demnach λ jeden Coefficienten bedeuten, so ist

$$\mu = \lambda A\,\frac{\alpha v}{v-1})^a$$

$$\nu = \lambda B(\frac{\alpha v}{v-1})^b$$

$$\pi = \lambda C(\frac{\alpha v}{v-1})^c$$

ꝛc.

und

und es hat also, wenn man diese Werthe in die Gleichungen

$$\mu + \nu + \pi + \text{ꝛc.} = 1, \quad \mu a + \nu b + \pi c + \text{ꝛc.} = \upsilon$$

bringt,

$$\lambda(A(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^a + B(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^b + C(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^c + \text{ꝛc.}) = 1$$

$$\lambda(Aa(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^a + Bb(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^b + Cc(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^c + \text{ꝛc.}) = \upsilon$$

Hieraus bekommt man durch die Wegschaffung von λ

$$A(\alpha - \upsilon)(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^\alpha + B(b - \upsilon)(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^b +$$

$$C(c - \upsilon)(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^c + \text{ꝛc.} = 0$$

Hat man durch diese Gleichung υ bestimmt, so wird

$$\lambda = \frac{1}{A(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^\alpha + B(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^b + C(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1})^c + \text{ꝛc.}}$$

und nun lassen sich auch μ, ν, π, ꝛc. finden.

Man kann also durch dieses Mittel allemal erkennen, ob die Reihen, von welchen bisher geredet worden ist, convergiren oder divergiren.

6. Bemerkungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Vom

Herrn de la Grange.

Aus dem 2ten Bande der neuen Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Nach der Wichtigkeit der Theorie von den Gleichungen und nach der Schnelligkeit der Fortschritte zu urtheilen, welche die ersten Erfinder darin machten, müßte dieser Theil der Analyse unter allen der vollkommenste seyn; allein der Bemühungen aller nachfolgenden Mathematiker ungeachtet fehlt demselben zur Vollendung noch sehr viel. Zwar hat man alles erschöpft, was sich über die Natur der Gleichungen, über ihre Verwandlung, über die Bedingungen, unter welchen zwey oder mehrere Wurzeln einander gleich sind oder zu einander ein gegebenes Verhältniß haben, über die Form der imaginären Wurzeln und über die Methode diejenigen reellen Wurzeln zu finden welche sich ihrer Realität ungeachtet in einer imaginären Form darstellen u. s. w. sagen läßt. Man hat auch allgemeine Regeln entdeckt, nach welchen man zu beurtheilen im Stande ist, ob alle Wurzeln einer gegebenen Gleichung reell sind oder nicht, und im ersten Fall, wie viel von diesen Wurzeln positiv und wiel negativ sind; allein

man

man hat bis jetzt noch keine allgemeine Regel zur Bestimmung der Anzahl der imaginären Wurzeln in den Gleichungen die dergleichen enthalten, und noch weniger eine allgemeine Regel zur Bestimmung der Anzahl der reellen, positiven und negativen Wurzeln, wenn man die Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln kennt; ja man hat noch keiue Regel, wornach man mit Sicherheit entscheiden könnte, ob eine gegebene Gleichung reelle Wurzeln habe oder nicht, außer wenn die Gleichung zu einem ungeradeu Grade gehört oder das letzte Glied negativ hat.

Ich will hiermit nicht sagen, daß man die Anzahl der imaginären und reellen, positiven und negativen Wurzeln nicht zu bestimmen im Stande sey, wenn die Coefficienten der gegebenen Gleichung bestimmte Zahlen sind; die Methoden, welche ich dafür gegeben habe, scheinen darüber nichts weiter übrig zu lassen, so wie man sich darnach auch dem Werthe einer jeden Wurzel in diesem Falle so sehr nähern kann, als man irgend will. Es ist vielmehr hier die Rede von den Gleichungen, deren Coefficienten allgemein durch Buchstaben gegeben sind, und von den Bedingungen, die bey diesen Coefficienten statt finden müssen, wenn die Wurzeln einer gegebenen Gleichung diese oder jene Beschaffenheit haben sollen.

In Ansehung der Auflösung dieser Gleichungen ist man noch nicht viel weiter gekommen als man zu Cardan's Zeiten war, welcher zuerst die Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades gegeben hat. Es scheint fast, als müßte man die Entdeckungen der Italienischen Analysten als das höchste betrachten, was man in dieser Materie zu erreichen hoffen darf, wenigstens haben die nachmaligen Ver-

suche

suche noch zu nichts weiter gedient, als zur Erfindung neuer Methoden die Gleichungen des dritten und vierten Grades aufzulösen, davon aber keine einer allgemeinen Anwendung auf die höhern Gleichungen fähig zu seyn scheint.

Ich habe mir gegenwärtig vorgesetzt, die verschiedenen bisherigen Methoden der algebraischen Auflösung der Gleichungen zu untersuchen, dieselben auf allgemeine Principien zu bringen, und aus unwidersprechlichen Gründen zu zeigen, warum sie bey den Gleichungen des dritten und vierten Grades hinlänglich, bey den höhern Gleichungen aber unzulänglich sind.

Diese Untersuchung wird einen zwiefachen Nutzen gewähren. Einmal wird sie über die bekannten Auflösungen der Gleichungen des dritten und vierten Grades ein helleres Licht verbreiten, und zweytens denen nützlich seyn, welche sich mit der Auflösung der Gleichungen der höhern Grade beschäftigen wollen, indem sie ihnen zu dieser Absicht verschiedene Gesichtspunkte vor Augen stellen und sie zugleich einer Menge unnützer Versuche überheben wird.

Erster Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

I.

Da die Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades sehr leicht ist und außer ihrer Leichtigkeit nichts merkwürdiges weiter hat: so wende ich mich sogleich zu der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades, wozu Kunstgriffe erfordert werden, die sich nicht von selbst darbieten.

Es sey also

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

die allgemeine Gleichung des dritten Grades. Da man aus jeder Gleichung durch Vergrößerung ihrer Wurzeln um den Coefficienten des zweyten Gliedes mit dem Exponenten des ersten Gliedes dividirt, das zweyte Glied wegschaffen kann: so läßt sich diese Gleichung dadurch, daß man $m = 0$ setzt, ihrer Allgemeinheit unbeschadet, auf folgende einfachere Form bringen

$$x^3 + nx + p = 0.$$

In dieser Form haben Scipio Ferreo und Tartalea die Gleichungen des dritten Grades untersucht, und ihnen sind wir die Auflösung dieser Gleichungen schuldig, obgleich der Weg, auf welchem sie zu derselben gelangt sind, uns unbekannt ist. Die natürlichste Methode scheint mir diejenige zu seyn, welche Hudde angenommen hat. Man zerfällt darnach die Wurzel in zwey unbestimmte Größen, wobey sich die Gleichung dergestalt in zwey Theile theilen läßt, daß die Erfindung der gedachten unbestimmten Größen bloß von der Auflösung der quadratischen Gleichungen abhängt.

Man setzt also nach dieser Methode

$$x = y + z$$

und reducirt durch diese Substitution die gegebene Gleichung auf folgende

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + n(z + y) + p = 0$$

oder

$$y^3 + z^3 + p + (z + y)(3yz + n) = 0.$$

Nun macht man die beyden abgesonderten Gleichungen

$$y^3 + z^3 + p = 0$$

$$3yz + n = 0$$

und

und bekommt $z = -\frac{n}{3y}$, und, wenn man diesen Werth in die erste Gleichung bringt,

$$y^3 - \frac{n^3}{27y^3} + p = 0$$

oder

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0.$$

Dieses ist nun zwar eine Gleichung des sechsten Grades. Allein da die unbekannte Größe darin nur zweymal vorkommt, und ihr Exponent in dem ersten Gliede das Doppelte des Exponenten im zweyten Gliede ist: so kann man dieselbe als eine Gleichung des zweyten Grades behandeln. Auf diese Art bekommt man

$$y^3 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27}\right)}$$

und daher

$$y = \sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27}\right)}\right)}$$

Hat man aber hiernach y, und dann nach $z = -\frac{n}{3y}$ die andere unbestimmte Größe z gefunden, so ist

$$x = y + z = y - \frac{n}{3y}.$$

2.

Es bietet aber diese Auflösung Gelegenheit zu mehrern Anmerkungen dar. Zuvörderst ist bekannt, daß die Größe y sechs Werthe haben muß, weil sie durch eine Gleichung vom sechsten Grade bestimmt wird, und daß daher der Größe x ebenfalls sechs Werthe zukommen. Da aber x die Wurzel einer Gleichung vom dritten Grade ist, so kann der Werth

 davon

davon nur dreyfach seyn, und es müssen sich daher jene sechs Werthe auf drey zurückführen lassen. Daß dieses möglich sey, lehret der Calcul, wenn man aus den Gleichungen

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0, \text{ und } x = y - \frac{n}{3y}$$

y wegschaft. Setzt man der größern Allgemeinheit wegen

$$x = y - \frac{k}{y} \text{ oder } y^2 - xy - k = 0$$

so hat man $y^2 = xy + k$, und folglich

$$y^3 = xy^2 + ky = y(x^2 + k) + kx$$
$$y^6 = y^2(x^2 + k)^2 + 2kx(x^2 + k)y + k^2x^2$$
$$= yx(x^2 + k)(x^2 + 3k) + kx^4 + 3k^2x^2 + k^3$$

und durch die Substitution dieser Werthe von y^3 und y^6

$$y(x^2 + k)(x^3 + 3kx + p) + kx(x^3 + 3kx + p) + k^3 - \frac{n^3}{27} = 0.$$

Es sey der Kürze wegen

$$\frac{n^3}{27} - k^3 = h, \text{ und } x^3 + 3kx + p = X$$

so wird $(y(x^2 + k) + kx)X - h = 0$, und folglich

$$y = \frac{\frac{h}{X} - kx}{x^2 + k}$$

Bringt man diesen Werth von y in die Gleichung $y^2 - xy - k = 0$, so hat man

$$\left(\frac{h}{X} - kx\right)^2 - x\left(\frac{h}{X} - kx\right)(x^2 + k) - k(x^2 + k)^2 = 0$$

oder

$$k^3X^2 + hXx(x^2 + 3k) - h^2 = 0$$

oder, da $x(x^2 + 3k) = X - p$ ist

$$\frac{n^3}{27}X^2 - hpX - h^2 = 0$$

d. h.

d. h.

$$\left(X - \frac{27hp}{n^3}\right)^2 - \frac{27h^2}{n^3}\left(1 + \frac{27p^2}{4n^3}\right) = 0$$

Setzt man nunmehr $k = \frac{n}{3}$, um $x = y - \frac{n}{3y}$ zu bekommen, so ist klar, daß $h = 0$ wird. Dadurch aber verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in $X^2 = 0$, oder

$$(x^3 + nx + p)^2 = 0$$

eine Gleichung, welche eben dieselben Wurzeln hat als die gegebene, wovon aber eine jede doppelt ist.

Es ist daher die Auflösung einer Gleichung des dritten Grades eigentlich nichts anders als Auflösung einer Gleichung vom sechsten Grade; eine Unbequemlichkeit, welche sich bey dem zweyten Grade nicht findet, die aber bey den höhern Graden noch weit größer wird.

3.

Da es also unter den sechs Werthen von y nicht mehr als drey von einander verschiedene Werthe giebt, so kommt es nunmehr darauf an, Unterscheidungskennzeichen von diesen festzusetzen. Hiezu bedürfen wir eines besondern Ausdrucks für jeden der sechs Werthe von y. Nennt man nun die drey cubischen Wurzeln der Einheit, oder die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$, 1, α und β, und setzt dabey der Kürze wegen $\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27} = q$: so sind die sechs Werthe von y

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}\right)}$$

$$\alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}\right)}$$

$$\beta\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}\right)}$$

Da ferner

$$\sqrt[3]{(-\frac{q}{2} \pm q)} \times \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})} = \sqrt[3]{(\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{n}{3}$$

und folglich

$$\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}} = -\frac{n}{3\sqrt{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})}}$$

ist: so sind die zugehörigen Werthe von z

$$\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\frac{1}{\beta}\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

Da aber 1, α und β die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ sind, so ist $1 \,.\, \alpha \,.\, \beta = \alpha\beta = 1$; folglich $\frac{1}{\alpha} = \beta$ und $\frac{1}{\beta} = \alpha$, und die vorhergehenden Werthe lassen sich auch auf diese Art ausdrucken:

$$\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\beta\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\alpha\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

Nun ist $x = y + z$, und setzt man daher die zugehörigen Werthe von y und z zusammen, so bekommt man

$$\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})} + \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\alpha\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})} + \beta\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$\beta\sqrt[3]{(-}$

$$\beta\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})} + \alpha\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

und hier ist leicht zu sehen, daß man einerley Werthe für x bekommt, man mag die obern oder die untern Zeichen nehmen.

Hieraus folgt, daß es gleichgültig ist, ob man die Wurzelgröße $\sqrt{q}$ positiv oder negativ nimmt, und daß sich die drey Wurzeln der gegebenen Gleichung unmittelbar aus den drey Werthen des cubischen Ausdrucks $\sqrt{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})}$ finden lassen.

4.

Nr. 2. ist gezeigt worden, daß die Auflösung einer jeden Gleichung vom dritten Grade auf eine Gleichung vom sechsten Grade führt; wollte man aber die Gleichung

$$x = \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} + \sqrt{q})} + \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} - \sqrt{q})}$$

von ihrer Irrationalität befreyen, so würde man zu einer Gleichung vom neunten Grade gelangen. Denn cubirte man, so ergäbe sich

$$x^3 = -p + 3x\sqrt[3]{(\frac{p^2}{4} - q)}$$

und versetzte man nun das Glied $-p$ und cubirte abermals, so würde

$$(x^3 + p)^3 = 27(\frac{p^2}{4} - q)x^3$$

oder, da $\frac{p^2}{4} - q = \frac{x^3}{27}$ ist

$$x^9 + 3px^6 + (3p^2 + n^3)x^3 + p^3 = 0.$$

Allein diese Gleichung schließt außer den drey Wurzeln der chung $x^3 + nx + p = 0$ noch sechs andere in sich, indem sie sich in folgende drey zerlegen läßt:

$$x^3 + nx + p = 0$$
$$x^3 + \alpha nx + p = 0$$
$$x^3 + \beta nx + p = 0$$

und die beyden letztern Gleichungen hiervon sind von der ersten unterschieden, wie beym ersten Anblick wahrzunehmen ist. Es läßt sich daher auch hieraus nicht so wie oben eine Folge für den Grad herleiten, welchem die Auflösung der gegebenen Gleichung eigentlich zugehört, denn oben mußte solches deswegen geschehen, weil die Gleichung $X^2 = 0$ (Nr. 2.) eben dieselben Wurzeln enthielt als die gegebene.

5.

Die Gleichung des sechsten Grades

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$$

heißt die reducirte Gleichung des dritten Grades, weil man bey der Auflösung der Gleichung $x^3 + nx + p = 0$ auf sie zurückkommt. Da wir also vorhin die Abhängigkeit der Wurzeln dieser letzten Gleichung von den Wurzeln jener Gleichung kennen gelernt haben, so wollen wir nunmehr untersuchen, wie die Wurzeln der reducirten Gleichung von den Wurzeln der gegebenen Gleichung abhängen. Um aber dieser Untersuchung einen höhern Grad von Allgemeinheit und Deutlichkeit zu geben, wollen wir eine Gleichung betrachten, welche alle Glieder hat, und deren Form folgende ist:

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

so wie ihre Wurzeln, allgemein ausgedruckt, a, b, c.

Fängt man davon an, daß man das zweyte Glied wegschaft und zu dem Ende $x = x' - \frac{m}{3}$, so wie der Kürze wegen

$$n' = n - \frac{m^2}{3},\ p' = p - \frac{mn}{3} + \frac{2m^3}{27}$$

setzt, so bekommt man die Gleichung

$$x'^3 + n'x' + p' = 0$$

und diese Gleichung hat die erforderliche Form. Setzt man nunmehr $x' = y - \frac{n'}{3y}$, so erhält man zur reducirten Gleichung

$$y^6 + p'y^3 - \frac{n'^3}{27} = 0,$$

und folglich, wenn man die Cubikwurzel aus $-\frac{p'}{2} + \sqrt{(\frac{p'^2}{4} + \frac{n'^3}{27})}$ mit dem Buchstaben r bezeichnet, für die drey Werthe von y

$$y = r,\ y = \alpha r,\ y = \beta r.$$

Auf diese Art werden die drey Wurzeln

$$x' = r - \frac{n'}{3r},\ x' = \alpha r - \frac{n'}{3\alpha r},\ x' = \beta r - \frac{n'}{3\beta r}$$

und da $x = x' - \frac{m}{3}$ ist, so findet man für x, wenn man der Kürze wegen $\frac{n'}{3r} = s$ setzt,

$$-\frac{m}{3} + r - s$$

$$-\frac{m}{3} + \alpha r - \frac{s}{\alpha}$$

$$-\frac{m}{3} + \beta r - \frac{s}{\beta}$$

und es wird daher

$$a = -\frac{m}{3} + r - s$$

 b =

$$b = -\frac{m}{3} + \alpha r - \frac{s}{\alpha}$$

$$c = -\frac{m}{3} + \beta r - \frac{s}{\beta}$$

Zieht man hier nach einander die zweyte und dritte Gleichung von der ersten ab, so bekommt man

$$a - b = (1 - \alpha)(r + \frac{s}{\alpha})$$

$$a - c = (1 - \beta)(r + \frac{s}{\beta})$$

und findet hieraus

$$\frac{\alpha(a - b)}{1 - \alpha} = \alpha r + s$$

$$\frac{\beta(a - c)}{1 - \beta} = \beta r + s$$

woher sich, wenn man abermals abzieht und durch $\alpha - \beta$ dividirt

$$r = \frac{\frac{\alpha(a - b)}{1 - \alpha} - \frac{\beta(a - c)}{1 - \beta}}{\alpha - \beta}$$

oder

$$r = \frac{a}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha b}{(\alpha - 1)(\alpha - \beta)} + \frac{\beta c}{(\beta - 1)(\beta - \alpha)}$$

ergiebt. Nun sind 1, α und β die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$, und daher

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)$$

folglich, wenn man differenzirt,

$$3x^2 = (x - \alpha)(x - \beta) + (x - 1)(x - \beta) + (x - 1)(x - \alpha)$$

so daß man, wenn man nach und nach $x = 1, \alpha, \beta$ setzt,

$$3 = (1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$3\alpha^2 = (\alpha - 1)(\alpha - \beta)$$

$$3\beta^2 = (\beta - 1)(\beta - \alpha)$$

bekommt.

bekommt. Setzt man demnach diese Werthe in den vorhergehenden Ausdruck für r, so erhält man

$$r = \frac{a}{3} + \frac{b}{3\alpha} + \frac{c}{3\beta}$$

oder, da $\alpha\beta = 1$ ist,

$$r = \frac{a + \beta b + \alpha c}{3}$$

Dieses ist daher der Werth von r, und folglich auch der Werth von y, so daß, wenn man α statt β und umgekehrt setzt, welches erlaubt ist,

$$y = \frac{a + \alpha b + \beta c}{3}$$

wird.

6.

Aus diesem Ausdrucke für y erhellet, warum die reducirte Gleichung eine Gleichung vom sechsten Grade seyn muß. Denn da diese reducirte Gleichung nicht unmittelbar von den Wurzeln a, b, c der gegebenen Gleichung, sondern bloß von den Coefficienten m, n, p abhängt: so ist klar, daß man in dem Ausdrucke für y die Größen a, b und c unter einander nach Gefallen muß verwechseln können. Es muß also die Größe y so viel verschiedene Werthe haben, als sich die drey Wurzeln a, b und c versetzen lassen; und da dieses nach der Theorie der Versetzungen auf sechs verschiedene Arten möglich ist, so muß auch die reducirte Gleichung eine Gleichung vom sechsten Grade seyn.

Außerdem erhellet daraus auch, warum sich die reducirte Gleichung wie eine quadratische Gleichung behandeln läßt. Es rührt dies nemlich daher, weil diese Gleichung bloß die Dignitäten y^3 und y^6, das heißt Dignitäten enthält,

hält, deren Exponenten Vielfache von 3 sind, so daß, wenn r ein Werth von y ist, auch αr und βr Werthe von y seyn müssen, indem $\alpha^3 = 1$ und $\beta^3 = 1$ ist. Es läßt sich dieses aber noch leichter zeigen, wenn man $\beta = \alpha^2$ setzt, und dieser Werth von β ergiebt sich aus $\alpha\beta = 1$ und $\alpha^3 - 1 = 0$, indem daraus $\alpha\beta = \alpha^3$ oder $\beta = \alpha^2$ folgt. Auf diese Art kann man den Werth von y auch durch

$$y = \frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3}$$

ausdrucken, und hieraus durch die Versetzung der Buchstaben a, b und c nach folgender Tabelle die sechs Werthe von y oder die sechs Wurzeln der reducirten Gleichung finden:

$$\frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3}$$
$$\frac{a + \alpha c + \alpha^2 b}{3}$$
$$\frac{b + \alpha a + \alpha^2 c}{3}$$
$$\frac{b + \alpha c + \alpha^2 a}{3}$$
$$\frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{3}$$
$$\frac{c + \alpha a + \alpha^2 b}{3}$$

Multiplicirt man hier den ersten Ausdruck zuvörderst durch α und dann durch β oder α^2, so bekommt man, da $\alpha^3 = 1$ ist,

$$\frac{c + \alpha a + \alpha^2 b}{3} \text{ und } \frac{b + \alpha c + \alpha^2 a}{3}$$

also den sechsten und vierten. Multiplicirt man ferner den zweyten Ausdruck durch α und α^2, so bekommt man

$$\frac{b + \alpha a + \alpha^2 c}{3} \text{ und } \frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{3}$$

oder den dritten und vierten. Eben so bekommt man, wenn man den dritten und vierten oder den fünften und sechsten Ausdruck durch α und α^2 multiplicirt, die übrigen.

7.

Dies leitet auf eine Methode, die reducirte Gleichung für die Gleichungen des dritten Grades directe zu finden. Es sey $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ die gegebene Gleichung und ihre Wurzeln a, b und c. Angenommen, daß die Wurzeln der reducirten Gleichung, allgemein ausgedruckt, Funktionen des ersten Grades von den Wurzeln a, b und c seyen, wie $Aa + Bb + Cc$, wo A, B und C von den Größen a, b und c unabhängige Coefficienten sind: so bekommt man, wenn man die Größen a, b und c so oft als möglich versetzt,

$$Aa + Bb + Cc$$
$$Aa + Bc + Cb$$
$$Ab + Ba + Cc$$
$$Ab + Bc + Ca$$
$$Ac + Bb + Ca$$
$$Ac + Ba + Cb$$

für die sechs Wurzeln der reducirten Gleichung. Soll nun diese Gleichung keine andere Dignitäten enthalten als solche, deren Exponenten Vielfache von 3 sind, so müssen nach dem Obigen, wenn die eine Wurzel r ist, auch αr und βr oder $\alpha^2 r$ Wurzeln von ihr seyn. Setzt man demnach

$$r = Aa + Bb + Cc$$

so muß $\alpha Aa + \alpha Bb + \alpha Cc$ einer von den vorhergehenden fünf übrigen Größen gleich seyn.

Nun kann dieselbe weder $Aa + Bc + Cb$ noch $Ab + Ba + Cc$ gleich werden, als wenn man $\alpha = 1$ annimmt.

Im

Im ersten Falle bekommt man alsdenn $\alpha A = A$ und im zweyten $\alpha C = C$. Vergleicht man aber mit $Ab + Bc + Ca$, so hat man $\alpha A = C$, $\alpha B = A$ und $\alpha C = B$, woraus $C = \alpha A$, $B = \alpha^2 A$ und $\alpha^3 A = A$, oder $\alpha^3 = 1$ fließt. Auf diese Art erhellet, daß α eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ seyn muß, und setzt man daher, der größern Leichtigkeit wegen, $A = 1$, so hat man $A = 1$, $B = \alpha$ und $C = \alpha^2$. Dieses giebt eben die Formeln, welche wir oben gefunden haben, bis auf den Nenner 3.

Setzt man also der Kürze wegen

$$r = a + \alpha b + \alpha^2 c$$
$$s = a + \alpha c + \alpha^2 b$$

so hat man in r, αr, $\alpha^2 r$ und s, αs, $\alpha^2 s$ die sechs Wurzeln der verwandelten Gleichung. Nennt man die unbekannte Größe dieser Gleichung y, so ist das Produkt der drey Faktoren $y - r$, $y - \alpha r$, $y - \alpha^2 r$

$$y^3 - r^3$$

und auf ähnliche Art das Produkt der drey übrigen Faktoren $y^3 - s^3$. Auf diese Art ist das ganze Produkt oder die reducirte Gleichung selbst

$$y^6 - (r^3 + s^3)y^3 + r^3 s^3 = 0$$

und es kommt nunmehr bloß darauf an, die Werthe von $r^3 + s^3$ und $r^3 s^3$ zu finden.

Erhebt man die Größe r zur dritten Potestät, und behält dabey vor Augen, daß $\alpha^3 = 1$ ist: so wird

$$r^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2 b + b^2 c + c^2 a)$$
$$+ 3\alpha^2(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

und folglich auch, wenn man die Buchstaben b und c verwechselt,

$$s^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2 c + c^2 b + b^2 a)$$
$$+ 3\alpha^2(c^2 a + b^2 c + a^2 b)$$

Es

Es sey der Kürze wegen

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = L$$
$$a^2b + b^2c + c^2a = M$$
$$a^2c + b^2a + c^2b = N$$

so wird

$$r^3 = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N$$
$$s^3 = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M,\ \text{folglich}$$
$$r^3 + s^3 = 2L + 3(\alpha + \alpha^2)(M + N)$$

Da aber 1, α und α^2 die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ sind, worin das zweyte Glied fehlet: so ist $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ und also

$$r^3 + s^3 = 2L - 3(M + N).$$

Multiplicirt man hierauf die Werthe von r^3 und s^3 mit einander, so bekommt man

$$r^3s^3 = L^2 + 9(M^2 + N^2) + 3(\alpha + \alpha^2)(L(M + N) + 3MN)$$

oder, da $\alpha + \alpha^2 = -1$ ist

$$r^3s^3 = L(L - 3(M + N) + 9((M^2 + N^2) - 3MN)$$

Nun ist leicht einzusehen, daß die Größen α, $M + N$ und MN durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung m, n, p, und zwar ohne Extraction der Wurzel bestimmt werden. Es fließt dies nemlich daraus, weil diese Größen dieselben bleiben, man mag die Buchstaben a, b und c versetzen wie man will, so daß also jede von jenen Größen nicht mehr als einen Werth haben kann.

8.

Da nemlich

$$-m = a + b + c$$
$$n = ab + ac + bc \text{ und}$$
$$-p = abc$$

ist, so ist nach bekannten Regeln

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2 - 2n$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -m^3 + 3mn - 3p$$

und hieraus findet man

$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 = n^3 - 3mnp + 3p^2.$$

Folglich ist

$$L = -m^3 + 3mn - 9p$$

$$M + N = 3p - mn$$

$$MN = n^3 + p(m^3 - 6mn) + 9p^2$$

Hieraus ergiebt sich

$$r^3 + s^3 = -2m^3 + 9mn - 27p$$

und

$$r^3s^3 = m^6 - 9m^4n + 27m^2n - 27n^3 = (m^2 - 3n)^3.$$

Auf diese Art wird die reducirte Gleichung

$$y^6 + (2m^3 - 9mn + 27p)y^3 + (m^2 - 3n)^3 = 0$$

und diese Gleichung stimmt mit der oben Nr. 5. gefundenen überein, außer daß y in ihr das Dreyfache der unbekannten Größe in jener ist. Löset man daher diese Gleichung nach Art der quadratischen Gleichungen auf, oder setzt man, der Kürze wegen $y^3 = z$, so daß man

$$z^2 + (2m^3 - 9mn + 27p)z + (m^2 - 3n)^3 = 0$$

habe, und nennt dabey die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung z' und z'': so bekommt man $y^3 = z' = z''$, und folglich $y = \sqrt[3]{z'} = \sqrt[3]{z''}$. Da aber angenommen worden, daß r und s die beyden Werthe von y seyen, so ist

$$r = a + \alpha b + \alpha^2 c = \sqrt[3]{z'}$$

$$s = a + \alpha c + \alpha^2 b = \sqrt[3]{z''}$$

und diese beyden Gleichungen, verbunden mit der Gleichung

$$a + b + c = -m$$

setzen in den Stand, die drey Wurzeln a, b und c zu finden. Denn da $\alpha^3 = 1$ und $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ist, so wird

a =

$$a = \frac{-m + \sqrt[3]{z'} + \sqrt[3]{z''}}{3}$$

$$b = \frac{-m + \alpha^2\sqrt[3]{z'} + \alpha\sqrt[3]{z''}}{3}$$

$$c = \frac{-m + \alpha\sqrt[3]{z'} + \alpha^2\sqrt[3]{z''}}{3}$$

welches mit dem Obigen übereinstimmt.

9.

Um diesen Gegenstand in ein noch helleres Licht zu setzen bemerke man, daß die Größen M und N Nr. 7. von der Art sind, daß die eine in die andere übergeht, wenn man die drey Wurzeln a, b und c auf irgend eine Art verwechselt, so daß diese Größen bloß Wurzeln einer quadratischen Gleichung seyn können. Nennt man die unbekannte Größe dieser Gleichung t, so hat dieselbe nothwendiger Weise die Form

$$t^2 - (M + N)t + MN = 0$$

und setzt man daher für M und N die ihnen zukommende Werthe Nr. 8., so hat man

$$t^2 - (3p - mn)t + (n^3 - 6mn)p + 9p^2 = 0$$

Auf diese Art bekommt man durch die Auflösung der vorhergehenden Gleichung die Werthe von M und N, und da die Größe L bereits bekannt ist, indem $L = -m^3 + 3mn - 9p$, so sind auch die Werthe von r^3 und s^3 (Nr. 7.) oder von z' und z'' (Nr. 8.) bekannt. Sie sind nemlich

$$z' = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N$$
$$z'' = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M$$

und vermittelst dieser Werthe findet man die Wurzeln a, b und c, wie wir kurz vorher gesehen haben.

Uebrigens erhellet aus dieser Eigenschaft der Funktionen M und N deutlich, warum die Größe $z = y^3 = (a + \alpha b + \alpha^2 c)^3$ bloß von einer Gleichung des zweyten Grades abhängt, so daß die Gleichung für y bloß die Dignitäten y^3 und y^6 enthalten kann.

10.

Die Methode der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades, welche wir bis jetzt untersucht haben, nennt man gewöhnlich die Cardanische; es giebt aber noch eine andere, deren Erfinder von Tschirnhausen ist, und welche den Vorzug hat, daß sie directer und allgemeiner, obgleich weniger einfach ist. Man findet dieselbe in den Actis Eruditorum vom Jahr 1683 erklärt, und es kommt dabey darauf an, aus jeder gegebenen Gleichung so viel Zwischenglieder wegzuschaffen als man will. Der Erfinder derselben trägt sie als eine allgemeine Methode vor, und wir werden sehen, daß sie solches wirklich ist. Allein sie erfordert öfters die Auflösung höherer Gleichungen als die gegebene selbst ist, und ist deswegen bloß bis bey den Gleichungen des vierten Grades brauchbar.

Wenn x die unbekannte Größe einer Gleichung ist, so kann man daraus ein Glied wegschaffen, wenn man $x = y + a$ setzt, wo y eine neue unbekannte und a eine unbestimmte Größe ist. Eben so kann man zwey Glieder wegbringen, wenn man $x^2 = bx + a + y$, oder drey, wenn man $x^3 = cx^2 + bx + a + y$ setzt u. s. w. und a, b und c ꝛc. sind dabey unbestimmte Coefficienten und immer so viel, als man Glieder wegschaffen will.

Auf diese Art hat man nur die unbekannte Größe x aus der gegebenen Gleichung vermittelst der neuen angenommenen

nen Gleichung wegzuschaffen, und man bekommt dann eine neue Gleichung für y von eben dem Grade als die gegebene ist, worin man so viel Glieder = 0 setzen kann, als man unbestimmte Größen a, b, c, ꝛc. hat.

Um also die Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

zu nehmen, setze man $x^2 = bx + a + y$. Auf diese Art hat man $x^3 = bx^2 + ax + yx =$ (wenn man den Werth von x^2 substituirt) $(b^2 + a + y)x + b(a + y)$. Bringt man diese Werthe in die gegebene Gleichung, so wird

$$(b^2 + mb + n + a + y)x = (b + m)(a + y) + p = 0 \quad \ldots (A)$$

und folglich

$$x = -\frac{(b + m)(a + y) + p}{b^2 + mb + n + a + y}$$

Bringt man ferner diesen Werth in die Gleichung $x^2 = bx + a + y$ so bekommt man, $b + m = c$, $b^2 + mb + n = d$ gesetzt,

$$(c(a + y) + p)^2 + b(c(a + y) + p)(d + a + y) - (a + y)(d + a + y)^2 = 0$$

oder wenn man die Glieder nach den Dignitäten von $a + y$ ordnet, und die Werthe von c und d wieder braucht,

$$(y + a)^3 - (mb + m^2 - 2n)(y + a)^2 + (nb^2 + (mn - 3p)b + n^2 - 2mp)(y + a) - p(b^3 + mb^2 + nb + p) = 0 \quad \ldots \ldots (B)$$

so daß man durch die Entwickelung der Potestäten von $y + a$ die Gleichung

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0$$

bekommt, worin

$$A = 3a - mb - m^2 + 2n$$

$$B = 3a^2 - 2a(mb + m^2 - 2n) + nb^2 + (mn - 3p)b + n^2 - 2mp$$

$$C = a^3 - (mb + m^2 - 2n)a^2 + (nb^2 + (mn - 3p)b + (n^2 - 2mp)a - p(b^3 + mb^2 + nb + p)$$

ist. Nun kann man das zweyte und dritte Glied verschwinden lassen, indem man $A = 0$ und $B = 0$ annimmt. Dadurch bekommt man die Gleichungen

$$3a - mb - m^2 + 2n = 0$$

$$3a^2 - 2a(mb + m^2 - 2n) + nb^2 + (mn - 3p)b + n^2 - 2mp = 0$$

Durch diese Gleichungen lassen sich a und b bestimmen und die Gleichung für y bekömmt die Form $y^3 + C = 0$, welche sogleich die drey Wurzeln $y = -\sqrt[3]{C}$, $y = -\alpha\sqrt[3]{C}$ und $y = -\alpha^2\sqrt[3]{C}$ giebt, wenn 1, α und α^2 die drey Wurzeln der Gleichung $x - 1 = 0$ sind. Setzt man demnach in den vorhin gefundenen Ausdruck für x die aus den vorhergehenden Gleichungen sich ergebenden Werthe von a und b, und darauf für y die drey Werthe der Gleichung $y^3 + C = 0$, so hat man sogleich die drey Wurzeln x der gegebenen Gleichung.

Da die erste von den beyden Gleichungen, welche a und b geben, zu dem ersten und die andere zu dem zweyten Grade gehört, so ist klar, daß die Bestimmung dieser Größen nur von einer Gleichung vom zweyten Grade abhängt. Auch hat man sogleich

$$a = \frac{mb + m^2 - 2n}{3}$$

und wenn man diesen Werth in die zweyte Gleichung bringt,

$$(m^2 - 3n)b^2 + (2m^3 - 7mn + 9p)b + m^4 - 4m^2n + 6mp + n^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung bekommt man zwey Werthe von b, welche man ohne Unterschied gebrauchen kann, weil sie allemal dieselben Werthe für x geben.

Es hat demnach diese Methode den Vorzug, daß sie unmittelbar auf eine reducirte Gleichung vom zweyten Grade führt, dagegen die gewöhnliche Methode zu einer reducirten Gleichung vom sechsten Grade leitet. Indeß ist die Auflösung, welche sie giebt, von der Unbequemlichkeit nicht frey, welche wir bey der Cardanischen Regel bemerkt haben, Nr. 2. Denn da die Größe y drey Werthe, und jede der Größen a und b zwey Werthe hat, so fällt in die Augen, daß daher sechs Werthe für x entspringen, welche Wurzeln einer Gleichung vom sechsten Grade seyn müssen. Indeß lassen sich diese sechs Werthe auf drey doppelte Werthe zurückführen, wie sich leicht zeigen läßt und wir bey der Cardanischen Regel bereits gezeigt haben.

11.

Es verdient aber bey dieser Methode bemerkt zu werden, daß man nicht, so wie von Tschirnhausen gethan hat, nachdem man die Werthe von a, b und y gefunden, jede Wurzel der Gleichung $x^2 - bx - a - y = 0$ als die Wurzel x betrachten darf. Denn sollte dieses erlaubt seyn, so müßte diese Gleichung zwey Wurzeln von der gegebenen Gleichung enthalten und b die Summe dieser beyden Wurzeln seyn. Da man aber b mit eben dem Rechte als die Summe jeder zweyer andern von den drey Wurzeln der gegebenen Gleichung ansehen könnte, so würde b eben so viel verschiedene Werthe haben müssen, als man die gedachten Wurzeln zu zwey combiniren kann; und es müßte also b sechs Werthe haben, da demselben doch nur zwey zukommen, weil es von einer Gleichung des zweyten Grades abhängt.

Es ist daher bey dieser Methode nothwendig sich so zu nehmen, daß die angenommene Gleichung mit der gegebenen eine gemeinschaftliche Wurzel habe. Hat man also die Werthe von a, b und y so bestimmt, wie es diese Bedingung erfordert, so muß man für den Werth von x die Wurzel der Gleichung $x^2 - bx - a - y = 0$ wählen, welche auch der Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ zukommt. Zu diesem Ende darf man nur den größten gemeinschaftlichen Divisor beyder Gleichungen suchen, und diesen Divisor, worin x bloß in der ersten Dignität vorkommen kann, giebt einen Werth für x, der zugleich eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Es ist aber leicht einzusehen, daß dieser Werth von x kein anderer seyn kann, als der den wir oben auf dem Wege der Elimination gefunden haben.

Ueberhaupt kommt die gewöhnliche Eliminations-Methode mit der Methode überein, den größten gemeinschaftlichen Divisor der beyden Größen zu finden, welche die ersten Hälften zweyer Gleichungen ausmachen, denn die Reste, welche man durch die dabey nöthigen Divisionen bekommt, geben, $= 0$ gesetzt, eben dieselben Gleichungen, welche man durch die Elimination erhält. Der letzte Rest, worin sich die unbekannte Größe nicht mehr findet, muß $= 0$ seyn, wenn die beyden gegebenen Größen einen gemeinschaftlichen Divisor vom ersten Grade haben sollen, und dieser gemeinschaftliche Divisor ist der vorletzte Rest und enthält die unbekannte Größe bloß in der ersten Dignität. Setzt man ihn daher $= 0$, so hat man einen Werth der unbekannten Größe, welcher eine gemeinschaftliche Wurzel beyder Gleichungen ist.

In dem Exempel der 10ten Nr. sind die Gleichungen (A) und (B) diejenigen, welche man bekömmt, wenn man den vorletzten und letzten Rest $= 0$ setzt, und folglich der

Werth

Werth von x, welcher aus der Gleichung (A) gezogen worden, der einzige, welcher zu gleicher Zeit eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist.

12.

Bey dieser Gelegenheit wird es nicht undienlich seyn, eine andere Bemerkung in Ansehung der Methode beyzubringen, welche man einzuschlagen hat, wenn zwey Gleichungen mehr als eine Wurzel mit einander gemein haben sollen. Sollen zwey Gleichungen zwey Wurzeln mit einander gemein haben, so müssen sich beyde durch einen Faktor vom zweyten Grade dividiren lassen. Ist man daher, indem man den größten gemeinschaftlichen Divisor der beyden ersten Hälften der gegebenen Gleichungen sucht, zu einem Reste gelangt, worin die unbekannte Größe den zweyten Grad nicht übersteigt, so muß dieser Rest von selbst Null seyn, wenn die gedachten Gleichungen zwey Wurzeln gemein haben sollen. Nun enthält dieser Rest nicht mehr als zwey Glieder, eins, worin die unbekannte Größe sich nicht findet, und eins, welches die unbekannte Größe in der ersten Dignität enthält. Man muß daher jedes dieser Glieder für sich $= 0$ setzen, um die Bedingungen zu bekommen, wobey die gegebenen Gleichungen zwey gemeinschaftliche Wurzeln haben. Wollte man den Weg der Elimination betreten, so müßte man bey der Gleichung stehen bleiben, worin die unbekannte Größe bloß in der ersten Dignität befindlich wäre, und beyde Glieder derselben $= 0$ setzen, wobey dann die vorhergehende Gleichung des zweyten Grades die beyden gemeinschaftlichen Wurzeln enthalten würde. Es stimmen daher auch hier beyde Wege mit einander überein.

Man erkennt hieraus leicht, wie man sich zu verhalten hat, wenn zwey Gleichungen drey und mehr Wurzeln mit einander gemein haben sollen. Hat man indeß die Bedingungen gefunden, wobey die Gleichungen eine Wurzel gemein haben, so lassen sich daraus leicht diejenigen finden, wobey denselben zwey und mehr Wurzeln gemein sind.

Angenommen nemlich, daß die beyden gegebenen Gleichungen, welche eine gemeinschaftliche Wurzel x haben, allgemein durch $P = 0$ und $Q = 0$ vorgestellt werden, so bekommt man, wenn man $P = y$ anstatt $P = 0$ nimmt und darauf x aus beyden Gleichungen wegschaft, eine Gleichung für y, welche

$$y^m + ay^{m-1} + \text{rc.} + py^2 + qy + r = 0$$

seyn mag. Sollen nun beyde Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, oder beyde zugleich bestehen können, so muß y einen Werth $= 0$ haben, und es ist folglich $r = 0$ die Bedingung, bey welcher jenen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel zukommt. Sollen ferner zwey Wurzeln gemeinschaftlich seyn, so muß es darin zwey Werthe $= 0$ geben, und man hat demnach die Bedingungen $r = 0$ und $q = 0$. Sollen drey Wurzeln gemeinschaftlich seyn, so müssen drey Werthe $= 0$ seyn, und dies giebt die Bedingungen $r = 0$, $q = 0$ und $p = 0$, u. s. f.

Um $P = 0$ in $P = y$ oder $P - y = 0$ zu verwandeln, darf man nur das letzte Glied der Gleichung $P = 0$ um die Größe y vermindern, und also, wenn $P = x^n + \alpha x^{n-1} + \text{rc.} + \varrho$ ist, $\varrho - y$ für ϱ setzen. Nun ist die Gleichung $y^m + ay^{m-1} + \text{rc.} + py^2 + qy + r = 0$ diejenige, welche man durch die Wegschaffung von x aus den Gleichungen $P = y$ und $Q = 0$ erhält. Setzt man also darin $y = 0$, so wird

$r = 0$

$r = o$ die Gleichung, welche aus den Gleichungen $P = o$ und $Q = o$ durch die Wegschaffung von x entspringt. Hat man demnach die Gleichung $r = o$, so darf man darin nur $\varrho - y$ für ϱ setzen, um unmittelbar die Gleichung $y^m + ay^{m-1} + ꝛc. + py^2 + qy + r = o$ zu bekommen. Nun ist aber r eine Funktion von ϱ, und will man darin $\varrho - y$ für ϱ substituiren, so wird

$$r - \frac{dr}{d\varrho}y + \frac{d^2r}{2d\varrho^2}y^2 - \frac{d^3r}{2.3d\varrho^3}y^3 + ꝛc.$$

und folglich

$$q = -\frac{dr}{d\varrho},\quad p = \frac{d^2}{2d\varrho^2},\quad ꝛc.$$

Wenn also $r = o$ seyn muß, damit die Gleichungen $P = o$ und $Q = o$ Eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so wird zu zwey gemeinschaftlichen Wurzeln $r = o$ und $\frac{dr}{d\varrho} = o$, und zu dreyen $r = o$, $\frac{dr}{d\varrho} = o$ und $\frac{d^2r}{d\varrho^2}$ u. s. f. erfordert, wobey ϱ das letzte Glied der einen von den gegebenen Gleichungen ist.

13.

Uebrigens ist klar, daß die Wurzeln der Gleichung für y nichts anders sind als die Werthe von P, welche sich ergeben, wenn man anstatt x jede von den Wurzeln der andern Gleichung $Q = o$ setzt, welche wir durch x', x'', x''' ꝛc. bezeichnen wollen. Läßt man daher P', P'', P''', ꝛc. die Werthe seyn, welche P durch diese Substitutionen erhält, so hat man $\pm r = P'P''P'''$ ꝛc. und es ist folglich die Gleichung $r = o$, welche man durch die Wegschaffung von x aus den Gleichungen $P = o$ und $Q = o$ bekömmt, nichts anders als ein Produkt aus den Gleichungen $P' = o$, $P'' = o$,

$P''' = 0$ ꝛc. Man kann aber dieses Produkt jedesmal finden, ohne die Wurzeln der Gleichung $Q = 0$ zu kennen, indem sich die Funktionen von x', x'', x''', ꝛc., welche in demselben vorkommen, durch die bloßen Coefficienten der Gleichung $Q = 0$, wovon x', x'', x''', ꝛc. die Wurzeln sind, ausdrucken lassen. Man kann über diesen Gegenstand Cramers Introduction a l'analyse des lignes courbes zu Rathe ziehen, so wie auch eine besondere Abhandlung von mir, in welcher ich allgemeine Formeln zur unmittelbaren Darstellung dieses Produkts gegeben habe. Hier begnüge ich mich, daraus, daß die durch die Wegschaffung von x sich ergebende Gleichung mittelst der Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ durch $P'P''P''' = 0$ dargestellt werden kann, die Folge zu ziehen, daß diese Gleichung so beschaffen seyn muß, daß die Coefficienten der Gleichung $P = 0$ darin allenthalben Produkte von so viel Dimensionen bilden, als es Größen P', P'', P''' ꝛc. oder Wurzeln x', x'', x''' ꝛc. in der Gleichung $Q = 0$ giebt, d. h. so viel Einheiten der Exponent dieser Gleichung hat. Eben so verhält es sich mit den Coefficienten der Gleichung $Q = 0$, welche in der durch die Elimination hervorgebrachten Gleichung allenthalben Produkte von so viel Dimensionen bilden, als der Exponent der Gleichung $P = 0$ Einheiten hat.

14.

Hieraus läßt sich überhaupt folgern, daß man nach der Tschirnhausenschen Methode allemal eine Gleichung für y bekommt, welche zu eben dem Grade gehört als die gegebene, und daß in dieser Gleichung die Größen y, a, b, c ꝛc. (die Einheit als den Coefficienten des höchsten Gliedes mit eingeschlossen) allenthalben Produkte von so viel Dimensionen

bilden,

bilden, als die Zahl des Grades der gegebenen Gleichung Einheiten hat.

Angenommen also, daß die gegebene Gleichung für x zu dem mten Grade gehöre, und daß die Hülfsgleichung

$$y + a + bx + cx^2 + \text{etc.} = x^r$$

sey: so wird man eine Gleichung für y vom Grade m von dieser Form enthalten,

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

so daß A eine einfache, B eine zwiefache, C eine dreyfache Funktion von a, b, c etc. ist, u. s. f.

Ueberhaupt wird das nte Glied allemal eine rationale und ganze Funktion von a, b, c, etc. von n — 1 Dimensionen seyn. Nimmt man demnach so viel unbestimmte Größen an, als man Glieder verschwinden lassen will, so hat man, wie leicht einzusehen ist, zur Wegschaffung des zweyten Gliedes bloß eine Gleichung vom ersten Grade und einer einzigen unbekannten Größe aufzulösen. Sollen hingegen das zweyte und dritte Glied weggebracht werden, so muß man zwey Gleichungen von zwey unbekannten Größen, die eine vom ersten und die andere vom zweyten Grade auflösen, wodurch die Endgleichung allemal eine Gleichung vom zweyten Grade wird, wie wir oben gesehen haben. Soll das zweyte, dritte und vierte Glied weggeschaft werden, so hat man drey Gleichungen von eben so viel unbekannten Größen aufzulösen, davon die eine zum ersten, die andere zum zweyten und die dritte zum dritten Grade gehört, und gelangt also endlich zu einer Gleichung vom sechsten Grade.

Um überhaupt zu gleicher Zeit das pte, qte, rte Glied etc. wegzuschaffen, hat man so viel Gleichungen aufzulösen als man Glieder wegbringen will, und diese Gleichungen enthal-

enthalten zugleich eben so viel unbekannte Größen. Ferner sind diese Gleichungen Gleichungen vom $(p - 1)$sten, $(q - 1)$sten, $(r - 1)$sten Grade u. s. w. so daß die Endgleichung zu dem $(p - 1)(q - 1)(r - 1) \ldots$ sten Grade gehört. Um also aus der Gleichnng $y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2}$ + rc. $+ M = 0$ alle Zwischenglieder wegzuschaffen und dieselbe auf die Form $y^m + M = 0$ zu bringen, deren Auflösung allemal möglich ist, gelangt man zu einer Gleichung vom Grade $1.2.3 \ldots (m - 1)$, und dieser Grad ist allemal höher als der Grad der gegebenen Gleichung m, den einzigen Fall ausgenommen, wenn $m = 3$ ist.

15.

Jetzt wollen wir zur Tschirnhausenschen Auflösung der Gleichungen des dritten Grades zurückkehren und aus allgemeinen Gründen und unabhängig von der erklärten Eliminations-Methode die Ursache kennen zu lernen suchen, warum jene Auflösung zu einer reducirten Gleichung vom zweyten Grade führt, da man bey der gewöhnlichen Methode zu einer reducirten Gleichung vom sechsten Grade gelangt. Zu dem Ende betrachte ich die Hülfsgleichung $x^2 = bx + a + y$, in welcher y durch eine zweygliedrige Gleichung vom dritten Grade von der Form $y^3 + C = 0$ bestimmt werden muß, deren Wurzeln $y - \sqrt[3]{C}$, $y = - \alpha\sqrt[3]{C}$, $y = - \alpha^2\sqrt[3]{C}$ sind. Da diese drey Wurzeln den drey Werthen von x in der gegebenen Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ entsprechen müssen, so hat man, wenn man diese Werthe durch x', x'', x''' ausdruckt, folgende drey Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x'^2 &= bx' + a - \sqrt[3]{C} \\ x''^2 &= bx'' + a - \alpha\sqrt[3]{C} \\ x'''^2 &= bx''' + a - \alpha^2\sqrt[3]{C} \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

und

und aus diesen Gleichungen lassen sich die Werthe von a und b ziehen, wenn man $\sqrt[3]{C}$ daraus weggebracht hat. Denn addirt man dieselben, nachdem man die zweyte durch α und die dritte durch α^2 multiplicirt hat, so bekommt man, da $\alpha^4 = \alpha$ und $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ist,

$$x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2 = b(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')$$

und daraus ergiebt sich

$$b = \frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

Diese Gleichung setzt in den Stand, den Grad der Gleichung zu beurtheilen, durch welche b bestimmt werden muß. Denn da diese Gleichung so viel Wurzeln haben muß, als es Werthe von b giebt, und die Werthe von b nach den Versetzungen sich richten, welche man mit den Wurzeln x', x'', x''', vornehmen kann (Nr. 6, wo die Buchstaben a, b und c eben das bedeuten, was hier x', x'', x'''): so kann die Größe b überhaupt sechs Werthe haben, nemlich

$$\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

$$\frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

$$\frac{x''^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x'^2}{x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x'}$$

$$\frac{x''^2 + \alpha x'^2 + \alpha^2 x'''^2}{x'' + \alpha x' + \alpha^2 x'''}$$

$$\frac{x'''^2 + \alpha x'^2 + \alpha^2 x''^2}{x''' + \alpha x' + \alpha^2 x''}$$

$$\frac{x'''^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'^2}{x''' + \alpha x'' + \alpha^2 x'}$$

Ueberhaupt genommen müßte also die Gleichung für b eine Gleichung vom sechsten Grade seyn; allein man muß hier

nicht

nicht aus der Acht lassen, daß der erste, dritte und fünfte von den vorstehenden Werthen, so wie auch der zweyte, vierte und sechste einander gleich sind. Denn multiplicirt man den Zähler und Nenner des ersten durch α, so geht derselbe in den fünften über, weil $\alpha^3 = 1$ und $\alpha^4 = \alpha$ ist, und multiplicirt man mit α^2, so bekommt man den dritten. Eben so erhält man, wenn man den Zähler und Nenner des zweyten durch α multiplicirt, den vierten, und wenn man mit α^2 multiplicirt, den sechsten. Da also die Gleichung vom sechsten Grade für b zweymal drey einander gleiche Wurzeln hat, so sinkt sie dadurch zu einer Gleichung vom zweyten Grade herab, weil sie nichts anders seyn kann als der Cubus einer Gleichung dieses zweyten Grades, und dies ist die Ursache, warum b bloß durch eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben ist. (Nr. 10.).

Was die Größe a betrift, so hat man, wenn man die drey Gleichungen (C) addirt, da $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ist,

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 = b(x' + x'' + x''') + 3a.$$

Nun ist aber

$$x' + x'' + x''' = -m \text{ und } x'^2 + x''^2 + x'''^2 = m^2 - 2n$$

folglich

$$m^2 - 2n = -bm + 3a$$

und

$$a = \frac{bm + m^2 - 2n}{3}$$

so daß man a kennt, sobald der Werth von b bekannt ist.

16.

Die Formel $\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$, welche den Werth von b ausdruckt, ist deswegen sehr merkwürdig, weil sie bey allen Versetzungen, welche man mit den Größen x', x''

und

und x''' vornimmt, entweder dieselbe bleibt, oder in $\frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha x''}$ übergeht, weswegen diese beyden Größen nothwendig Wurzeln einer quadratischen Gleichung seyn müssen. Man könnte diese Gleichung a priori finden, wenn man die Summe und das Produkt dieser beyden Größen suchte, wodurch man zu einer solchen Gleichung für b gelangen würde, als wir oben Nr. 10 gefunden haben.

Außerdem läßt sich noch folgendes bemerken. Wenn man die beyden Nenner

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' \text{ und } x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$$

mit einander multiplicirt, so bekommt man zum Produkte

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 + (\alpha + \alpha^2)(x'x'' + x'x''' + x''x''')$$

Nun ist aber

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 = m^2 - 2n;\ x'x'' + x'x''' + x''x''' = n \text{ und } \alpha + \alpha^2 = -1$$

folglich wird jenes Produkt

$$= m^2 - 3n$$

Multiplicirt man ferner den Zähler

$x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2$ durch den Nenner $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$

mit einander, so erhält man das Produkt

$$x'^3 + x''^3 + x'''^3 + \alpha(x'^2 x''' + x''^2 x'\ x'''^2 x'') + \alpha^2(x'^2 x'' + x''^2 x''' + x'''^2 x')$$

und dieses Produkt läßt sich, da x', x'', x''' eben die Wurzeln sind, welche wir sonst a, b und c genannt haben, auch so

$$L - 6x'x''x''' + \alpha M + \alpha^2 N$$

oder da $x'x''x''' = -p$ ist, (Nr. 7.) durch

$$L + 6p + \alpha M + \alpha^2 N$$

ausdrucken. Auf diese Art verwandelt sich der Bruch

$$\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

wenn man Zähler und Nenner durch $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$ multiplicirt, in

$$\frac{L + 6p + \alpha M + \alpha^2 N}{m^2 - 3n}$$

und auf ähnliche Art erhält man für

$$\frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

wenn man Zähler und Nenner durch $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ multiplicirt,

$$\frac{L + 6p + \alpha N + \alpha^2 M}{m^2 - 3n}$$

Nun ist aber (Nr. 7.)

$$r^3 = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N \text{ und}$$
$$s^3 = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M$$

folglich

$$\alpha M + \alpha^2 N = \frac{r^3 - L}{3} \text{ und } \alpha N + \alpha^2 M = \frac{s^3 - L}{3}$$

Folglich lassen sich die vorhergehenden Brüche auch durch

$$\frac{r^3 + 2L + 6p}{3(m^2 - 3n)} \text{ und } \frac{s^3 + 2L + 6p}{3(m^2 - 3n)}$$

oder nach Nr. 8. durch

$$\frac{z' + 2L + 6p}{3(m^2 - 3n)} \text{ und } \frac{z'' + 2L + 6p}{3(m^2 - 3n)}$$

ausdrucken, wenn z' und z'' die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + (2m^3 - 9mn + 27p)z + (m^2 - 3n)^3 = 0$$

sind, welches die reducirte Gleichung ist, die man nach der Cardanischen Regel bekommt.

Auf diese Art erhellet die Verbindung und Aehnlichkeit dieser Methode mit der Tschirnhausenschen deutlich.

17.

Der Ausdruck für x (Nr. 10.) welchen die Tschirnhausensche Methode giebt, läßt sich auf die Form

$$x = \frac{f + gy}{k + y}$$

bringen, wenn f, g und k unbestimmte Größen sind, und y die Wurzel einer zweygliedrigen Gleichung des dritten Grades $y^3 + h = 0$ bedeutet.

Man hat also nur nöthig vermittelst dieser beyden Gleichungen y wegzubringen. Da die erste Gleichung $y = \frac{f - kx}{x - g}$ giebt, so bekommt man, wenn man diesen Werth in die zweyte Gleichung bringt, $h + (\frac{f - kx}{x - g})^3 = 0$. Dies ist eine Gleichung des dritten Grades, welche man mit der gegebenen vergleichen kann, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Größen f, g, k und h zu bestimmen. Eine bleibt willkührlich und kann nach Gefallen angenommen werden.

Diese Methode, die Gleichungen des dritten Grades aufzulösen, ist bereits von Bezout gebraucht worden; man vergleiche die Memoiren der Akademie der Wissenschaften zu Paris vom Jahr 1765, wo derselbe auf eine sehr vortheilhafte und glückliche Art vermittelst dieser Substitutionen eine große Menge von Gleichungen von allen Graden auflöset. Ich bemerke hier bloß, daß man nur a priori den Grad und die Form der Gleichung suchen darf, wodurch einer von den Coefficienten f, g, &c. bestimmt wird, wenn man zum voraus wissen will, was man sich von dieser Methode für die Gleichungen des dritten Grades zu versprechen hat. Zu dem

Ende erwäge man, daß man wegen $y^3 + h = 0$ drey Werthe für y hat, nemlich $-\sqrt[3]{h}$, $-\alpha\sqrt[3]{h}$, $-\alpha^2\sqrt[3]{h}$, welche in den Ausdruck $x = \frac{f + gy}{k + y}$ gesetzt, drey Werthe von x oder x', x'', x''' geben.

Nimmt man daher die Gleichung $x(k + y) = f + gy$ oder $kx - f + (x - g)y = 0$, so ergeben sich daraus folgende drey:

$$kx' - f - (x' - g)\sqrt[3]{h} = 0$$
$$kx'' - f - \alpha(x'' - g)\sqrt[3]{h} = 0$$
$$kx''' - f - \alpha^2(x''' - g)\sqrt[3]{h} = 0$$

Addirt man dieselben, so bekommt man, da $x' + x'' + x''' = -m$ und $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ist,

$$mk + 3f + (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')\sqrt[3]{h} = 0$$

Multiplicirt man ferner die zweyte durch α und die dritte durch α^2, und addirt auch nun, so wird

$$k(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') - (x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''')\sqrt[3]{h} = 0$$

Diese Gleichung giebt

$$\sqrt[3]{h} = \frac{k(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

und wenn man diesen Werth in die erste Gleichung bringt und durch k dividirt, so erhält man

$$m + \frac{3f}{k} + \frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''} = 0$$

woraus sich

$$\frac{f}{k} = -m - \frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^2}{3(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')}$$

ergiebt. Aus diesem Ausdrucke läßt sich sogleich erkennen,

daß

daß die Größe $\frac{f}{k}$ nicht mehr als zwey verschiedene Werthe haben und also bloß durch eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben werden kann, denn der Bruch $\frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$ bleibt entweder derselbe oder geht in $\frac{(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$ über, wenn man die drey Wurzeln x', x'', x''' versetzt. Noch leichter überzeugt man sich hiervon, wenn man den Zähler und Nenner der ersten Funktion durch $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ und den Zähler und Nenner der andern durch $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$ multiplicirt. Man erhält nemlich durch diese Multiplication nach der vorhergehenden Nr.

$$\frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3}{m^2 - 3n} \text{ und } \frac{(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3}{m^2 - 3n}$$

oder Nr. 7.

$$\frac{r^3}{m^2 - 3n} \text{ und } \frac{s^3}{m^2 - 3n} \text{ oder } \frac{z'}{m^2 - 3n} \text{ und } \frac{z''}{m^2 - 3n}$$

so daß die beyden Werthe von $\frac{f}{k}$

$$-m - \frac{z'}{3(m^2 - 3n)} \text{ und } -m - \frac{z''}{3(m^2 - 3n)}$$

werden, wenn z' und z'' die Wurzeln der oben für z gegebenen Gleichung sind.

18.

Um zu dem Ausdrucke für x, $\frac{f + gy}{k + y}$ zurückzukehren, so wollen wir, da y darin eine durch die Gleichung $y^3 + h = 0$ bestimmte Wurzelgröße ist, diese Wurzelgröße aus dem Nenner wegbringen. Dies geschieht, wenn man den Zähler und Nenner jenes Bruchs durch $k^3 - ky + y^2$ multiplicirt, indem er dadurch in

$$\frac{k^2f + (k^2g - kf)y + (f - kg)y^2 + gy^3}{k^3 + y^3}$$

oder, wenn man $-h$ für y^3 setzt, in

$$\frac{k^2f - hg + (k^2g - kf)y + (f - kg)y^2}{k^3 - h}$$

verwandelt wird. Diese Größe läßt sich auf die einfachere Form $a + by + cy^2$ zurückführen und man hat also allgemein

$$x = a + by + cy^2$$

wo a, b und c unbestimmte Coefficienten, und y die Wurzel aus einer zweygliedrigen Gleichung des dritten Grades von der Form $y^3 + h = 0$ ist.

Dieser Ausdruck ist eben der, den Euler und Bezout aufgenommen haben, um die Wurzeln der Gleichungen des dritten Grades auszudrucken, und nach ihrem Urtheile läßt sich derselbe auf alle übrige Gleichungen ausdehnen. Man findet dieses ausführlich im neunten Bande der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften und in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahr 1765.

Um also die Gleichungen des dritten Grades nach dieser Methode aufzulösen hat man nur nöthig y vermittelst der beyden Gleichungen $x = a + by + cy^2$ und $y^3 + h = 0$ wegzuschaffen. Hierdurch bekommt man eine Gleichung für x vom dritten Grade, wie man sich davon durch die vorhin erklärte Eliminations-Methode überzeugen kann. Vergleicht man darauf diese Gleichung Glied für Glied mit der gegebenen, so erhält man drey Gleichungen, vermittelst welcher sich drey von den unbestimmten Größen a, b, c, h bestimmen

stimmen lassen, und die vierte kann nach Gefallen angenommen werden. Bezout setzt vom Anfang an $h = -1$, aber Euler behält solches bis zu Ende bey, und setzt darauf diejenige Größe $= 1$, welche ihm das einfachste Resultat zu geben scheint. Dies ist der ganze Unterschied, welcher sich zwischen beyder Methoden findet.

19.

Um diese Methode a priori zu prüfen, suchen wir nach unsern Grundsätzen die Form und den Grad der Gleichungen, wodurch die Coefficienten a, b, rc. bestimmt werden. Da die Gleichung $y^3 + h = 0$ die drey Wurzeln, $-\sqrt[3]{h}$, $-\alpha\sqrt[3]{h}$, $-\alpha^2\sqrt[3]{h}$ hat, so ergeben sich daher sogleich folgende drey Gleichungen:

$$x' = a - b\sqrt[3]{h} + c\sqrt[3]{h^2}$$

$$x'' = a - \alpha b\sqrt[3]{h} + \alpha^2 c\sqrt[3]{h^2}$$

$$x''' = a - \alpha^2 b\sqrt[3]{h} + \alpha c\sqrt[3]{h^2}$$

Addirt man dieselben, so bekommt man

$$a = x' + x'' + x''' = -m$$

Multiplicirt man hierauf die zweyte durch α^2 und die dritte durch α und addirt wieder, so wird

$$x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''' = -3b\sqrt[3]{h}$$

und multiplicirt man endlich die zweyte durch α und die dritte durch α^2, so findet man

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = 3c\sqrt[3]{h^2}$$

Setzt man nun $h = -1$, so ergiebt sich

$$b = \frac{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}{3}$$

$$c = \frac{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}{3}$$

Diese Ausdrücke sind aber eben die, welche wir oben nach der Cardanischen Regel für die Wurzeln der reducirten Gleichung des dritten Grades gefunden haben, und es folgt also daraus, daß auch die Größen b und c durch eben die Gleichung vom sechsten Grade, welche sich wie eine Gleichung des zweyten Grades auflösen läßt, gegeben seyn werden. Diese Gleichung ist (Nr. 5.)

$$y^6 + (p - \frac{mn}{3} + \frac{2m^3}{27})y^3 - \frac{1}{27}(n - \frac{m^2}{3})^3 = 0$$

und dies ist auch das, was Bezout nach seinem Calcul gefunden hat.

Setzt man aber, anstatt $h = -1$ zu nehmen, mit Eulern $b = 1$, so bekommt man

$$x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = -3\sqrt[3]{h} \text{ und } x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = 3c\sqrt[3]{h^2}$$

Erhebt man die erste Gleichung zur dritten Dignität, so wird

$$-h = \frac{1}{27}(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3$$

oder wenn man die Benennungen der 8ten Nr. braucht,

$$-h = \frac{s^3}{27} = \frac{z''}{27}$$

Man sieht hieraus, daß die Größe $-h$ durch eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben wird, deren Wurzeln $\frac{z'}{27}$ und $\frac{z''}{27}$ sind. Hat man h gefunden, so braucht man nur die zweyte Gleichung mit der ersten zu multipliciren, um

$$-9ch = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')$$

zu bekommen, und dieses läßt sich (Nr. 16.) auf

— 9ch

$$-9ch = m^2 - 3n$$

zurückführen, woher

$$c = \frac{3n - m^2}{h}$$

wird.

20.

Dies sind die vornehmsten Methoden von denen, welche man bisher erfunden hat, die Gleichungen des dritten Grades aufzulösen. Nach der Untersuchung, welche wir darüber angestellt haben, stimmen sie im Grunde mit einander überein, weil die Hauptsache dabey auf die Erfindung reducirter Gleichungen ankommt, deren Wurzeln allgemein durch $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ oder durch $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$ oder, welches eben darauf hinausläuft, durch Größen, welche diesen proportionell sind, ausgedruckt werden. In dem Falle, wo die Wurzel der reducirten Gleichung $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ ist, gehört diese reducirte Gleichung zum sechsten Grade, läßt sich aber als eine quadratische Gleichung auflösen, weil sie bloß die dritte und sechste Dignität der unbekannten Größe enthält. Den Grund davon findet man Nr. 6. Im andern Falle, wenn die Wurzel der reducirten Gleichung $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$ ist, gehört diese reducirte Gleichung zum zweyten Grade. Dieses fließt theils nothwendiger Weise aus dem Vorhergehenden, theils ist solches Nr. 9. directe bewiesen worden.

21.

Ehe ich diesen Abschnitt beschließe wird es wegen des Folgenden nützlich seyn, ein Paar Worte über die Auflösung der Gleichung $x^3 - 1 = 0$, deren Wurzeln wir 1, α und β gesetzt haben, so wie auch über die Auflösung der allgemeinern Gleichung $x^n - 1 = 0$ zu sagen.

Das fällt sogleich in die Augen, daß die eine von den Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1$ die Einheit ist. Um also die beyden übrigen Wurzeln zu finden, darf man diese Gleichung nur durch $x - 1$ dividiren. Hierdurch bekömmt man $x^2 - x + 1 = 0$, und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Man hat demnach

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ und } \beta = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

und kann sich leicht davon überzeugen, daß $\beta = \alpha^2$ ist, wie bereits oben a priori gezeigt worden. Denn erhebt man α zum Quadrat, so bekommt man

$$\frac{1 - 2\sqrt{-3} - 3}{4} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \beta.$$

Es sey überhaupt die zweygliedrige Gleichung $x^n - 1 = 0$ gegeben. Ist n eine zusammengesetzte Zahl oder $n = pq$, so reducirt sich die Auflösung dieser Gleichung allemal auf die Auflösung zweyer ähnlichen Gleichungen, wovon die eine dem Grade p und die andere dem Grade q zugehört. Denn setzt man $x^q = y$, so wird $x^n = y^p$ und folglich $y^p - 1 = 0$. Angenommen also, daß man diese Gleichung vom Grade p aufgelöset habe, und daß α eine von den Wurzeln derselben sey, so hat man $x^q - \alpha = 0$, oder wenn man $x = t\sqrt[q]{\alpha}$ setzt, $t^q - 1 = 0$. Ist aber diese Gleichung aufgelöset, so kennt man den Werth von t und folglich auch den von x.

Wenn also n in der Gleichung $x^n - 1 = 0$ eine zusammengesetzte Zahl ist, so kommt es bey ihrer Auflösung auf die Auflösung so vieler Gleichungen an, als n Faktoren hat,

so

so daß die Exponenten dieser Gleichungen diese Faktoren von n sind.

Also besteht das ganze Geschäfte in der Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$, wenn n eine Primzahl ist.

Es sey demnach n eine ungerade Zahl und die aufzulösende Gleichung $x^{2p+1} - 1 = 0$. Da 1 allemal eine Wurzel dieser Gleichung ist, so kann man dieselbe durch $x - 1$ dividiren, wo denn der Quotient ist

$$x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + \text{2c.} + x^2 + x + 1 = 0.$$

Nun läßt sich aber diese Gleichung vom Grade $2p$ auf den Grad p herabbringen. Denn dividirt man durch x^p und setzt die Glieder zusammen, die von der Mitte gleich weit entfernt sind, so bekommt man

$$x^p + \frac{1}{x^p} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} + \text{2c.} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}$$
$$+ 1 = 0.$$

Man setze $x + \frac{1}{x} = y$, und erhebe y zum Quadrate, zum Cubus 2c. so wird

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2;\ y^3 = x^3 + \frac{1}{x^2} + 3(x + \frac{1}{x})\ \text{2c.}$$

folglich

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2;\ x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

und überhaupt

$$x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - ry^{r-2} + \frac{r(r-3)}{1.2}y^{r-4} -$$
$$\frac{r(r-4)(r-5)}{2.3}y^{r-6} + \text{2c.}$$

diese Reihe so weit fortgesetzt, bis man zu negativen Potestäten von y kommt.

Bringt man demnach diese Substitutionen in die vorhergehende Gleichung, so erhält man eine Gleichung für y, worin alle Potestäten von y positiv sind, und die höchste Potestät von y den Exponenten p hat, so daß dieselbe zum $p$ten Grade gehört.

Ist man also im Stande diese Gleichung aufzulösen, so findet man dadurch p Werthe von y, und jeder dieser Werthe giebt darauf durch die Auflösung der Gleichung $x^2 - xy + 1 = 0$ zwey Werthe für x. Auf diese Art bekommt man $2p$ Werthe für x, und setzt man dazu die Einheit, so hat man alle Wurzeln der Gleichung $x^{2p+1} - 1 = 0$.

Folglich lassen sich die Wurzeln der Gleichungen $x^2 - 1 = 0$ $x^3 - 1 = 0$ und $x^5 - 1 = 0$ durch die bloße Extraction der Quadratwurzel finden, und man ist daher auch im Stande, die Gleichung $x^n - 1 = 0$ aufzulösen, wenn n keine andere einfache Faktoren enthält als 2, 3, 5 oder unter die Form $2^\lambda . 3^\mu . 5^\nu$ gehört. Nimmt man die Auflösung der cubischen Gleichungen zu Hülfe, so ist auch die Auflösung der Gleichung $x^7 - 1 = 0$, so wie auch die Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ möglich, wenn n unter der Form $2^\lambda . 3^\mu . 5^\nu . 7^\pi$ begriffen ist.

Weiter kann man indeß nicht gehen, weil die Primzahl, die zunächst auf 7 folgt, 11 ist. Hiezu würde die Auflösung der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ und also die Auflösung einer Gleichung vom fünften Grade erfordert.

Es mag indeß n eine Zahl bedeuten, was für eine es will, so kann man die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ allemal ausdrucken, wenn man die Theilung des Umfangs des

des Kreises in n Theile zu Hülfe nimmt, wie nachher gezeigt werden wird.

22.

Die Methode, welche wir gebraucht haben, um die Gleichung $x^{2p} + x^{2p-1} + \text{etc.} + x + 1 = 0$ auf den Grad p herabzubringen, läßt sich überhaupt bey jeder Gleichung anwenden, deren Exponent eine gerade Zahl ist und wo die von der Mitte gleichweit abstehenden Glieder gleiche Coefficienten haben. Denn nimmt man die Gleichung

$$x^{2p} + ax^{2p-1} + bx^{2p-2} + \text{etc.} + bx^2 + ax + 1 = 0$$

und dividirt dieselbe durch x^p, so bekommt man

$$x^p + \frac{1}{x^p} + a\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + b\left(x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}}\right) + \text{etc.} = 0$$

so daß man hier die Substitutionen $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ etc. brauchen kann, wodurch die Gleichung eine Gleichung vom $p$ten Grade wird.

Wenn man die Gleichung

$$x^{2p+1} + ax^{2p} + bx^{2p-1} + \text{etc.} + hx^{p+1} + hx^p + \text{etc.}$$
$$+ bx^2 + ax + 1 = 0$$

hätte, so dürfte man dieselbe nur auf folgende Art ordnen,

$$x^{2p+1} + 1 + ax(x^{2p-1} + 1) + bx^2(x^{2p-3} + 1) + \text{etc.}$$
$$+ hx^p(x + 1) = 0$$

um wahrzunehmen, daß sie sich durch $x + 1$ dividiren läßt. Der Quotient, der aus dieser Division entspringt, ist ferner

$$x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + x^{2p-3} + \text{etc.} + 1$$
$$+ ax(x^{2p-2} + x^{2p-3} + \text{etc.} + 1)$$
$$+ bx^2(x^{2p-4} + x^{2p-5} + \text{etc.} + 1)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ hx^p = 0$$

und

und diese Gleichung gehört unter die vorhin betrachtete Form, so daß sie sich durch eben die Methode auf den Grad p herabbringen läßt.

Moivre ist der erste gewesen, der diese Eigenschaft bey den gedachten Gleichungen bemerkt hat, und er hat in seinen Miscellaneis analyticis die allgemeine Form der verwandelten Gleichung mitgetheilt, deren Grad nur halb so hoch ist als der Grad der gegebenen Gleichung. Wir werden weiter hin den Grund, warum sich diese Gleichungen so reduciren lassen, a priori angeben.

23.

Um zu der Nr. 21. gefundenen Formel

$$x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - ry^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2}y^{r-4} - \text{ꝛc.}$$

zurückzukehren, so ist aus der Lehre von der Theilung der Winkel bekannt, daß wenn $y = 2\,\text{cos.}\,\varphi$ gesetzt wird

$$y^r - ry^{r-2} + \frac{r(r-2)}{2}y^{r-4} - \text{ꝛc.} = 2\,\text{cos.}\,r\varphi$$

ist. Setzt man daher $x + \frac{1}{x} = 2\,\text{cos.}\,\varphi$, so hat man allgemein $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\,\text{cos.}\,n\varphi$, und es bestehen folglich die beyden Gleichungen

$$x^2 - 2x\,\text{cos.}\,\varphi + 1 = 0 \text{ und}$$
$$x^{2n} - 2x^n\,\text{cos.}\,n\varphi + 1 = 0$$

zu gleicher Zeit, n mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will, so daß die erste nothwendiger Weise ein Divisor von der zweyten ist.

Löset man nun diese Gleichungen nach Art der quadratischen Gleichungen auf, so bekommt man

x =

$$x = \cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{-1} \text{ und}$$
$$x^n = \cos.n\varphi \pm \sin.n\varphi\sqrt{-1}.$$

Abstrahirt man hier von dem doppelten Zeichen, welches geschehen kann, da diese Zeichen in beyden Gleichungen dieselben seyn müssen, so ist klar, daß

$$x = \cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1}$$

die Auflösung der Gleichung

$$x^n - \cos.n\varphi - \sin.n\varphi\sqrt{-1} = 0$$

enthält.

Setzt man daher $\sin.n\varphi = 0$ und $\cos.n\varphi = 1$, welches $n\varphi = 360^\circ$ oder 720° oder überhaupt $= m \times 360^\circ$ giebt, wenn m jede ganze Zahl bedeutet, so bekommt man die Gleichung $x^n - 1 = 0$ und die Auflösung derselben ist, da dabey $\varphi = \frac{m}{n} . 360^\circ$, wird

$$x = \cos.\frac{m}{n} . 360^\circ + \sin.\frac{m}{n} . 360^\circ\sqrt{-1}$$

Dies ist ein allgemeiner Ausdruck für alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, und man erhält alle diese Wurzeln, wenn man nach und nach $m = 1, 2, 3$ ꝛc. bis n mit eingeschlossen annimmt. Wenn man $m > n$ annehmen wollte, so würden dieselben Werthe wiederkehren, die man bey $m < n$ gefunden hätte.

24.

Bey dieser Auflösung müssen alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ von einander verschieden seyn, weil es keine zwey von einander verschiedene Bogen giebt, deren Sinus und Cosinus zu gleicher Zeit einander gleich wären. Außerdem sind alle diese Wurzeln imaginär bis auf die letzte, welche allemal $= 1$ ist, und diejenige, welche zu $m = \frac{n}{2}$ gehört, wenn n eine gerade Zahl ist, denn diese ist $= -1$. Denn soll der imaginäre Theil verschwinden, so muß $\frac{m}{n}.360^\circ = 0$ seyn, und dieses findet nur dann statt, wenn der Bogen entweder 360° oder 180° gleich ist, so daß man entweder $\frac{m}{n} = 1$ oder $= \frac{1}{2}$, folglich entweder $m = n$ oder $m = \frac{n}{2}$ hat. Im ersten Fall ist der reelle Theil $\cos.\frac{m}{n}.360^\circ = \cos.360^\circ = 1$ und im andern $\cos.180^\circ = -1$.

Setzt man nunmehr

$$\alpha = \cos.\frac{360^\circ}{n} + \sin.\frac{360^\circ}{n}.\sqrt{-1}$$

so hat man nach den vorhergehenden Formeln

$$\alpha^m = \cos.\frac{m}{n}.360^\circ + \sin.\frac{m}{n}.360^\circ\sqrt{-1}$$

so daß die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ insgesammt durch die Potestäten von α ausgedruckt werden. Es sind demnach diese Wurzeln α, α^2, α^3, ꝛc. α^n, und die letzte oder α^n ist allemal $= 1$, so wie die, welche durch $\alpha^{\frac{n}{2}}$ ausgedruckt wird, wenn n eine gerade Zahl ist, $= -1$.

Wenn n eine Primzahl ist, so kann man alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch die Potestäten einer jeden von diesen Wurzeln ausdrucken, bloß die letzte davon ausgenommen. Denn es sey z. E. $n = 3$, und also die Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$. Nimmt man statt der Wurzel α die folgende α^2, so hat man $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6$. Da aber $\alpha^3 = 1$ ist, so wird $\alpha^4 = \alpha$ und $\alpha^6 = \alpha^3$, und man hat also hier $\alpha^2, \alpha, \alpha^3$

wie

wie vorhin. Ist $n = 5$, so sind die Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$. Nimmt man nun α^2 statt α, so hat man dagegen $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \alpha^8, \alpha^{10}$, d. h. da $\alpha^5 = 1$ ist $\alpha^2, \alpha^4, \alpha, \alpha^3, \alpha^5$. Nimmt man α^3 statt α so findet man auf ähnliche Art, weil $\alpha^5 = 1$ ist, $\alpha^3, \alpha, \alpha^4, \alpha^2, \alpha^5$, und nimmt man α^4 so erhält man $\alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha, \alpha^5$, also allemal dieselben Wurzeln nur in einer andern Ordnung.

Ueberhaupt sey α^m eine von den n Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ 2c. α^n, und $m < n$, n aber eine Primzahl. Nimmt man diese Wurzel statt α, so bekommt man $\alpha^m, \alpha^{2m}, \alpha^{3m}$, 2c. α^{nm}. Läßt man nun von den Exponenten 2m, 3m, 4m 2c., wenn sie größer als n sind, das größte in ihnen enthaltene Vielfache von n weg, und bezeichnet die Reste durch p, q, r, 2c. so bekommt man die Wurzeln $\alpha^m, \alpha^p, \alpha^q, \alpha^r$, 2c. α^n, und ich behaupte, daß die Zahlen m, p, q, r und n, davon keine größer als n ist, nothwendig insgesammt von einander verschieden sind. Denn sollten zwey davon z. B. p und r einander gleich seyn, so müßte die Differenz zwischen 2m und 4m, da p und r von ihnen die Reste sind, welche übrig bleiben, nachdem man das größte in ihnen enthaltene Vielfache von n von ihnen abgezogen hat, durch n theilbar seyn, welches unmöglich ist, da n eine Primzahl und $m < n$ ist. Da also die Zahlen m, p, q, r, 2c. der Menge nach $n - 1$ und dabey insgesammt von einander verschieden und kleiner sind als n, so ist klar, daß sie keine andere Zahlen seyn können als 1, 2, 3, 2c. $n - 1$. Folglich sind die Wurzeln $\alpha^m, \alpha^p, \alpha^q, \alpha^r$, 2c. eben dieselben als $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, 2c. α^n. Es ist leicht einzusehen, daß der vorhergehende Beweis noch seine Kraft behält, wenn auch n keine Primzahl an sich, sondern nur m dergleichen gegen n ist. Allein sind m und n keine Primzahlen zu einander und ist ihr größtes gemeinschaftliches Maaß 1,

so

so sieht man leicht, daß die Zahlen m, p, q, r, ꝛc. durch l theilbar sind, so daß diese Zahlen nichts anders als Vielfache von l seyn können, welche kleiner als n sind.

Hieraus läßt sich leicht allgemein schließen, daß man alle Wurzeln α, α^2, α^3, ꝛc. α^n der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch die 1ste, 2te, 3te, ꝛc. nte Dignität einer jeden dieser Wurzeln, die unter die Form α^m gehört, ausdrucken könne, wofern m und n Primzahlen zu einander sind. Aber wenn m gegen n gehalten keine Primzahl ist, sondern beyde Zahlen das größte gemeinschaftliche Maaß l haben, so bekommt man auf diese Art bloß die Wurzeln α^l, α^{2l}, α^{3l}, ꝛc. α^n und jede davon so vielmal als die Zahl $\frac{n}{l}$ Einheiten hat. Auch läßt sich aus den vorhergehenden Formeln leicht erkennen, daß diese letzten Wurzeln zugleich die Wurzeln der Gleichung $x^f - 1 = 0$ sind, wenn $lf = n$ genommen wird.

Da also die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch α, α^2, α^3, ꝛc. α^n ausgedruckt werden, und $\alpha^n = 1$ ist, so erhellet, daß man dieselben auch durch $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$, ꝛc. $\frac{1}{\alpha^n}$ darstellen kann, weil $\frac{1}{\alpha} = \alpha^{n-1}$, $\frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{n-2}$ ꝛc. ist.

Da ferner in der Gleichung $x^n - 1$ das zweyte Glied fehlt, so hat man allemal $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 +$ ꝛc. $\alpha^n = 0$, und eben so $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3} +$ ꝛc. $+ \frac{1}{\alpha^n} = 0$. Und wenn n eine zusammengesetzte Zahl von der Form lf ist, so ist ferner $\alpha^l + \alpha^{2l} + \alpha^{3l} +$ ꝛc. $+ \alpha^n = 0$, $\frac{1}{\alpha^l} + \frac{1}{\alpha^{2l}} + \frac{1}{\alpha^{3l}} +$ ꝛc. $+ \frac{1}{\alpha^n} = 0$,

des-

desgleichen auch $\alpha^f + \alpha^{2f} + \alpha^{3f} +$ 2c. $+ \alpha^n = 0$, und $\frac{1}{\alpha^f} + \frac{1}{\alpha^{2f}} + \frac{1}{\alpha^{3f}} +$ 2c. $+ \frac{1}{\alpha^n} = 0$. Diese Bemerkungen werden uns in der Folge nützlich seyn.

25.

Hier sind zum Beschluß die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ von $n = 1$ bis zu $n = 6$.

$n = 2,\ \alpha = -1,\ \alpha^2 = 1$

$$n = 3,\ \alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},\ \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

$$\alpha^3 = 1$$

$$n = 4,\ \alpha = \sqrt{-1},\ \alpha^2 = -1,\ \alpha^3 = -\sqrt{-1},$$

$$\alpha^4 = 1$$

$$n = 5,\ \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4}\sqrt{-1}$$

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{4}\sqrt{-1}$$

$$\alpha^3 = \frac{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{4} + \frac{\sqrt{5} + 1}{4}\sqrt{-1}$$

$$\alpha^4 = \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4} + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\sqrt{-1}$$

$$\alpha^5 = 1$$

$$n = 6,\ \alpha = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2},\ \alpha^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$\alpha^3 = -1,\qquad \alpha^4 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$\alpha^5 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},\ \alpha^6 = 1$$

Wollte man den Werth für α aus der Gleichung $x^7 - 1 = 0$ haben, so müßte man, wie bereits oben bemerkt worden, eine Gleichung vom dritten Grade auflösen. Setzt man nemlich in den Formeln der 21sten Nr. $p = 3$, so bekommt man für y die Gleichung

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

welche als Gleichung des dritten Grades allemal einen reellen Werth hat. Bringt man diesen Werth in die Gleichung $x^2 - xy + 1 = 0$, so findet man daraus x oder

$$\alpha = \frac{y + \sqrt{(y^2 - 4)}}{2}$$

Was die Gleichungen $x^8 - 1 = 0$, $x^9 - 1 = 0$ und $x^{10} - 1 = 0$ betrifft, so kann man die Wurzeln davon durch bloße Quadratwurzeln ausdrucken, aber die Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ erfordert die Auflösung der Gleichung des fünften Grades

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0$$

nach welcher man für α denselben Ausdruck bekommt wie oben.

Zweyter Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichung des vierten Grades.

26.

Es ist bekannt, daß Ferrari, ein Zeitgenosse und Schüler Cardans der erste gewesen, der eine allgemeine Regel zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades erfunden. Er theilt die gegebene Gleichung in zwey Theile, und setzt darauf zu beyden eine solche Größe hinzu, daß man aus jedem besonders die Quadratwurzel ziehen kann, wodurch die Gleichung auf den zweyten Grad herabgebracht wird. Diese Methode, die unstreitig unter allen zu ähnlicher Absicht erfundefundenen die sinnreichste ist, haben darauf alle Analysten vor Des Cartes angenommen; allein dieser hielt es für besser, dafür eine andere zu gebrauchen, die zwar weniger einfach und weniger direct, aber gleichwohl in mancherley Rücksicht der Natur der Gleichungen angemessener ist. Wir wollen davon anfangen, daß wir diese beyden Methoden nach einander untersuchen, und dann zu den übrigen Methoden fortschreiten, unter welchen die von Tschirnhausen, Eulern und Bezout die vornehmsten sind.

Ich setze mit Ferrari voraus, daß die aufzulösende Gleichung des vierten Grades das zweyte Glied nicht habe, und also folgende sey:

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0.$$

Bringt man hier alle Glieder außer dem ersten auf die andere Seite, und setzt dann auf beyden Seiten $2yx^2 + y^2$ dazu, wo y eine unbestimmte Größe ist, so bekommt man

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = (2y - n)x^2 - px + y^2 - q.$$

Die erste Hälfte dieser Gleichung zeigt sich sogleich als das Quadrat von $x^2 + y$, und es kommt also bloß darauf an, auch die zweyte zu einem Quadrate zu machen. Zu diesem Ende muß man das Quadrat der Hälfte des Coefficienten des zweyten Gliedes $-px$ dem Produkte der Coefficienten der beyden übrigen Glieder gleich setzen. Dieses giebt die Bedingung

$$\frac{p^2}{4} = (2y - n)(y^2 - q)$$

oder

$$y^6 - \frac{n}{2}y^2 - qy + \frac{4nq - p^2}{8} = 0.$$

Setzt man demnach die Auflösung dieser Gleichung und also den Werth von y als bekannt voraus, so wird die zweyte Hälfte der gegebenen Gleichung

$$(2y - n)\left(x - \frac{p}{2(2y - n)}\right)^2$$

und zieht man nun aus beyden Hälften die Quadratwurzel, so bekommt man die Gleichung

$$x^2 + y = \left(x - \frac{p}{2(2y - n)}\right)\sqrt{(2y - n)}$$

worin die höchste Dignität von x die zweyte ist, und wobey sich daher weiter keine Schwierigkeit findet. Setzt man der Kürze wegen

$$z = \sqrt{(2y - n)}$$

so wird

$$x^2 - zx + y + \frac{p}{2z} = 0$$

und folglich

$$x = \frac{z + \sqrt{\left(z^2 - \frac{2p}{z} - 4y\right)}}{2}$$

oder, wenn man den Werth von z wieder braucht,

$$x = \frac{\sqrt{(2y - n)} + \sqrt{\left(-2y - n - \frac{2p}{\sqrt{(2y - n)}}\right)}}{2}$$

und dieser Ausdruck giebt die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn man darin nach und nach die beyden Wurzelgrößen positiv und negativ nimmt.

27.

Es ist indeß bey dieser Methode nicht schlechthin nothwendig, daß die aufzulösende Gleichung das zweyte Glied nicht habe, sondern sie läßt sich auch bey vollständigen Gleichungen, wie

$x^4 +$

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

anwenden, wenn man die erste Hälfte nicht zum Quadrate von $x^2 + y$, sondern von $x^2 + \frac{mx}{2} + y$ macht. Denn bringt man, wie vorhin, die drey letzten Glieder der vorstehenden Gleichung auf die andere Seite und setzt darauf auf beyden $(2y + \frac{m^2}{4})x^2 + myx + y^2$ dazu, so bekommt man

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = (2y + \frac{m^2}{4} - n)x^2 + (my - p)x$$
$$+ y^2 - q.$$

Um nun auch das zweyte Glied in ein Quadrat zu verwandeln, setze man

$$(\frac{my - p}{2})^2 = (2y + \frac{m^2}{4} - n)(y^2 - q)$$

wodurch man die cubische Gleichung bekommt

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 + \frac{mp - 4q}{4}y + \frac{(4n - m^2)q - p^2}{8} = 0.$$

Hat man aus dieser Gleichung, die wir in der Folge die reducirte Gleichung nennen wollen, den Werth von y gefunden, und dabey der Kürze wegen

$$z = \sqrt{(2y + \frac{m^2}{4} - n)}$$

gesetzt, so hat man

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = z^2(x + \frac{my - p}{2z^2})^2$$

und zieht man aus beyden Hälften die Quadratwurzel, so wird

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y = zx + \frac{my - p}{2z}$$

oder

$$x^2 + (\frac{m}{2} - z)x + y - \frac{my - p}{2z} = 0$$

oder

$$x = \frac{z - \frac{m}{2} + \sqrt{(z^2 - mz + \frac{m^2}{4} - 4y + \frac{2(my - p)}{2})}}{2}$$

oder, wenn man den Werth von z wieder braucht,

$$x = \frac{-\frac{m}{2} + \sqrt{(2y + \frac{m^2}{4} - n)} + \sqrt{(-2y + \frac{m^2}{2} - \frac{\frac{1}{4}m^3 - mn + 2p}{\sqrt{(2y + \frac{m^2}{4} - n)}})}}{2}$$

und dieser Ausdruck giebt ebenfalls alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn man die darin vorkommenden Wurzelgrößen nach und nach positiv und negativ nimmt.

28.

Da die reducirte Gleichung für y eine cubische Gleichung ist, so hat dieselbe nothwendiger Weise drey Wurzeln, und jede dieser Wurzeln kann in den Ausdruck für x gesetzt werden. Da also die Wurzelgrößen in diesem Ausdrucke theils positiv theils negativ genommen werden können, so ergeben sich daher zwölf Werthe von x, und es läßt sich daraus leicht beurtheilen, daß die vorhergehende Auflösung eigentlich eine Auflösung einer Gleichung des zwölften Grades ist.

Um diese Gleichung zu finden muß man y aus dem Ausdrucke für x wegzuschaffen suchen, und darauf die Wurzelgrößen wegbringen. Oder man kann auch sogleich die rationale Gleichung

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = z^2(x + \frac{my - p}{2z^2})^2$$

nehmen,

nehmen, und hat alsdann bloß y wegzuschaffen, nachdem man für z^2 den Werth $2y + \frac{m^2}{4} - n$ gesetzt hat.

Der größern Allgemeinheit wegen wollen wir z^2 (anstatt $2y + \frac{m^2}{4} - n$) $= k(2y + \frac{m^2}{4} - n)$ setzen, wo offenbar ist, daß der Coefficient k in dem Grade der gesuchten Gleichung keine Veränderung machen kann. Auf diese Art hat man

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = k(2y + \frac{m^2}{4} - n)x^2 + (my - p)x$$

$$+ \frac{(my - p)^2}{4k(2y + \frac{m^2}{4} - n)}$$

oder da $\frac{(my - p)^2}{4}$, aus der Gleichung für y,

$$= (2y + \frac{m^2}{4} - n)(y^2 - q) \text{ ist}$$

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = k(2y + \frac{m^2}{4} - n)x^2 + (my - p)x$$

$$+ \frac{y^2 - q}{k}$$

oder

$$x^4 + mx^3 + (kn + (1 - k)(2y + \frac{m^2}{4}))x^2 + px +$$

$$\frac{q + (k - 1)y^2}{k} = 0$$

Es sey der Kürze wegen

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = X$$

und $k - 1 = h$, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$X + h((n - \frac{m^2}{4} - 2y)x^2 + \frac{y^2 - q}{k} = 0$$

und aus dieser Gleichung hat man nun mittelst der Gleichung

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 + \frac{mp - 2q}{4}y + \frac{(4n - m^2)q - p^2}{8} = 0$$

bloß y wegzuschaffen.

Es seyen y', y'', y''', die drey Wurzeln dieser Gleichung, so kann die Gleichung für x, welche sich durch die Elimination der unbekannten Größe y ergiebt, nach Nr. 13. durch das Produkt aus folgenden drey Größen vorgestellt werden

$$X + h((n - \frac{m^2}{4} - 2y')x^2 + \frac{y'^2 - q}{k})$$

$$X + h((n - \frac{m^2}{4} - 2y'')x^2 + \frac{y''^2 - q}{k})$$

$$X + h((n - \frac{m^2}{4} - 2y''')x^2 + \frac{y'''^2 - q}{k})$$

wenn man dieses Produkt $= 0$ setzt. Es sey der Kürze wegen

$$A = X + h((n - \frac{m^2}{4})x^2 - \frac{q}{k}$$

$$B = -2hx^2$$

$$C = \frac{h}{k}.$$

Setzt man

$$\alpha = y' + y'' + y'''$$

$$\beta = y'y'' + y'y''' + y''y'''$$

$$\gamma = y'^2 + y''^2 + y'''^2$$

$$\delta = y'y''y'''$$

$$\varepsilon = y'^2y''^2 + y'^2y'''^2 + y''^2y'''^2$$

so wird das gedachte Produkt

$$A^3 + A^2B\alpha + A^2C\gamma + AB^2\beta + ABC(\alpha\beta - 3\delta)$$
$$+ AC^2\varepsilon + B^3\delta + B^2C\alpha\delta + BC^2\beta\delta + C^3\delta^2.$$

Es

Es sey ferner der Kürze wegen

$$a = \frac{n}{2},\ b = \frac{mp - 2q}{2}$$

$$c = \frac{p^2 - (4n - m^2)q}{8}$$

so daß die Gleichung für y

$$y^3 - ay + by - c = 0$$

werde: so ist wegen der Natur der Gleichungen

$$\alpha = a,\quad \beta = b,\quad \delta = c,\ \text{und also}$$

$$\gamma = a^2 - 2b \ \text{und}\ \varepsilon = b^2 - 2ac$$

Folglich ist die durch die Elimination von y aus den beyden Gleichungen

$$A + By + Cy^2 = 0$$

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0$$

gesuchte Gleichung

$$A^3 + aA^2B + (a^2 - 2b)A^2C + bAB^2 + (ab - 3c)ABC$$
$$+ (b^2 - 2ac)AC^2 + cB^3 + acB^2C + bcBC^2$$
$$+ c^2C^3 = 0.$$

Bringt man die Werthe von A, B, C und a, b, c in diese Gleichung, so hat man eine Gleichung für x vom zwölften Grade, weil A alle Potestäten von x bis zur vierten, B bloß x^2 und die übrigen Größen x gar nicht enthalten.

Die Auflösung dieser Gleichung des zwölften Grades ist also die obige

$$x = \frac{z - \frac{m}{2} \pm \sqrt{(z^2 - mz + \frac{m^2}{4} - 4y + \frac{2my - p}{z})}}{2}$$

wenn man

$$z = \pm \sqrt{(2y + \frac{m^2}{4} - n)}k$$

setzt, und es giebt hier keine überflüssige Wurzeln, weil die drey Werthe von y verbunden mit den doppelten Zeichen der beyden Wurzelgrößen genau die zwölf Wurzeln der gedachten Gleichung geben.

Nun wollen wir $k = 1$ setzen, um den Fall der 27sten Nr. zu bekommen. Hiedurch wird $h = 0$, und folglich $A = X = x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$; $B = 0$ und $C = 0$. Auf diese Art reducirt sich die obige Gleichung auf $A^3 = 0$ oder

$$(x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q)^3 = 0$$

Diese Gleichung ist, wie in die Augen fällt, die gegebene Gleichung in der dritten Potestät, so daß sie keine andere Wurzeln haben kann als diese, aber eine jede dreyfach.

Man sieht hieraus, warum der für die Wurzel einer Gleichung des vierten Grades gefundene Ausdruck in der That zwölf Wurzeln in sich faßt, die sich auf vier zurückbringen lassen, weil jede davon zweyen andern gleich ist. Außerdem zeigt der vorhergehende Beweis, daß die gleichen Wurzeln bloß von der Wegschaffung der Größe y und nicht von dem doppelten Zeichen der Wurzelgrößen abhängen. Man mag also in dem Ausdrucke für x einen Werth von y gebrauchen, was für einen man will, so bekommt man immer dieselben vier Würzeln.

29.

Um diesen Gegenstand in ein noch helleres Licht zu setzen, bemerke ich, daß sich die gegebene Gleichung vermittelst der reducirten, welche wegen ihrer dreyfachen Wurzel auf dreyfache Art statt haben kann, auf folgende Weise darstellen läßt

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 - z^2(x + \frac{my - p}{2z^2})^2 = 0$$

Nr. 27, und daß daher dieselbe nichts anders ist als das Produkt aus

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y + z(x + \frac{my - p}{2z^2}) = 0$$

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y - z(x + \frac{my - p}{2z^2}) = 0$$

oder

$$x^2 + (\frac{m}{2} + z)x + y + \frac{my - p}{2z} = 0$$

$$x^2 + (\frac{m}{2} - z)x + y - \frac{my - p}{2z} = 0$$

ist. Es giebt demnach die Auflösung derselben allemal dieselben vier Wurzeln, man mag für y eine Wurzel setzen, was für eine man will.

Nennt man nun die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung a, b, c, d, so müssen zwey davon in der einen und zwey in der andern Gleichung enthalten seyn. Auf diese Art hat man wegen der Natur der Gleichungen

$$a + b = -\frac{m}{2} - z, \quad ab = y + \frac{my - p}{2z}$$

$$c + d = -\frac{m}{2} + z, \quad cd = y - \frac{my - p}{2z}$$

und daraus fließt

$$z = \frac{c + d - a - b}{2}$$

$$y = \frac{ab + cd}{2}$$

Dieser Werth von y zeigt sogleich, warum die reducirte Gleichung eine Gleichung vom dritten Grade ist. Es muß nemlich y so viel verschiedene Werthe haben, als man die Grö-

ßen

ßen a, b, c, d in dem Ausdrucke $\frac{ab + cd}{2}$ versetzen kann, welches lediglich auf folgende drey Arten möglich ist

$$\frac{ab + cd}{2}$$

$$\frac{ac + bd}{2}$$

$$\frac{ad + cb}{2}$$

30.

Vermittelst dieser Bemerkung läßt sich eine directe Methode finden, zu der reducirten Gleichung des vierten Grades und durch diese zu einer allgemeinen Auflösung der Gleichungen dieses Grades zu gelangen. Denn da die Combination $ab + cd$ der vier Wurzeln a, b, c, d nicht mehr als drey Veränderungen zuläßt, nemlich $ab + cd$, $ac + bd$, $ad + cb$, so folgt, daß man, $ab + cd = u$ gesetzt, eine Gleichung des dritten Grades haben werde, deren Wurzeln $ab + cd$, $ac + bd$, $ad + bc$ sind. Diese Gleichung hat die Form

$$u^3 - Au^2 + Bu - C = 0$$

und es ist nach der Natur der Gleichungen

$$A = ab + cd + ac + bd + ad + cb$$

$$B = (ab + cd)(ac + bd) + (ab + cd)(ad + cb) + (ac + bd)(ad + cb)$$

$$C = (ab + cd)(ac + bd)(ad + cb)$$

oder

$$A = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$B = a^2(bc + bd + cd) + b^2(ac + ad + cd) + c^2(ab + ad + bd) + d^2(ab + ac + bc)$$

$$C = abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2.$$

Nun ist leicht einzusehen, daß die Werthe von A, B, C durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung m, n, p, q gegeben seyn müssen und zwar ohne Extraction der Wurzeln, indem sie dieselben bleiben, man mag die Wurzeln dieser Gleichung a, b, c, d versetzen wie man will. Auch ist in der That

$$-m = a + b + c + d$$
$$n = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$
$$-p = abc + abd + acd + bcd$$
$$q = abcd$$

und folglich sogleich

$$A = n.$$

Um B zu finden bemerke man, daß

$$a(bc + bd + cd) = -p - bcd$$
$$b(ac + ad + cd) = -p - acd$$

rc.

folglich

$$B = (a + b + c + d) \times -p - 4abcd$$

oder

$$B = mp - 4q$$

ist. Was endlich C betrifft, so ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 - 2n,$$ und folglich
$$abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (m^2 - 2n)q$$

Um ferner den übrigen Theil davon zu finden, mache man das Quadrat von p, woraus man

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 =$$
$$p^2 - 2abcd(ab + ac + bc + ad + bd + cd) =$$
$$p^2 - 2nq,$$ und folglich
$$C = (m^2 - 4n)q + p^2$$

finden wird. Auf diese Art wird die reducirte Gleichung

$$u^3 - nu^2 + (mp - 4q)u - (m^2 - 4n)q - p^2 = 0,$$

und

und diese Gleichung stimmt mit der obigen für y Nr. 27. durchaus überein, wenn man $u = 2y$ setzt.

31.

Jetzt wollen wir sehen, wie man, wenn man einen Werth von u kennt, die vier Wurzeln a, b, c, d findet. Da $u = ab + cd$ und $abcd = q$ ist, so erhellet, daß die beyden Größen ab und cd die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung

$$t^2 - ut + q = 0$$

sind. Nennt man demnach die Wurzeln dieser Gleichung t' und t'', so hat man $ab = t'$ und $cd = t''$. Ferner ist $-p = ab(c + d) + cd(a + b) = t^2(c + d) + t''(a + b)$, und so hat man, da $a + b + c + d = -m$ ist

$$a + b = \frac{p - mt'}{t' - t''}$$

$$c + d = \frac{p - mt''}{t'' - t'}$$

Da also $ab = t'$ und $cd = t''$ ist, so erhellet, daß a und b die Wurzeln aus

$$x^2 - \frac{p - mt'}{t' - t''}x + t' = 0$$

und c und d die Wurzeln aus

$$x^2 - \frac{p - mt''}{t'' - t'}x + t'' = 0$$

sind. Man sieht hieraus, daß es hinreicht, eine Wurzel der reducirten Gleichung für u zu kennen, um die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung a, b, c und d zu finden, und daß jede dieser Wurzeln der reducirten Gleichung dieselben vier Wurzeln a, b, c und d giebt. Denn hätte man $u = ac + bd$ oder $u = ad + bc$ anstatt $u = ab + cd$ genommen, so wäre dadurch weiter keine Veränderung entstanden, als

daß

daß in den Formeln b in c oder in d umgekehrt übergegangen wäre.

32.

Man kann die Gleichungen des vierten Grades noch auf eine leichtere und einfachere Weise vermittelst einer reducirten Gleichung auflösen, deren Wurzel $z = \frac{c + d - a - b}{2}$ Nr. 29. oder $s = c + d - a - b$ ist, wenn man $s = 2z$ setzt. Um den Grad und die Form dieser Gleichung kennen zu lernen, darf man nur die Versetzungen aufsuchen, welche bey den Buchstaben a, b, c, d möglich sind. Dies sind folgende sechs

$$\begin{array}{l} a + b - c - d \\ a + c - b - d \\ a + d - c - b \\ c + d - a - b \\ b + d - a - c \\ b + c - a - d \end{array}$$

Da dies die Wurzeln der reducirten Gleichung für s sind, so gehört diese Gleichung nothwendig zum sechsten Grade. Allein da vorhergehende sechs Größen zu je zweyen genommen einander gleich und nur in Ansehung der Zeichen verschieden sind, so kann die reducirte Gleichung bloß gerade Dignitäten von s enthalten, und läßt sich also wie eine cubische Gleichung behandeln.

Setzt man demnach $s^2 = t$, so hat man eine reducirte Gleichung für t vom dritten Grade, deren Wurzeln

$$\begin{array}{l} (a + b - c - d)^2 \\ (a + c - b - d)^2 \\ (a + d - b - c)^2 \end{array}$$

sind.

sind. Man kann also diese Gleichung finden, wenn man die Coefficienten derselben sucht, wie wir oben Nr. 30. bey der reducirten Gleichung für u gethan haben. Es ist indeß hier genug zu bemerken, daß das Quadrat von $a + b - c - d$ ist, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd$. Denn da $ab + ac + ad + bc + bd + cd = n$; $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 - 2n$; und $(a + b - c - d)^2 = s^2 = t$ ist, so hat man $t = m^2 - 4n + 4(ab + cd)$ oder $t = m^2 - 4n + 4u$. Auf diese Art kann man die gesuchte reducirte Gleichung für t bekommen, wenn man in der reducirten Gleichung für u Nr. 30. $\frac{t - m^2 + 4n}{4}$ an die Stelle von u setzt. Hiedurch erhält man

$$t^3 (3m^2 - 8nt)^2 + (3m^4 - 16m^2n + 16n^2 + 16mp - 64q)t$$
$$- (m^3 - 4mn - 8p)^2 = 0$$

Läßt man t', t'', t''' die drey Wurzeln dieser Gleichung seyn, so hat man

$$(a + b - c - d)^2 = t'$$
$$(a + c - b - d)^2 = t''$$
$$(a + d - b - c)^2 = t'''$$

und daraus ergiebt sich

$$a + b - c - d = \sqrt{t'}$$
$$a + c - b - d = \sqrt{t''}$$
$$a + d - b - c = \sqrt{t'''}$$

Verbindet man diese Gleichung mit

$$a + b + c + d = -m$$

so findet man für jede der vier Wurzeln a, b, c, d die Werthe, nemlich

$$a = \frac{-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$b = \frac{-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

$$c = \frac{-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

$$d = \frac{-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

Auf diese Art hat man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung ohne die Auflösung einer andern Gleichung als der für t. Allein es zeigt sich hier eine Schwierigkeit. Da nemlich die Wurzelgrößen $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ positiv und negativ genommen werden können, so schließen sie auch folgende Größen ein,

$$\frac{-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

$$\frac{-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$\frac{-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$\frac{-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

welche nicht die Werthe der vier Wurzeln a, b, c, d, sondern die Werthe ihrer Ergänzungen zu der Summe $a + b + c + d = -m$ sind.

Man braucht indeß nicht zu wissen, was für ein Zeichen jede der gedachten Wurzelgrößen haben muß, sondern es ist genug, daß man weiß, ob entweder die eine positiv und die beyden andern positiv oder negativ, oder ob die eine negativ und die beyden andern positiv oder negativ genommen werden müssen. Denn es ist leicht einzusehen, daß die vorhin gefundenen Ausdrücke für die Wurzeln a, b, c, d allemal dieselben Werthe geben, wenn man die Zeichen je zweyer von den Wurzelgrößen $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ zugleich verändert und das Zeichen der dritten beybehält. Folglich kommt alles auf die Bestimmung des Zeichens des Produkts aus $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ an. Nun ist aus der Gleichung für t

$$t't''t''' = (m^3 - 4mn + 8p)^2$$

und also

$$m^3 - 4mn + 8p = \sqrt{t'} \, . \, \sqrt{t''} \, . \, \sqrt{t'''}$$

Bezeichnet man daher die Werthe der Wurzelgrößen $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$, positiv genommen, durch ϑ', ϑ'', ϑ''', so daß $\sqrt{t'} = \pm\,\vartheta'$, $\sqrt{t''} = \pm\,\vartheta''$, $\sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$ wird, so muß man, wenn $m^3 - 4mn + 8p$ eine positive Größe ist, entweder

$$\sqrt{t'} = \vartheta' \text{ und } \sqrt{t''} \pm \vartheta'', \quad \sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$$

oder

$$\sqrt{t''} = \vartheta'' \text{ und } \sqrt{t'} = \pm\,\vartheta', \quad \sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$$

oder

$$\sqrt{t'''} = \vartheta''' \text{ und } \sqrt{t'} = \pm\,\vartheta', \quad \sqrt{t''} = \pm\,\vartheta''$$

nehmen, und man hat in diesem Falle für die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgende vier Werthe

$$\frac{-m + \vartheta' + \vartheta'' + \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m + \vartheta' - \vartheta'' - \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m - \vartheta' + \vartheta'' - \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m - \vartheta' - \vartheta'' + \vartheta'''}{4}$$

Ist hingegen $m^3 - 4mn + 8p$ eine negative Größe, so muß man entweder

$$\sqrt{t'} = -\,\vartheta' \text{ und } \sqrt{t''} = \pm\,\vartheta'', \quad \sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$$

oder

$$\sqrt{t''} = -\,\vartheta'' \text{ und } \sqrt{t'} = \pm\,\vartheta', \quad \sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$$

oder

$$\sqrt{t'''} = -\,\vartheta''' \text{ und } \sqrt{t'} = \pm\,\vartheta', \quad \sqrt{t''} = \pm\,\vartheta''$$

nehmen,

nehmen, und dies giebt für die gesuchten vier Wurzeln die Werthe

$$\frac{-m + \vartheta' + \vartheta'' - \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m + \vartheta' - \vartheta'' + \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m - \vartheta' + \vartheta'' + \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m - \vartheta' - \vartheta'' - \vartheta'''}{4}$$

33.

Die Ferrarische Methode, welche wir bisher untersucht haben, hat uns zur Zerfällung der Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

in die beyden Gleichungen vom zweyten Grade (Nr. 29.)

$$x^2 + (\frac{m}{2} + z)x + y + \frac{my - p}{2} = 0$$

$$x^2 + (\frac{m}{2} - z)x + y - \frac{my - p}{2z} = 0$$

geleitet, aus deren Auflösung sich die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung ergeben. Man hätte auf eine einfachere und directere Art eben diese Gleichung auch als das Produkt aus

$$x^2 + fx + g = 0$$
$$x^2 + hx + k = 0$$

betrachten und darauf die Coefficienten f, g, h, k durch die Vergleichung der homologen Glieder bestimmen können, wie Des Cartes gethan hat. Denn multiplicirt man diese beyden Gleichungen mit einander, so bekommt man

$$x^4 + (f + h)x^3 + (fh + g + k)x^2 + (fk + gh)x + gk = 0$$

und die Vergleichung dieser Gleichung mit

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

giebt die Gleichungen

$$f + h = m, \quad fh + g + k = n$$

$$fk + gh = p, \quad gk = q$$

woraus sich die Buchstaben f, g, h und k bestimmen lassen.

34.

Es sey, um dieses mit Des Cartes anzunehmen, $m = 0$, so hat man $f + h = 0$, folglich $h = -f$. Auf diese Art ist die gegebene Gleichung ein Produkt aus

$$x^2 + fx + g = 0$$

$$x^2 - fx + k = 0$$

und man hat zur Bestimmung der Coefficienten f, g, k die Gleichungen

$$g + k - f^2 = n, \quad (k - g)f = p, \quad gk = q$$

Die beyden ersten geben

$$g = \frac{n + f^2 - \frac{p}{f}}{2}$$

$$k = \frac{n + f^2 + \frac{p}{f}}{2}$$

und bringt man diese Werthe in die letzte Gleichung, so wird

$$(n + f^2)^2 - \frac{p^2}{f^2} = 4q$$

oder wenn man mit f^2 multiplicirt, und die Gleichung nach f ordnet,

$$f^6 + 2nf^4 + (n^2 - 4q)f^2 - p^2 = 0.$$

Dies ist eine Gleichung des sechsten Grades, die sich aber wie eine Gleichung des dritten Grades behandeln läßt, weil sie bloß gerade Dignitäten der unbekannten Größe enthält.

Dieses

Dieses ist die Cartesische Methode, die Gleichungen des vierten Grades aufzulösen. Des Cartes betrachtet zwar sogleich die Gleichungen

$$x^2 + fx + \frac{f^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{p}{2f} = 0$$

$$x^2 - fx + \frac{f^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{p}{2f} = 0$$

als die Faktoren der gegebenen Gleichung, allein es ist glaublich, daß er diese Gleichungen vorher auf einem dem unsrigen ähnlichen Wege gefunden habe. Man vergleiche Schootens Commentar und Hudde über die Reduction der Gleichungen.

35.

Die vorhergehende Auflösung stimmt offenbar mit der Nr. 26. f. zusammen, und die unbekannten Größen f und z drucken in beyden Auflösungen dieselbe Größe aus, wenn $m = 0$ ist. Auf diese Art lassen sich die über die Ferrarische Methode beygebrachten Anmerkungen auch auf die Cartesische Methode anwenden, und es ist nicht nöthig dabey besonders zu verweilen. Aber dagegen wird es nützlich seyn, das Prinzip dieser Methode zu untersuchen und den daher fliessenden Folgen a priori nachzuspühren.

Die Hauptsache kommt dabey nach dem Vorhergehenden darauf an, die gegebene Gleichung als durch eine Gleichung des zweyten Grades, wie $x^2 + fx + g = 0$ theilbar zu betrachten, oder anzunehmen, daß sie mit dieser eine Wurzel gemein habe. Die hierzu nöthigen Bedingungen lassen sich nach der Methode der 12ten Nr. finden. Dividirt man nemlich die fünftheilige Größe

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

 durch

durch

$$x^2 + fx + g$$

so bekommt man

$$x^2 + (m - f)x + n - g - f(m - f)$$

zum Quotienten und zum Reste

$$(p - g(m - f) - f(n - g - f(m - f)))x + q - g(n - g - f(m - f))$$

Soll also die Division ohne Rest von statten gehen, so muß dieser Rest unabhängig von x gleich 0 seyn, und so hat man die Gleichungen

$$p - g(m - f) - f(n - g - f(m - f)) = 0$$
$$q - g(n - g - f(m - f)) = 0$$

wodurch man f und g bestimmen kann. Die erste dieser Gleichungen giebt

$$g = \frac{p - fn + f^2m - f^3}{m - 2f}$$

und bringt man diesen Werth in die zweyte, so wird

$$q - (n - mf + f^2)\frac{p - nf + mf^2 - f^3}{m - 2f} + \frac{(p - nf + mf^2 - f^3)^2}{(m - 2f)^2} = 0$$

oder

$$(f^3 - mf^2 + nf - p)^2 - (f^3 - mf^2 + nf - p)(f^2 - mf + n) \times (2f - m) + q(2f - m)^2 = 0$$

Ordnet man diese Gleichung nach f, so wird

$$f^6 - 3mf^5 + (3m^2 + 2n)f^4 - m(m^2 + 4n)f^3 + (2m^2n + mp + n^2 - 4q)f^2 - m(mp + n^2 - 4q)f + mnp - m^2q - p = 0$$

und dies ist eben die Gleichung, die man aus den vier Gleichungen der Bedingung der 32sten Nr. finden würde.

Es

Es gehört zwar diese Gleichung zum sechsten Grade, und hat dabey alle Glieder. Allein setzt man $m = 0$, so verschwinden alle Glieder, worin die unbekannte Größe in einer ungeraden Dignität enthalten ist, und die Gleichung läßt sich wie eine cubische Gleichung behandeln. Es ist indeß nicht einmal nöthig, $m = 0$ zu setzen, wenn die gedachten Glieder verschwinden sollen, sondern man darf zu dem Ende nur das zweyte Glied wegschaffen, indem man $f = l + \frac{3m}{6} = l + \frac{m}{2}$ setzt. Auf diese Art bekommt man eine Gleichung für l, welche bloß die Dignitäten von l^2 enthält, nemlich

$$l^6 - (\frac{3m^2}{4} - 2n)l^4 + (\frac{3m^4}{16} - m^2n + mp + n^2 - 4q)l^2$$
$$- (\frac{m^3}{8} - \frac{mn}{2} + p)^2 = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit der reducirten Gleichung für t Nr. 33. überein, wenn man darin $t = 4l^2$ setzt. Da also in der angeführten Nr. $t = s^2$ und $s = 2z$ war, so hat man $l = z$, und es ist demnach die Größe $l = f - \frac{m}{2}$ in den vorhergehenden Formeln die Größe z Nr. 27 f. und zwar ohne $m = 0$ zu setzen. Dies zeigt die Verbindung der untersuchten Auflösungen hinlänglich.

36.

Nun wollen wir sehen, warum die Cartesische Methode auf eine solche reducirte Gleichung des sechsten Grades führt, daß darin mit dem zweyten Gliede zugleich alle Glieder, worin die unbekannte Größe in einer ungeraden Dignität enthalten ist, verschwinden. Zu dem Ende bemerke man, daß die Gleichung $x^2 + fx + g = 0$, weil sie ein Faktor der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln a, b, c, d sind, seyn muß, irgend zwey von diesen Wurzeln zu Wurzeln haben muß. Also hat man entweder $-f = a + b$ und $g = ab$, oder $-f = a + c$ und $g = ac$, oder $-f = a + d$ und $g = ad$, oder $-f = b + c$ und $g = bc$, oder $-f = b + d$ und $g = bd$, oder endlich $-f = c + d$ und $g = cd$, und es muß folglich die Gleichung für f, so wie auch die für g, eine Gleichung des sechsten Grades seyn, weil die vier Größen a, b, c, d zu zwey und zwey genommen, sechs Combinationen geben. Man könnte hiernach die Gleichungen für f und g directe finden, indem man den Werth eines jeden ihrer Coefficienten suchte, wie wir schon öfters gethan haben. Es sey nemlich die gesuchte Gleichung

$$f^6 + Af^5 + Bf^4 + Cf^3 + Df^2 + Ef + F = 0$$

Da die Wurzeln dieser Gleichung $-a-b$, $-a-c$, $-a-d$, $-b-c$, $-b-d$, $-c-d$ seyn müssen, so hat man

$$A = a + b + a + c + a + d + b + c + b + d + c + d$$
$$= 3(a + b + c + d) = -3m$$
$$B = (a + b)(a + c + a + d + b + c + b + d + c + d)$$
$$+ (a + c)(a + d + b + c + b + d + c + d)$$
$$+ (a + d)(b + c + b + d + c + d)$$
$$+ (b + c)(b + d + c + d)$$
$$+ (b + d)(c + d)$$
$$= 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$
$$= 3(m^2 - 2n) + 8n = 3m^2 - 2n$$

und so ferner.

Wollte man nun das zweyte Glied dieser Gleichung wegbringen, so müßte man alle Wurzeln um $\frac{A}{6}$ vermehren oder $l - \frac{A}{6}$ für setzen. Dies würde eine Gleichung für l geben,

ben, wo $l = f + \frac{A}{6} = f + \frac{a+b+c+d}{2}$ wäre, weil $A = 3(a+b+c+d)$ ist. Die Wurzeln dieser Gleichung würden seyn

$$\frac{a+b+c+d}{2} - a - b$$

$$\frac{a+b+c+d}{2} - a - c$$

rc.

oder

$$\frac{a+b-c-d}{2}$$

$$\frac{a+c-b-d}{2}$$

$$\frac{a+d-b-c}{2}$$

$$\frac{b+c-a-d}{2}$$

$$\frac{b+d-a-c}{2}$$

$$\frac{c+d-a-b}{2}$$

Es fällt aber dabey in die Augen, daß jede Wurzel eine ihr entgegenstehende sonst gleiche hat, und nimmt man daher die Quadrate und betrachtet l^2 als die unbekannte Größe, so kann sie nicht mehr als folgende drey Werthe haben

$$\left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a+d-b-c}{2}\right)^2$$

Hieraus folgt, daß die Gleichung für l, wenn man sie nach l^2 ordnet, eine Gleichung des dritten Grades oder eine Gleichung des sechsten Grades ist, worin die unbekannte Größe bloß in den geraden Dignitäten vorkommt, wodurch eben die Auflösung der Gleichungen des vierten Grades möglich wird. Auch erheller, warum die Gleichung für l mit der für z übereinstimmt, denn es ist klar (Nr. 32) daß die Werthe von z dieselben sind als diejenigen welche wir für l gefunden haben.

37.

Auch verdient hier noch folgendes angemerkt zu werden. Da $-m = a + b + c + d$ ist, und die Werthe von f

$$-a-b, \quad -a-c, \quad -a-d, \quad -b-c, \quad -b-d, \quad -c-d$$

sind, so hat man dieselben Werthe für $m-f$. Es muß demnach die Gleichung für f von der Art seyn, daß sie unverändert bleibt, wenn man darin $m-f$ für f setzt. Nimmt man daher $f = \frac{m}{2} + l$ an, wodurch $m - f = \frac{m}{2} - l$ wird, so muß auch die Gleichung für l so beschaffen seyn, daß sie dieselbe bleibt, wenn man darin l in $-l$ verwandelt, und kann also auch bloß die geraden Dignitäten von l enthalten.

Bringt man nun diesen Werth von f in den Ausdruck für g Nr. 35, so wird

$$g = \frac{l^2}{2} + \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} + \frac{4nm - m^3 - 8p}{16l}$$

und die beyden Faktoren

$$x^2 + fx + g = 0, \quad x^2 + (m-f)x + n - g - f(m-f) = 0$$

worin

worin die Gleichung $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$ zerfällt worden, gehen in

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - l\right)x + \frac{l^2}{2} + \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} + \frac{4nm - m^3 - 8p}{16l} = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - l\right)x + \frac{l^2}{2} - \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} - \frac{4nm - m^3 - 8p}{16l} = 0$$

über, welches dieselben Gleichungen sind, als Nr. 29, wenn man $l = z$, und in diesen letzten für y seinen in z gegebenen Werth setzt, welcher $y = \frac{4z^2 + 4n - m^2}{8}$ ist, Nr. 28.

Die bisher untersuchten Methoden sind außer der von Tschirnhausen, Euler und Bezout die einzigen bekannten Wege zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades. Die so eben gedachten Methoden verdienen aber noch eine besondere Untersuchung, und diese soll der Gegenstand des übrigen Theils dieses Abschnitts seyn.

38.

Zuvörderst ist klar, daß man, die Gleichungen des vierten Grades nach der Tschirnhausenschen Methode aufzulösen, nicht nöthig hat, alle Zwischenglieder wegzuschaffen, wie solches bey den cubischen Gleichungen geschehen mußte, sondern es ist hinlänglich, wenn man nur das zweyte und vierte Glied wegbringt, worin die unbekannte Größe in ungeraden Dignitäten vorkommt, weil man alsdann eine Gleichung hat, welche sich wie eine quadratische Gleichung behandeln läßt. Zu diesem Ende nehme man, wie bey den cubischen Gleichungen Nr. 10. die Hülfsgleichung $x^2 = bx + a + y$ an, welche zwey unbestimmte Größen a und b enthält. Schafft

man

man mittelst dieser Gleichung die unbekannte Größe x aus der gegebenen Gleichung $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$ weg, so findet man (Nr. 14.) eine Gleichung für y vom vierten Grade, worin der Coefficient von y^3 eine Funktion von a und b der ersten, der von y^2 eine Funktion von a und b von der zweyten und der von y eine Funktion von a und b von der dritten Dimension ist. Um also auf einmal das zweyte und vierte Glied wegzubringen, muß man die beyden Größen a und b so bestimmen, daß dadurch zweyen Gleichungen, einer vom ersten und einer vom dritten Grade ein Genüge geschieht. Dies giebt eine reducirte Gleichung vom dritten Grade, und es läßt sich daher die Tschirnhausensche Methode auch bey den Gleichungen des vierten Grades anbringen, wie solches aus dem Folgenden noch deutlicher erhellen wird.

39.

Da wir wir bisher die Buchstaben a, b, c, d gebraucht haben, um die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung vorzustellen, so wollen wir zur Vermeidung der Verwirrung zu den Coefficienten der Hülfsgleichung zwey andere Buchstaben wählen, und diese Gleichung so

$$x^2 + fx + g + y = 0$$

ausdrucken. Da nach der Methode, wovon hier die Rede ist, diese Gleichung mit der gegebenen eine gemeinschaftliche Wurzel haben muß, (Nr. 11.): so darf man es nur so einrichten, daß beyde einen gemeinschaftlichen Faktor haben, wie x bloß in der ersten Dimension vorkommt. Man dividire also die fünftheilige Größe

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$$

durch

$$x^2 + fx + g + y$$

und

und setze dabey $g + y = g'$: so findet man wie oben Nr. 25. den Rest

$$(p - g'(m - 2f) - nf + mf^2 - f^3)x + q$$
$$- g'(n - mf + f^2) + g'^2$$

Da dieser Rest bloß x in der ersten Dignität enthält, so muß er ein gemeinschaftlicher Faktor beyder vieltheiligen Größen seyn, und also den vorhergehenden Divisor $x^2 + fx + g'$ genau messen, d. h. der Werth von x, der sich aus der Gleichung

$$(p - g'(m - 2f) - nf + mf^2 - f^3)x + q$$
$$g'(n - mf + f^2 + g'^2 = 0$$

ergiebt, muß auch der Gleichung $x^2 + fx + g' = 0$ ein Genüge thun. Nun hat man

$$x = \frac{q - g'(n - mf + f^2) + g'^2}{f^3 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g'}$$

und bringt man diesen Werth in $x^2 + fx + g' = 0$, so wird

$$(q - g'(n - mf + f^2) + g'^2)^2 +$$
$$f(q - g'(n - mf + f^2) + g'^2)(f^3 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g')$$
$$+ g'(f^3 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g')^2 = 0$$

wo man nur $g + y$ wieder für g' zu setzen, zu entwickeln und nach y zu ordnen braucht.

Es sey der Kürze wegen

$$F = f^3 - mf^2 + nf - p$$
$$G = f^2 - mf + n$$
$$H = 2f - m$$

so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$(q - Gg' + g'^2)^2 + f(q - Gg' + g'^2)(F - Hg') +$$
$$g'(F - Hg')^2 = 0.$$

Ordnet man diese Gleichung nach g', so bekommt man

$$g'^4 - (2G + fH - H^2)g'^3 + (G^2 + 2q + fF + fGH - FH)g'^2$$
$$- (2qG + fqH + fFG - F^2)g' + q^2 + qfF = 0$$

und

und braucht man die Werthe von F, G und H wieder, so ergiebt sich

$$g'^4-(mf+2n-m^2)g'^3+(nf^2-(mn-3p)f+n^2-2mp+2q)g'^2$$
$$-pf^3-(mp-4q)f^2+(np-3mq)f-p^2+2nq)g'$$
$$+q(f^4-mf^3+nf^2-pf+q)=0.$$

Es sey nunmehr

$$A = mf + 2n - m^2$$
$$B = nf^2 - (mn-3p)f + n^2 - 2mp + 2q$$
$$C = pf^3 - (mp-4q)f^2 + (np-3mq)f - p^2 + 2nq$$
$$D = q(f^4 - mf^3 + nf^2 - pf + q)$$

um die Gleichung

$$g'^4 - Ag'^3 + Bg'^2 - Cg' + D = 0$$

zu bekommen. Setzt man nun wieder $g + y$ für g' und ordnet nach y, so wird

$$y^4 + (4g-A)y^3 + (6g^2 - 3gA + B)y^2$$
$$+ (4g^3 - 3Ag^2 + 2Bg - C)y$$
$$+ g^3 - Ag^3 + Bg^2 - Cg + D = 0$$

worin man nach Gefallen zwey Glieder $= 0$ setzen kann, wenn man die Buchstaben a und b gehörig bestimmt.

Wir wollen also, unserm Vorsatze gemäß, das zweyte und vierte Glied verschwinden lassen. Zu diesem Ende dienen die Gleichungen

$$4g - A = 0$$
$$4g^3 - 3Ag^2 + 2Bg - C = 0.$$

Die erste giebt $g = \frac{A}{4}$, und bringt man diesen Werth in die andere Gleichung, so hat man nach Wegschaffung der Brüche

$$A^3 - 4AB + 8C = 0$$

Braucht man in dieser Gleichung die Werthe von A, B und C, so bekommt man eine Gleichung für f vom dritten Grade, nemlich

(m³ –

$$\begin{aligned}(m^3 - 4mn + 8p)f^3 \\ - (3m^4 - 14m^2n + 8n^2 + 2mp - 32q)f^2 \\ + (m^5 - 16m^3n + 20m^2p + 16m(n^2 - 2q) - 16np)f \\ - m^6 + 6m^4n - 8m^3np - 8m^2(n^2 - q) + 8mn^2p \\ - 8p^2 = 0\end{aligned}$$

Hat man aus dieser Gleichung f bestimmt, so wird die Gleichung für y, da $g = \frac{A}{4}$ ist

$$y^4 - (\frac{3A^2}{8} - B)y^2 - \frac{3A^4}{256} + \frac{A^2B}{16} - \frac{AC}{4} + D = 0$$

oder, wenn man für C seinen Werth $\frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}$ setzt,

$$y^4 - (\frac{3A^2}{8} - B)y^2 + \frac{5A^4}{256} - \frac{A^2B}{16} + D = 0$$

eine Gleichung, welche sich wie eine Gleichung des zweyten Grades behandeln läßt. Auf diese Art wird f und y bekannt und darauf hat man sogleich

$$x = \frac{q - (n - mf + mf^2)(\frac{A}{4} + y) + (\frac{A}{4} + y)^2}{f^3 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)(\frac{A}{4} + y)}$$

und die vier Werthe von y aus der vorhergehenden Gleichung geben allemal dieselben vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, man mag von f eine Wurzel brauchen, was für eine man will. Nöthigenfalls kann man dieses auf eine der Nr. 28. ähnliche Art beweisen.

40.

Wollte man den Grund, warum die vorhin gefundene reducirte Gleichung für f nothwendiger Weise eine Gleichung des dritten Grades ist, a priori finden, so müßte man untersuchen, was der Werth von f für eine Funktion von den

Wur-

Wurzeln a, b, c und d seyn muß. Zu dem Ende nehme man wieder die Hülfsgleichung $x^2 + fx + g + y = 0$ zur Hand, und substituire darin nach und nach a, b, c, d für x und für y die vier Wurzeln der vorhergehenden Gleichung. Indeß ist es nicht nöthig, den Werth dieser Wurzeln zu kennen, sondern da diese Gleichung keine ungeraden Dignitäten von y enthält, so darf man nur erwägen, daß je zwey und zwey Wurzeln derselben einander entgegengesetzt, übrigens aber gleich seyn müssen, und sich also durch y', $-y'$, y'', $-y''$ vorstellen lassen. Braucht man demnach die gedachten Substitutionen, so findet man

$$a^2 + fa + g + y' = 0$$
$$b^2 + fb + g - y' = 0$$
$$c^2 + fc + g + y'' = 0$$
$$d^2 + fd + g - y'' = 0$$

Schafft man hier y' und y'' weg, so ergiebt sich

$$a^2 + b^2 + f(a + b) + 2g = 0$$
$$c^2 + d^2 + f(c + d) + 2g = 0$$

und bringt man g weg, so wird

$$f = -\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a + b - c - d}$$

Um also alle Werthe von f zu bekommen, darf man nur die vier Wurzeln a, b, c, d, so oft versetzen als möglich, wodurch man aber nicht mehr als folgende drey Werthe bekommt

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a + b - c - d}$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{a + c - b - d}$$

$$\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a + d - b - c}$$

Da dieses die Wurzeln der reducirten Gleichung für f sind, so kann diese Gleichung keine höhere als eine cubische seyn.

Man

Man könnte auch, auf die schon öfters befolgte Art, zu der Gleichung für y zurückgehen und würde dann wieder dieselbe Gleichung wie oben finden.

Um übrigens die reducirte Gleichung für f, wovon hier die Rede ist, desto bequemer mit der obigen, nach der Ferrarischen und Cartesischen Methode gefundenen, vergleichen zu können, bemerke man, daß

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = \frac{(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a-b)^2 - (c-d)^2}{2}$$

ist. Nun ist

$$(a+b)^2 - (c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d)$$
$$= -m(a+b-c-d)$$

und

$$(a-b)^2 - (c-d)^2 = (a+c-b-d)(a+d-b-c)$$

und da ferner

$$(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c) = m^3$$
$$- 4mn + 8p$$

ist, so hat man

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = \tfrac{1}{2}\left(-m(a+b-c-d) + \frac{m^3-4mn+8p}{a+b-c-d}\right)$$

und folglich

$$f = -\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{a+b-c-d} = \frac{m}{2} - \frac{m^3-4mn+8p}{2(a+b-c-d)^2}$$

Nun haben wir Nr. 32. gesehen, daß die reducirte Gleichung für t zu ihren Wurzeln die verschiedenen Werthe von $(a+b-c-d)^2$ hat. Folglich ist überhaupt

$$f = \frac{m}{2} - \frac{m^3 - 4mn + 8p}{2t}$$

woraus sich die Verbindung der reducirten Gleichung für f mit der oben gefundenen für t hinlänglich erkennen läßt.

41.

Da wir gesehen haben, wie die Tschirnhausensche Methode bey den Gleichungen des vierten Grades gebraucht wird, wenn zwey Glieder der gegebenen Gleichung weggeschafft werden: so wird es nicht undienlich seyn zu erwägen, was die Wegschaffung aller Zwischenglieder giebt.

Sollen also drey Glieder, nemlich das zweyte, dritte und vierte weggebracht werden, so ist eine Hülfsgleichung von drey unbestimmten Größen nöthig, deren Form folgende ist

$$x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0.$$

Schafft man mittelst dieser und der gegebenen Gleichung

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

x weg, so bekommt man eine Gleichung für y vom vierten Grade

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

worin $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ gesetzt werden muß, um die zweygliedrige Gleichung

$$y^4 + D = 0$$

zu bekommen. Aus dem Nr. 14. allgemein Erwiesenen folgt aber, daß A eine Funktion der unbestimmten Größen f, g, h von einer Dimension, B eine Funktion zweyer und C eine Funktion dreyer von eben diesen Größen seyn muß, und man hat also zur Bestimmung der Größen f, g, h die drey Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, wovon die erste zum ersten, die andere zum zweyten und die dritte zum dritten Grade gehört, so daß man durch die Elimination zuletzt eine Gleichung für f oder g oder h vom sechsten Grade bekommt. Auf diese Art scheint die gegenwärtige Methode keine Anwendung zu leiden, weil sie zu einer höhern reducirten Gleichung führt als die gegebene ist. Allein es läßt sich vielleicht diese Gleichung auf einen niedrigern Grad herabbringen, und dieses muß zuerst a priori untersucht werden, ehe man sich in den angezeigten Calcul einläßt.

42.

Zu diesem Ende frägt sich, was die unbestimmte Größe f für eine Funktion von a, b, c, d seyn wird, wenn die Gleichung für y die Form $y^4 + D = 0$ haben soll. Nun giebt diese Gleichung die Wurzeln

$$y = \pm \sqrt[4]{-D}$$

$$y = \pm \sqrt{-1} \,.\, \sqrt[4]{-D}$$

und setzt man daher der Kürze wegen $\sqrt[4]{-D} = k$, so darf man nur in die Hülfsgleichung $x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0$ nach und nach a, b, c, d für x und k, $-k$, $k\sqrt{-1}$, $-k\sqrt{-1}$ für y bringen. Hierdurch erhält man die vier Gleichungen

$$a^3 + a^2f + ag + h + k = 0$$

$$b^3 + b^2f + bg + h - k = 0$$

$$c^3 + c^2f + cg + h + k\sqrt{-1} = 0$$

$$d^3 + d^2f + dg + h - k\sqrt{-1} = 0$$

und aus diesen Gleichungen lassen sich die Größen f, g, h und k finden.

Addirt man die beyden ersten und die beyden letzten zusammen, so bekommt man

$$a^3 + b^3 + (a^2 + b^2)f + (a + b)g + 2h = 0$$

$$c^3 + d^3 + (c^2 + d^2)f + (c + d)g + 2h = 0$$

welche von einander abgezogen

$$a^3 + b^3 - c^3 - d^3 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)f$$
$$+ (a + b - c - d)g = 0$$

geben, worin bloß f und g befindlich sind.

Zieht man nun die beyden ersten und die beyden letzten von einander ab, so erhält man

$$a^3 - b^3 + (a^2 - b^2)f + (a - b)g + 2k = 0$$

$$c^3 - d^3 + (c^2 - d^2)f + (c - d)g + 2k\sqrt{-1} = 0$$

Multiplicirt man die zweyte durch $\sqrt{-1}$, und addirt sie darauf zu der ersten, so wird

$$a^3 - b^3 + (c^3 - d^3)\sqrt{-1} + (a^2 - b^2 + (c^2 - d^2)\sqrt{-1})f$$
$$+ (a - b + (c - d)\sqrt{-1})g = 0$$

eine Gleichung, welche mit der vorhin gefundenen verbunden zur Bestimmung von f und g dient.

Bringt man g weg, so bekommt man eine Gleichung für f, wodurch

$$f = -\frac{(a^3+b^3-c^3-d^3)(a-b+(c-d)\sqrt{-1})-(a^3-b^3+(c^3-d^3)\sqrt{-1})(a+b-c-d)}{(a^2+b^2-c^2-d^2)(a-b+(c-d)\sqrt{-1})-(a^2-b^2+(c^2-d^2)\sqrt{-1})(a+b-c-d)}$$

wird. Hieraus lassen sich leicht alle Werthe von f herleiten, wenn man die vier Wurzeln a, b, c, d so oft versetzt als möglich ist. Setzt man der Kürze wegen

$$M =$$
$$(a^3 + b^3 - c^3 - d^3)(a - b) - (a^3 - b^3)(a + b - c - d)$$

$$N =$$
$$(a^3 + b^3 - c^3 - d^3)(c - d) - (c^3 - d^3)(a + b - c - d)$$

$$P =$$
$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(a - b) - (a^2 - b^2)(a + b - c - d)$$

$$Q =$$
$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(c - d) - (c^2 - d^2)(a + b - c - d)$$

$$M' =$$
$$(a^3 + c^3 - b^3 - d^3)(a - c) - (a^3 - c^3)(a + c - b - d)$$

$$N' =$$
$$(a^3 + c^3 - b^3 - d^3)(b - d) - (b^3 - d^3)(a + c - b - d)$$

$$P' =$$

$$P' = (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(a - c) - (a^2 - c^2)(a + c - b - d)$$

$$Q' = (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(b - d) - (b^2 - d^2)(a + c - b - d)$$

$$M'' = (a^3 + d^3 - b^3 - c^3)(a - d) - (a^3 - d^3)(a + d - b - c)$$

$$N'' = (a^3 + d^3 - b^3 - c^3)(b - c) - (b^3 - c^3)(a + d - b - c)$$

$$P'' = (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(a - d) - (a^2 - d^2)(a + d - b - c)$$

$$Q'' = (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(b - c) - (b^2 - c^2)(a + d - b - c)$$

so findet man folgende sechs Werthe

$$-\frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}}, \quad -\frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{M' + N'\sqrt{-1}}{P' + Q'\sqrt{-1}}, \quad -\frac{M' - N'\sqrt{-1}}{P' - Q'\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{M'' + N''\sqrt{-1}}{P'' + Q''\sqrt{-1}}, \quad -\frac{M'' - N''\sqrt{-1}}{P'' - Q''\sqrt{-1}}$$

welches die sechs Werthe von f sind. Man sieht hieraus, daß diese Gleichung eine Gleichung vom sechsten Grade wird, wie solches auch schon auf eine andere Art gezeigt worden ist.

43.

Nun kommt es darauf an, ob diese Gleichung auf einen niedrigern Grad herabgebracht werden kann. Dies findet wirklich statt, so wie solches vermittelst der Form der sechs Wurzeln der gegenwärtigen Gleichung gezeigt werden soll. Denn nimmt man an, daß die beyden Wurzeln

$$-\frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} \text{ und } -\frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$

durch die quadratische Gleichung

$$f^2 + tf + u = 0$$

vorgestellt werden: so ist wegen der Natur der Gleichungen

$$t = \frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} + \frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$

und

$$u = \frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} \times \frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$

oder

$$t = \frac{2(MP + NQ)}{P^2 + Q^2} \text{ und } u = \frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}$$

Nun behaupte ich, daß die Größen t und u von keiner andern Gleichung abhängen können, als von cubischen Gleichungen von der Form

$$t^3 - Et^2 + Ft - G = 0$$
$$u^3 - Hu^2 + Ku - L = 0$$

worin die Coefficienten E, F, G, H, K, L rationale Funktionen von den Coefficienten m, n, p, q der gegebenen Gleichung sind; dergestalt, daß man, wenn t', t'', t''' die drey Wurzeln der ersten Gleichung ausdrucken, folgende drey Gleichungen für f hat

$$f^2 + t'f + u' = 0$$
$$f^2 + t''f + u'' = 0$$
$$f^2 + t'''f + u''' = 0$$

in welche sich die vorhin gedachte Gleichung für f vom sechsten Grade auflösen läßt.

Um dies zu beweisen darf man nur die verschiedenen Werthe aufsuchen, welche die Größen t und u, d. h. die Funktionen $\frac{MP + NQ}{P^2 + Q^2}$ und $\frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}$ durch die Versetzung der Wurzeln der gegebenen Gleichung a, b, c, d haben können,

nen, denn es fällt in die Augen, daß die daher sich ergebenden Werthe die Wurzeln der Gleichung für t und u sind. Nun ist die Summe aller möglichen Versetzungen der vier Größen a, b, c, d $= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, und es müßten also überhaupt genommen, die Gleichungen für t und u bis zu dem vier und zwanzigsten Grade aufsteigen. Allein es finden sich unter diesen Versetzungen verschiedene, welche eben dieselben Werthe geben, und welche daher nicht besonders genommen werden dürfen. Denn verwechselt man

1. a und b, so bleiben die Größen N und Q dieselben, und die Größen M und P verändern bloß das Zeichen, so daß die Größen t und u dieselben bleiben müssen. Hieraus erhellet, daß die vier und zwanzig Versetzungen der Buchstaben a, b, c, d eigentlich zwölf Paar einander gleiche Setzungen enthalten. Hierdurch wird die Menge der Werthe von t und u schon bis auf zwölf vermindert. Verwechselt man ferner

2. c und d, so bleiben die Größen M und P dieselben, und die Größen N und Q verändern bloß das Zeichen. Dies bringt aber keine Veränderung in den Werthen von t und u hervor, und es bleiben daher, da diese Verwechselungen unabhängig von den vorigen sind, von den vorhergedachten zwölf Werthen der Größen t und u nur noch sechs übrig.

3. Verwechselt man endlich zu gleicher Zeit, a und c, und b und d, so entsteht auch dadurch keine Veränderung in den Werthen von t und u, und es reduciren sich daher die so eben erwähnten sechs Werthe auf drey.

Nun kann man zwar auch noch a und d und b und c zu gleicher Zeit unter ähnlichen Umständen verwechseln, allein da diese Verwechselung schon in dem vorhergehenden enthalten ist, so braucht davon hier weiter keine Rede zu seyn.

Hieraus folgt, daß die Gleichungen für t und u vom 24sten Grade nicht mehr als drey verschiedene Wurzeln enthalten können, wovon aber jede sieben ihr gleiche neben sich hat, so daß diese Gleichungen eigentlich nicht anders als zur achten Potestät erhobene cubische Gleichungen sind.

44.

Wir haben auf diese Art a priori gesehen, daß es nicht mehr als drey verschiedene Werthe von t und von u geben kann. Nun ist leicht zu finden, daß diese Werthe von t

$$\frac{2(MP + NQ)}{P^2 + Q^2}, \quad \frac{2(M'P' + N'Q')}{P'^2 + Q'^2}, \quad \frac{2(M''P'' + M''Q'')}{P''^2 + Q''^2}$$

und von u

$$\frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}, \quad \frac{M'^2 + N'^2}{P'^2 + Q'^2}, \quad \frac{M''^2 + N''^2}{P''^2 + Q''^2}$$

sind, so daß (Nr. 43)

$$t' = \frac{2(MP + NQ)}{P^2 + Q^2}$$

$$t'' = \frac{2(M'P' + N'Q')}{P'^2 + Q'^2}$$

$$t''' = \frac{2(M''P'' + N''Q'')}{P''^2 + Q''^2}$$

$$u' = \frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}$$

$$u'' = \frac{M'^2 + N'^2}{P'^2 + Q'^2}$$

$$u''' = \frac{M''^2 + N''^2}{P''^2 + Q''^2}$$

ist.

ist. Denn bringt man diese Werthe in die Coefficienten E, F, ꝛc. der Gleichungen für t und u, welche bekanntermaßen auf folgende Art ausgedruckt werden müssen

$$E = t' + t'' + t''', \quad F = t't'' + t't''' + t''t''', \quad G = t't''t'''$$

$$H = u' + u'' + u''', \quad K = u'u'' + u'u''' + u''u''', \quad L = u'u''u'''$$

so bekommt man Funktionen von a, b, c, d, welche dieselben bleiben, man mag die Größen a, b, c, d verwechseln wie man will, und welche sich folglich durch rationale Funktionen von den Coefficienten m, n, p, q der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln a, b, c, d sind, ausdrucken lassen. Auf diese Art kann man also den Werth dieser Coefficienten auch directe finden, so wie wir solches bey den bisherigen Untersuchungen schon öfters gethan haben.

Uebrigens kann man, sobald man die Wurzeln t', t'', t''' der Gleichung für t kennt, durch sie die zugehörigen Wurzeln u', u'', u''' der Gleichung für u, ohne Auflösung einer andern Gleichung finden. Denn nimmt man die drey Ausdrücke

$$u' + u'' + u'''$$
$$t'u' + t''u'' + t'''u'''$$
$$t'^2u' + t''^2u'' + t'''^2u'''$$

und setzt darin für t', t'', t''' und u', u'', u''' ihre Werthe in a, b, c, d, so sieht man leicht, daß die daraus entstehenden Funktionen keine Veränderung leiden, wie man auch die Größen a, b, c, d versetzen mag, so daß sie sich allemal durch rationale Funktionen von den Coefficienten m, n, p, q ausdrucken lassen müssen. Auf diese Art lassen sich die Werthe dieser Ausdrücke finden, und dann hat man durch sie drey Gleichungen, durch welche sich die Größen u', u'', u''' leicht bestimmen lassen.

45.

Da wir also a priori überzeugt sind, daß sich die reducirte Gleichung des sechsten Grades, auf welche die hier untersuchte Methode führt, auf eine Gleichung des dritten Grades herabbringen läßt: so wollen wir nun auch die Art und Weise kennen zu lernen suchen, welche die Rechnung dazu erfordert. Man nehme also wieder die Hülfsgleichung (Nr. 40.)

$$x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0$$

zur Hand und suche auf die gewöhnliche Art (Nr. 11.) die Bedingungen, unter welchen diese Gleichung mit der gegebenen

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

eine Wurzel gemein hat. Man dividire also die vieltheilige Größe

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

durch

$$x^3 + fx^2 + gx + h'$$

indem man der Kürze wegen $h' = h + y$ setzt. Den Quotienten bey Seite gesetzt, so ist der Rest

$$Mx^2 + N'x + P'$$

wenn man

$$M = n - g - f(m - f)$$
$$N' = p - h' - g\,m - f)$$
$$P' = q - h'(m - f)$$

annimmt. Ferner dividire man die viertheilige Größe

$$x^3 + fx^2 + gx + h'$$

durch die dreytheilige

$$Mx^2 + N'x + P',$$

so wird der neue Rest

$$(g - \frac{P' + N'f}{M} + \frac{N'^2}{M^2})x + h' - \frac{P'f}{M} + \frac{N'P'}{M^2}$$

und

und dieser muß der gesuchte gemeinschaftliche Divisor seyn, weil er bloß x in der ersten Dignität enthält. Setzt man ihn daher $= 0$, so wird

$$x = -\frac{M^2h' - MP'f + N'P'}{M^2g - M(P' + N'f + N'^2}$$

und dieser Werth, in die Gleichung $Mx^2\ N'x + P' = 0$ gesetzt, giebt die gesuchten Bedingungen.

Man setze nunmehr

$$N = p - h - g(m - f)$$
$$P = q - h(m - f)$$

so hat man, da $h' = h + y$ ist

$$N' = N - y$$
$$P' = P - (m - f)y$$

Bringt man diese Werthe in den Ausdruck für x, und setzt ferner

$$Q = M^2h - MPf + NP$$
$$R = M^2 + (Mf - N)f - P$$
$$S = M^2g - M(P + Nf) + N^2$$
$$T = Mm - 2N$$

so wird

$$x = -\frac{Q + Ry + (m - f)y^2}{S + Ty + y^2}$$

und die Gleichung für die gesuchte Bedingung wird

$$M(Q + Ry + (m - f)y^2)^2$$
$$+ (y - N)(Q + Ry + (m - f)y^2)(S + Ty + y^2)$$
$$+ (P - (m - f)y)(S + Ty + y^2) = 0$$

Entwickelt man dieselbe und ordnet sie nach den Potestäten von y, so erhält man nach vorgenommener Reduction die Form

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

wie wir bereits oben gezeigt haben.

In

In dieser Gleichung für y sind die Coefficienten A, B, C, D ganze rationale Funktionen dreyer unbestimmten Größen f, g, h und zwar A eine Funktion einer, B eine Funktion zweyer Dimensionen u. s. f. Setzt man nun, um diese Gleichung auf zwey Glieder zu bringen, A = o, B = o, C = o, so bekommt man darin Gleichungen, aus welchen sich sogleich die Werthe von g und h durch f bestimmen lassen, und außerdem eine Endgleichung für f vom sechsten Grade, die auf dem dritten Grad hervorgebracht werden kann. Dividirt man sie durch eine quadratische Gleichung wie $f^2 + tf + u = 0$, so bekommt man zwey Gleichungen für t und u, welche die Bedingungen enthalten, unter denen die Division ohne Rest vorgenommen werden kann, und mittelst dieser Gleichungen läßt sich sogleich u durch t bestimmen, und dann eine Endgleichung für t finden, welche den dritten Grad nicht übersteigt. Löset man diese cubische Gleichung auf, so kennt man t und dann auch u, und lernt darauf f durch die Auflösung der vorhergehenden quadratischen Gleichung und g und h durch einfache Gleichungen kennen. Auf diese Art werden also alle Coefficienten D, Q, R, S, T bekannt.

Ist nun die Gleichung für y durch Wegschaffung der Zwischenglieder auf $y^4 + D = 0$ gebracht, so sind die vier Werthe von y

$$\pm \sqrt[4]{-D} \text{ und } \pm \sqrt[4]{-D} \cdot \sqrt{-1}$$

und diese Werthe, nach und nach in den obigen Ausdruck für x gesetzt, geben die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung. Da die Formeln, auf welche der Calcul führt, zu weitläuftig sind, so begnüge ich mich, denselben anzuzeigen, und will dagegen Mittel aufsuchen, ihn abzukürzen und einfacher zu machen.

46.

Da die Wurzel x die Form

$$x = -\frac{Q + Ry + (m - f)y^2}{S + Ty + y^2}$$

hat, so daß darin die Größe y aus der Gleichung

$$y^4 + D = 0$$

bestimmt werden muß: so ist leicht einzusehen, daß man diesem Ausdrucke für x die einfachere Form

$$x = a + by + cy + dy^3$$

geben kann, wenn man a, b, c und d von Q, R ꝛc. abhängige Coefficienten seyn läßt. Denn multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{Q + Ry + (m - f)y^2}{S + Ty + y^2}$$

durch $S - Ty + y^2$: so wird der Nenner des neuen Bruchs

$$(S + y^2)^2 - T^2y^2 \text{ oder } S^2 + (2S - T^2)y^2 + y^4$$

oder

$$S^2 - D + (2S - T^2)y^2$$

wenn man $-D$ für y^4 setzt. Multiplicirt man ferner sowohl den Zähler als den Nenner durch

$$S^2 - D - (2S - T^2)y^2,$$

so wird der nunmehrige Nenner

$$(S^2 - D)^2 - (2S - T^2)^2y^4$$

oder, da $y^4 = -D$ ist,

$$(S^2 - D)^2 + D(2S - T^2)^2$$

und enthält also kein y mehr. Man kann also in dem Ausdrucke für x, indem man den Zähler und Nenner durch $(S - Ty + y^2)(S^2 - D - (2S - T^2)y^2)$ multiplicirt, y aus dem Nenner wegbringen. Hierdurch aber wird der Zähler eine vieltheilige Größe, worin y bis zur sechsten Dignität aufsteigt; allein setzt man darin $-D$ für y^4, $-Dy$ für y^5 und $-Dy^2$ für y^6, so enthält er bloß die Dignitäten y^3,

y^2, y,

y^2, y, und der Ausdruck für x bekommt demnach die Form $a + by + cy^2 + dy^3$.

Da die Substitution der Werthe von y aus der Gleichung $y^4 + D = 0$ die vier Wurzeln geben muß, welche x in der Gleichung $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$ hat: so kann man diese Gleichung als aus

$$x = a + by + cy^2 + dy^3, \text{ und } y^4 + D = 0$$

durch eie Elimination von y entstanden, betrachten, wo denn die Vergleichung der homologen Glieder vier Gleichungen darbietet, vermittelst welcher man vier von den Coefficienten a, b, c, d und D bestimmen kann. Der fünfte aber kann nach Gefallen angenommen werden.

Dies sind die Methoden, wie Euler und Bezout die Gleichungen des vierten Grades in den Nr. 18. angeführten Memoiren aufgelöset haben.

Euler setzt sogleich $c = 1$ und findet durch Wegschaffung der drey übrigen unbestimmten Größen a, b, d eine reducirte Gleichung für D vom dritten Grade. Bezout hingegen setzt $D = -1$, und findet eine reducirte Gleichung für c vom sechsten Grade, die sich wie eine cubische Gleichung behandeln läßt, weil ihr die Glieder fehlen, worin die unbekannte Größe in einer ungeraden Dignität stehen würde. Er fügt zugleich die Anmerkung hinzu, daß man, wenn man b oder d anstatt c suchen wollte, eine Gleichung vom vier und zwanzigsten Grade finden würde, deren Exponenten Vierfache von vier wären, und welche sich daher wie eine Gleichung des sechsten Grades behandeln ließen. Ferner, daß eine reducirte Gleichung für bd bloß eine cubische Gleichung seyn, und folglich die reducirten Gleichungen für b oder d bloß die Schwierigkeiten des dritten Grades haben würden,

würden, weil sie mittelst der Gleichung für bd in drey Gleichungen vom achten Grade zerfällt werden könnten, die sich wie quadratische Gleichungen auflösen ließen, weil die Exponenten darin Vielfache von vier wären.

Ich begnüge mich mit der Anzeige dieser Resultate, weil sie jeder leicht selbst finden kann, im Fall er die gedachten Memoiren nicht zur Hand hat, und will dagegen den Grund davon a priori aufsuchen.

47.

Die Werthe von x, d. h. die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung mögen x', x'', x''', x'''', und die vier Werthe von y aus der Gleichung $y^4 + D = 0$, wie oben $\pm \sqrt[4]{-D}$, $\pm \sqrt[4]{-D} \cdot \sqrt{-1}$ seyn. Bringt man diese Werthe nach und nach in die Gleichung

$$x = a + by + cy^2 + dy^3$$

so bekommt man dafür folgende vier

$$x' = a + b\sqrt[4]{-D} + c\sqrt[4]{D^2} + d\sqrt[4]{-D^3}$$

$$x'' = a - b\sqrt[4]{-D} + c\sqrt[4]{D^2} - d\sqrt[4]{-D^3}$$

$$x''' = a + b\sqrt[4]{-D} \cdot \sqrt{-1} - c\sqrt[4]{D^2} - d\sqrt[4]{-D^3} \cdot \sqrt{-1}$$

$$x'''' = a - b\sqrt[4]{-D} \cdot \sqrt{-1} - c\sqrt[4]{D^2} + d\sqrt[4]{-D^3} \cdot \sqrt{-1}$$

Addirt man nun zuvörderst diese vier Gleichungen zu einander, so wird

$$x' + x'' + x''' + x'''' = 4a = -m \text{ und also}$$

$$a = \frac{-m}{4}$$

Addirt

Addirt man ferner erst die beyden ersten und dann die beyden andern, so findet man

$$x' + x'' = 2a + 2c\sqrt[4]{D^2}$$

$$x''' + x'''' = 2a - 2c\sqrt[4]{D^2}$$

woher

$$c\sqrt[4]{D^2} = c\sqrt{-D} = \frac{x' + x'' - x''' - x''''}{4}$$

wird. Setzt man also mit Eulern $c = 1$, so wird

$$-D = \frac{(x' + x'' - x''' - x'''')^2}{16}$$

Dieser Ausdruck für D giebt bald zu erkennen, daß die Gleichung für D eine cubische Gleichung ist, wie Euler gefunden hat. Denn es ist diese Gleichung nichts anders als die oben (Nr. 32.) gefundene reducirte Gleichung für t, wenn man darin $-16D$ für t setzt. Es war endlich

$$t = s^2 = (a + b - c - d)^2$$

angenommen worden, und a, b, c, d hatten eben die Bedeutung, welche hier die Buchstaben x', x'', x''', x'''' haben, d. h. sie stellten die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung vor.

Wenn man aber nicht $c = 1$, sondern $b = 1$ setzt, so bleibt diese Gleiche keine cubische, sondern sie steigt bis zum sechsten Grade auf.

Denn zieht man die beyden ersten und die beyden andern von den vorhergehenden vier Gleichungen von einander ab, so wird

$$x' - x'' = 2b\sqrt[4]{-D} + 2d\sqrt[4]{-D^3}$$

$$x''' - x'''' = (2b\sqrt[4]{-D} - 2d\sqrt[4]{-D^3})\sqrt{-1}$$

und

und hieraus

$$b\sqrt[4]{} - D = \frac{x' - x'' - (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

$$d\sqrt[4]{} - D^3 = \frac{x' - x'' + (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

Setzt man demnach $b = 1$, so ergiebt sich

$$-D = \left(\frac{x' - x'' - (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}\right)^4$$

und diese Größe hängt, wie man bald sehen wird, von einer Gleichung vom sechsten Grade ab.

48.

Setzt man mit Bezout $D = -1$, so hat man aus den vorhergehenden Formeln

$$c = \frac{x' + x'' - x''' - x''''}{4}$$

und hieraus läßt sich schließen, daß die reducirte Gleichung für c eine Gleichung vom sechsten Grade mit geraden Exponenten seyn wird, wie Bezout gefunden hat. Denn es ist offenbar, daß der Werth von $-D$ bey der Eulerschen Hypothese mit dem Werthe von c^2 bey der gegenwärtigen Annahme übereinstimmt, so daß man durch die Setzung von $-c^2$ für D die reducirte Gleichung von Eulern in die von Bezout verwandeln kann, wodurch diese eine Gleichung vom sechsten Grade wird, welche sich wie eine Gleichung des dritten Grades behandeln läßt. Uebrigens ist diese reducirte Gleichung für c mit der obigen für z Nr. 29. einerley, wenn man darin $-2c$ für z setzt.

Nun wollen wir die Form der reducirten Gleichungen für b und d aufsuchen, so daß wir durchaus mit Bezout

D = − 1 annehmen. Bey dieser Voraussetzung ist aus den Formeln der vorigen Nr.

$$b = \frac{x' - x'' - (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

$$d = \frac{x' - x'' + (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

und hieraus findet man alle Werthe von b und d, wenn man darin die vier Wurzeln x', x'', x''', x'''' auf alle mögliche Arten versetzt. Auf diese Art läßt sich aus dem Grad und der Form dieser Werthe der Grad und die Natur der Gleichungen schließen, wodurch b und d bestimmt werden müssen. Es ist daher

1. Die Gleichung für b, eben die als die Gleichung für d, weil der Werth von d aus dem Werthe von b sich ergiebt, wenn man darin die beyden Wurzeln x''' und x'''' mit einander verwechselt, so daß die Werthe von b und d Wurzeln einer und derselben Gleichung seyn müssen.

2. Diese Gleichung ist überhaupt genommen eine Gleichung vom 4 . 3 . 2 . 1 d. h. vom 24sten Grade, weil man die vier Größen x', x'', x''', x'''' auf so viel Arten versetzen kann.

3. Hat dieselbe lauter Vielfache von 4 zu ihren Exponenten, indem leicht zu sehen ist, daß auch $-b$, $b\sqrt{-1}$, $-b\sqrt{-1}$ Wurzeln davon seyn müssen, wenn b dergleichen ist. Nimmt man nemlich wie vorhin

$$b = \frac{x' - x'' - (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

so fällt in die Augen, daß b in $-b$, wenn man x' in x'' und x''' in x'''', in $b\sqrt{-1}$, wenn man x' in x''' und x'' in x'''', und endlich in $-b\sqrt{-1}$ übergeht, wenn man x'

in

in x'''' und x'' in x''' verwandelt. Hiernach muß die Gleichung für b unverändert bleiben, wenn man $-b$ oder $\pm b\sqrt{-1}$ für b setzt, und dazu ist nöthig, daß dieselbe weder ungerade noch gerademal ungerade Dignitäten von b enthalte. Setzt man daher $b^4 = \nu$, so folgt, daß man eine reducirte Gleichung für ν vom sechsten Grade haben wird. Auch ist diese reducirte Gleichung für ν mit der für $-D$, $b = 1$ gesetzt, (Nr. 47.) einerley, weil der Werth von $-D$ mit dem Werthe von b^4 übereinstimmt.

Man könnte hier auf eine ähnliche Art, wie oben Nr. 42. beweisen, daß sich diese Gleichung für ν in drey Gleichungen vom zweyten Grade und zwar vermittelst einer reducirten Gleichung vom dritten Grade zerfällen lasse. Allein es giebt dazu noch einen einfachern Weg, nemlich folgenden.

Ich suche das Produkt von b und d, nemlich

$$bd = \frac{(x' - x'')^2 + (x''' - x'''')^2}{16}$$

Nun ist

$$(x' - x'')^2 + (x''' - x'''')^2 = x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x''''^2 -$$
$$2(x'x'' + x'''x'''') = m^2 - 2n - 2(x'x'' + x'''x'''')$$

und die Größe $x'x'' + x'''x''''$ ist offenbar mit der Größe u Nr. 30. einerley, welche, wie wir gesehen haben, von einer Gleichung des dritten Grades abhängt. Es muß demnach auch die Gleichung für bd eine cubische Gleichung seyn. Da ferner

$$bd = \frac{m^2 - 2n - 2u}{16}$$

ist, so findet man diese Gleichung für bd, wenn man in der Gleichung für u der angeführten Nr. $\dfrac{m^2 - 2n - 16bd}{16}$ für u setzt.

Nun seyen ϱ', ϱ'', ϱ''' die Wurzeln dieser Gleichung für bd, so hat man

$$\varrho' = \frac{m^2 - 2n}{16} - \frac{x'x'' + x'''x''''}{8} = bd$$

$$\varrho'' = \frac{m^2 - 2n}{16} - \frac{x'x''' + x''x''''}{8}$$

$$\varrho''' = \frac{m^2 - 2n}{16} - \frac{x'x'''' + x''x'''}{8}$$

Multiplicirt man nun die beyden Gleichungen der 48sten Nr.

$$x' - x'' = 2(b + d) \text{ und } x''' - x'''' = 2(b - d)\sqrt{-1}$$

mit einander, so findet man

$$x'x''' + x''x'''' - x''x''' - x'x'''' = 4(b^2 - d^2)\sqrt{-1}$$

folglich

$$4(b^2 - d^2)\sqrt{-1} = 8(\varrho''' - \varrho'')$$

und wenn man quadrirt

$$b^4 - 2b^2d^2 + d^4 = -4(\varrho''' - \varrho'')^2$$

Nun war aber $bd = \varrho'$, und es ist daher

$$b^4 + d^4 = 2\varrho'^2 - 4(\varrho''' - \varrho'')^2$$

und da $d = \frac{\varrho'}{b}$ ist

$$b^4 + \frac{\varrho'^4}{b^4} = 2\varrho'^2 - 4(\varrho''' - \varrho'')^2$$

folglich

$$b^8 - 2(\varrho'^2 - 2(\varrho''' - \varrho'')^2)b^4 + \varrho'^4 = 0$$

eine Gleichung vom achten Grade, welche sich, dem Resultate von Bezout gemäß, wie eine quadratische Gleichung behandeln läßt.

In Ansehung der reducirten Gleichung für b verdient bemerkt zu werden, daß, wenn $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ vorstellen

$$b = \frac{x' + \alpha x'''' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x'''}{4}$$

oder

oder, wenn man, wie denn dadurch nichts verändert wird, x'''' in x'', x'' in x''' und x''' in x'''' verwandelt,

$$b = \frac{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x''''}{4}$$

ist. Dieser Ausdruck ist dem ähnlich, welchen wir oben (Nr. 6 und 19) für die reducirte Gleichung des dritten Grades gefunden haben, und so erhellet die Aehnlichkeit der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche sich auf diese letzte Methode gründet, mit der Auflösung der cubischen Gleichungen.

49.

Nimmt man die Gleichungen Nr. 46.

$$x = a + by + cy^2 + dy^3$$
$$y^4 + D = 0$$

wieder zur Hand, und setzt $y^2 = z$, so bekommt man

$$x = (a + cz) + (b + dz)\sqrt{z}$$
$$z^2 + D = 0.$$

Befreyet man die erste von der Irrationalität, so wird sie

$$(x - a - cz)^2 - (b + dz)^2 z = 0$$

und diese Gleichung läßt sich mittelst $z^2 = -D$ auf diese Form bringen

$$x^2 + (f + gz)x + h + kz = 0.$$

Auf diese Art hat man die beyden Gleichungen

$$z^2 + D = 0$$
$$x^2 + (f + gz)x + h + kz = 0$$

welche durch die Elimination von z eine Gleichung des vierten Grades geben, welche sich mit der gegebenen

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

vergleichen läßt, so daß man vermittelst der Vergleichung der analogen Glieder vier von den Coefficienten f, g, h, k

 und

und D bestimmen, und den fünften nach Belieben annehmen kann.

Diese Methode läuft mit derjenigen auf eines hinaus, welche Bezout in seinem Memoire von 1762 über die Gleichungen gegen das Ende, und zum zweytenmale in dem Memoire von 1765 S. 548., als ein Beyspiel einer allgemeinen Methode geliefert hat, welche sich auf alle diejenigen Gleichungen erstreckt, deren Höhe durch einen Exponenten bemerkt wird, welcher eine zusammengesetzte Zahl ist. In der ersten dieser Abhandlungen setzet der Verfasser $g = -1$, und findet eine Endgleichung für k vom dritten Grade. In der zweyten setzet er $D = -1$ und kommt auf eine Endgleichung für g vom sechsten Grade mit geraden Exponenten, die sich folglich wie eine Gleichung vom dritten Grade auflösen lässet.

Um den Grund dieser Resultate einzusehen, darf man nur bemerken, daß man, da $z = \pm\sqrt{-D}$, folgende zwey Gleichungen haben wird

$$x^2 + (f + g\sqrt{-D})x + h + k\sqrt{-D} = 0$$
$$x^2 + (f - g\sqrt{-D})x + h - k\sqrt{-D} = 0$$

deren Produkt, die gegebene Gleichung seyn wird; so daß eine dieser Gleichungen zwey Wurzeln der gegebenen, und die andern die beyden übrigen Wurzeln derselben enthalten muß. Vermöge der Natur der Gleichungen, haben wir demnach

$$-f - g\sqrt{-D} = x' + x'', \quad h + k\sqrt{-D} = x'x''$$
$$-f + g\sqrt{-D} = x''' + x'''', \quad h - k\sqrt{-D} = x'''x''''$$

also

$$-2g\sqrt{-D} = x' + x'' - x''' - x''''$$
$$2k\sqrt{-D} = x'x'' - x'''x''''$$

Setzt

Setzt man nun $g = -1$, und substituiret den aus der ersten Gleichung abgeleiteten Werth von $\sqrt{-D}$, in der zweyten, so erhält man

$$k = \frac{x'x'' - x'''x''''}{x' + x'' - x''' - x''''}$$

und hieraus läßt sich schließen, daß die Gleichung für k bloß vom dritten Grade seyn wird; denn auf welche Art man auch die vier Wurzeln x', x'', x''', x'''', versetzen mag, so wird man doch nicht mehr als folgende drey verschiedene Werthe von k erhalten

$$\frac{x'x'' - x'''x''''}{x' + x'' - x''' - x''''}$$

$$\frac{x'x''' - x''x''''}{x' + x''' - x'' - x''''}$$

$$\frac{x'x'''' - x''x'''}{x' + x'''' - x'' - x'''}$$

vermittelst welcher Werthe man die Gleichung für k selbst, wenn man will, directe finden kann.

Setzet man $D = -1$, so erhält man

$$g = \frac{x'''' + x''' - x' - x''}{2}$$

so daß die Größe g, mit z Nr. 29. einerley seyn wird, und die Nr. 32. gezogenen Folgerungen, ihre Anwendung finden werden. Suchet man, bey dieser Voraussetzung $D = -1$, die Größe k, statt g, so findet man

$$k = \frac{x'x'' - x'''x''''}{2}$$

und die Gleichung für k wird vom sechsten Grade, mit geraden Exponenten seyn. Ihre Wurzeln sind

$$\frac{x'x'' - x'''x''''}{2}, \quad \frac{x'x''' - x''x''''}{2}, \quad \frac{x'x'''' - x''x'''}{2},$$

$$\frac{x''x''' - x'x''''}{2}, \quad \frac{x''x'''' - x'x'''}{2}, \quad \frac{x'''x'''' - x'x''}{2},$$

Uebrigens kann diese Gleichung für k, leicht aus der Gleichung für u Nr. 30. abgeleitet werden. Denn da

$$k = \frac{x'x'' - x'''x''''}{2} \text{ und } u = x'x'' + x'''x''''$$

(man erinnere sich, daß hier x', x'', x''', x'''' nichts anders als die unter der angeführten Nr. mit a, b, c, d bezeichneten Größen sind, nemlich die Wurzeln der gegebenen Gleichung); so ist

$$u^2 - 4k^2 = 4x'x''x'''x'''' = 4q$$

also

$$u = 2\sqrt{(q + k^2)}$$

Bringt man nun diesen Werth in die Gleichung für u, und schaffet alsdenn die Irrationalität weg, so wird man eine Gleichung vom sechsten Grade für k erhalten, deren sämtliche Exponenten Vielfache von 2 sind.

50.

Wir schließen hier unsere Untersuchung derer Methoden, welche die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade betreffen. Wir haben diese Methoden nicht nur unter einander verglichen, und ihren Zusammenhang und gegenseitiges Verhältniß gezeiget; sondern wir haben auch, was unsere Hauptabsicht war, den Grund a priori angegeben, warum dieselben zum Theil auf reducirte Gleichungen vom dritten Grade, zum Theil auf solche vom sechsten Grade, die sich aber auf den dritten bringen lassen, führen: und man wird bemerkt haben, daß dies überhaupt daher rühre, weil die Wurzeln dieser reducirten Gleichungen, Funktionen der Größen x', x'', x''', x'''' von solcher Beschaffenheit sind,

daß,

daß, wenn man diese vier Größen auf alle mögliche Arten verwechselt, jene Funktionen doch nicht mehr als drey verschiedene Werthe erhalten können, wie die Funktion $x'x'' + x'''x''''$; oder sechs Werthe, worunter aber immer zweye gleich sind, nur mit entgegengesetzten Zeichen, wie die Funktion $x' + x'' - x''' - x''''$: oder vielmehr sechs Werthe von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man sie in drey Paare theilet, und die Summe, oder das Produkt der Werthe von jedem Paare nimmt, diese drey Summen, oder drey Produkte immer die nemlichen bleiben, was man auch für Verwechselungen mit den Größen x', x'', x''', x'''' machen mag; wie bey der Funktion Nr. 42. Dies ist etwas Eigenthümliches dieser Funktionen, von welchen die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade abhängt.

---

7. Fortsetzung der Bemerkungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Vom

Herrn de la Grange.

Aus dem dritten Bande der neuen Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Dritter Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen von dem fünften, und von den höheren Graden.

Die Auflösung der Gleichungen, die von einem höhern als dem vierten Grade sind, gehöret unter die Aufgaben, mit welchen man noch nicht zum Ziele hat kommen können, obgleich kein Grund vorhanden ist, die Sache für unmöglich zu halten. Bis jetzt sind mir nur zwey Methoden bekannt, aus welchen man einige Hofnung eines glücklichen Erfolges schöpfen könnte. Die eine, von Tschirnhausen, welche er in den Leipziger Act. erud. v. J. 1683 bekannt gemacht: die andere, welche Euler und Bezout fast zu gleicher Zeit bekannt machten, der erstere in den neuen Petersburger Commentarien Tom. IX., der andere in den Memoiren der Akad. d. W. zu Paris, vom Jahr 1765. Diese Methoden gewähren den

Vor-

Vortheil einer allgemeinen und gleichförmigen Auflöſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade: ein Vorzug, der ihnen eigen iſt, und der uns folglich ein günſtiges Vorurtheil für ihre Anwendbarkeit auf die höhern Grade machen kann; allein die Rechnungen, welche ſie bey den Gleichungen vom fünften und höhern Grade erfordern, ſind ſo weitläuftig und verwickelt, daß der unerſchrockenſte Rechner dadurch abgeſchreckt werden kann. Z. B. um die Tſchirnhauſenſche Methode auf eine Gleichung vom fünften Grade anzuwenden, muß man vier Gleichungen auflöſen, welche vier unbekannte Größen enthalten, und wovon die erſte, vom erſten Grade, die zweyte, vom zweyten, u. ſ. w. iſt: ſo daß die letzte Gleichung zu welcher man durch die Wegſchaffung dreyer unbekannten Größen gelangt, überhaupt zu einem Grade ſteigen wird, deſſen Exponent 1.2.3.4, d. i. der 24ſte Grad ſeyn wird. Und nun, die unermeßliche Arbeit bey Seite geſetzt, die man nöthig haben würde, um zu dieſer Gleichung zu gelangen, ſo iſt klar, daß wenn man ſie gefunden hätte, doch nicht viel gewonnen ſeyn würde, wofern man ſie nicht auf einen niedrigern als den fünften Grad, zurückführen könnte; eine Arbeit, die, wenn ſie möglich ſeyn ſollte, nur die Frucht einer noch weit größern Arbeit als die erſte, ſeyn könnte.

Auch nach Eulers Methode kommt man unvermeidlich auf eine reducirte Gleichung vom 24ſten Grade: denn ob es gleich ſcheinen könnte, daß dieſe Methode blos auf eine reducirte Gleichung vom vierten Grade führen würde, weil ſie die Gleichungen des dritten Grades, auf den zweyten, und die des vierten, auf den dritten zurückführet: ſo bemerkt doch Bezout mit Grund, daß es bloß eine zufällige Abkürzung iſt, durch welche bey dem vierten Grade, Eulers

Rechnung auf den dritten gebracht wird, da man überhaupt zu dem Grad 2 . 3, d. i. zu dem 6ten Grad kommen müßte, und daß diese Abkürzung nur alsdenn statt finde, wenn der Exponent der Gleichung 4, eine zusammengesetzte Zahl ist. Wir haben in dem vorigen Abschnitte, den Grund hiervon a priori gezeigt, und zugleich erwiesen, daß Euler unvermeidlich auf eine Gleichung von dem 6sten Grade gekommen seyn würde, wenn er eine der unbekannten Größen, die in seinen Formeln vorkommen, durch Eliminirung der andern gesucht hätte. Bey einiger Aufmerksamkeit zeigt sich also, daß man bey Gleichungen vom fünften Grade, nach Eulers Methode, auf keine niedrigere reducirte Gleichung, als vom 24sten Grade kommen kann; und läßt überhaupt diese Gleichung eine Reductiou zu, so wird man diese nicht anders, als durch eine große Anzahl von Versuchen, und durch so mühsame Rechnungen, als man sich nur denken kann, zu Stande bringen können.

Eben diese Unbequemlichkeiten müssen auch bey der Methode des Hrn. Bezout statt finden, die von der Eulerschen nicht verschieden ist. Ja sie führt scheinbar zu noch höhern reducirten Gleichungen, deren Exponenten aber sämtlich Vielfache von dem Exponenten sind, der die Höhe der gegebenen Gleichung angiebt. So kommt man nach Bezouts Methode bey dem fünften Grade, auf eine reducirte Gleichung vom 120sten Grade, deren sämtliche Exponenten Vielfache von 5 sind, so daß sie im Grunde so gut als eine Gleichung vom 24sten Grade ist.

Dieser gelehrte Schriftsteller glaubt indessen, daß diese Gleichung vom 120sten Grad, als eine vom 24sten betrachtet, keine größern Schwierigkeiten verursachen dürfte, als

solche,

solche, die niedriger als vom fünften Grade sind. Seine Gründe sind folgende: 1) der Ausdruck für die Wurzeln einer Gleichung vom fünften Grade, kann keine andere Wurzelzeichen, als von der fünften, und von den niedrigern Ordnungen enthalten: 2) folglich können die Wurzeln unserer reducirten Gleichung von diesem Grade, auch keine andere Wurzelzeichen enthalten, d. i. Wurzeln der fünften, vierten Ordnung u. s. f. 3) Da die Wurzeln der reducirten Gleichung vom 120sten Grad, die fünften Wurzeln der Wurzeln einer Gleichung vom 24sten Grad seyn müssen, so sind eben dadurch die Wurzelzeichen der fünften Ordnung, die der Wurzelausdruck der Gleichung einschließt, schon entwickelt, so daß die Wurzeln der Gleichung vom 24sten Grad, nur noch die niedrigern Wurzelzeichen enthalten können, und ihre Auflösung sich also auf Gleichungen reduciren muß, die unter dem fünften Grade sind. Darf ich die Wahrheit gestehen, so scheint mir diese Schlußfolge ein wenig erzwungen zu seyn: denn ich gestehe, daß ich den Grund nicht deutlich einsehe, aus welchem die Gleichung vom 24sten Grade, von welcher die Rede ist, auf keine Wurzelzeichen der fünften Ordnung führen könne: wenigstens ist die unbedingte Unmöglichkeit nicht erwiesen: daher könnte es wohl möglich seyn, daß diese Gleichung vom 24sten Grade, alle Schwierigkeiten der aufzulösenden Gleichung vom fünften Grade mit sich führte, und so dürfte man vielleicht nach allen den verdrüßlichen Rechnungen, durch welche man zu jener Gleichung gelangt, von der Auflösung der gegebenen Gleichung weiter als anfänglich entfernt seyn.

Aus diesen Betrachtungen erhellet, daß es äußerst zweifelhaft sey, ob die Methoden, von welchen wir geredet haben, zu einer vollständigen Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, und noch vielmehr der höheren Grade führen

ren können. Und diese Ungewißheit, verbunden mit der Weitläuftigkeit der Rechnungen welche diese Methoden erfordern, muß alle diejenigen abschrecken, welche in Versuchung kommen könnten von denselben zur Auflösung eines berühmten und wichtigen Problems der Algeber, Gebrauch zu machen. Auch sehen wir, daß selbst die Erfinder dieser Methoden sich begnüget haben, sie auf Gleichungen vom dritten und vierten Grade anzuwenden, niemand aber die Anwendung weiter zu treiben gewagt hat.

Es wäre daher sehr zu wünschen, daß man a priori über den Erfolg urtheilen könnte, den man sich bey Anwendung dieser Methoden auf Gleichungen von höhern als dem vierten Grade versprechen dürfte. Wir wollen daher versuchen, die Mittel hierzu anzugeben, durch eine Analyse, welche der ähnlich ist, deren wir uns bisher in Absicht der bekannten Methoden zur Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade, bedient haben.

51.

Wir wollen also überhaupt eine Gleichung vom μten Grade betrachten:

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (a)$$

nach der Tschirnhausenschen Methode nehmen wir hierzu folgende Hülfsgleichung

$$x^{\varrho} + fx^{\varrho-1} + gx^{\varrho-2} + \text{ꝛc.} + y = 0 \ldots (b)$$

welche ϱ unbestimmte Größen f, g, ꝛc. und eine neue unbekannte y, enthält. Aus diesen beyden Gleichungen eliminiret man x, und erhält dadurch eine umgeformte Gleichung für y, welche mit der gegebenen von gleicher Höhe μ seyn, und folgende Form haben wird

$$y^{\mu} + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (c)$$

In

In dieser Gleichung werden die Coefficienten A, B, C, rc. rationale und ganze Funktionen, der unbestimmten Coefficienten f, g, rc. seyn, und namentlich wird A eine Funktion von einer Dimension, B von zweyen u. s. w. seyn. (Art. 14.)

Da aber ϱ unbestimmte Größen vorhanden sind, so erhält man ein Mittel es dahin zu bringen, daß in der umgeformten Gleichung für y, ϱ Glieder, welche man will verschwinden, oder vielmehr solche Verhältnisse gegen einander bekommen, als man für gut findet, deren Bestimmung von ϱ Gleichungen abhängt. Hierdurch kann man die Gleichung für y auflösbar machen, oder es wenigstens dahin bringen, daß sie sich auf einen niedrigern Grad bringen lässet. Die Auflösung der Gleichung für y giebt uns aber zugleich die Auflösung der gegebenen Gleichung für x: denn wir haben oben (Nr. 11.) erwiesen, daß die Gleichung für y, die Bedingungen enthält, vermöge deren die beyden Gleichungen, aus welchen man x eliminiret hat, nothwendig eine gemeinschaftliche Wurzel enthalten, so daß der Werth von x nur diese gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen (a) und (b) seyn kann: diesen findet man also, wenn man den größten gemeinschaftlichen Divisor beyder Gleichungen suchet, und denselben = 0 setzet.

Diese Arbeit verrichtet man auf die gewöhnliche Weise, und setzt sie so lange fort, bis man auf einen Rest kommt, in welchen x bloß in der ersten Dimension vorkommt; dieser Rest wird der gesuchte Divisor seyn: oder vielmehr, was mit dem vorigen auf eines hinausläuft, man eliminiret nach und nach aus beyden obigen Gleichungen die Potestäten von x, bis man auf eine Gleichung kommt, die blos die erste Potenz von x enthält; und es ist leicht zu beweisen, daß diese Gleichung von folgender Form seyn wird,

$$F + Gy + Hy^2 + \text{ꝛc.} + Ky^\lambda$$
$$+ (L + My + Ny^2 + \text{ꝛc.} + Ry^\lambda)x = 0$$

Daher wird

$$x = -\frac{F + Gy + Hy^2 + \text{ꝛc.} + Ky^\lambda}{L + My + Ny^2 + \text{ꝛc.} + Ry^\lambda} \ldots (d)$$

in welchen Ausdrücken $\lambda = \frac{\mu}{2}$, wenn μ gerade, und $\lambda = \frac{\mu - 1}{2}$, wenn μ ungerade ist.

Auf diese Art erhält man also x durch eine rationale Funktion von y ausgedruckt; so daß, wenn alle μ Werthe von y bekannt sind, ihre successive Substitution, alle zugehörigen Werthe von x geben wird. Und diese sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

52.

Diese Methode ist, wie man siehet, höchst einfach und allgemein; allein die Schwierigkeit liegt darin, die unbestimmten Größen f, g, h, ꝛc. so zu bestimmen, daß die umgeformte Gleichung für y auflösbar werde.

Die natürlichste und zugleich allgemeinste Voraussetzung die man zu diesem Endzweck machen könnte, würde darin bestehn, alle Coefficienten A, B, C, ꝛc. bis zum vorletzten Glied $= 0$ zu setzen, so daß die umgeformte Gleichung für y die Form $y^\mu + V = 0$ erhielte. Dann würde man jederzeit unmittelbar eine oder zwey Wurzeln dieser Gleichung haben, je nachdem μ ungerade oder gerade wäre, und die übrigen würden blos von solchen Gleichungen abhängen, die von den Graden $\frac{\mu - 1}{2}$ oder $\frac{\mu - 2}{2}$ seyn würden (Nr. 21.); ja durch die Division der Cirkelperipherie könnte man auch alle Wurzeln unmittelbar erhalten (Nr. 23.)

Für diesen Fall wird man also $\varrho = \mu - 1$ nehmen müssen, um so viele unbestimmte Größen zu bekommen, als man braucht, um die nöthigen Gleichungen vollzählig zu machen, und im Allgemeinen wird man zuletzt auf eine Endgleichung von dem Grade $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ kommen, wie Nr. 14. erwiesen worden.

Der Exponent μ sey eine zusammengesetzte Zahl, so daß $\mu = \nu\pi$. Setzt man nun $y^\pi = z$, und läßt alle diejenigen Glieder der Gleichung für y verschwinden, deren Exponent durch π nicht theilbar ist, so ist offenbar, daß es möglich seyn wird, diese Gleichung in eine für z, von dem niedrigern Grade ν zu verwandeln. Für diesen Fall wird man $\nu(\pi - 1)$ Glieder müssen verschwinden lassen, und daher muß man $\varrho = \nu(\pi - 1)$ setzen, um eben so viele unbestimmte Größen zu erhalten. Und aus dem was Nr. 14. erwiesen worden, läßt sich leicht schließen, daß die letzte Gleichung, auf welche man in diesem Falle kommen wird, von einem Grade seyn werde, der durch die Zahl

$$1.2.3\ldots(\pi-1)(\pi+1)(\pi+2)\ldots(2\pi-1)(2\pi+1)(2\pi+2)\ldots(\nu\pi-1)$$

vorgestellet wird, d. h. sie wird seyn von dem Grad

$$\frac{1 . 2 . 3 . 4 \ldots (\mu - 1)}{\pi . 2\pi . 3\pi \ldots (\nu - 1)\pi}$$

oder vielmehr von dem Grad

$$\frac{\nu(\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\mu - 1)}{\pi^{\nu - 1}}$$

Dies sind nun im Allgemeinen die Grade, auf welche die reducirten Gleichungen steigen können, welche man bey der Tschirnhausenschen Methode auflösen muß. Es kann aber treffen, daß diese reducirten Gleichungen so beschaffen sind, daß sie sich auf niedrigere Grade bringen lassen. Es wird aber so gut als unmöglich seyn, dies a posteriori d. i. aus der Form dieser reducirten Gleichungen selbst, zu beurtheilen; allein a priori kann man sich davon versichern, wenn man ihre Wurzeln betrachtet, und sie als Funktionen der Wurzeln der gegebenen, und der umgeformten Gleichung für y, ansiehet; so wie dies aus dem folgenden erhellen wird.

53.

Wir wollen allgemein die μ Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \text{ꝛc.} = 0$$

durch x', x'', x''', x'''', ꝛc. vorstellen, und eben so die μ Wurzeln der umgeformten Gleichung

$$y^{\mu} + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + \text{ꝛc.} + V = 0$$

durch y', y'', y''', y'''', ꝛc. Substituirt man nach und nach diese Werthe in der Hülfsgleichung

$$x^{\varrho} + fx^{\varrho-1} + gx^{\varrho-2} + hx^{\varrho-3} + \text{ꝛc.} + l + y = 0$$

so erhält man μ partikuläre Gleichungen, durch welche man die unbestimmten Coefficienten f, g, h, ꝛc. bestimmen kann; und da jede der Wurzeln y', y'', y''', ꝛc. gleichförmig mit jeder der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. zusammengestellt werden kann; so folgt, daß die unbekannten f, g, h, ꝛc. verschiedene Werthe werden erhalten können, die man sämtlich finden wird, wenn man die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. mit den Wurzeln y', y'', y''', ꝛc. auf alle mögliche Arten combiniret. Dies hängt von der Anzahl und Form dieser verschiedenen Werthe einer und derselben unbekannten Größe ab; und läßt sich nach dem Grade und der Natur der Gleichung, durch welche dieselbe bestimmt werden soll, beurtheilen.

54.

Wir wollen nunmehr annehmen, daß alle Mittelglieder der umgeformten Gleichung für y verschwinden sollen, so daß sie sich auf die Form $y^\mu + V = 0$ reducire. Zu diesem Ende wird man in der Hülfsgleichung $\varrho = \mu - 1$ setzen müssen, um $\mu - 1$ unbestimmte Größen zu erhalten (Nr. 52.) Setzen wir nun zur Abkürzung $u = \sqrt[\mu]{-V}$, und bezeichnen die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$ durch $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, ꝛc. $\alpha^{\mu-1}$ (Nr. 24.); so giebt die Gleichung $y^\mu + V = 0$ die Wurzeln $u, \alpha u, \alpha^2 u, \alpha^3 u$, ꝛc. $\alpha^{\mu-1} u$. Wenn man nun diese Wurzeln für y', y'', y''', ꝛc. setzt, und sie, so wie auch die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. in der Hülfsgleichung substituiret, so erhält man μ Gleichungen

$$(e)\begin{cases} x'^{\mu-1} + fx'^{\mu-2} + gx'^{\mu-3} + \text{ꝛc.} + l + u = 0, \\ x''^{\mu-1} + fx''^{\mu-2} + gx''^{\mu-3} + \text{ꝛc.} + l + \alpha u = 0, \\ x'''^{\mu-1} + fx'''^{\mu-2} + gx'''^{\mu-3} + \text{ꝛc.} + l + \alpha^2 u = 0, \\ \text{ꝛc.} \end{cases}$$

durch welche man sowohl die Größe u als die $\mu - 1$ unbestimmten Größen f, g, ꝛc. l wird bestimmen können.

Da diese unbekannten Größen in den obigen Gleichungen blos in dem ersten Grade vorhanden sind, so ist klar, daß das ganze System aller dieser Gleichungen, für jede dieser unbekannten Größen nicht mehr als einen bestimmten Werth geben wird. Nun nehmen wir an, man habe vermittelst der gewöhnlichen Eliminationsmethode, den Werth einer dieser unbekannten Größen f gefunden (man wird aber die nemlichen Schlüsse für jede der übrigen unbestimmten Größen g, h, ꝛc. l machen können), so ist augenscheinlich, daß dieser

Werth, durch eine Funktion der μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. und der Wurzel α ausgedruckt seyn wird. Nimmt man nun in diesem Ausdrucke, mit den μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. alle mögliche Versetzungen vor, so wird man alle partikulären Werthe von f erhalten, und diese müssen die Wurzeln der Gleichung für f seyn.

Da nun die Anzahl der Versetzungen, welche unter μ Dingen, statt finden, überhaupt durch $1 . 2 . 3 \ldots \mu$ ausgedruckt wird, so folgt, daß man überhaupt $1 . 2 . 3 \ldots \mu$ partikuläre Werthe von f erhalten wird. Sollten sich aber unter denselben gleiche Werthe finden, so ist klar, daß man sie auf eine viel geringere Anzahl wird bringen können, wenn man die gleichen Werthe nicht unterscheidet. Wir werden aber zeigen daß es in der That nicht mehr, als $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ verschiedene Werthe von f giebt.

55.

Zu dieser Absicht ist nicht nöthig den Ausdruck für f vermittelst der Gleichungen (e) wirklich zu suchen; es ist schon hinlänglich, die Veränderungen zu untersuchen, deren dies System von Gleichungen empfänglich ist, indem man die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. unter einander verwechselt. Um diese Veränderungen zu entdecken, fange man mit der Voraussetzung an, daß x' seine Stelle behalte, d. h. daß die erste Gleichung ungeändert bleibe; die übrigen $\mu - 1$ Wurzeln x'', x''', x'''', ꝛc. aber versetze man nach und nach in den übrigen Gleichungen: auf diese Art wird man $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ Veränderungen erhalten. Weiter setze man x'' an die Stelle von x' und umgekehrt, oder welches auf eins hinausläuft, man setze in der ersten Gleichung αu für u, und in der zweyten u für αu, so wird man nun die nemlichen Versetzunſetzungen mit den $\mu - 1$ Wurzeln x'', x''', x'''', ꝛc. machen können; und dies giebt wieder $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ neue Veränderungen u. ſ. f. Auf dieſe Art wird man μmal $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ Veränderungen erhalten, ſo daß die Totalſumme $1 . 2 . 3 \ldots \mu$ aller möglichen Veränderungen des Syſtems der Gleichungen (e) herauskommt.

Ich bemerke hiernächſt, daß, ſobald man die $1.2.3 \ldots (\mu - 1)$ Veränderungen, welche ſtatt finden, indem x ſeine Stelle behält, gefunden hat, man alle übrigen Veränderungen daraus ableiten kann, indem man nichts weiter thut, als ſucceſſiv in allen Gleichungen (e), für u, die Größen αu, $\alpha^2 u$, $\alpha^3 u$, ꝛc. $\alpha^{\mu - 1} u$, ſetzet; bey einiger Aufmerkſamkeit wird man ſich hiervon leicht überzeugen können, wenn man bemerkt, daß $\alpha^\mu = 1$; $\alpha^{\mu + 1} = \alpha$; $\alpha^{\mu + 2} = \alpha^2$; ꝛc.

Es iſt aber augenſcheinlich, daß alle dieſe Subſtitutionen von αu, $\alpha^2 u$, ꝛc. für u, in dem Werthe von f keine Veränderung machen können; denn ſobald u eliminiret iſt, ſo iſt es gleichgültig, was für einen Werth man dieſer Größe giebt, und die Reſultate der Elimination ſind nothwendiger Weiſe unabhängig von dem Werthe welchen u hat.

Eigentlich erhalten wir folglich nicht mehr als dieſe $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$, aus der Verſetzung der $\mu - 1$ Wurzeln x'', x''', ꝛc. entſpringende Veränderungen, welche verſchiedene Werthe von f geben können: ſo daß die Gleichung für f, nicht höher als zu dem $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ſten Grade ſteigen darf; und dies ſtimmt mit dem was oben (Nr. 52.) geſagt worden, überein.

Wir wollen ferner ſehen, ob nicht dieſe Gleichung noch einer Reduction fähig ſeyn ſollte. Wir müſſen hierbey die

Fälle unterscheiden, wo μ in der gegebenen Gleichung, eine einfache, oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

56.

Wir wollen annehmen, daß μ irgend eine Primzahl sey. In dem Systeme der Gleichungen (e) wollen wir die erste bey Seite setzen, weil man x' als eine festgestellte Größe ansehen kann; wir untersuchen also nur was für Veränderungen in diesem Systeme entstehen, indem man die übrigen Wurzeln x'', x''' ꝛc. versetzet.

Man verfahre hierbey auf ähnliche Art, als unter der vorigen Nr. Man sehe nemlich zuerst x'' als festgestellt an, und suche die Veränderungen, welche aus den $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Versetzungen der $\mu-2$ übrigen Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entspringen; man setze nun x'' an die Stelle von x''' und umgekehrt, welches eben so viel ist als wenn man $\alpha^2 u$ für αu in der zweyten Gleichung, und αu für $\alpha^2 u$ in der dritten Gleichung schreibt; und suche wiederum die $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Veränderungen, welche aus der Versetzung der übrigen Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entspringen. Dann setze man x' an die Stelle von x'''' und umgekehrt, oder, welches wieder einerley ist, man schreibe $\alpha^3 u$ für αu in der zweyten, und αu für $\alpha^3 u$ in der vierten Gleichung, und suche nun wieder wie vorher die $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Veränderungen, welche aus Versetzung der $\mu-2$ Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entspringen u. s. f. Durch dieses Verfahren erhält man $\mu-1$mal, $1.2.3\ldots\mu-2$ Veränderungen, welches die Totalsumme $1.2.3\ldots\mu-1$ der gesuchten Veränderungen giebt.

Ich behaupte aber, daß, so bald man die $1.2.3\ldots\mu-2$ Veränderungen, welche herauskommen, indem x'' seine

Stelle

Stelle behält, die übrigen Wurzeln x'', x'''', ꝛc. aber versetzt werden, gefunden hat, daß man, ſage ich, hieraus unmittelbar alle Veränderungen, die aus der Verwechſelung der $\mu - 1$ Wurzeln x'', x''', x'''', ꝛc. entſpringen, finden kann, indem man ſucceſſiv α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\mu - 1}$ für α, in allen Gleichungen (e) ſchreibt; denn auf dieſe Weiſe verwandelt ſich das Glied αu der zweyten Gleichung nach und nach in $\alpha^2 u$, $\alpha^3 u$, ꝛc.; und die Glieder $\alpha^2 u$, $\alpha^3 u$, ꝛc. der übrigen Gleichungen werden ſich unter einander verwechſeln, da μ eine Primzahl iſt (man vergleiche was Nr. 24. bewieſen worden), und dieſe Verwechſelungen laufen offenbar mit den Verwechſelungen der Wurzeln x''', x'''', ꝛc. auf eines hinaus.

Wenn man demnach vermittelſt der Gleichungen (e), f durch x', x'', x''', ꝛc. und α ausgedruckt hat, und man will die $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 1$ Werthe von f erhalten, die aus der gegenſeitigen Verwechſelung der Wurzeln x'', x''', x'''' ꝛc. entſpringen, und welche die Wurzeln der Gleichung für f ſeyn werden, die zu dem $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 1$ſten Grade (man ſehe die vorige Nr.) ſteigen wird: ſo wird es hinreichend ſeyn, blos die $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 2$ Werthe von f zu ſuchen, welche aus der gegenſeitigen Verwechſelung der Wurzeln x'', x''', x'''', ꝛc. entſpringen, und in demſelben hierauf α nach und nach in α^2, α^3, α^4, ꝛc. $\alpha^{\mu - 1}$ zu verwandeln: oder vielmehr, was auf eins hinausläuft, man kann gleich anfänglich in dem Ausdruck für f, α in α^2, α^3, α^4, ꝛc. $\alpha^{\mu - 1}$ verwandeln, und dann mit jedem dieſer $\mu - 1$ Werthe von f, die $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 2$ Veränderungen vornehmen, welche unter den $\mu - 2$ Wurzeln x'', x''', ꝛc. ſtatt finden: auf dieſe Art wird man die $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 1$ Wurzeln der Gleichung für f erhalten.

57.

Wir wollen uns nunmehr vorstellen, daß die $\mu - 1$ Werthe von f, welche man durch die successive Substitution von α^2, α^3, 2c. $\alpha^{\mu - 1}$ für α erhält, die Wurzeln folgender Gleichung vom $(\mu - 1)$sten Grade seyn

$$f^{\mu-1} + Ff^{\mu-2} + Gf^{\mu-3} + \text{2c.} = 0 \ldots (f)$$

und da $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, 2c. die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$ sind (nach der Voraussetzung); so ist klar, daß $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$, 2c. die $\mu - 1$ Wurzeln der Gleichung $\frac{y^\mu - 1}{y - 1} = 0$, d. i.

$$y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \text{2c.} + 1 = 0 \ldots (g)$$

seyn werden.

Setzt man nun in dem aus den Gleichungen (e) abgeleiteten Ausdruck für f überhaupt y an die Stelle von α, und eliminiret man alsdenn y vermittelst der Gleichung (g), so erhält man nothwendig die Gleichung (f); woraus man siehet, daß diese Gleichung kein α mehr enthalten wird, so daß die Coefficienten F, G, 2c. blos Funktionen von x', x'', x''', 2c. seyn werden.

Hat man aber die Gleichung (f) gefunden, so hat man nichts zu thun, als in den Coefficienten F, G, 2c. alle mögliche Versetzungen unter den $\mu - 2$ Wurzeln x'', x''', 2c. zu machen; so erhält man $1.2.3 \ldots \mu - 2$ Gleichungen für f, von denen jede vom $\mu - 1$ Grade seyn wird, und diese werden folglich die $1.2.3 \ldots \mu - 1$ Wurzeln der allgemeinen Gleichung für f enthalten.

Hieraus aber läßt sich leicht der Schluß machen, daß jeder der Coefficienten F, G, 2c. nur von einer Gleichung von dem

dem ($\mu-2$)ten Grade abhängen kann. Und in der That, da diese Coefficienten Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. sind, so ist klar, daß jeder von ihnen z. B. F, durch eine Gleichung bestimmt werden muß, welche so viele Wurzeln hat, als dieser Coefficient verschiedene Werthe erhält, wenn man alle mögliche Versetzungen mit den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. vornimmt: wir haben aber weiter oben (Nr. 55.) gezeigt, daß die Vertauschung der Wurzel x' mit jeder andern, den Werth von f nicht ändert, daher werden diese Vertauschungen eben so wenig die Werthe von F, G ꝛc. ändern, welche Funktionen der Wurzeln von f sind: überdem haben wir gesehen (Nr. 56.), daß man anstatt die Wurzel x'' zu vertauschen, die Wurzel α, in α^2, α^3, ꝛc. verwandeln kann; so daß die Werthe von F, G, ꝛc., weil sie von α unabhängig sind, durch die Vertauschung von x'' keine Veränderung leiden werden. Es bleiben also blos die gegenseitigen Versetzungen der $\mu-2$ Wurzeln x''', x'''', ꝛc. übrig, welche verschiedene Werthe von F, desgleichen von G, H, ꝛc. geben werden. Folglich wird die Anzahl dieser verschiedenen Werthe blos $1.2.3\ldots\mu-2$ seyn; und jeder Coefficient F, G, H, ꝛc. wird demnach durch eine Gleichung von eben diesem Grade gegeben werden.

58.

Die reducirte Gleichung für f, auf welche die Tschirnhausensche Methode führet, und welche, wie wir gesehen haben, im Allgemeinen von dem Grade $1.2.3\ldots\mu-1$ seyn muß, wird sich demnach jederzeit, wenn μ eine Primzahl ist, in $1.2.3\ldots\mu-2$ Gleichungen vom $\mu-1$sten Grade, von solcher Art, wie die obige Gleichung (f) war, zerfällen lassen, und dies vermittelst einer Gleichung vom $1.2.3\ldots\mu-2$ten Grade; denn obgleich jeder der Coefficienten F, G, ꝛc. von einer Gleichung von diesem letzten Grade abhängt, so wird es doch hinreichend seyn, nur eine Gleichung für F, oder für G ꝛc. zu haben; denn die übrigen Coefficienten werden sich jederzeit durch rationale Funktionen von diesem ausdrucken lassen.

Betrachtet man wirklich die Gleichung (f) vom $\mu - 1$sten Grade, als einen Divisor der reducirten Gleichung für f, vom $1.2.3 \ldots \mu - 1$sten Grade, so wird man hierzu $\mu - 1$ Bedingungen finden, durch welche im Allgemeinen die $\mu - 2$ Coefficienten G, H, ꝛc. für F ohne eine Wurzelausziehung bestimmt werden können, und wenn man diese Werthe nach der Reihe in einer der Bedingungsgleichungen substituiret, so wird man die Gleichung für F selbst erhalten, welche den $1.2.3 \ldots \mu - 2$ten Grad nicht übersteigen kann. Ich sage daß man im Allgemeinen die Werthe von G, H, ꝛc. für F ohne Wurzelausziehung bestimmen kann; dies ist richtig, wenn man F keinen partikulären Werth giebt; will man aber statt F die Wurzeln der Gleichung für F substituiren, um die ihnen entsprechenden Werthe von G, H, ꝛc. zu erhalten, und es trift sich, daß die substituirte Wurzel doppelt oder dreyfach ꝛc. ist, so werden die Ausdrücke von G, H, ꝛc. nicht rational ausfallen, und diese Größen werden noch von der Auflösung einer Gleichung vom zweyten, oder dritten ꝛc. Grad abhängen: wie wir dieses weiter unten (Nr. 102.) zeigen werden.

Man kann übrigens die Gleichung für F unmittelbar finden, wenn man ihre Wurzeln als Funktionen von x', x'', x''', ꝛc. ansiehet; in den vorigen Abschnitten finden sich mehrere Beyspiele dieser Methode. Und sieht man diese Gleichung für F als bekannt an, so kann man vermittelst derselben die

Werthe

Werthe von G, H, ꝛc. directe beſtimmen, wie wir im vierten Abſchnitte Nr. 100. finden werden.

Es iſt nunmehr augenſcheinlich, daß die Gleichung für F jederzeit von einem höheren Grade ſeyn wird, als die gegebene Gleichung; blos den Fall $\mu = 3$ ausgenommen: denn nimmt man $\mu = 3$, ſo wird $1.2.3 \ldots \mu - 2 = 1$; iſt $\mu = 5$, ſo wird $1.2.3 \ldots \mu - 2 = 1.2.3 = 6$; iſt $\mu = 7$, ſo wird $1.2.3 \ldots \mu - 2 = 1.2.3.4.5 = 120$ u. ſ. f. Wofern ſich alſo dieſe Gleichung nicht auf einen noch niedrigern Grad bringen läſſet, ſo iſt die Tſchirnhauſenſche Auflöſung von keinem Gebrauche: dies ſcheint mir aber im Allgemeinen faſt unmöglich. Zwar iſt es richtig, daß, obgleich der $1.2.3 \ldots \mu - 2$te Grad der Gleichung, von der wir reden, höher iſt, als der Grad μ der gegebenen Gleichung, doch dieſe Gleichung keine größern Schwierigkeiten verurſachet, als die vom Grade μ; denn da die $1.2.3 \ldots \mu - 2$ Wurzeln derſelben, bekannte Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. ſind, ſo iſt klar, daß dieſelben nicht unabhängig von einander ſind, ſondern daß unter ihnen Verhältniſſe ſtatt finden werden, die durch gewiſſe Gleichungen ausgedruckt werden, deren Anzahl der Differenz der Exponenten $1.2.3 \ldots \mu - 2$ und μ gleich ſeyn wird; ſo daß, wenn μ Wurzeln bekannt wären, man vermittelſt derſelben auch die übrigen erhalten würde.

Daraus folgt, daß die Gleichung für F im Grunde nicht größere Schwierigkeiten als die des μten Grades verurſachen kann; aber aus eben dem Grunde erhellet, daß ſie auch jederzeit alle Schwierigkeiten dieſes Grades wirklich haben wird; ſo daß man ſich in die nemlichen Schwierigkeiten verwickelt findet, denen die allgemeine Auflöſung der gegebenen Gleichung unterworfen iſt.

59. Wir

59.

Wir wollen nunmehr annehmen, daß der Exponent μ in der gegebenen Gleichung eine zusammengesetzte Zahl sey. In diesem Falle leiden die Schlüsse Nr. 56 einige Abänderung. Denn wenn man in den Gliedern der geometrischen Reihe $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$, 2c. $\alpha^{\mu-1}$ ohne Unterschied für α, die Potenzen α^2, α^3, 2c. $\alpha^{\mu-1}$ setzen wollte, so würde man nicht in jedem Falle dieselben Glieder wieder finden, wie in dem Falle, wenn μ eine Primzahl ist; den Grund hiervon haben wir unter Nr. 24. gezeigt; auch haben wir dort gezeiget, daß blos durch die Substitution solcher Potenzen von α, deren Exponent eine relative Primzahl gegen μ ist, dieselben Glieder wieder hervorgebracht werden können; so daß man dasjenige, was Nr. 56. gezeigt worden, blos auf dergleichen Potenzen von α einschränken muß.

Wenn wir demnach überhaupt durch ν, π, ϱ, 2c. alle Zahlen anzeigen, welche kleiner als μ, und gegen μ relative Primzahlen sind, deren Anzahl wir $\lambda - 1$ setzen wollen, so wird man sich der Substitutionen von $\alpha^\nu, \alpha^\pi, \alpha^\varrho$ für α, in dem Ausdrucke für f, anstatt der Vertauschung der Wurzel x'', mit $x^{\nu+1}$, $x^{\pi+1}$, $x^{\varrho+1}$, 2c. bedienen können: nimmt man demnach an, daß die λ Werthe von f, welche aus der Substitution von $\alpha^\nu, \alpha^\pi, \alpha^\varrho$, 2c. für α entspringen, die Wurzeln folgender Gleichung seyn

$$f^\lambda + Ff^{\lambda-1} + Gf^{\lambda-2} + \text{2c.} = 0 \;.\;.\;.\; (h)$$

so wird diese Gleichung ein Divisor der reducirten Gleichung für f seyn, und die Coefficienten derselben F, G, 2c. werden jeder durch eine Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3\ldots\mu-1}{\lambda}$

gegeben

gegeben werden; so daß in diesem Falle, die nach der Tschirnhausenschen Methode gefundene reducirte Gleichung für f, in $\frac{1.2.3\ldots\mu-1}{\lambda}$ Gleichungen, jede vom Grade λ, auflösbar seyn wird, und dies mittelst einer Gleichung vom Grade $\frac{1.2.3\ldots\mu-1}{\lambda}$.

Um die Gleichung (h) a priori zu finden ist nichts nöthig, als in dem Ausdrucke für f, y anstatt α zu setzen, und hierauf y durch Hülfe derjenigen Gleichung zu eliminiren, deren Wurzeln α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, rc. sind. Wie diese Gleichung zu finden sey, soll das Folgende lehren.

60.

Wir wollen also überhaupt die Gleichung $y^{\mu}-1=0$ betrachten, deren Wurzeln $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, rc. $\alpha^{\mu-1}$ sind. Nehmen wir nun an, daß die Zahl μ in die einfachen Faktoren r, s, t, rc. zerfället sey, von denen jeder in der Zahl μ einmal oder öfter enthalten sey; so ist leicht einzusehen, daß diejenigen Potestäten von α, welche man ausschließen muß, um blos die Potestäten α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, rc. deren Exponenten relative Primzahlen gegen μ sind, übrig zu behalten, es wird sage ich, leicht seyn einzusehen, daß dies diejenigen Potestäten seyn müssen, deren Exponenten Vielfache von r, s, t, rc. sind; überdem ist vermöge dessen was Nr. 24. erwiesen worden, klar, daß eben diese Potestäten von α, die Wurzeln folgender Gleichungen seyn werden

$$y^{\frac{\mu}{r}}-1=0;\ y^{\frac{\mu}{s}}-1=0;\ y^{\frac{\mu}{t}}-1=0 \text{ rc.}$$

Setzt

Setzt man nun zur Abkürzung $\frac{\mu}{r} = \mu'$; $\frac{\mu}{s} = \mu''$; $\frac{\mu}{t} = \mu'''$ rc. und dividiret man successiv die Gleichung $y^\mu - 1 = 0$ durch die Gleichungen $y^{\mu'} - 1 = 0$, $y^{\mu''} - 1 = 0$, $y^{\mu'''} - 1 = 0$, rc. so erhält man folgende Gleichungen

$$y^{\mu - \mu'} + y^{\mu - 2\mu'} + y^{\mu - 3\mu'} + \text{rc.} + 1 = 0,$$
$$y^{\mu - \mu''} + y^{\mu - 2\mu''} + y^{\mu - 3\mu''} + \text{rc.} + 1 = 0,$$
$$y^{\mu - \mu'''} + y^{\mu - 2\mu''} + y^{\mu - 3\mu'''} + \text{rc.} + 1 = 0,$$
rc.

Die Wurzeln der ersten dieser Gleichungen, werden alle Potenzen von α bis $\alpha^{\mu - 1}$ seyn, mit Ausnahme derer, deren Exponenten Vielfache von r sind: die Wurzeln der zweyten sind wieder alle Potenzen von α, mit Ausnahme derer, deren Exponenten Vielfache von s sind: die Wurzeln der dritten rc. Suchet man nun den größten gemeinschaftlichen Divisor aller dieser Gleichungen, so läßt sich leicht der Schluß machen, daß dieser die gesuchte Gleichung seyn wird, deren Wurzeln die Potestäten α, α^ν, α^π, α^ϱ, rc. seyn werden. Diese Gleichung wird demnach von folgender Form seyn:

$$y^\lambda + \beta y^{\lambda - 1} + \gamma y^{\lambda - 2} + \text{rc.} + \gamma y^2 + \beta y + 1 = 0 \ldots \text{(i)}$$

Es sey z. B. $\mu = 4$; so ist $r = 2$; $\mu' = 2$ und man erhält blos die Gleichung

$$y^2 + 1 = 0$$

deren Wurzeln α und α^3 sind.

Es sey $\mu = 6$; also $r = 2$; $s = 3$; daher $\mu' = 3$, $\mu'' = 2$, so wird man folgende zwey Gleichungen erhalten

$$y^3 + 1 = 0$$
$$y^4 + y^2 + 1 = 0$$

ihr

ihr größter gemeinschaftlicher Divisor ist

$$y^2 - y + 1 = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind α und α^5.

Es sey $\mu = 8$; so ist $r = 2$, also $\mu' = 4$, und man erhält die einzige Gleichung

$$y^4 + 1 = 0$$

deren Wurzeln $\alpha, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7$ sind.

Was den Exponenten λ betrift, so läßt sich derselbe a priori durch die Faktoren der Zahl μ bestimmen; denn es wird jederzeit seyn

$$\lambda = \frac{\mu}{r.s.t.....}(r-1)(s-1)(t-1)....$$

welches man leicht beweisen kann, wenn man untersuchet, wie viele relative Primzahlen gegen μ, sich unter allen den Zahlen finden, welche kleiner sind als μ. (Man vergleiche die neuen Petersburger Commentarien Tom. VIII.)

61.

Hat man nun auf diese Art die Gleichung (i) gefunden, so eliminire man vermittelst derselben y aus dem Ausdrucke für f, so wird man die Gleichung (h) erhalten, deren sämtliche Coefficienten F, G, ꝛc. solche Funktionen der Wurzeln x', x'', ꝛc. ohne α, seyn werden, welche nicht mehrere als $\frac{1.2.3...\mu-1}{\lambda}$ Veränderungen, bey allen möglichen Versetzungen der Wurzeln x', x'', ꝛc. annehmen werden: so daß jede dieser Funktionen blos durch eine Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3...\mu-1}{\lambda}$ gegeben werden wird, wie wir dieses schon oben gesagt haben.

Uebri-

Uebrigens kann es sich treffen, daß diese Gleichungen für F, oder G, ꝛc. noch besondere Reductionen zulassen. Dies hängt ab von der Form der Funktionen von x', x'', ꝛc. durch welche die Größen F, G, ꝛc. ausgedruckt worden: wir werden uns aber auf diese Untersuchung nur in so fern einlassen, als man dadurch in den Stand gesetzt wird die Tschirnhausensche Auflösung, für den Fall wo μ eine zusammengesetzte Zahl ist, einfacher zu machen, indem man nur einige Mittelglieder der umgeformten Gleichung (Nr. 52.) verschwinden lässet.

62.

Wir wollen also a priori zu bestimmen suchen, was für Resultate in diesem Falle herauskommen müssen. Wir nehmen daher (wie unter der oben angeführten Nr.) an, daß $\mu = \nu\pi$, und daß alle diejenigen Glieder der umgeformten Gleichung für y, deren Exponenten durch π nicht theilbar sind, verschwinden sollen; so daß, $y^\pi = z$ gesetzt, die Gleichung (c) sich in folgende verwandelt

$$z^\nu + Dz^{\nu-1} + Kz^{\nu-2} + \text{ꝛc.} + V = 0,$$

diese Gleichung wird ν Wurzeln haben, die wir durch z', z'', z''', ꝛc. $z^{(\nu)}$ anzeigen wollen: und da aus der Gleichung $y^\pi = z$ folget $y = \sqrt[\pi]{z}$, oder vielmehr (wenn die π Wurzeln der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$, durch $1, \alpha, \alpha^2$, ꝛc. $\alpha^{\pi-1}$ angezeiget werden); $y = \sqrt[\pi]{z}, \alpha\sqrt[\pi]{z}, \alpha^2\sqrt[\pi]{z}$, ꝛc. $\alpha^{\pi-1}\sqrt[\pi]{z}$: so wird man, indem man für z successiv die ν Wurzeln z', z'', z''', ꝛc. und zur Abkürzung

$$\zeta' = \sqrt[\pi]{z'};\quad \zeta'' = \sqrt[\pi]{z''};\quad \zeta''' = \sqrt[\pi]{z'''}, \text{ ꝛc.}$$

setzet, man wird, sage ich, folgende μ Werthe von y erhalten

ζ',

$$\zeta', \quad \alpha\zeta', \quad \alpha^2\zeta', \quad \alpha^3\zeta', \ \text{ꝛc.} \quad \alpha^{\pi-1}\zeta'$$
$$\zeta'', \quad \alpha\zeta'', \quad \alpha^2\zeta'', \quad \alpha^3\zeta'', \ \text{ꝛc.} \quad \alpha^{\pi-1}\zeta''$$
$$\zeta''', \quad \alpha\zeta''', \quad \alpha^2\zeta''', \quad \alpha^3\zeta''', \ \text{ꝛc.} \quad \alpha^{\pi-1}\zeta'''$$
ꝛc.
$$\zeta^{(\nu)}, \quad \alpha\zeta^{(\nu)}, \quad \alpha^2\zeta^{(\nu)}, \quad \alpha^3\zeta^{(\nu)}, \ \text{ꝛc.} \quad \alpha^{\pi-1}\zeta^{(\nu)}$$

welche mit den Wurzeln y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\mu)}$ einerley ſeyn werden.

Setzt man nun nach und nach in der Hülfsgleichung (b) Nr. 51., dieſe Werthe ſtatt y, und zugleich x', x'', x''', ꝛc. ſtatt x (Nr. 53.) ſo erhält man folgende μ Gleichungen

$$x'^{\varrho} + fx'^{\varrho-1} + gx'^{\varrho-2} + \text{ꝛc.} + 1 + \zeta' = 0$$
$$x''^{\varrho} + fx''^{\varrho-1} + gx''^{\varrho-2} + \text{ꝛc.} + 1 + \alpha\zeta' = 0$$
$$x'''^{\varrho} + fx'''^{\varrho-1} + gx'''^{\varrho-2} + \text{ꝛc.} + 1 + \alpha^2\zeta' = 0$$
ꝛc.
$$(x^{(\pi+1)})^{\varrho} + f(x^{(\pi+1)})^{\varrho-1} + g(x^{(\pi+1)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \zeta'' = 0$$
$$(x^{(\pi+2)})^{\varrho} + f(x^{(\pi+2)})^{\varrho-1} + g(x^{(\pi+2)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \alpha\zeta'' = 0$$
$$(x^{(\pi+3)})^{\varrho} + f(x^{(\pi+3)})^{\varrho-1} + g(x^{(\pi+3)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \alpha^2\zeta'' = 0$$
ꝛc.
$$(x^{(2\pi+1)})^{\varrho} + f(x^{(2\pi+1)})^{\varrho-1} + g(x^{(2\pi+1)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \zeta''' = 0$$
$$(x^{(2\pi+2)})^{\varrho} + f(x^{(2\pi+2)})^{\varrho-1} + g(x^{(2\pi+2)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \alpha\zeta''' = 0$$
$$(x^{(2\pi+3)})^{\varrho} + f(x^{(2\pi+3)})^{\varrho-1} + g(x^{(2\pi+2)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \alpha^2\zeta''' = 0$$
ꝛc.

Da man aber in diesem Falle $\varrho = \nu(\pi - 1) = \mu - \nu$ (Nr. 52.) setzen muß, und da die Anzahl der unbestimmten Größen f, g, ꝛc. l auch $\mu - \nu$ ist, so ist klar, daß wenn man in den μ gefundenen Gleichungen, die ν Größen ζ', ζ'', ζ''', ꝛc. $\zeta^{(\nu)}$ eliminirt, $\mu - \nu$ Gleichungen übrig bleiben werden, welche zur Bestimmung der $\mu - \nu$ unbekannten Größen, f, g, ꝛc. l dienen werden.

Wir wollen uns nunmehr vorstellen, als habe man durch die gewöhnlichen Eliminationsregeln, einen Ausdruck für f gefunden, (und man wird eben dergleichen Schlüsse auch für jede andere der unbestimmten Größen g ꝛc. l machen können.) Suchet man nun alle verschiedene Werthe von f, welche aus der gegenseitigen Verwechselung der μ Wurzeln x', x'', ꝛc. entspringen können, so wird man dadurch die Wurzeln der Gleichung für f erhalten, welche demnach von einem Grade seyn wird, dessen Exponent der Anzahl dieser verschiedenen Werthe gleich ist.

Die μ Wurzeln x', x'', ꝛc. werden aber im Allgemeinen $1 . 2 . 3 \ldots \mu$ Versetzungen zulassen. Man muß aber von dieser Anzahl diejenigen Versetzungen abrechnen, welche in dem Ausdrucke für f keine Aenderung machen können.

Ich bemerke daher zuerst, daß, wenn man die Wurzeln x', x'', ꝛc. $x^{(\pi)}$ respective mit $x^{(\pi + 1)}$, $x^{(\pi + 2)}$, ꝛc. $x^{(2\pi)}$, oder mit $x^{(2\pi + 1)}$, $x^{(2\pi + 2)}$, ꝛc. $x^{(3\pi)}$, u. s. f. verwechselt, hieraus in den obigen Gleichungen die nemlichen Veränderungen entspringen werden, als wenn man ζ' mit ζ'' oder ζ''' u. s. f. verwechselt; so daß die Verwechselungen der Größen ζ', ζ'', ζ''', ꝛc. gleichgeltend seyn werden, mit den Verwechselungen der Wurzeln x', $x^{(\pi + 1)}$, $x^{(\pi + 2)}$, ꝛc. wenn man

man zugleich die analogen Verwechselungen der Wurzeln x'', $x^{(\pi+2)}$, $x^{(2\pi+2)}$, 2c., und eben so der Wurzeln x''', $x^{(\pi+3)}$, $x^{(2\pi+3)}$, 2c. damit verbindet.

Da man aber bey der Bestimmung der Coefficienten f, g, 2c. die Größen ζ', ζ'', ζ''', 2c. durch die Elimination wegschaffen muß, so wird es ganz gleichgültig seyn, auf was für eine Art man dieselben unter einander verwechselt habe: folglich wird aus ihrer Verwechselung keine Aenderung in den Werthen von f, g, 2c. entstehen. Nun ist die Anzahl dieser Größen ν, und sie lassen $1.2.3\ldots\nu$ Versetzungen zu, und eben so viele Verwechselungen der μ Wurzeln x', x'', x''', 2c. $x^{(\mu)}$ werden demnach nichts Verschiedenes geben. Demnach wird sich in der Totalsumme $1.2.3\ldots\mu$ aller partikulären Werthe von f, jeder Werth $1.2.3\ldots\nu$ mahl finden, und so behalten wir blos $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu}$ verschiedene Veränderungen.

63.

Betrachtet man nun die gegenseitigen Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', 2c. $x^{(\pi)}$, und vergleicht man zugleich die π ersten Gleichungen Nr. 62, welche diese Wurzeln enthalten, so wird man ganz ähnliche Schlüsse als Nr. 55, machen können, und man wird sich überzeugen, daß die Vertauschung der Wurzel x', mit den übrigen x'', x''', 2c. $x^{(\pi)}$ keine Aenderung in den Werthen von f, g, 2c. hervorbringen kann, weil diese Vertauschungen, nichts anders geben, als wenn man $\alpha\zeta'$, $\alpha^2\zeta'$, $\alpha^3\zeta'$ 2c. $\alpha^{\pi-1}\zeta'$ an die Stelle von ζ gesetzt hätte.

Demnach kann die Anzahl der verschiedenen Werthe von f, g, ꝛc. nicht größer seyn, als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu}$ dividiret durch π.

Man wird ganz ähnliche Schlüsse bey Betrachtung der π Wurzeln $x^{(\pi+1)}$, $x^{(\pi+2)}$, $x^{(\pi+3)}$, ꝛc. $x^{(2\pi)}$, desgleichen der Wurzeln $x^{(2\pi+1)}$, $x^{(2\pi+2)}$, $x^{(2\pi+3)}$, ꝛc. $x^{(3\pi)}$ u. s. f. machen können, und da die Combinationen dieser Wurzeln ganz unabhängig von einander sind, so folgt, daß man die Zahl $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu}$, durch π so vielmal wird dividiren müssen, als vielmal in jedem dieser Systeme von π Wurzeln, die Größen ζ', ζ'', ζ''', ꝛc. $\zeta^{(\nu)}$ vorkommen, d. h. ν mal.

Demnach kann die Anzahl der verschiedenen Werthe von f, g, ꝛc. nicht größer seyn, als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu\pi^\nu}$: die Gleichung für f kann demnach nicht höher steigen, als auf diesen Grad.

Dies stimmt mit demjenigen überein, was wir Nr. 52, gegen das Ende, gefunden haben. Es fällt in die Augen, daß die Zahl $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu\pi^\nu}$ einerley ist, mit $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots\mu}{\nu\pi^\nu}$ oder (weil $\mu=\nu\pi$) mit $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{\pi^{\nu-1}}$.

64.

Die reducirte Gleichung für f, wird demnach im Allgemeinen von dem Grade $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{\pi^{\nu-1}}$ seyn:

allein

allein man wird dieſe Gleichung jederzeit, durch ähnliche Betrachtungen, als Nr. 57 und 59, auf einen noch niedrigern Grad bringen können. Und iſt π eine Primzahl, ſo iſt es nicht ſchwer durch ähnliche Schlüſſe als Nr. 56. zu beweiſen, daß man für die Verwechſelungen der Wurzeln x', $x^{(\pi+1)}$, $x^{(2\pi+1)}$, ꝛc. mit x'', $x^{(\pi+2)}$, $x^{(2\pi+2)}$, ꝛc. desgleichen mit x''', $x^{(\pi+3)}$, $x^{(2\pi+3)}$, ꝛc., die ſucceſſive Vertauſchung der Potenzen α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\pi-1}$ gegen α, in dem Ausdruck für f, wird brauchen dürfen: ſo daß man, wenn in dem Ausdrucke für f, y für α geſetzt, und dann dies y durch die Gleichung $\frac{y^\pi - 1}{y - 1} = 0$ d. i. durch

$$y^{\pi-1} + y^{\pi-2} + y^{\pi-3} + \text{ꝛc.} + 1 = 0$$

eliminiret wird, daß man, ſage ich alsdenn für f eine Gleichung von folgender Form erhalten wird

$$f^{\pi-1} + F.f^{\pi-2} + G.f^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

und dieſe wird ein Diviſor der reducirten Gleichung für f ſeyn; und von den Coefficienten F, G, ꝛc. wird jeder durch eine Gleichung von dem Grade $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{(\pi-1)\pi^{\nu-1}}$ beſtimmt werden. Hierdurch erhält man eben ſo viele Diviſoren für die reducirte Gleichung, jeden vom Grade $\pi - 1$.

Wenn ν keine Primzahl iſt, ſo muß man wie Nr. 60. eine Gleichung ſuchen, deren Wurzeln, diejenigen Potenzen von α ſind, deren Exponenten relative Primzahlen gegen ν, ſind, die Einheit mit einbegriffen. Bezeichnet man nun dieſe Gleichung auf folgende Art

$$y^\lambda + \beta y^{\lambda-1} + \text{ꝛc.} + \beta y + 1 = 0$$

so wird man vermittelst derselben y, aus dem Ausdrucke für f eliminiren können, und so wird man für f eine Gleichung von folgender Form erhalten

$$f^{\lambda} + F.f^{\lambda-1} + G.f^{\lambda-2} + \text{rc.} = 0$$

in welcher jeder Coefficient F, G, rc. blos von einer Gleichung vom Grade $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{\lambda\pi^{\nu-1}}$ abhängt; so daß man demnach eben so viele Werthe für F, G, rc. und folglich eben so viele Gleichungen für f, jede vom Grade λ, erhält; und diese werden die Divisoren der reducirten Gleichung für f seyn.

Es sey z. B. $\mu = 6$, so wird man 1) $\nu = 3$, $\pi = 2$ setzen können, und die reducirte Gleichung für f, wird von dem Grade $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2^2} = 15$; und weil $\pi - 1 = 1$, so wird sie sich nach der obigen Methode auf keinen niedrigern Grad bringen lassen.

2) Man setze $\nu = 2$ und $\pi = 3$, so wird man für den Grad der reducirten Gleichung für f, die Zahl $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 40$ erhalten; und da $\pi - 1 = 2$, so wird man diese reducirte Gleichung in 20 Gleichungen vom 2ten Grade auflösen können, und dies mittest einer Gleichung vom 20sten Grade.

65.

Wir kehren nunmehr wieder zu den Formeln Nr. 51. zurück. Es ist klar, daß man die gegebene Gleichung (a), als das Resultat einer Elimination aus den beyden Gleichungen b und c ansehen kann. Sieht man nun die Coefficienten A, B, C, ꝛc. der Gleichung für y, als gegeben, die Coefficienten F, G, ꝛc. hingegen des Ausdrucks für x durch y, als unbestimmt an, so wird man durch Vergleichung der Glieder derjenigen Gleichung, die man durch die Elimination von y erhält, mit den Gliedern der gegebenen Gleichung, die letztern Coefficienten bestimmen können, vorausgesetzt, daß ihre Anzahl nicht kleiner als μ sey, welches man nicht zu befürchten hat, wenn man $\lambda = \frac{\mu}{2}$ oder $= \frac{\mu - 1}{2}$ setzet: und wenn man die Gleichung für y so angenommen hat, daß sie sich auflösen lässet, welches man auf unzählige Arten erhalten kann. Auf diese Art wird man eine vollständige Auflösung der gegebenen Gleichung erhalten; die Schwierigkeit wird aber in der Bestimmung der unbestimmten Coefficienten F, G, ꝛc. liegen.

Man wird indessen oft diese Bestimmung, so wie auch die Elimination von y erleichtern können, wenn man den durch die Gleichung (d) gegebenen Ausdruck für x, in einen andern verwandelt, wo das unbekannte y, blos im Zähler vorkommt, und dies kann man jederzeit dadurch erhalten, daß man den Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{F + Gy + Hy^2 + \text{ꝛc.} + Ky^\lambda}{L + My + Ny^2 + \text{ꝛc.} + Ry^\lambda}$$

mit einem schicklichen Polynom von y multipliciret. Dieses kann man auf folgende Art finden.

Man setze

$$z = L + My + Ny^2 + \text{ꝛc.} + Ry^\lambda$$

und da y durch die Gleichung

$$y^\mu + Ay^{\mu - 1} + By^{\mu - 2} + \text{ꝛc.} = 0$$

 bestimmt

bestimmt ist, so eliminire man y mittelst dieser Gleichung, welches eine Gleichung für z vom Grade μ geben wird, die sich folgendermaßen vorstellen läßet

$$z^{\mu} + \alpha z^{\mu-1} + \beta z^{\mu-2} + \gamma z^{\mu-3} + \text{ꝛc.} - \omega = 0$$

worin folglich die Coefficienten α, β, γ, ꝛc. ω bekannte Funktionen von A, B, C, ꝛc. und L, M, N, ꝛc. seyn werden.

Nun ist

$$z(z^{\mu-1} + \alpha z^{\mu-2} + \beta z^{\mu-3} + \text{ꝛc.}) = \omega$$

und hieraus siehet man, daß die Größe z gleich seyn wird ω, multipliciret in das Polynom

$$z^{\mu-1} + \alpha z^{\mu-2} + \beta z^{\mu-3} + \text{ꝛc.}$$

folglich unabhängig von y.

Setzt man nun in diesem Polynom für z seinen Werth durch y, so erhält man das gesuchte Polynom, in welches man, wenn man will, bloß niedrigere Potenzen als y^{μ} bringen kann, indem man vermittelst der Gleichung $y^{\mu} + Ay^{\mu-1} + \text{ꝛc.} = 0$ jederzeit bewerkstelligen kann, daß die Potenzen von y, welche höher als y^{μ} sind, in die Klasse der niedrigern übergehen.

Auf diese Art kann man die Gleichung (d) auf folgende Form bringen

$$x = a + by + cy^2 + \text{ꝛc.} + ky^{\mu-1} \ldots (k)$$

so daß man jederzeit die gegebene Gleichung

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (a)$$

so betrachten kann, als wäre sie durch eine Elimination von y, vermittelst der Gleichung

$$y^{\mu} + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + \text{ꝛc.} + V = 0 \ldots (c)$$

und der Gleichung (k) entstanden. Man sehe hierauf die Coefficienten a, b, c, ꝛc. k, deren Anzahl μ ist, als unbestimmt

an,

an, und wenn man nun die aus der Elimination von y entspringende Gleichung Glied vor Glied, mit der gegebenen vergleichet, so erhält man μ Bedingungen, welche zu der Bestimmung der unbestimmten Größen a, b, c, ꝛc. dienen werden.

Reduciret man die Gleichung für y auf zwey Glieder $y^{\mu} \mp V = 0$, so wird die obige Methode, mit der in gegenwärtiger Abhandlung öfters erwähnten Methode von Euler und Bezout, auf eins hinauslaufen. Das Detail aber in welches wir uns so eben eingelassen haben, nähert sie der Tschirnhausenschen Methode, und zeigt ihre Aehnlichkeit und natürlichen Zusammenhang mit derselben.

66.

Da alles auf die Bestimmung der μ unbekannten Größen a, b, c, ꝛc. k, durch Vergleichung der Glieder der gegebenen, und der durch Elimination von y entstandenen Gleichung, ankommt, so bemerken wir in Ansehung der letzteren, daß sie nothwendig durch eine rationale und ganze Funktion, der Größen a, b, c, ꝛc. k und x ausgedruckt seyn wird, deren aus diesen Größen bestehende Glieder durchgehends von μ Dimensionen seyn werden, wie man leicht aus der Nr. 13. vorgetragenen Theorie der Elimination beurtheilen kann. Ordnet man demnach diese Gleichung nach x, so werden die sämtlichen Coefficienten derselben rationale, ganze und homogene Funktionen der Größen a, b, c, ꝛc. k seyn, deren Dimensionen respectiv 0, 1, 2, 3, ꝛc. für die Potenzen x^{μ}, $x^{\mu-1}$, $x^{\mu-2}$, $x^{\mu-3}$, ꝛc. seyn werden.

Das erste Glied x^{μ} wird demnach blos die Einheit zum Coefficienten haben. Das zweyte Glied wird zum Coefficienten eine Größe haben, von der Form $\alpha a + \beta b + \gamma c +$ rc. wo $\alpha, \beta, \gamma,$ rc. Zahlencoefficienten sind. Das dritte Glied wird zum Coefficienten eine Größe haben von der Form $\alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2 + \delta ac +$ rc. u. s. f.

Setzet man nun den Coefficienten des zweyten Gliedes $= m$, den des dritten $= n$, u. s. f. so erhält man μ Gleichungen für die μ unbekannten Größen a, b, c, rc. k; von welchen Gleichungen die erste blos vom ersten Grade, die zweyte vom zweyten, die dritte vom dritten, u. s. f. seyn wird. Werden nun diese unbekannten Größen, bis auf irgend eine derselben eliminiret, so wird man für diese im Allgemeinen eine Endgleichung von dem Grade $1 . 2 . 3 \ldots \mu$ erhalten. Dies widerspricht Eulers Meinung, stimmt aber mit dem überein, was Bezout durch Induction gefunden hat.

67.

Um diese Behauptung über den Grad der Gleichungen für a, oder b, oder c, u. s. f. noch mehr zu bestätigen, und zugleich zu entdecken, in welchen Fällen sich diese Gleichungen einfacher machen lassen, wollen wir a priori den Ausdruck für die Größen a, b, c, rc. durch die Wurzeln der gegebenen Gleichung x', x'', x''', rc. zu bestimmen suchen.

Wir setzen also, wie Nr. 54 $\sqrt[\mu]{-V} = u$. Wenn wir nun die μ Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$, mit $1, \alpha, \beta, \gamma,$ rc. bezeichnen; so sind $u, \alpha u, \beta u, \gamma u,$ rc. die μ Wurzeln der Gleichung $y^\mu + V = 0$. Setzt man nun diese Wurzeln nach und nach in die Gleichung (k) Nr. 65., statt y, und setzt man zugleich die Wurzeln x', x'', x''', rc. statt x, so erhält man folgende μ Gleichungen

$x' =$

$$
\begin{aligned}
x' &= a + bu + cu^2 + du^3 + \text{ꝛc.} + ku^{\mu-1} \\
x'' &= a + \alpha bu + \alpha^2 cu^2 + \alpha^3 du^3 + \text{ꝛc.} + \alpha^{\mu-1} ku^{\mu-1} \\
x''' &= a + \beta bu + \beta^2 cu^2 + \beta^3 du^3 + \text{ꝛc.} + \beta^{\mu-1} ku^{\mu-1} \\
x'''' &= a + \gamma bu + \gamma^2 cu^2 + \gamma^3 du^3 + \text{ꝛc.} + \gamma^{\mu-1} ku^{\mu-1} \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

durch welche man die μ unbekannten Größen a, b, c, ꝛc. wird beſtimmen können.

Dieſe Beſtimmung hat keine Schwierigkeiten; denn da $1, \alpha, \beta, \gamma$, ꝛc. die Wurzeln der Gleichung $y^{\mu} - 1 = 0$ ſind, in welcher alle Mittelglieder fehlen, ſo iſt bekanntlich

$$
\begin{aligned}
1 + \alpha + \beta + \gamma + \text{ꝛc.} &= 0 \\
1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{ꝛc.} &= 0 \\
1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \text{ꝛc.} &= 0 \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

d. h. wenn man die ſämmtlichen Wurzeln zu einer und derſelben Poteſtät erhebt, ſo wird ihre Summe $= 0$ ſeyn, wenn der Exponent der Potenz nicht durch μ theilbar iſt; was aber die Potenzen betrift, deren Exponenten Vielfache von μ ſind, ſo erhellet, aus eben der Gleichung $y^{\mu} - 1 = 0$, daß $\alpha^{\mu} = 1$; $\alpha^{2\mu} = 1$; u. ſ. f. ſeyn werde.

Wenn man nun die obigen μ Gleichungen addiret, nachdem man ſie vorher mit den correſpondirenden Wurzeln 1, α, β, ꝛc., die man nach und nach zu der μten, $(\mu - 1)$ten, $(\mu - 2)$ten ꝛc. Potenz, bis zu der erſten incluſive erheben muß, Reihe vor Reihe, multipliciret hat, ſo erhält man

$$
\begin{aligned}
\mu a &= x' + x'' + x''' + x'''' + \text{ꝛc.} \\
\mu ub &= x' + \alpha^{\mu-1} x'' + \beta^{\mu-1} x''' + \gamma^{\mu-1} x'''' + \text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

$\mu u^2 c$

$$\mu u^2 c = x' + \alpha^{\mu-2} x'' + \beta^{\mu-2} x''' + \gamma^{\mu-2} x'''' + \text{rc.}$$

$$\mu u^3 d = x' + \alpha^{\mu-3} x'' + \beta^{\mu-3} x''' + \gamma^{\mu-3} x'''' + \text{rc.}$$

rc.

Man siehet hieraus, daß die Größe a, nur durch eine Gleichung von einer Dimension gegeben wird, indem sie unverändert denselben Werth behält, was man auch für Versetzungen mit den Wurzeln x', x'', rc. vornehmen mag; und da $x' + x'' + x''' +$ rc. $= - m$, so ist wirklich $a = - \frac{m}{\mu}$.

Was die übrigen Größen ub, u^2c, u^3d, rc. betrift, so wird jede derselben im Allgemeinen durch eine Gleichung bestimmt werden, deren Höhe die Anzahl aller möglichen Verwechselungen der μ Wurzeln x', x'', x''', rc. gleich ist; und diese Anzahl ist bekanntlich $1.2.3\ldots\mu$: denn jede dieser Versetzungen wird einen eigenen Werth für die Größen ub, u^2c, u^3d, rc. geben. Diese Werthe aber können solche Verhältnisse unter einander haben, daß dennoch die Gleichung, deren Wurzeln sie sind auf einen niedrigern Grad gebracht werden kann. Dies wollen wir im folgenden untersuchen.

68.

In dieser Absicht bemerken wir zuerst, daß man der Größe u, weil sie unbestimmt bleibt, jeden willkührlichen Werth geben kann. Die einfachste Voraussetzung ist, wenn man mit Bezout $u = 1$ setzet, woraus $V = - u^{\mu} = - 1$ folgt. Wir werden also diese Voraussetzung zum Grunde legen, und zugleich

$$k = \frac{a'}{\mu}; \quad h = \frac{a''}{\mu}; \text{ rc. } b = \frac{a^{(\mu-1)}}{\mu}$$

setzen,

setzen, wodurch die Formeln folgende einfachere Gestalt erhalten

$$
\begin{array}{llllll}
a' & = x' + & \alpha x'' + & \beta x''' + & \gamma x'''' + \text{etc.} \\
a'' & = x' + & \alpha^2 x'' + & \beta^2 x''' + & \gamma^2 x'''' + \text{etc.} \\
a''' & = x' + & \alpha^3 x'' + & \beta^3 x''' + & \gamma^3 x'''' + \text{etc.} \\
 & & \text{etc.} & & \\
a^{(\mu-1)} & = x' + & \alpha^{\mu-1} x'' + & \beta^{\mu-1} x''' + & \gamma^{\mu-1} x'''' + \text{etc.}
\end{array}
$$

Wir wollen zuerst unsere Aufmerksamkeit auf den Ausdruck für die Größe a' richten. Da die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$, welche wir durch $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. vorgestellet haben, auch durch $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, etc. (Nr. 24.) ausgedruckt werden können, so haben wir $\beta = \alpha^2$; $\gamma = \alpha^3$, etc. so daß nunmehr seyn wird

$$a' = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \text{etc.} + \alpha^{\mu-1} x^{(\mu)}$$

Die Werthe der übrigen Größen a'', a''', etc. zu erhalten, ist nichts nöthig, als daß man in diesem Ausdrucke für a', statt α, die Potenzen α^2, α^3, etc. setze. Hieraus, und aus dem, was oben Nr. 56. erwiesen worden, läßt sich sogleich schliessen, daß wenn der Exponent μ der gegebenen Gleichung eine Primzahl ist, die Größen a', a'', a''', etc. Wurzeln einer und derselben Gleichung seyn werden; dies wird sich aber nicht so verhalten, wenn μ eine zusammengesetzte Zahl ist. Aus diesem Grunde werden wir in der Folge die Fälle, wenn μ eine einfache, oder zusammengesetzte Zahl ist, unterscheiden müssen.

69.

Wir wollen allgemein annehmen

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \text{etc.} + \alpha^{\mu-1} x^{(\mu)},$$

und überlegen, wie die Gleichung für t beschaffen seyn müsse.

In

In dieser Absicht suche man alle partikularen Werthe von t, welche durch die $1.2.3\ldots\mu$ Versetzungen herauskommen, die unter den μ Wurzeln x', x'', ꝛc. möglich sind; und man befolge bey dieser Untersuchung eine ähnliche Methode als Nr. 55. Man betrachte also die Größe x' als feststehend, und lasse blos die übrigen $\mu - 1$ Größen ihre Stellen ändern, so werden die unter ihnen möglichen $1.2.3\ldots(\mu-1)$ Verwechselungen eben so viele partikulare Werthe von t geben, welche wir durch t', t'', t''', ꝛc. bezeichnen wollen. Nun lasse man in dem Ausdrucke eines jeden dieser Werthe x', seine Stelle ändern, indem man dasselbe nach und nach mit x'', x''', ꝛc. verwechselt, so wird man die $1.2.3\ldots\mu$ gesuchten Werthe erhalten, welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung für t seyn müssen.

Man wird aber leicht bemerken, daß man um alle diese Werthe zu erhalten, nur jeden der Werthe t', t'', t''', ꝛc. nach und nach mit α, α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\mu-1}$ multipliciren darf, so daß sich die Wurzeln der Gleichung für t, auf folgende Art ausdrücken lassen.

$$t',\ \alpha t',\ \alpha^2 t',\ \alpha^3 t'\ \text{ꝛc.}\ \alpha^{\mu-1} t'$$
$$t'',\ \alpha t'',\ \alpha^2 t'',\ \alpha^3 t'',\ \text{ꝛc.}\ \alpha^{\mu-1} t''$$
$$t''',\ \alpha t''',\ \alpha^2 t''',\ \alpha^3 t''',\ \text{ꝛc.}\ \alpha^{\mu-1} t'''$$
ꝛc.

Hieraus läßt sich aber leicht schließen, daß die Gleichung für t, nur solche Potenzen von t enthalten wird, welche Vielfache von μ sind.

Hieraus folget nun, daß wenn man $t^\mu = \vartheta$ setzet, so daß

$$\vartheta = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \text{ꝛc.})^\mu$$

die

die Gleichung für ϑ vom Grade $1.2.3\ldots(\mu-1)$ seyn wird, und ihre Wurzeln werden die Werthe von ϑ seyn, welche blos aus den Versetzungen der $\mu-1$ Wurzeln x'', x''', ꝛc. entspringen, ohne auf die Wurzel x' Rücksicht zu nehmen.

Dieser Schluß bleibt richtig, von welcher Art auch die Zahl μ seyn mag. Wir wollen nunmehr die beyden Fälle, wenn μ eine Primzahl ist, oder nicht, einzeln untersuchen.

70.

Wir nehmen also an, daß μ eine Primzahl sey, und bemerken, daß, um alle Werthe von ϑ zu finden, es hinlänglich seyn wird, blos die zu suchen, welche aus der Versetzung der $\mu-2$ Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entspringen, deren Anzahl also $=1.2.3\ldots(\mu-2)$ seyn wird, und dann in dem Ausdrucke eines jeden dieser Werthe α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\mu-1}$ für α zu setzen. Man kann sich hiervon leicht durch ähnliche Schlüsse als Nr. 56. überzeugen.

Nimmt man nun an, daß die $\mu-1$ Werthe von ϑ, welche aus der Substitution von α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\mu-1}$ für α, in dem obigen Ausdruck für ϑ entstehen, die Wurzeln folgender Gleichung, vom $(\mu-1)$ten Grade sind

$$\vartheta^{\mu-1}-T\vartheta^{\mu-2}+U\vartheta^{\mu-3}-X\vartheta^{\mu-4}+\text{ꝛc.}=0,$$

so folget (Nr. 57.) daß jeder der Coefficienten T, U, X, ꝛc. durch eine Gleichung vom $1.2.3\ldots(\mu-2)$ten Grade gegeben seyn wird; so daß die Gleichung für ϑ vom $1.2.3\ldots(\mu-1)$ten Grade, sich in $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Gleichungen, jede vom $(\mu-1)$ten Grade, wird zerfällen lassen, und zwar mittelst einer Gleichung vom $1.2.3\ldots(\mu-2)$ten Grade: denn wenn man einen der Coefficienten T, U, X, ꝛc. gefunden hat,

so

so wird man leicht durch Auflösung einer Gleichung von diesem Grade, alle übrigen erhalten können.

71.

Da die $\mu - 1$ Wurzeln der Gleichung $\vartheta^{\mu-1} - T\vartheta^{\mu-2} + U\vartheta^{\mu-3} - X\vartheta^{\mu-4} +$ rc. $= 0$ die Werthe von ϑ, d. h. von $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' +$ rc.$)^\mu$ sind, welche man erhält, indem α nach und nach in α^2, α^3, rc. $\alpha^{\mu-1}$ verwandelt wird, so folgt aus dem was Nr. 68. gesagt worden, daß die Wurzeln dieser Gleichung, genau die Werthe der μten Potenzen von den Größen a', a'', a''', rc. ausdrucken werden.

Bezeichnet man nun diese Wurzeln durch ϑ', ϑ'', ϑ''', rc. $\vartheta^{(\mu-1)}$, so ist

$$b = \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta'}}{\mu};\quad c = \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta''}}{\mu};\quad d = \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta'''}}{\mu}\ \text{rc.}$$

Um nun die Gleichung, um welche es uns zu thun ist, ohne Schwierigkeit zu finden, muß man das Polynom

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \text{rc.}$$

zu der Potenz μ erheben; und wenn man bemerkt, daß $\alpha^\mu = 1$, $\alpha^{\mu-1} = \alpha$, rc., so wird man für ϑ einen Ausdruck von folgender Form erhalten

$$\vartheta = \xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{rc.} + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

wo ξ, ξ', ξ'', rc. Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', rc. ohne α, seyn werden. Man verwandelt α in y, und eliminiret alsdenn y mittelst der Gleichung g Nr. 57; will man hiebey nicht die gewöhnliche Art zu eliminiren brauchen, so kann man sich folgender bedienen,

72.

Da $\beta = \alpha^2$; $\gamma = \alpha^3$ (Nr. 68.) so hat man

$$\vartheta' = \xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{2c.} + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

$$\vartheta'' = \xi + \beta\xi' + \beta^2\xi'' + \beta^3\xi''' + \text{2c.} + \beta^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

$$\vartheta''' = \xi + \gamma\xi' + \gamma^2\xi'' + \gamma^3\xi''' + \text{2c.} + \gamma^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

2c.

und α, β, γ, 2c. nebst 1 sind die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$.

Sind nun die Wurzeln der Gleichung für ϑ bekannt, so kann man vermittelst derselben die Werthe der Coefficienten T, U, X, 2c. bestimmen, denn es ist bekanntlich

$$T = \vartheta' + \vartheta'' + \vartheta''' + \text{2c.}$$

$$U = \vartheta'\vartheta'' + \vartheta'\vartheta''' + \text{2c.}$$

2c.

Man wird oft diese Bestimmung erleichtern können, wenn man die Summe der 1sten, 2ten, 3ten, 2c. bis μten Potenzen der Wurzeln ϑ', ϑ'', ϑ''', 2c. suchet; und in dieser Absicht wird es gut seyn, wenn man die Größe

$$\vartheta^0 = \xi + \xi' + \xi'' + \xi''' + \text{2c.} + \xi^{(\mu-1)}$$

in die Rechnung bringt; so daß die Größen ϑ^0, ϑ', ϑ'', 2c. den Wurzeln 1, α, β, 2c. der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$ entsprechen.

Erhebt man aber das Polynom

$$\xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{2c.} + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

nach und nach zu der 2ten, 3ten, 2c. Potenz, und bezeichnet man mit $\xi 2$, $\xi 3$, $\xi 4$, 2c. diejenigen Glieder dieser Potenzen, welche, nachdem man 1 für α^μ, α für $\alpha^{\mu+1}$ u. s. f. gesetzt hat, gar kein α mehr enthalten, so läßt sich aus der eigenthümlichen Beschaffenheit der Größen $1, \alpha, \beta, \gamma$, rc. (Nr. 67.) leicht beurtheilen, daß die Summen der 1sten, 2ten, 3ten, rc. Potenzen, der Größen $\vartheta^0, \vartheta', \vartheta''$, rc. sich auf $\mu\xi$, $\mu\xi 2$, $\mu\xi 3$, rc. reduciren werden.

Es ist aber $\vartheta^0 = \xi + \xi' + \xi'' + \xi''' +$ rc. $\xi^{(\mu-1)} = (x' + x'' + x''' +$ rc. $+ x^{(\mu+1)}) = (-m)^\mu$; zieht man nun von den Größen $\mu\xi$, $\mu\xi 2$, $\mu\xi 3$, rc. respective die 1ste, 2te, 3te Potenz von $(-m)^\mu$ ab, so werden die Reste

$$\mu\xi - (-m)^\mu$$
$$\mu\xi 2 - (-m)^{2\mu}$$
$$\mu\xi 3 - (-m)^{3\mu}$$
rc.

gleich seyn den Summen der $\mu - 1$ Wurzeln $\vartheta', \vartheta'', \vartheta'''$, rc. ihrer Quadrate, ihrer Würfel u. s. f. so daß man vermöge der bekannten Formeln findet

$$T = \mu\xi - (-m)^\mu$$

$$U = \frac{T(\mu\xi - (-m)^\mu)}{2} - \frac{\mu\xi 2 - (-m)^{2\mu}}{2}$$

$$X = \frac{U(\mu\xi - (-m)^\mu)}{2} - \frac{T(\mu\xi 2 - (-m)^{2\mu})}{2}$$
$$+ \frac{\mu\xi 3 - (-m)^{3\mu}}{2}$$

rc.

73.

Machet man nun in den Ausdrücken für T, U, X, rc. mit den Wurzeln x', x'', x''', rc. alle mögliche Verwechselungen, so wird man für jede dieser Größen, nicht mehr als $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\mu - 2)$ verschiedene Werthe finden, welche einzig

zig und allein aus den Verſetzungen der $\mu - 2$ Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entſpringen; ſo daß man eben ſo viele Gleichungen für ϑ von der Form

$$\vartheta^{\mu - 1} - T\vartheta^{\mu - 2} + U\vartheta^{\mu - 3} - \text{ꝛc.} = 0$$

erhält, welche ſämtlich in einander multipliciret, eine Gleichung für ϑ von dem Grade $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ geben werden, deren Coefficienten ſämtlich durch rationale Funktionen der Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung, beſtimmbar ſeyn werden.

Hat man nun auf ſolche Art dieſe Gleichung gefunden, und dividiret man dieſelbe, durch eine ſolche Gleichung, als die eben angeführte, vom $(\mu - 1)$ten Grade, ſo erhält man $\mu - 1$ Bedingungsgleichungen zwiſchen den Größen T, U, X, ꝛc. durch welche man z. B. die Werthe von U und X ꝛc. für T beſtimmen kann, und man wird auf dieſe Art zu einer Endgleichung für T kommen, welche nicht höher als auf den Grad $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 2)$ ſteigen kann.

Da in der That die Größe T, nicht mehr als $1.2.3 \ldots (\mu - 2)$ verſchiedene Werthe haben kann, ſo wird man, wenn dieſe Werthe T', T'', T''', ꝛc. $T^{(\nu)}$ heißen, und zur Abkürzung $\nu = 1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 2)$ geſetzt wird, für T eine Gleichung von folgender Form haben

$$T^{\nu} - \pi T^{\nu - 1} + \varrho T^{\nu - 2} - \sigma T^{\nu - 3} + \text{ꝛc.} = 0$$

deren Wurzeln T', T'', T''', ꝛc. ſind; ſo daß man, wenn man will, die Werthe der Coefficienten π, ϱ, σ, ꝛc. aus den Werthen der Wurzeln T', T'', T''', ꝛc. a priori beſtimmen kann.

Auf dieſe Art erhält man die Gleichung für T unmittelbar, ohne erſt die Gleichung für ϑ von dem Grade $\nu(\mu - 1)$ zu Hülfe zu nehmen; auch wird man eben ſo unabhängig von dieser letztern Gleichung die Werthe der übrigen Coefficienten U, X, ꝛc. durch T finden können, wie wir dieses weiter unten in dem vierten Abschnitte zeigen werden.

Aus allem was wir bisher vorgetragen haben, folget, daß Eulers und Bezouts Methode nothwendig auf eine reducirte Gleichung von dem Grade $1.2.3\ldots(\mu-1)$ führen muß, welche sich, wenn der Exponent μ eine Primzahl ist, in $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Faktoren von dem $(\mu-1)$sten Grade, zerfällen lassen muß.

Dieses Resultat stimmt, wie man siehet, mit dem überein, was die Tschirnhausensche Methode geben würde; so daß man hier ähnliche Betrachtungen, als Nr. 58, anstellen kann.

74.

Um die vorgetragene Theorie durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey eine Gleichung vom 5ten Grade gegeben

$$x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Ihre Wurzeln sollen x', x'', x''', x'''', x^{v} seyn.

Man setze nun

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4,$$

und betrachte die gegebene Gleichung als das Resultat einer Elimination, aus dieser letztern, und aus der zweygliedrigen Gleichung $y^5 + V = 0$, oder vielmehr (indem man wie Nr. 68, $V = -1$ setzet) $y^5 - 1 = 0$.

Euler und Bezout haben in ihren Abhandlungen über diesen Gegenstand eine Endgleichung gegeben, die durch die Elimination von y erhalten wird, in dem Falle, wenn $m = 0$ und $a = 0$; deren Vergleichung mit der gegebenen die vier Gleichungen liefert, welche nöthig sind, um die Coefficienten

ten b, c, d und e zu bestimmen. Indessen haben diese scharfsinnigen Männer das Resultat nicht angegeben, welches aus diesen vier Gleichungen, durch Eliminirung von irgend dreyen der vier unbekannten Größen, herauskommen muß; die Ursache liegt in der unübersehbaren Arbeit, welche diese Eliminirung erfordert. Die bisher vorgetragene Methode liefert uns Mittel, dieses Resultat a priori zu finden, womit wir sogleich einen Versuch machen wollen.

Wir haben also sogleich (Nr. 67.) $a = -\frac{m}{5}$ und ferner (Nr. 71.)

$$b = \frac{\sqrt[5]{\vartheta'}}{5};\; c = \frac{\sqrt[5]{\vartheta''}}{5};\; d = \frac{\sqrt[5]{\vartheta'''}}{5};\; e = \frac{\sqrt[5]{\vartheta''''}}{5}$$

und ϑ', ϑ'', ϑ''', ϑ'''' sind die vier Wurzeln der Gleichung

$$\vartheta^4 - T\vartheta^3 + U\vartheta^2 - X\vartheta + Y = 0$$

welche ein Divisor einer Gleichung vom 24sten Grade seyn wird, welche man für den Werth von ϑ findet.

Um nun den Werth der Coefficienten T, U, ꝛc. zu finden, muß man das Polynom

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \alpha^4 x^V$$

zu der 5ten Potenz erheben, wodurch man, in Rücksicht des Werthes von α^5, (α^6 ꝛc. Nr. 24.) ein anderes Polynom von folgender Form erhält

$$\xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi''''$$

in welchem

$$\begin{aligned}\xi = {} & x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x''''^5 + x^{V5} + 120x'x''x'''x''''x^V \\ & + 20(x'^3(x''x^V + x'''x'''') + x''^3(x'x''' + x''''x^V) \\ & \quad + x'''^3(x'x^V + x''x'''') + x''''^3(x'x'' + x'''x^V) \\ & \quad + x^{V3}(x'x'''' + x''x''')) \\ & + 30(x'(x''^2x^{V2} + x'''^2x''''^2) + x''(x'^2x'''^2 + x''''^2x^{V2}) \\ & \quad + x'''(x'^2x^{V2} + x''^2x''''^2) + x''''(x'^2x''^2 + x'''^2x^{V2}) \\ & \quad + x^V(x'^2x''''^2 + x''^2x'''^2))\end{aligned}$$

 $\xi' =$

$$\mathfrak{z}' = 5({x'}^4x'' + {x''}^4x''' + {x'''}^4x'''' + {x''''}^4x^{V} + {x^{V}}^4x') + \text{ꝛc.}$$
ꝛc.

Man erhält also sogleich

$$T = 5\mathfrak{z} + m^5.$$

Betrachtet man aber den Ausdruck für $\mathfrak{z}$, so bemerkt man, daß die Glieder

$$x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x''''^5 + x^{V5} + 120x'x''x'''x''''x^{V}$$

unmittelbar durch die Coefficienten m, n, ꝛc. der gegebenen Gleichung ausgedruckt werden können; und es ist nicht schwer zu finden, daß der Werth dieser Glieder

$$-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q-n^2) + 5np - 125r$$

seyn werde.

Setzet man nun, um die Rechnung einfacher zu machen

$$\begin{aligned} z = {} & 2({x'}^3(x''x^{V} + x'''x'''') + {x''}^3(x'x''' + x''''x^{V}) \\ & + {x'''}^3(x''x'''' + x'x^{V}) + {x''''}^3(x'''x^{V} + x'x'') \\ & + {x^{V}}^3(x'x'''' + x''x''')) \\ & + 3(x'({x''}^2{x^{V}}^2 + {x'''}^2{x''''}^2) + x''({x'}^2{x'''}^2 + {x''''}^2{x^{V}}^2) \\ & + x'''({x''}^2{x''''}^2 + {x'}^2{x^{V}}^2) + x''''({x'''}^2{x^{V}}^2 + {x'}^2{x''}^2) \\ & + x^{V}({x'}^2{x''''}^2 + {x''}^2{x'''}^2)) \end{aligned}$$

so wird

$$T = 50z - 4m^5 + 25(m^3n - m^2p + m(q-n^2) + np - 25r)$$

und man wird finden, daß die Größe z nicht mehr als folgende sechs Werthe erhalten kann, welche wir durch z', z'', z''', z'''', z^{V}, z^{VI} bezeichnen wollen,

$$\begin{aligned} z' = {} & 2({x'}^3(x''x^{V} + x'''x'''') + {x''}^3(x'x''' + x''''x^{V}) \\ & + {x'''}^3(x''x'''' + x'x^{V}) + {x''''}^3(x'''x^{V} + x'x'') \\ & + {x^{V}}^3(x'x'''' + x''x''')) \\ & + 3(x'({x''}^2{x^{V}}^2 + {x'''}^2{x''''}^2) + x''({x'}^2{x'''}^2 + {x''''}^2{x^{V}}^2) \\ & + x'''({x''}^2{x''''}^2 + {x'}^2{x^{V}}^2) + x''''({x'''}^2{x^{V}}^2 + {x'}^2{x''}^2) \\ & + x^{V}({x'}^2{x''''}^2 + {x''}^2{x'''}^2)), \end{aligned}$$

$z'' =$

$$
\begin{aligned}
z'' = {} & 2(x'^3(x''x'''' + x'''x^{\mathrm{v}}) + x''^3(x'x''' + x''''x^{\mathrm{v}}) \\
& + x'''^3(x''x^{\mathrm{v}} + x'x'''') + x^{\mathrm{v}3}(x'''x'''' + x'x'') \\
& + x''''^3(x'x^{\mathrm{v}} + x''x''')) \\
& + 3(x'(x''^2x'''^2 + x'''^2x^{\mathrm{v}2}) + x''(x'^2x''^2 + x''''^2x^{\mathrm{v}2}) \\
& + x'''(x''^2x^{\mathrm{v}2} + x'^2x''''^2) + x^{\mathrm{v}}(x'''^2x''''^2 + x'^2x''^2) \\
& + x''''(x'^2x^{\mathrm{v}2} + x''^2x'''^2)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z''' = {} & 2(x'^3(x''x^{\mathrm{v}} + x'''x'''') + x''^3(x'x'''' + x'''x^{\mathrm{v}}) \\
& + x''''^3(x''x''' + x'x^{\mathrm{v}}) + x'''^3(x''''x^{\mathrm{v}} + x'x'') \\
& + x^{\mathrm{v}3}(x'x''' + x''x'''')) \\
& + 3(x'(x''^2x^{\mathrm{v}2} + x'''^2x''''^2) + x''(x'^2x''''^2 + x'''^2x^{\mathrm{v}2}) \\
& + x''''(x''^2x'''^2 + x'^2x^{\mathrm{v}2}) + x'''(x''''^2x^{\mathrm{v}2} + x'^2x''^2) \\
& + x^{\mathrm{v}}(x'^2x'''^2 + x''^2x''''^2)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z'''' = {} & 2(x'^3(x''x''' + x''''x^{\mathrm{v}}) + x''^3(x'x'''' + x'''x^{\mathrm{v}}) \\
& + x''''^3(x''x^{\mathrm{v}} + x'x'') + x^{\mathrm{v}3}(x'''x'''' + x'x'') \\
& + x'''^3(x'x^{\mathrm{v}} + x''x'''')) \\
& + 3(x'(x''^2x'''^2 + x''''^2x^{\mathrm{v}2}) + x''(x'^2x''''^2 + x'''^2x^{\mathrm{v}2}) \\
& + x''''(x''x^{\mathrm{v}2} + x'^2x'''^2) + x^{\mathrm{v}}(x'''^2x''''^2 + x'^2x''^2) \\
& + x'''(x'^2x^{\mathrm{v}2} + x''^2x''''^2)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z^{\mathrm{v}} = {} & 2(x'^3(x''x''' + x''''x^{\mathrm{v}}) + x''^3(x'x^{\mathrm{v}} + x'''x'''') \\
& + x^{\mathrm{v}3}(x''x'''' + x'x''') + x''''^3(x'''x^{\mathrm{v}} + x'x'') \\
& + x'''^3(x'x'''' + x''x^{\mathrm{v}})) \\
& + 3(x'(x''^2x'''^2 + x''''^2x^{\mathrm{v}2}) + x''(x'^2x^{\mathrm{v}2} + x'''^2x''''^2) \\
& + x^{\mathrm{v}}(x''^2x''''^3 + x'^2x'''^2) + x''''(x'''^2x^{\mathrm{v}2} + x'^2x''^2) \\
& + x'''(x'^2x''''^2 + x''^2x^{\mathrm{v}2})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z^{\mathrm{vi}} = {} & 2(x'^3(x''x'''' + x'''x^{\mathrm{v}}) + x''^3(x'x^{\mathrm{v}} + x'''x'''') \\
& + x^{\mathrm{v}3}(x''x''' + x'x'''') + x'''^3(x''''x^{\mathrm{v}} + x'x'') \\
& + x''''^3(x'x''' + x''x^{\mathrm{v}})) \\
& + 3(x'(x''^2x''''^2 + x'''^2x^{\mathrm{v}2}) + x''(x'^2x^{\mathrm{v}2} + x'''^2x''''^2) \\
& + x^{\mathrm{v}}\,x''^2x'''^2 + x'^2x''''^2) + x'''(x''''^2x^{\mathrm{v}2} + x'^2x''^2) \\
& + x''''(x'^2x'''^2 + x''^2x^{\mathrm{v}2})).
\end{aligned}
$$

 Man

Man mache in diesen Formeln mit den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. welche Verwechselungen man will, so wird sich zeigen, daß immer dieselben Formeln wieder herauskommen. Hieraus folgt aber, daß die sechs Größen z', z'', z''', ꝛc. nothwendig die Wurzeln einer Gleichung vom sechsten Grade seyn werden, welche also von folgender Form seyn wird

$$z^6 - Az^5 + Bz^4 - Cz^3 + Dz^2 - Ez + F = 0$$

deren Wurzeln also zu Folge der bekannten Regeln bestimmt werden können.

So hat man z. B. $A = z' + z'' + z''' + z'''' + z^{v} + z^{vi}$, das heißt

$$\begin{aligned}
A = {} & 4x'^3\,(x''x''' + x''x^{iv} + x''x^{v} + x'''x^{iv} + x'''x^{v} + x^{iv}x^{v}) \\
& + 4x''^3\,(x'x''' + x'x^{iv} + x'x^{v} + x'''x^{iv} + x'''x^{v} + x^{iv}x^{v}) \\
& + 4x'''^3\,(x'x'' + x'x^{iv} + x'x^{v} + x''x^{iv} + x''x^{v} + x^{iv}x^{v}) \\
& + 4x^{iv\,3}\,(x'x'' + x'x''' + x'x^{v} + x''x''' + x''x^{v} + x'''x^{v}) \\
& + 4x^{v\,3}\,(x'x'' + x'x''' + x'x^{iv} + x''x''' + x''x^{iv} + x'''x^{v}) \\
& + 6x'\,((x''x''')^2 + (x''x^{iv})^2 + (x''x^{v})^2 + (x'''x^{iv})^2 \\
& \qquad + (x'''x^{v})^2 + (x^{iv}x^{v})^2). \\
& + 6x''\,((x'x''')^2 + (x'x^{iv})^2 + (x'x^{v})^2 + (x'''x^{iv})^2 \\
& \qquad + (x'''x^{v})^2 + (x^{iv}x^{v})^2) \\
& + 6x'''\,((x'x'')^2 + (x'x^{iv})^2 + (x'x^{v})^2 + (x''x^{iv})^2 \\
& \qquad + (x''x^{v})^2 + (x^{iv}x^{v})^2) \\
& + 6x''''\,((x'x'')^2 + (x'x''')^2 + (x'x^{v})^2 + (x''x''')^2 \\
& \qquad + (x''x^{v})^2 + (x'''x^{v})^2) \\
& + 6x^{v}\,((x'x'')^2 + (x'x''')^2 + (x'x^{iv})^2 + (x''x''')^2 \\
& \qquad + (x''x^{iv})^2 + (x'''x^{iv})^2)
\end{aligned}$$

Es ist aber in der gegebenen Gleichung

$$\begin{aligned}
-m &= x' + x'' + x''' + x'''' + x^{v} + x^{vi}, \\
n &= x'x'' + x'x''' + x'x^{iv} + x'x^{v} + x''x''' + x''x^{iv} \\
& \quad + x''x^{v} + x'''x^{iv} + x'''x^{v} + x^{iv}x^{v};
\end{aligned}$$

daher erhalten die fünf ersten Glieder des Ausdrucks für A folgenden Werth

$$\begin{aligned}
&4n(x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x''''^3 + x^{v3})\\
&+ 4m(x'^4 + x''^4 + x'''^4 + x''''^4 + x^{v4})\\
&+ 4(x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x''''^5 + x^{v5})\\
= \;&4n(-m^3 + 3mn - 3p)\\
&+ 4m(m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2)\\
&+ 4(-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) - 5r + 5np).
\end{aligned}$$

Den Werth der fünf letzten Glieder der Größe A zu finden, muß man zuerst den Werth folgender Größe suchen

$$\begin{aligned}
&(x'x'')^2 + (x'x''')^2 + (x'x'^v)^2 + (x'x^v)^2 + (x''x''')^2\\
&+ (x''x'^v)^2 + (x''x^v)^2 + (x'''x'^v)^2 + (x'''x^v)^2 + (x'^vx^v)^2
\end{aligned}$$

welche wir zur Abkürzung l nennen wollen. Quadriret man nun den Werth von n, so erhält man

$$\begin{aligned}
n^2 = \;&l + 2n(x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x'^{v2} + x^{v2})\\
&+ 2m(x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x'^{v3} + x^{v3})\\
&+ 2(x'^4 + x''^4 + x'''^4 + x'^{v4} + x^{v4})\\
= \;&l + 2n(m^2 - 2n) + 2m(-m^3 + 3mn - 3p)\\
&+ 2(m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2),
\end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned}
l = \;&n^2 - 2n(m^2 - 2n) - 2m(-m^3 + 3mn - 3p)\\
&- 2(m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2).
\end{aligned}$$

Nunmehr ist es nicht schwer zu finden, daß der Werth der fünf letzten Glieder in dem Ausdrucke für A, seyn werde

$$\begin{aligned}
&6l(x' + x'' + x''' + x'^v + x^v)\\
&- 6(m^2 - 2n)(x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x'^{v3} + x^{v3})\\
&+ 6(x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x'^{v5} + x^{v5})\\
= &- 6lm - 6(m^2 - 2n)(-m^3 + 3mn - 3p)\\
&+ 6(-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) - 5r + 5np).
\end{aligned}$$

Vereiniget man alle diese Größen, so erhält man endlich

$$\begin{aligned}
A = &-6mn(3n - 2m^2) + 2(8n + 3m^2)(-m^3 + 3mn - 3p)\\
&+ 16m(m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2)\\
&+ 10(-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) - 5r + 5np)
\end{aligned}$$

Auf eine ähnliche Art wird man den Werth jedes andern Coefficienten B, C, ꝛc. der Gleichung z finden können, und man wird dabey die Rechnung sehr abkürzen können, wenn man die Regeln anwendet, welche Cramer gegen das Ende seiner Introduction à l'analyse des lignes courbes gegeben hat, um die Summe von den Produkten der Wurzeln jeder Gleichung zu berechnen, wenn man diese Wurzeln zweye und zweye, oder dreye und dreye ꝛc. verbindet, und jede zu irgend einer gegebenen Potenz erhebt. Wir wollen uns aber in die Ausführung dieser Rechnung nicht einlassen, die, außer der großen Weitläuftigkeit derselben dennoch keinen Aufschluß über die Auflösung der Gleichungen vom 5ten Grade geben würde; denn da die reducirte Gleichung für z vom sechsten Grade ist, so wird sie nicht auflösbar seyn, woferne sie sich nicht auf einen niedrigern Grad als den fünften bringen lässet. Dies scheint mir aber nach der Form der Wurzeln z', z'', ꝛc. dieser Gleichung, beynahe unmöglich.

75.

Wir haben von Nr. 70. bis jetzt vorausgesetzt, daß der Exponent μ der gegebenen Gleichung eine Primzahl sey; wir wollen nunmehr den Fall, wenn μ eine zusammengesetzte Zahl ist, untersuchen.

In diesem Falle ist es durch ähnliche Schlüsse als Nr. 59, leicht zu beweisen, daß die Sätze der eben angeführten und folgenden Nrn, nur in so ferne Statt finden werden, in so ferne man für α, blos die Potenzen α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, ꝛc. substituiret, deren Exponenten ν, π, ϱ, ꝛc. relative Primzahlen gegen μ sind. Hieraus folgt

1) daß, wenn man die Anzahl der eben genannten Coefficienten ν, π, ϱ, ꝛc. durch $\lambda - 1$ bezeichnet, die Gleichung

für

für ϑ, welche allgemein von dem Grade $1.2.3\ldots(\mu-1)$ war, in $\frac{1.2.3\ldots(\mu-1)}{\lambda}$ Gleichungen, jede von dem Grade λ auflösbar seyn wird; ihre Form wird seyn

$$\vartheta^{\lambda} - T\vartheta^{\lambda-1} + U\vartheta^{\lambda-2} - X\vartheta^{\lambda-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

und die Coefficienten T, U, X, ꝛc. werden jeder durch eine Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3\ldots(\mu-1)}{\lambda}$ gegeben werden.

2) Wenn man die λ Wurzeln dieser Gleichung für ϑ, durch ϑ', ϑ'', ϑ''', ꝛc. bezeichnet, so werden die Größen

$$\frac{\sqrt[\mu]{\vartheta'}}{\mu},\ \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta''}}{\mu},\ \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta'''}}{\mu}\ \text{ꝛc.}$$

die Werthe derjenigen Coefficienten k, g, h, ꝛc. c, b ausdrücken, deren Stelle, wenn man von k anfängt, durch die Zahlen 1, ν, π, ϱ, ꝛc. welche gegen μ relative Primzahlen sind, angezeigt wird; so daß alle diese Coefficienten durch eine einzige Gleichung bestimmt werden.

3) Um die Coefficienten T, U, X, ꝛc. nach der Nr. 71. vorgetragenen Methode zu finden, wird man zu der Eliminirung von y, nicht die Gleichung (g) Nr. 57. sondern die Gleichung (i) brauchen müssen, welche man nach der Nr. 60. beschriebenen Methode findet, und wovon die Wurzeln α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, ꝛc. sind. Will man demnach die gesuchten Coefficienten nach Nr. 72. bestimmen, so muß man zuerst vermittelst der Gleichung (i), die Summe der Wurzeln α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, ꝛc., ihrer Quadrate, ihrer Würfel u. s. f. suchen, welche wir mit S', S'', S''', ꝛc. bezeichnen wollen. Erhebt man nun nach und nach das Polynom

$$\xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{ꝛc.} + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

zu der 2ten, 3ten Potenz ꝛc., und bezeichnet man diese Potenzen durch

$$\begin{array}{l} \xi2 + \alpha\xi'2 + \alpha^2\xi''2 + \alpha^3\xi'''2 + \text{ꝛc.} \\ \xi3 + \alpha\xi'3 + \alpha^2\xi''3 + \alpha^3\xi'''3 + \text{ꝛc.} \\ \text{ꝛc.} \end{array}$$

so ergeben sich folgende Größen

$$\begin{array}{l} \lambda\xi + S'\xi' + S''\xi'' + S'''\xi''' + \text{ꝛc.} \\ \lambda\xi2 + S'\xi'2 + S''\xi''2 + S'''\xi'''2 + \text{ꝛc.} \\ \lambda\xi3 + S'\xi'3 + S'\xi''3 + S'''\xi'''3 + \text{ꝛc.} \\ \text{ꝛc.} \end{array}$$

für die Summen der 1sten, 2ten, 3ten, ꝛc. Potenzen, von den Wurzeln ϑ', ϑ'', ϑ''', ꝛc. Und hierdurch findet man endlich nach den bekannten Regeln

$$\begin{array}{rl} T = & \lambda\xi + S'\xi' + S''\xi'' + S'''\xi''' + \text{ꝛc.} \\ U = & \frac{1}{2}T(\lambda\xi + S'\xi' + S''\xi'' + \text{ꝛc.}) \\ & - \frac{1}{2}(\lambda\xi2 + S'\xi'2 + S''\xi''2 + \text{ꝛc.}) \\ X = & \frac{1}{3}U(\lambda\xi + S'\xi' + S''\xi'' + \text{ꝛc.}) \\ & - \frac{1}{3}T(\lambda\xi2 + S'\xi'2 + S''\xi''2 + \text{ꝛc.}) \\ & + \frac{1}{3}(S\xi3 + S'\xi'3 + S''\xi''3 + \text{ꝛc.}) \\ Y = & \text{ꝛc.} \end{array}$$

76.

Um nun auch die Werthe der übrigen Coefficienten zu finden, deren Stellen in der Reihe k, h, g, ꝛc. c, b durch solche Zahlen angezeigt wird, welche gegen μ commensurabel sind, so wollen wir allgemein annehmen, daß $\mu = \nu\pi$ sey, und daß man unter den gesuchten Coefficienten diejenigen bestimmen wollte, deren Stellen durch ein Vielfaches von ν angezeiget werden. Bezeichnet man nun zur Abkürzung diese Coefficienten mit

$a^{(\nu)}$

$$\frac{a^{(\nu)}}{\mu}, \quad \frac{a^{(2\nu)}}{\mu}, \quad \frac{a^{(3\nu)}}{\mu} \text{ rc.}$$

und setzet $\alpha^\nu = \omega$, so wird man aus dem was Nr. 68. gesagt worden, leicht übersehen, daß

$$a^{(\nu)} = x' + \omega x'' + \omega^2 x''' + \omega^3 x'''' + \text{rc.} + \omega^{\mu-1} x^{(\mu)}$$

seyn werde; und um die übrigen Größen $a^{(2\nu)}$, $a^{(3\nu)}$, rc. zu erhalten, wird nichts nöthig seyn, als ω nach und nach mit ω^2, ω^3, rc. zu vertauschen.

Um diese Rechnung, mit der Nr. 69. ähnlich zu machen, sey

$$t = x' + \omega x'' + \omega^2 x''' + \omega^3 x'''' + \text{rc.} + \omega^{\mu-1} x^{(\mu)}$$

und man untersuche nun von welcher Beschaffenheit eine Gleichung für t seyn werde.

In dieser Absicht bemerke man zuerst; da $\omega = \alpha^\nu$, so wird $\omega^\pi = \alpha^{\pi\nu} = \alpha^\mu = 1$ seyn, und daher $\omega^{\pi+1} = \omega$, $\omega^{\pi+2} = \omega^2$ rc. Und überhaupt, da $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, rc. $\alpha^{\mu-1}$ die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$ sind, so werden die Potenzen $1, \omega, \omega^2, \omega^3$, rc. $\omega^{\pi-1}$ die Wurzeln der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$ seyn (Nr. 24.)

Versetzt man demnach diejenigen Potenzen von ω, welche höher als $\omega^{\pi-1}$ sind, in die Klasse der niedrigern Potenzen, so wird die Gleichung für t folgende Form erhalten

$$t = z' + \omega z'' + \omega^2 z''' + \omega^3 z'''' + \text{rc.} + \omega^{\pi-1} z^{(\pi)}$$

vorausgesetzt daß

$z' =$

$$z' = x' + x^{(\pi+1)} + x^{(2\pi+1)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+1)}$$
$$z'' = x'' + x^{(\pi+2)} + x^{(2\pi+2)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+2)}$$
$$z''' = x''' + x^{(\pi+3)} + x^{(2\pi+3)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+3)}$$
ꝛc.
$$z^{(\pi)} = x^{(\pi)} + x^{(2\pi)} + x^{(3\pi)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu)}.$$

77.

Betrachtet man nun die Gleichung für t in ihrer völligen Allgemeinheit, so ist klar, daß sie von dem Grade $1.2.3\ldots\mu$ seyn muß, weil eben so viele Verwechselungen unter den μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. möglich sind, von denen jede einen eigenen Werth für t giebt. Finden sich aber unter diesen Werthen, solche die gleich sind, so braucht man sie nicht zu unterscheiden, und kann dadurch die Gleichung auf einen niedrigern Grad bringen; dies wird aber genau derjenige seyn, welcher in gegenwärtigen Fall Statt findet.

Es ist aber augenscheinlich, daß die Größe z' unverändert bleiben wird, was man auch für Verwechselungen mit den ν Wurzeln x', $x^{(\pi+1)}$, $x^{(2\pi+1)}$, ꝛc. machen mag. Da nun ν Dinge $1.2.3\ldots\nu$ Verwechselungen zulassen, so folget, daß unter den $1.2.3\ldots\mu$ Werthen von t, sich jeder $1.2.3\ldots\nu$ mahl finden wird, so daß sich unter allen diesen Werthen wirklich nicht mehr als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu}$ von einander unterschiedene finden werden.

Betrachtet man ferner die Größe z'', so läßt sich auf eben dieselbe Art erweisen, daß man jeden dieser letzteren Werthe $1.2.3\ldots\nu$ mahl wiederholet finden wird; und hierdurch

durch beschränkt sich die Anzahl der verschiedenen Werthe auf $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^2}$.

Setzet man diese Schlüsse auch bey den übrigen Größen z''', z'''', ꝛc. $z^{(\pi)}$ fort, so ergiebt sich zuletzt, daß die Anzahl der verschiedenen Werthe von t nicht größer als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^\pi}$ seyn kann; so daß die Gleichung für t den Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^\pi}$ nicht übersteigen kann.

78.

Vergleichet man nun, dies vorausgesetzt, den obigen Ausdruck für t, mit dem Nr. 69, so wird man leicht bemerken, daß hier in Absicht der Verwechselungen der Größen z', z'', z''', ꝛc. ähnliche Bemerkungen statt finden; woraus sich folgende Schlüsse ergeben.

1) Wenn π eine Primzahl ist, so kann die Gleichung für t bloß solche Potenzen von t enthalten, welche Vielfache von π sind. Setzt man also $t^\pi = \vartheta$, so erhält man für ϑ eine Gleichung von dem Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{\pi(1.2.3\ldots\nu)^\pi}$.

2) Diese Gleichung wird jederzeit auflösbar seyn in $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(\pi-1)\pi(1.2.3\ldots\nu)^\pi}$ Gleichungen von der Form

$$\vartheta^{\pi-1} - T\vartheta^{\pi-2} + U\vartheta^{\pi-3} - X\vartheta^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

in welcher die Coefficienten T, U, X, ꝛc. blos von einer Gleichung von dem Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(\pi-1)\pi(1.2.3\ldots\nu)^{\pi}}$ abhängen werden.

3) Bezeichnet man nun die $\pi - 1$ Wurzeln der obigen Gleichung durch ϑ', ϑ'', ϑ''', ꝛc., so werden die Größen

$$\frac{\sqrt[\pi]{\vartheta'}}{\mu},\ \frac{\sqrt[\pi]{\vartheta''}}{\mu},\ \frac{\sqrt[\pi]{\vartheta'''}}{\mu}\ \text{ꝛc.}\ \frac{\sqrt[\pi]{\vartheta^{(\pi-1)}}}{\mu}$$

die Werthe derjenigen Coefficienten k, h, g, ꝛc. c, b, ausdrücken, welche in dieser Reihe, die 1ste, (2ν)te, (3ν)te ꝛc. bis $(\mu-\nu)$te Stelle einnehmen, oder, welches mit den vorigen auf eines hinausläuft (weil μ die Anzahl aller Coefficienten a, b, c, ꝛc. k, ist), die Werthe derjenigen Coefficienten welche in der Reihe a, b, c, ꝛc. k, eben dieselben Stellen einnehmen.

4) Um die Werthe der Coefficienten T, U, X, ꝛc. zu bestimmen, wird man sich völlig der Methoden Nr. 71 und 72 bedienen können, wenn man nur überall den Exponenten π, anstatt μ brauchet.

5) Wenn π keine Primzahl ist, so leiden die bisherigen Schlüsse Abänderungen, welche durch die Natur der Zahl π bestimmt werden. Man wird dieselben leicht durch ähnliche Betrachtungen als Nr. 75. finden können.

79.

Es erhellet also, aus den vorgetragenen Schlüssen, daß wenn der Exponent der gegebenen Gleichung μ eine zusammengesetzte Zahl ist, die Coefficienten b, c, d, ꝛc. nicht Wurzeln einer einzigen Gleichung seyn können, so wie dies der Fall war, wenn μ eine Primzahl ist. Es werden vielmehr diese

diese Coefficienten von verschiedenen Gleichungen abhängen, je nachdem ihre Stellen in der Reihe a, b, c, d. ꝛc. durch Zahlen angezeigt werden, deren größtes gemeinschaftliches Maaß mit μ verschieden ist.

Indessen wird es nicht nöthig seyn, alle diese verschiedene Gleichungen zu suchen und aufzulösen; denn die Coefficienten von welchen wir reden, hängen gegenseitig einer von dem andern ab, so daß man, so bald einer dieser Werthe gefunden ist, leicht die übrigen daraus ableiten kann. In der That, wenn man annimmt, daß y aus der Gleichung (k) Nr. 65, vermittelst der Gleichung $y^{\mu} - 1 = 0$ eliminiret sey, und wenn man nun die hieraus entspringende Gleichung Glied vor Glied, mit der gegebenen vergleichet, so erhält man so viele Gleichungen als man unbestimmte Coefficienten a, b, c, ꝛc. hat, durch welche man jeden dieser Coefficienten wird bestimmen können. Nimmt man aber den ersten Coefficienten a aus, welcher durch eine Gleichung gegeben wird, in welcher sich nichts von den übrigen unbekannten Größen befindet, so werden alle übrigen unbekannten Coefficienten b, c, d, ꝛc. in diesen Gleichungen unter einander vermischt seyn; so daß man nach der gewöhnlichen Eliminationsmethode, den Werth jeder dieser unbekannten Größen, durch jede andere wird bestimmen können. Man wird daher hier ähnliche Betrachtungen als Nr. 58. anstellen können.

80.

Bezout trägt, um den Gebrauch seiner Methode, wenn μ eine zusammengesetzte Zahl ist, leichter und einfacher zu machen, noch eine zweyte Methode vor, welche einigermaßen allgemeiner zu seyn scheint, als die erste, welche aber dennoch im Grunde mit der ersten auf eines hinausläuft, wie wir sogleich zeigen werden.

Wenn der Exponent μ der gegebenen Gleichung ein Produkt $\nu\pi$, zweyer Zahlen ν und π ist, so nimmt man zu Folge dieser Methode zwey Gleichungen von folgender Form an

$$x^\nu - (a + by + cy^2 + dy^3 + \text{ꝛc.} + ky^{\pi-1})x^{\nu-1} \ldots (\mathrm{I})$$
$$+ (a' + b'y + c'y^2 + d'y^3 + \text{ꝛc.} + k'y^{\pi-1})x^{\nu-2}$$
$$- (a'' + b''y + c''y^2 + d''y^3 + \text{ꝛc.} + k''y^{\pi-1})x^{\nu-3}$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$\pm (a^{(\nu-1)} + b^{(\nu-1)}y + c^{(\nu-1)}y^2 + d^{(\nu-1)}y^3 + \text{ꝛc.}$$
$$+ k^{(\nu-1)}y^{\pi-1}) = 0$$

und $y^\pi - 1 = 0$.

Eliminiret man nun y, so erhält man eine Endgleichung für x, von dem Grade $\nu\pi$, welche man Glied vor Glied mit der gegebenen vergleichen muß. Hierdurch erhält man $\nu\pi$ Gleichungen zwischen den Coefficienten a, b, c, ꝛc. a', b', c', ꝛc. deren Anzahl gleichfalls $\nu\pi$ ist, so daß man durch dieselben jeden dieser Coefficienten bestimmen kann.

Da aber die Gleichung $y^\pi - 1 = 0$, π Werthe von y giebt, so erhält man durch die successive Substitution dieser Werthe, eben so viele Gleichungen für x, jede von dem Grade ν, hieraus lassen sich $\pi\nu$ Werthe von x ableiten, welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung seyn werden.

Aus der Nr. 13. vorgetragenen Theorie der Elimination ist deutlich, daß diejenige Gleichung, welche man aus den beyden obigen durch die Eliminirung von y erhält, nichts anders seyn werde, als das Produkt aller Gleichungen (I), welche

welche man erhält, wenn man in dieſer Gleichung, ſtatt y, die π Wurzeln der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$ ſetzet. Das Weſentliche dieſer Methode beſtehet alſo in der Auflöſung der gegebenen Gleichung von dem Grade $\nu\pi$, in π Gleichungen vom νten Grade, und zwar vermittelſt einer Gleichung des πten Grades, von der Form $y^\pi - 1 = 0$

Alle Schwierigkeit beſtehet hier in der Beſtimmung der unbekannten Coefficienten a, b, c, 2c. a′, b′, c′, 2c. Daher wird es nützlich ſeyn, die Natur der Gleichungen, durch welche dieſe Größen beſtimmt werden müſſen, a priori zu unterſuchen.

81.

Wir wollen alſo annehmen, daß die gegebene Gleichung von dem Grade $\mu = \nu\pi$, deren Wurzeln x', x'', x''', 2c. ſeyn ſollen, das Produkt von folgenden π Gleichungen ſey,

$$x^\nu - z' x^{\nu-1} + u' x^{\nu-2} - v' x^{\nu-3} + \text{2c.} = 0$$
$$x^\nu - z'' x^{\nu-1} + u'' x^{\nu-2} - v'' x^{\nu-3} + \text{2c.} = 0$$
$$x^\nu - z''' x^{\nu-1} + u''' x^{\nu-2} - v''' x^{\nu-3} + \text{2c.} = 0$$
$$\text{2c.}$$
$$x^\nu - z^{(\pi)} x^{\nu-1} + u^{(\pi)} x^{\nu-2} - v^{(\pi)} x^{\nu-3} + \text{2c.} = 0$$

ſo wird jede dieſer Gleichungen ν Wurzeln der gegebenen Gleichung enthalten. Theilet man nun die ſämtlichen μ Wurzeln x', x'', x''', 2c. $x^{(\mu)}$ in π Syſteme, jedes von ν Wurzeln, z. B. auf folgende Art

$$x',\quad x^{(\pi+1)},\quad x^{(2\pi+1)} + \text{2c.} + x^{(\mu-\pi+1)}$$
$$x'',\quad x^{(\pi+2)},\quad x^{(2\pi+2)} + \text{2c.} + x^{(\mu-\pi+2)}$$
$$x''',\quad x^{(\pi+3)},\quad x^{(2\pi+3)} + \text{2c.} + x^{(\mu-\pi+3)}$$
$$\text{2c.}$$

$$x^{(\pi)},\ x^{(2\pi)},\ x^{(3\pi)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu)};$$

so wird vermöge der Natur der Gleichungen $z' =$ der Summe, $u' =$ der Summe aller Produkte von je zweyen, $v' =$ der Summe aller Produkte von je dreyen ꝛc. der Wurzeln x', $x^{(\pi+1)}$, $x^{(2\pi+1)}$ ꝛc. $x^{(\mu-\pi+1)}$ seyn; eben so wird $z'' =$ der Summe, $u'' =$ der Summe aller Produkte von je zweyen, $v'' =$ der Summe aller Produkte von je dreyen ꝛc. der Wurzeln x'', $x^{(\pi+2)}$, $x^{(2\pi+2)}$, ꝛc. $x^{(\mu-\pi+2)}$ seyn, u. s. f.

Bezeichnet man aber die π Wurzeln der Gleichung $y^{\pi} - 1 = 0$, mit $1, \omega, \varphi, \psi$, ꝛc. so erhält man (nach der vorigen Nr.)

$$\begin{aligned}
a + b + c + d + \text{ꝛc.} + k &= z' \\
a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 + \text{ꝛc.} + k\omega^{\pi-1} &= z'' \\
a + b\varphi + c\varphi^2 + d\varphi^3 + \text{ꝛc.} + k\varphi^{\pi-1} &= z''' \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

desgleichen

$$\begin{aligned}
a' + b' + c' + d' + \text{ꝛc.} + k' &= u' \\
a' + b'\omega + c'\omega^2 + d'\omega^3 + \text{ꝛc.} + k'\omega^{\pi-1} &= u'' \\
a' + b'\varphi + c'\varphi^2 + d'\varphi^3 + \text{ꝛc.} + k'\varphi^{\pi-1} &= u''' \\
&\text{ꝛc.} \\
&\text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Da nun vermöge der Natur der Gleichung $y^{\pi} - 1 = 0$ in welcher alle Mittelglieder fehlen

$$\begin{aligned}
1 + \omega + \varphi + \psi + \text{ꝛc.} &= 0 \\
1 + \omega^2 + \varphi^2 + \psi^2 + \text{ꝛc.} &= 0 \\
1 + \omega^3 + \varphi^3 + \psi^3 + \text{ꝛc.} &= 0 \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

so

ſo wird man die Größen $a, b, c,$ ꝛc. k, $a', b',$ ꝛc. $k', a'',$ ꝛc. auf ähnliche Art als Nr. 67. beſtimmen können, und auf dieſe Art erhält man

$$\pi a = z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.} + z^{(\pi)}$$

$$\pi b = z' + \omega^{\pi - 1} z'' + \phi^{\pi - 1} z''' + \text{ꝛc.}$$

$$\pi c = z' + \omega^{\pi - 2} z'' + \phi^{\pi - 2} z''' + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

ferner

$$\pi a' = u' + u'' + u''' + \text{ꝛc.} + u^{(\pi)}$$

$$\pi b' = u' + \omega^{\pi - 1} u'' + \phi^{\pi - 1} u''' + \text{ꝛc.}$$

$$\pi c' = u' + \omega^{\pi - 2} u'' + \phi^{\pi - 2} u''' + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

u. ſ. f.

82.

Wir wollen nunmehr die Werthe der Größen $a, b, c,$ ꝛc. k unterſuchen. Hier fällt es ſogleich in die Augen, daß πa der Summe aller Wurzeln $x', x'', x''',$ ꝛc. $x^{(\mu)}$ gleich iſt; ſo daß $\pi a = - m$, folglich $a = - \frac{m}{\pi}$.

Setzt man ferner $\omega^2, \omega^3,$ ꝛc. anſtatt $\phi, \psi,$ ꝛc., ſo daß die Wurzeln der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$ durch $1, \omega, \omega^2, \omega^3,$ ꝛc. $\omega^\pi - 1$ vorgeſtellet werden (Nr. 24.); ſo erhält man

$$\pi k = z' + \omega z'' + \omega^2 z''' + \omega^3 z'''' + \text{ꝛc.} + \omega^{\pi - 1} z^{(\pi)}$$

und um die Größen $\pi h, \pi g,$ ꝛc. zu erhalten, wird nichts nöthig ſeyn, als in dieſem Ausdrucke, die Wurzel ω, nach und nach mit $\omega^2, \omega^3,$ ꝛc. zu verwechſeln.

Es iſt aber dieſer Ausdruck für πk, mit dem Ausdrucke für $a^{(\nu)}$ oder t Nr. 76, völlig einerley; folglich werden die

Ausdrücke für ϖh, ϖg, 2c. mit den Ausdrücken für $a^{(2\nu)}$, $a^{(3\nu)}$ 2c. unter eben der Nr., einerley seyn: hieraus folget aber ohne Schwierigkeit, daß die Coefficienten a, b, c, d, 2c. der Gleichung (l) Nr 80 multipliciret durch ϖ, respective gleich seyn werden denenjenigen Coefficienten a, b, c, 2c. der Gleichung (k) Nr. 65, welche in der Reihe a, b, c, 2c. die 1ste, νte, 2νte, 3νte, 2c $(\mu - \nu)$te Stelle einnehmen, wenn jeder mit μ multipliciret wird.

Man wird also auf die Coefficienten a, b, c, 2c. von der obigen Form, eben die Schlüsse anwenden können, welche wir Nr. 76. f. f. gemacht haben.

83.

Was die übrigen Coefficienten a', b', c', 2c. a'', b'', c'', 2c. von der Formel (l) betrift, so kann man sie, wenn man will, von den vorigen, oder blos von einem unter ihnen abhängig machen, welches durch ähnliche Betrachtungen als Nr. 79. erreichet wird, auch wird man nach den Formeln Nr. 81, den Grad, und die Form der Gleichung von welcher jeder dieser Coefficienten unmittelbar abhängen muß, a priori bestimmen können.

In dieser Absicht ist es schon hinreichend zu bemerken, daß die Größen u', u'', u''', 2c. mit den entsprechenden Größen z', z'', z''', 2c. darin analog sind, daß sie Funktionen der nemlichen Wurzeln sind, welche die Eigenschaft haben, daß sie unverändert bleiben, was für Verwechselungen man auch mit jenen Wurzeln vornehmen mag; eben so verhält es sich auch mit den Größen v', v'', v''', 2c.; hieraus folgt aber, daß auf die Coefficienten b', c', d', 2c. b'', c'', d'', 2c. ähnliche

liche Betrachtungen und Schlüsse angewendet werden können, als bey den Coefficienten b, c, d, ꝛc. statt finden.

Was aber die Coefficienten a', a'', ꝛc. betrift, so muß man diese besonders untersuchen. Man wird also zuerst durch ähnliche Schlüsse als Nr. 77. beweisen können, daß jede dieser Größen nicht mehr als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^{\varpi}}$ verschiedene Werthe haben kann; alsdenn wird man bemerken, daß diese Größen, durch Verwechselungen der Größen u', u'', u''' ꝛc. $u^{(\varpi)}$, oder v', v'', v''', ꝛc. $v^{(\varpi)}$, oder ꝛc. keine Veränderung leiden; daher muß man noch die Zahl $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^{\varpi}}$ durch $1.2.3\ldots\varpi$ dividiren, um die Anzahl der verschiedenen Werthe jedes Coefficienten a', a'', ꝛc. zu erhalten; und hieraus folget, daß jeder dieser Coefficienten durch eine partikuläre Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\varpi(1.2.3\ldots\nu)^{\varpi}}$ bestimmt seyn wird.

84.

Wir wollen annehmen, daß die gegebene Gleichung von einem geraden Grade sey, und $\varpi = 2$ setzen, so daß $\mu = 2\nu$ wird. In diesem Fall verwandelt sich die Gleichung $y^{\varpi} - 1 = 0$ in $y^2 - 1 = 0$, deren beyde Wurzeln $y = 1$, und $y = -1$ sind. Es muß also zufolge der vorgetragenen Methode, die gegebene Gleichung

$$x^{2\nu} + mx^{2\nu-1} + nx^{2\nu-2} + px^{2\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

ein Produkt aus folgenden beyden Gleichungen seyn,

$$x^\nu - (a + b)x^{\nu-1} + (a' + b')x^{\nu-2} - (a'' + b'')x^{\nu-3} + \text{etc.} = 0$$

$$x^\nu - (a - b)x^{\nu-1} + (a' - b')x^{\nu-2} - (a'' - b'')x^{\nu-3} + \text{etc.} = 0$$

Alsdenn hat man $a = -\frac{\mu}{2}$, und $b = \frac{z' - z''}{2}$; in welchem Ausdruck

$$z' = x' + x''' + x^{V} + \text{etc.} + x^{2\nu-1}$$

$$z'' = x'' + x^{IV} + x^{VI} + \text{etc.} + x^{2\nu}$$

und man wird finden, daß die Gleichung für b von dem Grad $\frac{1.2.3\ldots2\nu}{(1.2.3\ldots\nu)^2}$, d. i. $\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots2\nu}{1.2.3\ldots\nu}$ seyn, und lauter gerade Coefficienten haben wird.

Nimmt man nun an, daß die gegebene Gleichung folgenden Divisor vom νten Grade habe

$$x^\nu + m'x^{\nu-1} + n'x^{\nu-2} + p'x^{\nu-3} + \text{etc.} = 0$$

so wird man für m' eine Gleichung von dem Grad

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots(2\nu)}{1.2.3\ldots\nu}$$

finden, und dies stimmt mit dem überein was man aus andern Gründen weiß, indem diese Zahl die Anzahl der möglichen Combinationen ausdrückt, welche unter 2ν Dingen möglich sind, wenn man je ν Dinge verbindet.

Und da man, wenn $-m' = a + b = \frac{m}{2} + b$ gesetzt wird, für b eine Gleichung erhalten muß, welche blos gerade Potenzen enthält, so folget, daß die Gleichung für m' von solcher Beschaffenheit seyn wird, daß wenn man darin das zweyte Glied auf Null bringt, zugleich in abwechselnder Ordnung

nung die folgenden Glieder mit verschwinden werden, wie wir dieses schon bey den Gleichungen vom vierten Grade Nr. 35. gesehen haben.

85.

Wenn die gegebene Gleichung vom sechsten Grade so daß $\nu = 3$, und man setzet $4b^2 = \vartheta$, so wird man eine Gleichung von dem Grad $\frac{4.5.6}{2.1.2.3} = 10$ erhalten.

Bezout glaubt, daß sich diese Gleichung in zwey Gleichungen werde auflösen lassen, und dies mittelst einer Gleichung vom zweyten Grade; woran ich aber sehr zweifle. In der That werden sich die Wurzeln der Gleichung für ϑ durch folgende zehn Größen vorstellen lassen, welche alle Werthe von $(z' - z'')^2$ enthalten, welche aus Verwechselung der sechs Wurzeln x', x'', x''', rc. entspringen können:

$$(x' + x'' + x''' - x^{\prime v} - x^{v} - x^{v\prime})^2$$
$$(x' + x'' + x^{\prime v} - x''' - x^{v} - x^{v\prime})^2$$
$$(x' + x'' + x^{v} - x^{\prime v} - x''' - x^{v\prime})^2$$
$$(x' + x'' + x^{v\prime} - x^{\prime v} - x^{v} - x''')^2$$
$$(x' + x^{\prime v} + x''' - x'' - x^{v} - x^{v\prime})^2$$
$$(x' + x^{v} + x''' - x^{\prime v} - x'' - x^{v\prime})^2$$
$$(x' + x^{v\prime} + x''' - x^{\prime v} - x^{v} - x'')^2$$
$$(x' + x^{\prime v} + x^{v} - x'' - x''' - x^{v\prime})^2$$
$$(x' + x^{\prime v} + x^{v\prime} - x'' - x''' - x^{v})^2$$
$$(x' + x^{v} + x^{v\prime} - x'' - x''' - x^{\prime v})^2.$$

Nimmt man aber an, daß die beyden Faktoren unserer Gleichung, auf folgende Art vorgestellt werden

$$\vartheta^5 - f\vartheta^4 + g\vartheta^3 - h\vartheta^2 + i\vartheta - k = 0$$
$$\vartheta^5 - f'\vartheta^4 + g'\vartheta^3 - h'\vartheta^2 + i'\vartheta - k' = 0$$

so muß f gleich seyn der Summe von fünf der obigen Größen, f' aber, der Summe der übrigen fünfe: und damit diese Coefficienten keine höheren Wurzelzeichen als von dem zweyten Grade enthalten, so müssen sie die Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grade, von folgender Form seyn

$$y^2 - My + N = 0$$

wo M und N rationale Funktionen der Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung seyn müssen; nun ist $M = f + f'$, und $N = ff'$; so daß sowohl die Summe als das Produkt der beyden Größen f und f' rationale Funktionen von m, n, p, ꝛc., und folglich solche Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. seyn müssen, deren Werth ungeändert bleibt, wie man auch die Wurzeln versetzen mag. Diese Bedingung aber kann nun zwar sehr wohl in Absicht der Summe $f + f'$ statt finden, denn diese ist die Summe aller zehn obigen Größen; aber mit dem Produkt ff' hat es eine andere Bewandniß: denn man kann sich leicht überzeugen, daß wenn man die Summe der obigen zehn Wurzeln, auf irgend eine Art in zwey Partialsummen, jede von fünf Wurzeln theilet, das Produkt dieser zwey Summen, auf keinen Fall die Eigenschaft haben wird, daß es ungeändert bliebe, was man auch für Verwechselungen, mit den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. machte.

Man könnte aber einwenden, daß es vielleicht nicht nothwendig sey, daß die beyden Größen f und f' Wurzeln einer einzigen Gleichung vom zweyten Grade seyn müßten, sondern daß die eine von einer, die andere von einer andern Gleichung abhängen könnte: allein folgendes wird hinreichend seyn diesen Einwurf zu entkräften. Nimmt man an daß f durch folgende Gleichung vom zweyten Grade bestimmt sey $f^2 - Mf + N = 0$, so wird von den beyden Wurzeln dieser Gleichung, nothwendig jede der Summe von

von fünfen der obigen Größen gleich ſeyn; und wenn man dieſe Summen addiret, ſo werden ſie eine Größe M geben müſſen, welche die Eigenſchaft hat, daß ſie bey allen möglichen Verwechſelungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. unverändert bleibt; und dieſes würde nicht ſtatt finden, wofern nicht wenigſtens die beyden Summen von welchen wir reden alle zehn obigen Größen enthielten: wenn demnach die eine, die Summe von fünfen der obigen Größen iſt, ſo muß die andere die Summe der fünf übrigen ſeyn.

Vierter Abſchnitt.

Beſchluß der bisherigen Bemerkungen, nebſt einigen allgemeinen Anmerkungen über die Umformung der Gleichungen, und über ihre Reduction auf einen niedrigern Grad.

86.

Aus der bisher vorgetragenen Analyſe der vornehmſten bekannten Methoden zur Auflöſung der Gleichungen, wird man erſehen haben, daß ſie ſich ſämtlich auf ein einziges allgemeines Princip reduciren, nemlich auf die Erfindung ſolcher Funktionen von den Wurzeln der gegebenen Gleichung, daß 1) die Gleichung, oder die Gleichungen durch welche ſie gegeben werden, d. h. deren Wurzeln ſie ſind (oder die Gleichungen welche wir überhaupt die reducirten nennen) von einem niedrigern Grad als die gegebene Gleichung, oder doch in andere Gleichungen von einem niedrigern Grade auflösbar ſeyn. 2) Daß man vermittelſt derſelben die Werthe der geſuchten Wurzeln leicht finden könne.

Die Kunst, die Gleichungen aufzulösen, bestehet demnach in der Erfindung solcher Funktionen der Wurzeln, welche die eben erwähnten Eigenschaften haben. Aber ist es wohl möglich, für Gleichungen von jedem Grade, d. h. für jede willkührliche Anzahl von Wurzeln, jederzeit dergleichen Funktionen zu finden? Es scheint äußerst schwer über diese Frage im Allgemeinen abzusprechen.

Was diejenigen Gleichungen betrift, welche den vierten Grad nicht übersteigen, so können vielleicht die einfachsten Funktionen, die zu ihrer Auflösung führen, durch folgende allgemeine Formel vorgestellt werden

$$x' + yx'' + y^2x''' + \text{ꝛc.} + y^{\mu-1}x^{(\mu)}$$

in welcher x', x'', x''', ꝛc $x^{(\mu)}$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, die wir von dem Grade μ annehmen; y aber ist irgend eine Wurzel der Gleichung

$$y^{\mu} - 1 = 0$$

nur nicht die Einheit: d. h. y ist irgend eine Wurzel der Gleichung

$$y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \text{ꝛc.} + 1 = 0$$

dies alles folgt aus dem was wir in den beyden ersten Abschnitten, bey der Auflösung der Gleichungen von dem 3ten und 4ten Grade vorgetragen haben.

Was die Gleichungen vom zweyten Grade betrift, die wir bisher bey Seite gesetzt haben, so ist es augenscheinlich, daß sie sich eben dem Princip unterordnen; denn setzt man $\mu = 2$, so erhält man die Funktion $x' + yx''$, und die Gleichung $y + 1 = 0$, giebt $y = -1$, dadurch verwandelt sich die obige Fuktion in $x' - x''$, d. i. in die Differenz der Wurzeln. Es bestehet aber die Kunst Gleichungen vom zweyten Grade aufzulösen blos darin, daß man das zweyte Glied auf

Null

Null bringe, und auf diese Art eine reducirte Gleichung erhalte, welche nichts als das Quadrat der unbekannten Größe enthalte, und daher durch die bloße Ausziehung einer Quadratwurzel auflösbar sey. Da nun die Wegschaffung des zweyten Gliedes in jeder Gleichung erfordert, daß man die Wurzeln, um den mit dem entgegengesetzten Zeichen geschriebenen und durch den Exponenten der Gleichung dividirten Coefficienten dieses Gliedes, d. h um die Summe aller Wurzeln, dividiret durch ihre Anzahl, vermindere; so folgt, daß die reducirte Gleichung für den zweyten Grad zu Wurzeln haben wird, die Differenz der Wurzeln der gegebenen Gleichung, dividiret durch 2; oder vielmehr diese Differenz selbst; vorausgesetzt daß man die Wurzeln der reducirten Gleichung in dem Verhältniß 1 : 2 vergrößere, welches in der Natur dieser Gleichung nichts ändert.

Es scheinet daher als könnte man durch Induction schließen, daß jede Gleichung von jedem Grade, vermittelst einer reducirten Gleichung auflösbar sey, deren Wurzeln durch eben die Formel

$$x' + yx'' + y^2x''' + y^3x^{\prime v} + \text{ꝛc.}$$

vorgestellt werden.

Allein nach dem was wir in dem vorigen Abschnitte bey Gelegenheit der Methoden von Euler und Bezout, welche geradezu auf einerley reducirte Gleichungen führen, gezeigt haben, wird man, wie es scheint, sich überzeugen können, daß dieser Schluß vom fünften Grade an, nicht mehr zutrift; und es folgt hieraus, daß die algebraische Auflösung der höheren Gleichungen, wofern sie nicht unmöglich ist, von gewissen Funktionen der Wurzeln abhängen müsse, die von den obigen verschieden sind.

87. Da

87.

Da wir bis jetzt diese Gattung von Funktionen blos a posteriori, nach den bekannten Auflösungsmethoden der Gleichungen gesuchet haben: so ist es nöthig nunmehr zu untersuchen, wie man es anfangen müßte, dieselben a priori zu finden, ohne etwas anders vorauszusetzen, als das was unmittelbar aus der Natur der Gleichungen folget: und dies ist der Gegenstand mit welchem ich mich hauptsächlich in diesem Abschnitt beschäftigen werde.

Ich werde zuerst directe und allgemeine Regeln angeben, um den Grad und die Natur derjenigen Gleichung zu bestimmen, von welcher irgend eine gegebene Funktion der Wurzeln einer gegebenen Gleichung abhängen muß. Zwar haben sich schon geschickte Geometer mit dieser Materie beschäftiget; ich glaube aber, daß sie sich vielleicht auf eine mehr directe und allgemeine Art behandeln lässet, besonders bey dem Gesichtspunkt, den wir in Rücksicht der allgemeinen Auflösung der Gleichungen gewählt haben.

Ich werde ferner zeigen, welche Bedingungen zur Auflösbarkeit einer Gleichung nothwendig sind, wenn man nichts weiter voraussetzt als die Möglichkeit solche Gleichungen aufzulösen, welche niedriger sind, als die gegebene: und bey dieser Gelegenheit, werde ich die eigentlichen Gründe, und so zu sagen, die Metaphysik von der Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades zeigen.

Endlich werde ich kürzlich von der Reduction derer Gleichungen handeln, welche sich in andere einfachere auflösen lassen, weil unter ihren Wurzeln ein besonderes Verhältniß statt findet; und ich werde in einigen Beyspielen zeigen, wie man

man diese Verhältnisse entdecken, und dadurch die vorgelegten Gleichungen auf niedrigere Grade bringen kann.

88.

Wir werden hier keine andere als rationale Funktionen in Betrachtung ziehen, und wir wollen dieselben allgemein mit dem Zeichen f bezeichnen.

So soll f : (x) irgend eine rationale Funktion von x bezeichnen; f : (x)(y) irgend eine rationale Funktion von x und y; f : (x) (y) (z) eine eben solche Funktion von x, y, z, und dergl. mehr.

Wenn in einer gegebenen Funktion f : (x)(y), die Größe y = x, so daß daraus eine bloße Funktion von x entspringt, so wollen wir, anstatt diese Funktion durch f : (x)(x) zu bezeichnen, sie zur Abkürzung durch f : $(x)^2$ andeuten: eben so, wenn in der gegebenen Funktion f : (x)(y)(z), die Größe y = x gesetzt wird, so werden wir die daraus entstehende Funktion von x und z, durch f : $(x)^2(z)$ anzeigen, und wäre zugleich x = y = z, so erhält man blos eine Funktion von x, und wir bezeichnen dieselbe durch f : $(x)^3$.

Hätte man ferner eine Funktion von x und y, welche z. B. so beschaffen wäre, daß sie unverändert bliebe, wenn x und y verwechselt werden, d. h. eine Funktion f : (x)(y) von solcher Beschaffenheit daß f : (x)(y) = f : (y)(x), so wollen wir diese blos durch f : (x, y) anzeigen. Eben so wird f : (x, y, z) eine solche Funktion von x, y und z anzeigen, welche unverändert bleibt, wie man auch x, y und z verwechseln mag. So wird ferner f : (x, y)(z) eine solche rationale Funktion von x, y und z anzeigen, welche unverän

dert

dert bleibt, wenn man x und y verwechselt, z aber in seinen Stellen unverändert lässet, u. dgl. m.

Hätte man aber eine Funktion von x, y, z und u von solcher Beschaffenheit, daß sie unverändert bleibt, wenn man zu gleicher Zeit x mit z, und y mit u verwechselt, so werden wir dieselbe durch $f:((x)(y),\ (z)(u))$; wenn aber diese Funktion auch alsdenn unverändert bleibt, wenn man blos x mit y, oder z mit u verwechselt, so werden wir sie mit $f:((x,\ y),\ (z,\ u))$ bezeichnen.

Endlich, wenn man mehrere Funktionen von einerley Größen hat, so wollen wir diejenigen gleichartige Funktionen nennen, welche sich zugleich ändern, oder ungeändert bleiben, wenn man einerley Verwechselungen unter den Größen machet, aus welchen sie zusammengesetzt sind, so daß man sie auf ähnliche Art bezeichnen kann. Wenn man also die Zeichen f und ϕ braucht, um verschiedene Funktionen zu bezeichnen, so werden die Funktionen $f:(x)(y)$ und $\phi:(x)(y)$, desgleichen die Funktionen $f:(x,\ y)$ und $(x,\ y)$, gleichartig seyn.

89.

Wir wollen wie im vorigen Abschnitt annehmen, daß die gegebene Gleichung allgemein, durch

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \text{etc.} = 0$$

vorgestellt werde, und daß ihre Wurzeln, deren Anzahl μ seyn muß, x', x'', x''', etc. $x^{(\mu)}$ seyn.

Vermöge der Natur der Gleichungen ist also

$$-m = x' + x'' + x''' + x'''' + \text{etc.}$$

$$n = x'x'' + x'x''' + x''x''' + x'x^{IV} + x''x^{IV} + x'''x^{IV} + \text{etc.}$$

$$-p = x'x''x''' + x'x''x^{IV} + x'x'''x^{IV} + x''x'''x^{IV} + \text{etc.}$$

etc.

Es fällt in die Augen, daß dieſe Funktionen von x', x'', x''', $x^{\prime v}$, ꝛc. durch welche die Größe $-m$, n, $-p$, ꝛc. ausgedrückt werden, alle nöthwendig von der Form

$$f : (x', x'', x''', x^{\prime v}, \text{ꝛc.})$$

ſind, und ſie werden demnach alle gleichartig ſeyn, welches eine Haupteigenſchaft der Gleichungen iſt.

90.

Dieſes vorausgeſetzt, ſo wollen wir, um mit dem einfachſten Fall anzufangen, annehmen, daß die gegebene Gleichung vom zweyten Grade ſey, und daß man die Gleichung verlange, durch welche die Funktion $f : (x')(x'')$ beſtimmt werden wird.

Ich ſetze $t = f : (x')(x'')$ ſo daß t die unbekannte Größe der geſuchten Gleichung iſt; und da x' und x'' beyde durch eine und dieſelbe Gleichung $x^2 + mx + n = 0$ beſtimmt werden, ſo ſchreibe ich um mehrerer Allgemeinheit willen x ſtatt x', und y ſtatt y''. Auf dieſe Art erhalte ich die Gleichung

$$t - f : (x)(y) = 0$$

aus welcher man x und y, durch die beyden Gleichungen

$$x^2 + mx + n = 0$$
$$y^2 + my + n = 0$$

wegſchaffen muß.

Es ſey $t - f : (x)(y) = X$. Man wird alſo zuerſt x, aus der Gleichung $X = 0$ mittelſt der Gleichung $x^2 + mx + n = 0$ wegſchaffen müſſen. Hierdurch erhält man eine Gleichung, welche ich mit $Y = 0$ bezeichnen werde, und in welcher Y eine rationale Funktion der Größen t, m, n und y ſeyn wird. Alsdenn ſchaft man aus dieſer letztern Gleichung y weg, vermittelſt der andern Gleichung $y^2 + my + n = 0$, so erhält man die Endgleichung $T = o$, worin T eine rationale Funktion von t, m und n seyn wird.

Nun sind x' und x'' die Wurzeln der Gleichung $x^2 + mx + n = o$. Wenn man daher die Werthe von X, welche aus der Substitution von x' und x'' statt x entspringen, X', X'' nennt, so ist (vermöge dessen was Nr. 13. im ersten Abschnitte erwiesen worden $Y = X'X''$. Nun sind x' und x'' auch die Wurzeln der Gleichung $y^2 + my + n = o$; nennt man also die Werthe von Y welche aus der Substitution von x' und x'' statt x entspringen Y' und Y'', so ist eben so $T = Y'Y''$.

Es ist aber

$$X' = t - f : (x')(y)$$
$$X'' = t - f : (x'')(y)$$

folglich

$$Y = (t - f : (x')(y)) \times (t - f : (x'')(y)),$$

daher

$$Y' = (t - f : (x')(x')) \times (t - f : (x'')\,x'))$$
$$Y'' = (t - f : (x')(x'')) \times (t - f : (x'')(x''))$$

man erhält also

$$T = (t - f : (x')(x'')) \times (t - f : (x'')(x')) \times (t - f : (x')^2) \times (t - f : (x'')^2).$$

Betrachtet man aber die Funktion $f : (x)^2$ und setzet $t - f : (x)^2 = \mathfrak{z}$; so wird man, wenn x aus der Gleichung $\mathfrak{z} = o$, durch die Gleichung $x^2 + mx + n = o$ eliminiret wird, eine Gleichung $\vartheta = o$ erhalten, worin ϑ eine rationale Funktion von t, und von m, n, seyn wird. Bezeichnet man nun durch $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{z}''$ die Werthe von $\mathfrak{z}$, welche aus der Substitution von x' und x'', statt x entspringen, so hat man $\vartheta = \mathfrak{z}'\mathfrak{z}''$.

Es ist aber

$$\xi' = t - f : (x')^2$$
$$\xi'' = t - f : (x'')^2$$

folglich

$$\vartheta = (1 - f : (x')^2) \times (1 - f : (x'')^2).$$

Setzen wir nun

$$\Theta = (t - f : (x')(x'')) \times (t - f : (x'')(x'))$$

so wird $T = \Theta\vartheta$; und folglich $\Theta = \frac{T}{\vartheta}$: da nun T und ϑ rationale Funktionen von t, m und n sind, so wird offenbar auch Θ eine rationale Funktion von t, m und n seyn.

Demnach wird die Gleichung $T = 0$, in die beyden $\vartheta = 0$, und $\Theta = 0$ zerfället werden können; und da die erste von ihnen den Werth von $f : (x)^2$ giebt, so folgt, daß die Bestimmung der gegebenen Funktion $f : (x')(x'')$ blos von der zweyten Gleichung $\Theta = 0$ abhängen wird.

Um also die Gleichung $\Theta = 0$, welche unser Problem auflöset, zu finden, ist weiter nichts nöthig, als aus den Gleichungen

$$t - f : (x)(y) = 0$$
$$t - f : (x)^2 = 0$$

die unbekannten Größen x und y zu eliminiren, vermittelst der Gleichungen

$$x^2 + mx + n = 0$$
$$y^2 + my + n = 0$$

und wenn man die hieraus entspringenden Gleichungen durch $T = 0$ und $\vartheta = 0$ bezeichnet, so erhält man $\Theta = \frac{T}{\vartheta}$.

91.

Aus dem Ausdruck für Θ ersiehet man, daß die Gleichung $\Theta = 0$, welche zur Bestimmung der Funktion $f:(x')(x'')$ dienet, vom zweyten Grade ist, und daß ihre Wurzeln $f:(x')(x'')$ und $f:(x'')(x')$ sind. Und in der That, da die Wurzeln x', x'', durch eine einzige Gleichung $x^2 + mx + n = 0$ bestimmt sind, so ist offenbar, daß die beyden Funktionen $f:(x')(x'')$ und $f:(x'')(x')$ die blos darin verschieden sind, daß die Wurzeln x', x'' in ihnen verwechselt sind, Wurzeln einer einzigen Gleichung seyn müssen.

Wäre die Funktion $f:(x')(x'')$ von der Form $f:(x', x'')$, so daß $f:(x')(x'') = f:(x'')(x')$ wäre (Nr. 88.), so hätte man $\Theta = (t - f:(x', x''))^2$; folglich würde sich die Gleichung $\Theta = 0$, blos in $t - f:(x', x'') = 0$ verwandeln, und hieraus ergiebt sich daß für diesen Fall die gesuchte Funktion blos durch eine Gleichung vom ersten Grade bestimmt seyn wird; sie wird also durch einen rationalen Ausdruck von m und n gegeben werden.

92.

Es sey nunmehr die Gleichung zu finden, durch welche die Funktion $f:(x')(x'')(x''')$ bestimmt werden muß, vorausgesetzt, daß x', x'', x''' die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ sind.

Man nehme wie im vorigen t für die unbekannte Größe der gesuchten Gleichung, und setze x, y, z für die Wurzeln x', x'', x''', so hat man die Gleichung

$$t - f:(x)(y)(z) = 0$$

aus welcher man x, y und z durch die drey Gleichungen

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$
$$y^3 + my^2 + ny + p = 0$$
$$z^3 + mz^2 + nz + p = 0$$

eliminiren muß.

Es sey $t - f:(x)(y)(z) = X$. Eliminiret man nun zuerst x aus der Gleichung $X = 0$, vermittelst der Gleichung für x, so erhält man eine zweyte Gleichung, welche ich durch $Y = 0$ vorstelle, und worin Y eine rationale Funktion von t, y, z und von den Coefficienten m, n, p seyn wird. Eliminiret man nun y aus der Gleichung $Y = 0$, vermittelst der Gleichung für y, so erhält man eine dritte Gleichung welche ich durch $Z = 0$ vorstelle, und worin Z eine rationale Funktion von t, z, und von den Coefficienten m, n, p seyn wird. Eliminiret man endlich z aus dieser Gleichung $Z = 0$, vermittelst der Gleichung für z, so erhält man die letzte Gleichung, welche man durch $T = 0$ vorstellen kann, und worin T eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn wird.

Es sind aber x', x'', x''' die Wurzeln der Gleichung für x. Wenn man demnach durch X', X'', X''' die Werthe von X bezeichnet, welche aus der Substitution dieser Wurzeln für x entspringen, so ist nach Nr. 13. $Y = X'X''X'''$. Es sind aber x', x'', x''' auch die Wurzeln der Gleichung für y. Wenn man demnach durch Y', Y'', Y''' die Werthe von y bezeichnet, welche aus der Substitution von x', x'', x''' für y entspringen, so ist aus eben dem Grunde $Z = Y'Y''Y'''$. Endlich sind x', x'', x''' auch die Wurzeln der Gleichung für z, und wenn man also die Werthe von z, welche aus der Substitution dieser Werthe für z entspringen, Z', Z'', Z''' nennt; so erhält man $T = Z'Z''Z'''$.

Es ist aber offenbar, daß

$$X' = t - f : (x')(y)(z)$$
$$X'' = t - f : (x'')(y)(z)$$
$$X''' = t - f : (x''')(y)(z).$$

Daher ist

$$Y = (t - f : (x')(y)(z))(t - f : (x'')(y)(z))(t - f : (x''')(y)(z)).$$

Folglich erhält man

$$Y' = (t - f : (x')(x')(z)) \times (t - f : (x'')(x')(z)) \times (t - f : (x''')(x')(z))$$
$$Y'' = (t - f : (x')(x'')(z)) \times (t - f : (x'')(x'')(z)) \times (t - f : (x''')(x'')(z))$$
$$Y''' = (t - f : (x')(x''')(z)) \times (t - f : (x'')(x''')(z)) \times (t - f : (x''')(x''')(z)).$$

Daher

$$Z = (t - f : (x')(x'')(z)) \times (t - f : (x')(x''')(z)) \times (t - f : (x'')(x''')(z)) \times (t - f : (x'')(x')(z)) \times (t - f : (x''')(x')(z)) \times (t - f : (x''')(x'')(z)) \times (t - f : (x')^2 (z)) \times (t - f : (x'')^2 (z)) \times (t - f : (x''')^2 (z)).$$

Demnach

$$Z' = (t - f : (x')(x'')(x') \times (t - f : (x')(x''')(x')) \times (t - f : (x'')(x'')(x') \times (t - f : (x'')(x')^2) \times (t - f : (x''')(x')^2) \times (t - f : (x''')(x'')(x')) \times (t - f : (x')^3) \times (t - f : (x'')^2 (x')) \times (t - f : (x''')^2 (x')).$$

$$Z'' = (t - f : (x')(x'')^2) \times (t - f : (x')(x''')(x'')) \times (t - f : (x'')(x''')(x'')) \times (t - f : (x'')(x')(x'')) \times (t - f : (x''')(x')(x'')) \times (t - f : (x''')(x'')^2) \times (t - f : (x')^2 (x'')) \times (t - f : (x'')^3) \times (t - f : (x''')^2 (x'')).$$

$Z''' =$

$$\begin{aligned} Z''' = {} & (t - f : (x')(x'')(x''')) \times (t - f : (x')(x''')^2) \\ & \times (t - f : (x'')(x''')^2) \times (t - f : (x'')(x')(x''')) \\ & \times (t - f : (x''')(x')(x''')) \times (t - f : (x''')(x'')(x''')) \\ & \times (t - f : (x')^2 (x''') \times (t - f : (x'')^2 (x''')) \\ & \times (t - f : (x''')^3). \end{aligned}$$

Endlich wenn man diese drey Größen multipliciret, zur Abkürzung aber setzet

$$\begin{aligned} \Theta = {} & (t - f : (x')(x'')(x''')) \times (t - f : (x'')(x')(x''')) \\ & \times (t - f : (x''')(x'')(x')) \times (t - f : (x')(x''')(x'')) \\ & \times (t - f : (x''')(x')(x'')) \times (t - f : (x'')(x''')(x')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta = {} & (t - f : (x')^3) \times (t - f : (x'')^3) \\ & \times (t - f : (x''')^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta 1 = {} & (t - f : (x')^2 (x'')) \times (t - f : (x'')^2 (x')) \\ & \times (t - f : (x''')^2 (x'')) \times (t - f : (x')^2 (x''')) \\ & \times (t - f : (x''')^2 (x')) \times (t - f : (x'')^2 (x''')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta 2 = {} & (t - f : (x')(x'')^2) \times (t - f : (x'') (x')^2) \\ & \times (t - f : (x''')(x'')^2) \times (t - f : (x') (x''')^2) \\ & \times (t - f : (x''')(x')^2) \times (t - f : (x'') (x''')^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta 3 = {} & (t - f : (x')(x'')(x')) \times (t - f : (x'')(x')(x'')) \\ & \times (t - f : (x''')(x'')(x''')) \times (t - f : (x')(x''')(x')) \\ & \times (t - f : (x''')(x')(x''')) \times (t - f : (x'')(x''')(x'')) \end{aligned}$$

so erhält man $T = \Theta \vartheta \vartheta 1 \vartheta 2 \vartheta 3$.

Nun bemerke ich, daß, wenn man $t - f : (x)^3 = 0$ setzet, und x durch Hülfe der Gleichung für x, $x^3 \dagger mx^2 \dagger nx \dagger p = 0$ eliminiret, man wie unter der vorigen Nr. die Endgleichung $\vartheta = 0$ finden wird, so daß ϑ nothwendig eine rationale Funktion von t, und von den Coefficienten m, n, p seyn wird.

Aus eben den Gründen wird, wenn $t - f : (x^2)(y) = 0$ gesetzt, und dann x und y eines nach dem andern durch die

Gleichungen für x und y, nemlich $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, und $y^3 + my^2 + ny + p = 0$, eliminiret wird, die Endgleichung, welche man erhält $\vartheta\vartheta 1 = 0$ seyn; worin also die Größe $\vartheta\vartheta 1$ eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn wird; und da ϑ eine eben solche Funktion war, so folgt, daß auch $\vartheta 1$ eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn werde.

Setzt man auf eben die Art $t - f:(x)(y)^2 = 0$ und eliminiret x und y durch die nemlichen Gleichungen, so ist die Endgleichung, welche man findet $\vartheta\vartheta 2 = 0$, worin also die Größe $\vartheta\vartheta 2$, und folglich auch die Größe $\vartheta 2$ eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn wird.

Setzt man endlich $t - f:(x)(y)(z) = 0$, und eliminiret man eben so x und y, so findet man die Endgleichung $\vartheta\vartheta 3 = 0$; so daß die Größe $\vartheta\vartheta 3$, und folglich auch $\vartheta 3$ eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn wird.

Da also jede der Größen ϑ, $\vartheta 1$, $\vartheta 2$, $\vartheta 3$ eine rationale Funktion von t, und von den Coefficienten m, n, p ist, so folgt, daß die Gleichung $T = 0$, oder $\Theta\vartheta\vartheta 1\vartheta 2\vartheta 3 = 0$ in folgende Gleichungen auflösbar seyn wird $\vartheta = 0$; $\vartheta 1 = 0$; $\vartheta 2 = 0$; $\vartheta 3 = 0$; $\Theta = 0$: demnach muß auch Θ eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn.

Es ist aber leicht zu übersehen, daß die Gleichungen $\vartheta = 0$, $\vartheta 1 = 0$, $\vartheta 2 = 0$, $\vartheta 3 = 0$ mit unserer Aufgabe gar nicht in Verbindung stehen, d. h. daß sie zu der Bestimmung der Funktion $f:(x')(x'')(x''')$ nichts beytragen; denn aus den Ausdrücken für ϑ, $\vartheta 1$, $\vartheta 2$, $\vartheta 3$ fällt es in die Augen, daß sie als Funktionen von x', x'', x''', von einer ganz andern Form sind, als die gegebene Funktion. Es bleibt also blos die Gleichung $\Theta = 0$ übrig, welche folglich alle Wur-

zeln

zeln enthalten wird, die wir zur Auflösung unsers Problems brauchen.

93.

Um nun diese Gleichung $\Theta = 0$ zu finden, so ist blos nöthig, aus den fünf Gleichungen

$$t - f : (x)(y)(z) = 0$$
$$t - f : (x^2)(y) = 0$$
$$t - f : (x)(y)^2 = 0$$
$$t - f : (x)(y)(x) = 0$$
$$t - f : (x)^3 = 0$$

die unbekannten Größen x, y, z vermittelst der Gleichungen

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$
$$y^3 + my^2 + ny + p = 0$$
$$z^3 + mz^2 + nz + p = 0$$

zu eliminiren; und wenn man die hieraus entspringenden Endgleichungen mit $T = 0$, $T1 = 0$, $T2 = 0$, $T3 = 0$, und $\vartheta = 0$ bezeichnet, so erhält man $T1 = \vartheta\vartheta 1$, $T2 = \vartheta\vartheta 2$, $T3 = \vartheta\vartheta 3$, und $T = \Theta\vartheta\vartheta 1\vartheta 2\vartheta 3$, folglich

$$\Theta = \frac{T\vartheta 2}{T1\,T2\,T3}.$$

Uebrigens wird diese Methode in der Anwendung äusserst weitläuftig und verdrießlich seyn, und dies immer mehr, je höher die gegebene Gleichung ist. Ich habe sie auch blos deswegen vorgetragen, weil sie zeigt, wie man die Natur der Gleichung $\Theta = 0$ auf eine ganz directe und von allen fremden Betrachtungen unabhängige Art, untersuchen könne.

94.

Aus dem oben Nr. 92. für Θ gegebenen Ausdruck ist es augenscheinlich, daß die reducirte Gleichung $\Theta = 0$ vom

6ten Grade seyn, und folgende Funktionen zu Wurzeln haben wird,

$f:(x')(x'')(x''')$, $f:(x'')(x')(x''')$, $f:(x''')(x'')(x')$,
$f:(x')(x''')(x'')$, $f:(x''')(x')(x'')$, $f:(x'')(x''')(x')$,

welche alle gleichartig sind, und auseinander durch die bloße Verwechselung der Größen x', x'', x''' entspringen. Und da diese Größen sämtlich auf gleiche Art durch die Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, deren Wurzeln sie vorstellen, bestimmt sind; so fällt unmittelbar in die Augen, daß jede Gleichung, die den Werth irgend einer Funktion dieser Größen ausdrückt, zugleich auf gleiche Art alle übrige Funktionen geben müsse, die aus allen möglichen Verwechselungen dieser Größen entspringen. Dieser Satz ist offenbar so evident, daß er keines weiteren Beweises bedarf; aber nicht ganz so evident ist es, wie ich glaube, daß die Gleichung von der wir reden, nicht auch noch andere Wurzeln enthalten könnte, als die welche aus den Verwechselungen der Wurzeln der gegebenen Gleichung entspringen; dies heißt, daß, wenn man diese Gleichung als ein Produkt aus den einfachen Faktoren $t - f:(x')(x'')(x''')$, $t - f:(x'')(x')(x''')$ ꝛc. betrachtet, jeder ihrer Coefficienten jederzeit durch eine rationale Funktion der Coefficienten m, n, ꝛc. der gegebenen Gleichung ausgedrückt werden könne. Hierüber läßt aber unsere Demonstration keinen Zweifel; denn wir haben gesehn, daß die Größe Θ, welche diesem Produkte gleich ist, nothwendig eine rationale Funktion von t, m, n, ꝛc. seyn müsse.

95.

Wäre die gegebene Gleichung von einem höheren Grade, so daß sie vier oder mehr Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, ꝛc. hätte, so wird man die Gleichung $\Theta = 0$, durch welche die Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x'''') \ldots$, bestimmt wird, eben so finden

finden können, und man ſiehet, daß die Größe Θ, ein Produkt von ſo vielen einfachen Faktoren folgender Form

$$t - f : (x')(x'')(x''')(x'''') \ldots$$
$$t - f : (x'')(x')(x''')(x'''') \ldots$$
$$t - f : (x''')(x'')(x')(x'''') \ldots$$
$$t - f : (x'')(x''')(x')(x'''') \ldots$$
$$\text{2c.}$$

ſeyn werde, als viele Verſetzungen unter den Wurzeln x', x'', x''', x'''', 2c. möglich ſind. Iſt demnach die gegebene Gleichung von dem Grade μ, ſo wird die Anzahl der einfachen Faktoren von Θ, alſo auch die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$, gleich ſeyn $1.2.3 \ldots \mu$; denn dies iſt die Anzahl der unter μ Dingen möglichen Verſetzungen, und die Wurzeln dieſer Gleichung werden die verſchiedenen Funktionen ſeyn, in welche ſich die gegebene Funktion $f : (x')(x'')(x''') \ldots$ durch die Verſetzungen der Wurzeln x', x'', x''' verwandeln kann.

96.

Um aber alle dieſe Funktionen nach der Reihe, und ohne eine auszulaſſen, zu finden, verwechsle man zuerſt in der gegebenen Funktion x'' mit x', und umgekehrt, ſo erhält man zwey Funktionen: dann verwechſele man nach und nach in dieſen beyden Funktionen x'' mit x', und mit x''; ſo erhält man ſechs Funktionen: dann verwechſele man in dieſen ſechs Funktionen nach und nach x'''', mit x', mit x'', mit x'''; ſo erhält man vier und zwanzig Funktionen: und ſo nach der Reihe weiter, bis alle Wurzeln x', x'', x''', 2c. erſchöpft ſind.

Man ſieht hieraus ganz deutlich, daß die Anzahl der verſchiedenen Funktionen, nach den Produkten der natürli-

chen

chen Zahlenreihe 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, ꝛc. 1.2.3.4.5...μ wachsen wird.

Hat man alle diese Funktionen, so hat man die Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$; und stellt man dieselbe durch

$$t^{\pi} - Mt^{\pi-1} + Nt^{\pi-2} - Pt^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

vor, so ist $\pi = 1.2.3...\mu$; und der Coefficient M wird gleich seyn, der Summe aller gefundenen Funktionen, der Coefficient N, der Summe aller Produkte von je zwey Funktionen; der Coefficient P, die Summe aller Produkte von je drey solcher Funktionen; u. s. f.

Und da wir oben bewiesen haben, daß der Ausdruck für Θ nothwendig eine rationale Funktion von t, und von den Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung, seyn muß, so folgt, daß die Größen M, N, P, ꝛc. eben so nothwendig rationale Funktionen von m, n, p, ꝛc. seyn werden, welche man directe finden kann, wie wir dieses im vorigen Abschnitte wirklich gethan haben. Man vergleiche hierüber, außer dem schon angeführten Werk von Cramer, noch Warings Meditationes algebraicae, ein Werk, welches die vortreflichsten Untersuchungen über die Gleichungen enthält.

97.

Obgleich die Gleichung $\Theta = 0$ im allgemeinen von dem Grade $1.2.3...\mu = \pi$ (welches die Zahl aller möglichen Versetzungen der μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. ist), seyn muß, so kann es sich doch treffen, daß die gegebene Funktion von solcher Beschaffenheit ist, daß sie durch eine gewisse, oder durch gewisse Verwechselungen dieser Art, keine Aenderung leidet, und dann muß sich unsere Gleichung nothwendig auf einen niedrigern Grad bringen lassen.

Denn

Denn wenn wir z. B. annehmen, daß die Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots$ von solcher Beschaffenheit sey, daß ihr Werth, durch Verwandelung der Wurzeln x' in x'', x'' in x''', x''' in x', nicht verändert wird, so daß

$$f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots = f:(x'')(x''')(x')(x'''')\ldots$$

so ist augenscheinlich, daß die Gleichung $\Theta = 0$ zwey gleiche Wurzeln haben wird; ich werde aber beweisen, daß bey dieser Voraussetzung, auch unter den übrigen Wurzeln immer je zweye gleich seyn werden. Man betrachte irgend eine andere Wurzel derselben Gleichung, welche z. B. durch die Funktion $f:(x'''')(x''')(x')(x'')\ldots$ vorgestellt werden mag: da nun diese Funktion aus der Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots$ entstehet, indem man x' in x'''', x'' in x''', x''' in x', und x'''' in x'' verwandelt, so folgt, daß sie unverändert denselben Werth behalten werde, wenn man darin x'''' in x''', x''' in x', und x' in x'''' verwandelt, so daß

$$f:(x'''')(x''')(x')(x'')\ldots = f:(x''')(x')(x'''')(x'')\ldots$$

seyn wird. Demnach wird in diesem Falle die Größe Θ einem Quadrate ϑ^2 gleich seyn, und die Gleichung $\Theta = 0$ wird sich also auf $\vartheta = 0$ reduciren, deren Dimension $\frac{\pi}{2}$ seyn wird.

Auf eben die Art läßt sich erweisen, daß wenn die Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots$ von solcher Beschaffenheit ist, daß durch zwey, oder drey, oder mehr unterschiedene Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', x'''', rc. ihr Werth nicht geändert wird, daß sich alsdenn unter den Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$, je drey, oder je vier, rc. gleiche Wurzeln finden werden; so daß die Größe Θ, einem Cubus ϑ^3 oder einem Biquadrat ϑ^4, rc. gleich seyn wird: demnach wird

wird sich die Gleichung $\Theta = 0$, auf $\vartheta = 0$ reduciren, deren Höhe $= \frac{\pi}{3}$, oder $= \frac{\pi}{4}$ rc. seyn wird.

98.

Ist demnach die gegebene Funktion von der Form

$$(x', x'')(x''')(x'''') \ldots$$

welche durch die Verwechselung von x', uud x'' nicht geändert wird, Nr. 88, so werden unter allen Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$, immer zwey und zwey gleich seyn, so daß diese Gleichung auf den Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{2}$ herabgesetzt wird.

Wenn eben so die Funktion

$$(x', x'', x''')(x'''')(x^{v}) \ldots$$

ungeändert bleibt, was man auch für Versetzungen mit den drey Wurzeln x', x'', x''' machen mag; so folget, daß unter den Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$, immer 1.2.3 und 1.2.3 Wurzeln gleich seyn werden, demnach kann sie auf den Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3}$ herabgesetzt werden.

Die Funktion

$$(x', x'')(x''', x'''')(x^{v}) \ldots$$

welche bey den Verwechselungen von x', und x'', so wie auch von x''' und x'''', ungeändert bleibt, wird auf eine Gleichung $\Theta = 0$ führen, unter deren Wurzeln immer 1.2.1.2 und 1.2.1.2 gleiche sind; sie wird sich also auf den Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.1.2}$ herabsetzen lassen.

Ganz

Ganz allgemein, wird die Funktion

$$(x', x'', x''' \ldots x^{(\alpha)})(x^{(\alpha+1)}, x^{(\alpha+2)}, x^{(\alpha+3)} \ldots x^{(\alpha+\beta)})(x^{(\alpha+\beta+1)} \ldots) \ldots$$

auf eine Gleichung $\Theta = 0$ führen, worin die Größe Θ eine Potenz von dem Exponenten

$$1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta . 1.2.3 \ldots$$

seyn wird; ſo daß ſich dieſe Gleichung auf den Grad

$$\frac{1.2.3.4 \ldots \mu}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta . 1.2.3 \ldots}$$

wird reduciren laſſen.

Man ſiehet hieraus, daß jede Funktion von der Form

$$f:(x', x'', x''', \ldots x^{(\mu)}),$$

welche die Eigenſchaft hat, daß ſie bey allen möglichen Verwechſelungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\mu)}$ unverändert bleibt, blos von einer Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3 \ldots \mu}{1.2.3 \ldots \mu}$ $= 1$ abhängen wird; ſo daß ſie ſich algebraiſch und rational durch die Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung muß beſtimmen laſſen. Ein Lehrſatz, den wir ſchon in den vorigen Abſchnitten, als durch ſich ſelbſt evident zum Grunde gelegt haben, deſſen ſtrenger Beweis aber von den hier entwickelten Sätzen abhängt.

Auch läßt ſich aus den vorgetragenen Sätzen der Schluß machen, daß wenn man irgend eine Funktion, welche von den μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. nur λ Wurzeln enthält, ſo daß man ſie durch

$$f:(x')(x'')(x''') \ldots (x^{\lambda})$$

vorſtellen kann, daß, ſage ich, dieſe Funktion blos auf eine Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3 \ldots \mu}{1.2.3 \ldots \mu - \lambda}$ führen wird;

denn

denn es ist klar, daß man diese Funktion so ansehen kann, als wäre sie von der Form

$$f:(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)})(x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)},\ldots x^{(\mu)}),$$

vorausgesetzt, was jederzeit frey stehet, daß die Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, 2c. $x^{(\mu)}$, jede mit einem Coefficienten $=0$ multipliciret, oder zu der Potenz von dem Exponent $=0$ erhoben seyn.

Demnach wird die Funktion

$$f:(x', x'')(x''', x'''', x^{v}\ldots . x^{(\lambda)})$$

zu einer Gleichung, von dem Grad $\dfrac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.1.2.3\ldots\mu-\lambda}$ führen; und eben so in ähnlichen Fällen.

Und die Funktion

$$f:(x', x'', x''', \ldots x^{(\lambda)})$$

wird zu einer Gleichung von dem Grad

$$\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\lambda.1.2.3\ldots\mu-\lambda}=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}$$

führen.

Wollte man demnach allgemein die Gleichung von dem Grade μ, auf folgende Gleichung von dem niedrigern Grad λ reduciren

$$x^{\lambda}+ax^{\lambda-1}+bx^{\lambda-2}+2c.=0$$

welche alle Wurzeln mit der gegebenen gemein hat, d. h. deren Wurzeln x', x'', x''', 2c. $x(\lambda)$ sind, so wird man unvermeidlich auf eine Gleichung von dem Grad

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}$$

kommen,

kommen, um jeden Coefficienten a, b, c, ꝛc. zu bestimmen: denn diese Coefficienten werden nothwendig von der Form

$$f : (x', x'', x''' \ldots . x^{(\lambda)})$$

seyn, wie dies Nr. 89. gezeigt worden. Dies ist ein schon längst bekannter Satz, der aber, wie es mir scheinet, noch nie scharf erwiesen worden.

Da nun, wenn $\lambda < \mu$, die Zahl

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}$$

niemals $< \mu$ seyn kann, so folgt, daß man sich aus dieser Art von Reduction für die allgemeine Auflösung der Gleichungen nichts versprechen kann.

99.

Aus allen dem was wir so eben erwiesen haben, folgt demnach allgemein: 1) daß alle gleichartigen Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. einer Gleichung, nothwendig durch Gleichungen von einem Grad gegeben werden. 2) Daß dieser Grad jederzeit gleich ist der Zahl $1.2.3\ldots\mu$ (wenn μ den Grad die gegebene Gleichung bezeichnet) oder einem submultiplum derselben. 3) Um die einfachste Gleichung $\vartheta = 0$ durch welche irgend eine Funktion von x', x'', x''', ꝛc. bestimmt werden muß, unmittelbar zu finden, ist weiter nichts nöthig, als die verschiedenen Werthe zu suchen, welche diese Funktion durch die Verwechselungen der Größen x', x'', x''', ꝛc. annehmen kann; diese Werthe sind alsdenn die Wurzeln der gesuchten Gleichung, und man wird vermittelst derselben die Coefficienten der gesuchten Gleichung, vermöge der bekannten, und in dieser Abhandlung öfters gebrauchten Methoden, bestimmen können.

100.

Sobald man aber, entweder durch Auflösung der Gleichung $\vartheta = 0$, oder auf andere Art, den Werth einer gegebenen Funktion von x', x'', x''', ꝛc. gefunden hat, so behaupte ich, daß man auch im Stande seyn werde den Werth irgend einer andern Funktion eben derselben Wurzeln zu finden, und zwar, allgemein genommen, durch eine blos lineäre Gleichung, gewisse besondere Fälle ausgenommen, welche eine Gleichung vom zweyten oder dritten Grad erfordern. Dies Problem scheint mir in der Theorie der Gleichungen eines der wichtigsten zu seyn, und die Auflösung desselben, welche wir sogleich vortragen werden, wird ein neues Licht über diesen Theil der Algeber verbreiten.

Wir werden anfänglich, um die Untersuchung einfacher zu machen, annehmen, daß die beyden vorgelegten Funktionen, davon die eine einen bekannten, die andere einen unbekannten Werth hat, gleichartig sind, in dem Sinne, wie wir diesen Ausdruck Nr. 88. erklärt haben. Wir werden allgemein, die erste mit t, die andere mit y bezeichnen. Ferner sollen die Zeichen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ die verschiedenen Werthe von t vorstellen, welche aus allen möglichen Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. entspringen; und eben so sollen y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ die verschiedenen Werthe der Funktion y anzeigen, welche aus eben denselben Verwechselungen entspringen; denn da wir voraussetzen, daß die Funktionen x und y gleichartig sind, so folgt, daß die Anzahl der verschiedenen Werthe, die sie durch alle mögliche Verwechselungen von x', x'', x''', ꝛc. erhalten, bey beyden gleich sey, und daß diese Werthe, aus den nemlichen Verwechselungen in beyden Funktionen entspringen werden.

Die

Die Größen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ werden demnach die Wurzeln der Gleichung für t, und eben ſo y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ die Wurzeln der Gleichung für y ſeyn, und beyde Gleichungen werden folglich von dem Grad π ſeyn. Beyde Gleichungen könnte man nun nach den oben vorgetragenen Methoden finden; allein es wird blos nöthig ſeyn die Gleichung für t zu ſuchen, welche wir allgemein durch

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{ꝛc.} + Kt^\pi = 0$$

bezeichnen wollen, oder ganz einfach durch $\vartheta = 0$, vorausgeſetzt daß

$$\vartheta = 1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{ꝛc.} + Kt^\pi$$

Die Coefficienten dieſer Gleichung A, B, C, ꝛc. werden bekannte Funktionen der Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung ſeyn, deren Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. ſind.

Wenn man nun nach dieſen Vorausſetzungen, allgemein die Funktion $t^\lambda y$ betrachtet, ſo fällt in die Augen, daß die verſchiedenen Werthe dieſer Funktion, welche aus allen möglichen Verwechſelungen der Wurzeln x', x'', x''', entſpringen, folgende ſeyn werden, $t'^\lambda y'$, $t''^\lambda y''$, $t'''^\lambda y'''$, ꝛc. $(t^{(\pi)})^\lambda y^{(\pi)}$; und nimmt man nun die Summe aller dieſer Werthe, ſo erhält man die Funktion

$$t'^\lambda y' + t''^\lambda y'' + t'''^\lambda y''' + \text{ꝛc.} + (t^{(\pi)})^\lambda y^{(\pi)}$$

welche die Eigenſchaft hat, daß ſie unverändert bleibt, was man auch für Verwechſelungen unter den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. machen mag; ſie wird ſich folglich algebraiſch und rational durch die Coefficienten m, n, p, ꝛc. ausdrucken laſſen (Nr. 98.)

Suchet man nun die Werthe dieſer Funktion, für die Exponenten $\lambda = 0, 1, 2, 3,$ ꝛc. $\pi - 1$, und bezeichnet dieſe

Größen durch M, $M1$, $M2$, $M3$, ꝛc. $M(\pi - 1)$, so erhält man folgende π Gleichungen

$$y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.} + y^{(\pi)} = M$$

$$t'y' + t''y'' + t'''y''' + \text{ꝛc.} + t^{(\pi)}y^{(\pi)} = M1$$

$$t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' + \text{ꝛc.} + (t^{(\pi)})^2y^{(\pi)} = M2$$

$$t'^3y' + t''^3y'' + t'''^3y''' + \text{ꝛc.} + (t^{(\pi)})^3y^{(\pi)} = M3$$

ꝛc.

$$t'^{\pi-1}y' + t''^{\pi-1}y'' + t'''^{\pi-1}y''' + \text{ꝛc.} + (t^{(\pi)})^{\pi-1}y^{(\pi)} = M(\pi - 1)$$

wo M, $M1$, $M2$, ꝛc. $M(\pi - 1)$, bekannte durch m, n, p, ꝛc. ausgedrückte Größen seyn werden.

Aus diesen π Gleichungen muß man nun, vermittelst der Elimination die Werthe der π unbekannten Größen y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ ableiten. Wollte man sich aber hierbey der gewöhnlichen Methode bedienen, so würde man in sehr verwickelte Ausdrücke gerathen, welche außerdem noch die Unbequemlichkeit haben, daß sie alle Größen t', t'', t''', ꝛc. zugleich enthalten würden. Wir müssen demnach eine andere Methode anwenden, und es scheint mir folgende die ganz eigentlich hieher gehörige zu seyn.

Ich nehme eine Anzahl von $\pi - 1$ unbestimmten Größen an, welche ich durch $N1$, $N2$, $N3$, ꝛc. $N(\pi - 1)$ bezeichne, mit diesen Größen multiplicire ich respective die obigen Gleichungen, die erste ausgenommen; dann addire ich sie sämmtlich und erhalte folgende einzige Gleichung

$$M + M1N1 + M2N2 + M3N3 + \text{ꝛc.} + M(\pi-1)N(\pi-1)$$

$$= (1 + N1t' + N2t'^2 + N3t'^3 + \text{ꝛc.} + N(\pi-1)t'^{\pi-1})y'$$

$$+ (1 + N1t'' + N2t''^2 + N3t''^3 + \text{ꝛc.} + N(\pi-1)t''^{\pi-1})y''$$

$+ (1 +$

$$+ (1 + N_1 t''' + N_2 t'''^2 + N_3 t'''^3 + \text{ꝛc.} + N(\pi-1) t'''^{\pi-1}) y'''$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$+ (1 + N_1 t^{(\pi)} + N_2 (t^{(\pi)})^2 + N_3 (t^{(\pi)})^3 + \text{ꝛc.}$$
$$+ N(\pi - 1)(t^{(\pi)})^{\pi-1}) y^{(\pi)}$$

Setzen wir nun allgemein

$$T = 1 + N_1 t + N_2 t^2 + N_3 t^3 + \text{ꝛc.} + N(\pi-1) t^{\pi-1}$$

und bezeichnen durch T', T'', T''', ꝛc. $T^{(\pi)}$ die partikulären Werthe von T, welche man erhält, wenn man nach und nach $t = t', t'', t'''$, ꝛc. $t^{(\pi)}$ setzet, so ist offenbar, daß sich die obige Gleichung auf folgende einfache Form reduciren wird

$$T'y' + T''y'' + T'''y''' + \text{ꝛc.} + T^{(\pi)} y^{(\pi)}$$
$$= M + M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_3 + \text{ꝛc.} + M(\pi - 1) N(\pi - 1).$$

Um nun den Werth irgend einer der unbekannten Größen y', y'', y''', ꝛc. z. B. $y^{(\varrho)}$ zu finden, so ist offenbar nichts weiter nöthig, als daß man die Coefficienten aller unbekannten Größen, diese ($y^{(\varrho)}$) ausgenommen, $= 0$ mache, alsdenn ergiebt sich

$$y^{(\varrho)} = \frac{M + M_1 N_1 + M_2 N_2 + \text{ꝛc.} + M(\pi - 1) N(\pi - 1)}{T^{(\varrho)}}$$

und vermittelst der Gleichungen $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$, ꝛc. $T^{(\pi)} = 0$, (nur nicht $T^{(\varrho)} = 0$) wird man die $\pi - 1$ unbestimmten Größen N_1, N_2, N_3, ꝛc. $N(\pi - 1)$ bestimmen können.

Bedenkt man nun daß alle diese partikulären Gleichungen zugleich statt finden, so ist offenbar, daß die Gleichung $T = 0$ die Größen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, blos $t^{(\varrho)}$ ausgenommen, zu Wurzeln haben muß. Multipliciret man demnach das Polynom T, dessen völlig bekanntes Glied der Einheit gleich ist, mit dem Faktor $1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}}$, so erhält man das Polynom $T(1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}})$, welches, Null gleich gesetzt, die sämtlichen Größen t', t'', t''', 2c. $t^{(\pi)}$ zu Wurzeln haben wird. Allein diese Wurzeln gehören auch der Gleichung $\vartheta = 0$ zu, da nun das völlig bekannte Glied, sowohl in dem Polynom $T(1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}})$, als in dem Polynom ϑ, der Einheit gleich ist, so folgt, daß $T(1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}}) = \vartheta$, oder vielmehr

$$1 + (N1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}})t + (N2 - \frac{N1}{t^{(\varrho)}})t^2 + (N3 - \frac{N2}{t^{(\varrho)}})t^3$$

$$+ \text{2c.} = 1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{2c.}$$

Da nun diese Gleichung identisch seyn muß, so folgt, daß

$$N1 - \frac{1}{t^{(\varrho)}} = A,\ N2 - \frac{N1}{t^{(\varrho)}} = B,\ N3 - \frac{N2}{t^{(\varrho)}} = C,$$

2c.

daher ist

$$N1 = A + \frac{1}{t^{(\varrho)}}$$

$$N2 = B + \frac{A}{t^{(\varrho)}} + \frac{1}{(t^{(\varrho)})^2}$$

$$N3 = C + \frac{B}{t^{(\varrho)}} + \frac{A}{(t^{(\varrho)})^2} + \frac{1}{(t^{(\varrho)})^3}$$

2c.

Um nun den Werth der Größe $T^{(\varrho)}$ zu finden, bemerke man daß überhaupt

T =

$$T = \frac{\vartheta}{1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}}}$$

in welchem Ausdruck blos $t = t^{(\varrho)}$ zu ſetzen iſt: allein da bey dieſer Vorausſetzung ſowohl der Zähler ϑ verſchwindet, weil $\vartheta^{(\varrho)}$ eine Wurzel der Gleichung $\vartheta = 0$ iſt, als auch der Nenner $1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}}$, ſo muß man zu Folge der bekannten Regel, ſtatt dieſer Größe ihre Differenziale nehmen; und ſetzt man t veränderlich, ſo erhält man den Bruch $-\frac{d\vartheta}{dt} : \frac{1}{t^{(\varrho)}}$. Es wird folglich $T^{(\varrho)}$, gleich ſeyn dem Werthe, welchen die Größe $-\frac{t\,d\vartheta}{dt}$ erhalten muß, wenn man $t^{(\varrho)}$ für t ſetzt, welches man auf folgende Art bezeichnen kann

$$T^{(\varrho)} = \left(\frac{-t\,d\vartheta}{dt}\right)^{(\varrho)},$$

oder vielmehr, wenn man für ϑ ſeinen Werth ſetzet, und nach der Differenziation t in $t^{(\varrho)}$ verwandelt,

$$T^{(\varrho)} = -At^{(\varrho)} - 2B(t^{(\varrho)})^2 - 3C(t^{(\varrho)})^3 - \text{ꝛc.}$$

Es iſt nun nichts übrig, als dieſen Werth von $T^{(\varrho)}$, ſo wie auch die Werthe von N1, N2, N3, ꝛc., in dem allgemeinen oben gefundenen Ausdruck für $y^{(\varrho)}$ zu ſetzen; und ſo erhält man den Werth der Funktion $y^{(\varrho)}$, ausgedrückt blos durch die entſprechende gegebene Funktion $t^{(\varrho)}$, und durch die Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung.

Alle Schwierigkeit liegt demnach in Beſtimmung ſowohl der Coefficienten A, B, C, ꝛc. der Gleichung für t

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{2c.} = 0$$

als der Größen M, M1, M2, M3, 2c., wozu man, wie wir oben gesehen haben, auf verschiedenen Wegen gelangen kann. Hauptsächlich aber kommt es darauf an, zu bemerken, daß sich alle diese Größen jederzeit algebraisch, blos aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung bestimmen lassen, und dies haben wir, in aller möglichen Schärfe, a priori erwiesen.

Sind nun diese Größen gefunden, und setzt man zur Abkürzung

$$P = M + AM1 + BM2 + CM3 + \text{2c.}$$
$$Q = M1 + AM2 + BM3 + \text{2c.}$$
$$R = M2 + AM3 + \text{2c.}$$
$$\text{2c.}$$

so erhält man für den Werth irgend eines y,

$$y = -\frac{\frac{P}{t} + \frac{Q}{t^2} + \frac{R}{t^3} + \frac{S}{t^4} + \text{2c.}}{A + 2Bt + 3Ct^2 + 4Dt^3 + \text{2c.}}$$

wenn man für t diejenige Funktion setzt, welche der Funktion y entspricht.

101.

Es ist augenscheinlich, daß diese Auflösung jederzeit statt finden wird, was auch für ein Werth von t gegeben seyn mag, wenn er nur nicht den Nenner $A + 2Bt + 3Ct^2 + \text{2c.}$ $= \frac{d\vartheta}{dt}$, gleich Null machet; da aber der Werth von t jederzeit eine Wurzel der Gleichung $\vartheta = 0$ seyn muß, so folgt, daß der Fall $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ nur alsdenn eintreten kann, wenn dieser Werth eine vielfache Wurzel eben der Gleichung $\vartheta = 0$ ist.

Um

Um zu finden, was in diesem Falle geschehn wird, so wollen wir annehmen daß t' der gegebene Werth von t sey, welcher dem gesuchten Werthe y' von y, entspricht, und daß sich in der Reihe der Werthe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, ein anderer z. B. t'' befinde, welcher $= t'$, so daß der gegebene Werth t', eine doppelte Wurzel der Gleichung $\vartheta = 0$ sey: wir wollen nun anfänglich t' und t'' als ungleich betrachten, so ist

$$y' = -\frac{\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{ꝛc.}}{A + 2Bt' + 3Ct'^2 + 4Dt'^3 + \text{ꝛc.}}$$

$$y'' = -\frac{\frac{P}{t''} + \frac{Q}{t''^2} + \frac{R}{t''^3} + \text{ꝛc.}}{A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + 4Dt''^3 + \text{ꝛc.}}$$

Nun ist $1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{ꝛc.} = \vartheta$

$$= \left(1 - \frac{t}{t'}\right)\left(1 - \frac{t}{t''}\right)\left(1 - \frac{t}{t'''}\right)\ldots$$

Differenziirt man also und setzt successiv $t = t', t''$, so erhält man

$$A + 2Bt' + 3Ct'^2 + \text{ꝛc.} = -\frac{1}{t'}\left(1 - \frac{t}{t'}\right)\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right)\ldots$$

$$A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + \text{ꝛc.} = -\frac{1}{t''}\left(1 - \frac{t''}{t'}\right)\left(1 - \frac{t''}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t''}{t''''}\right)\ldots$$

woraus man siehet, daß in dem Falle $t' = t''$ diese beyden Gleichungen $= 0$ werden.

Wir wollen auf einen Augenblick annehmen, daß $t'' = t' + \omega$, wo ω eine unendlich kleine Größe bedeuten soll, so erhält man, wenn man die Unendlichkleinen der zweyten Ordnung wegläßt

$$A + 2Bt' + 3Ct'^2 + \text{ꝛc.} = -\frac{\omega}{t'^2}\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right)\ldots$$

$$A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + \text{ꝛc.} = \frac{\omega}{t'^2}\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right)\ldots$$

Setzt

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\Pi = \frac{1}{t'^2}\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right) \dots$$

so wird

$$y' = \frac{\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{ꝛc.}}{\omega\Pi}, \quad y'' = \frac{\frac{P}{t''} + \frac{Q}{t''^2} + \frac{R}{t''^3} + \text{ꝛc.}}{\omega\Pi}$$

Es ist aber

$$\frac{P}{t''} + \frac{Q}{t''^2} + \frac{R}{t''^3} + \text{ꝛc.} = \frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{\omega d\left(\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{ꝛc.}\right)}{dt'} = \frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{ꝛc.}$$

$$- \omega\left(\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \text{ꝛc.}\right);$$

daher hat man

$$y'' = -y' + \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \text{ꝛc.}}{\Pi}$$

und daher

$$y' + y'' = \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \text{ꝛc.}}{\Pi}$$

Da aber $\vartheta = \left(1 - \frac{t}{t'}\right)\left(1 - \frac{t}{t''}\right)\left(1 - \frac{t}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t}{t''''}\right)\dots$

$= \left(1 - \frac{t}{t'}\right)^2\left(1 - \frac{t}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t}{t''''}\right) \dots$ so ist leicht einzusehen, daß, da $t = t'$,

$$\frac{d^2\vartheta}{2dt^2} = \frac{1}{t'^2}\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right) \dots = \Pi$$

seyn werde: folglich

$$n = \frac{2B + 2.3Ct' + 3.4Dt'^2 + \text{ꝛc.}}{2}$$

daher

$$\frac{y' + y''}{2} = \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \text{ꝛc.}}{2B + 2.3Ct' + 3.4Dt'^2 + \text{ꝛc.}}$$

Es giebt alſo in dieſem Falle, die Formel nicht jede der Größen y' und y'', welche den gleichen Wurzeln t' und t'' entſprechen, einzeln, ſondern blos ihre Summe $y' + y''$, und man ſiehet, ſowohl aus dem obigen Ausdruck ſelbſt, als aus der Analyſe, durch die wir ihn gefunden haben, daß der Werth von der Hälfte dieſer Summe, aus dem allgemeinen Werthe von y im vorigen Artikel herauskommt, wenn man ſtatt des Zählers und Nenners ihre Differenziale dividiret durch dt, nimmt.

Wenn der gegebene Werth von t eine dreyfache Wurzel der Gleichung $\vartheta = 0$ iſt, ſo daß z. B. $t' = t'' = t'''$, ſo findet man auf eben die Art, daß man nicht jede von den ihnen entſprechenden Funktionen y', y'', y''', einzeln, ſondern blos ihre Summe $y' + y'' + y'''$ finden kann, und der allgemeine Ausdruck für y, giebt den dritten Theil dieſer Summe, wenn man ſtatt des Zählers und Nenners dieſes Ausdrucks, ihre zweyten Differenzialien, dividiret durch dt^2 ſetzt: und ſo nach der Reihe weiter.

102.

Allgemein; wenn es ſich zeigt, daß in dem allgemeinen Ausdruck für y, Nr. 101, durch die Subſtitution des bekannten Werthes von t, der Nenner auf Null gebracht wird, ſo muß man denſelben ſo vielmal hinter einander differenzſiren bis man auf einen Ausdruck kommt, der durch eben die Subſtitution

nicht

nicht mehr Null wird, wobey man die ersten Differenziale dt immer als beständige Größen behandeln muß. Hierauf differenziiret man eben so oft auch den Zähler: und der neue Bruch, welchen man auf diese Art erhält, wird die Summe so vieler Partikularwerthe von y, dividiret durch die Anzahl dieser Werthe, ausdrücken, als die um Eins vermehrte Anzahl der Differenziirungen Einheiten enthält: und diese Werthe werden diejenigen seyn, welche sich auf die gleichen Werthe von t beziehen, deren Anzahl bekanntlich der um Eins vermehrten Anzahl derjenigen Differenzialgleichung für ϑ gleich ist, welche man $= 0$ findet.

Auf diese Art findet man die Summe dieser verschiedenen Werthe von y; allein man kann eben so auch die Summe ihrer Quadrate, ihrer Würfel rc. finden: denn hierzu wird weiter nichts nöthig seyn, als eine neue Rechnung, in welcher man für die Funktion y, ihr Quadrat y^2, dann ihren Würfel y^3 rc. nimmt. Hat man diese, so kann man daraus vermittelst der bekannten Formeln, die Summe der Produkte von je zwey, je drey, rc. Werthen von y ableiten. Auf diese Art findet man alle Coefficienten derjenigen Gleichung, von welcher diese Werthe die Wurzeln sind; diese Gleichung muß man also auflösen, um jeden der gesuchten Werthe einzeln zu erhalten.

Hieraus folget, daß wenn sich unter den Werthen t', t'', t''', rc. der Funktion t, zwey oder mehr gleiche Werthe finden, daß alsdenn diejenigen unter den Werthen y', y'', y''', rc. welche sich auf die gleichen Werthe von t beziehen, nicht mehr blos durch eine rationale Funktion, von t und von den Coefficienten m, n, p, rc. der gegebenen Gleichung, bestimmt werden können; sondern sie hängen von einer Glei-

chung

chung ab, deren Grad der Anzahl jener gleichen Werthe, gleich iſt, und deren Coefficienten ſämtlich durch t, m, n, p, ꝛc. rational ausgedrückt werden können.

Auch aus andern Gründen läßt ſich einſehen, daß dies ganz natürlich, und den Lehrſätzen der Analyſis gemäß iſt. Denn da man verſchiedene Werthe für y hat, welche von einem einzigen Werthe von t abhängen, ſo iſt klar, daß jeder dieſer Werthe von y auf gleiche Art, von dem ihm entſprechenden Werthe von t abhängen muß, und daß folglich dieſe Werthe blos Wurzeln einer einzigen Gleichung ſeyn können, deren Coefficienten ſich rational durch t ausdrücken laſſen.

Wir wollen z. B. annehmen, daß eine Gleichung von irgend einem Grade μ, gegeben ſey

$$x^{\mu} + m x^{\mu-1} + n x^{\mu-2} + p x^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

und daß man eine andere von dem niedrigern Grade λ finden wollte,

$$x^{\lambda} + a x^{\lambda-1} + b x^{\lambda-2} + c x^{\lambda-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

welche alle Wurzeln mit der erſten gemein haben, d. h. ein Diviſor derſelben ſeyn ſoll: ſo weiß man, daß die Coefficienten a, b, c, ꝛc. ſämtlich gleichartige Funktionen von den Wurzeln der gegebenen Gleichung ſeyn werden, und bey welchen $\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,\lambda}$ Veränderungen ſtatt finden werden, ſo daß nothwendig jeder dieſer Coefficienten, durch m, n, p, ꝛc. vermittelſt einer Gleichung von eben dem Grade (Nr. 89 und 98.) ausgedrückt ſeyn wird. So bald aber der Werth irgend eines dieſer Coefficienten bekannt iſt, ſo kann man zu Folge des oben aufgelöſeten Problems, den Werth jedes andern Coefficienten finden. Es folgt aber aus unſerer Auflöſung, daß wenn der Werth des

als

als bekannt angenommenen Coefficienten eine einfache Wurzel derjenigen Gleichung ist, von welcher die Bestimmung dieses Coefficienten abhängt, sich alle übrigen durch ihn rational werden ausdrücken lassen; ist hingegen der Werth des bekannten Coefficienten, eine doppelte, oder dreyfache ꝛc. Wurzel derselben Gleichung, so kann jeder der übrigen Coefficienten durch diesen, nicht anders als vermittelst einer Gleichung vom zweyten, dritten, ꝛc. Grad bestimmt werden.

Um das a posteriori zu bestätigen, was wir so eben a priori gefunden haben, so sey die Gleichung vom vierten Grade

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

gegeben. Wir wollen wie Nr. 35. Abschn. II. annehmen, daß sie durch folgende vom zweyten Grad, $x^2 + fx + g = 0$ theilbar sey. Man kommt hier, wie wir schon gesehen haben, auf zwey Bedingungsgleichungen

$$p - g(m - f) - f(n - g - f(m - f)) = 0$$
$$q - g(n - g - f(m - f)) = 0$$

Aus der ersten erhält man

$$g = \frac{p - nf + mf^2 - f^3}{m - 2f}$$

Da also g rational durch f ausgedrückt wird, so wird es hinreichend seyn f zu suchen, um g ohne alle Wurzelausziehung zu erhalten. Träfe es sich indessen, daß der Werth von $f = \frac{m}{2}$, und zugleich $p = \frac{mn}{2} - \frac{m^3}{8}$ wäre, so würde dieser Werth von f, $g = \frac{0}{0}$ machen. Um daher den Werth von g zu erhalten, muß man noch zu einer andern Gleichung seine Zuflucht nehmen, in welcher g auf den zweyten Grad steigt, nemlich

$$g^2 - (n - mf + f^2)g + q = 0$$

so daß, wenn man nun $\frac{m}{2}$ für f setzet

$$g^2 - (n - \frac{m^2}{4})g + q = 0$$

wird. g wird also durch die Auflösung dieser Gleichung bestimmt werden müssen. Ich behaupte aber, daß in dem Falle den wir hier betrachten, der Werth $\frac{m}{2}$ von f, eine doppelte Wurzel der Gleichung für f seyn wird.

Um dies zu beweisen bemerken wir, daß diese Gleichung für f, durch die Substitution des Werthes von g aus der ersten Gleichung in die zweyte, entstehen muß: setzt man also zur Abkürzung $p - nf + mf^2 - f^3 = P$, und $m - 2f = Q$, so ist $g = \frac{P}{Q}$, und die Gleichung für f wird folgende

$$P^2 - (n - mf + f^2)PQ + qQ^2 = 0$$

entwickelt man diese Gleichung, so steigt sie auf den sechsten Grad, und ist die nemliche, welche wir Nr. 35. gefunden haben. Es ist aber offenbar, daß, da $p = \frac{mn}{2} - \frac{m^3}{8}$, eine von den Wurzeln dieser Gleichung $= \frac{m}{2}$ seyn wird; denn setzt man $f = \frac{m}{2}$, so wird zugleich $P = 0$, und $Q = 0$; und da diese beyden Bedingungen, nicht allein alle Glieder der obigen Gleichung auf Null bringen, sondern auch ihre Differenzialgleichung

$$2PdP - (2fdf - mdf)PQ - (n - mf + f^2)(PdQ + QdP) + 2qQdQ = 0$$

so

so folgt, daß die Wurzel $f = \frac{m}{2}$ eine doppelte Wurzel eben der Gleichung seyn muß.

103.

Wir haben bis jetzt angenommen, daß die beyden Funktionen t und y gleichartig seyn; wir wollen nunmehr das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit untersuchen, und voraussetzen, daß diese Funktionen von irgend einer beliebigen Form seyn.

Wenn man nach und nach in beyden Funktionen, alle mögliche Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. aus welchen sie bestehen, machet, ohne übrigens auf diejenigen Acht zu haben, welche einerley Werthe von t und y öfter geben, so wird man eine gleiche Anzahl π von correspondirenden Werthen für t und y erhalten, welche man, wie Nr. 100, durch t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, und durch y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ bezeichnen kann. In dem Fall, wenn t und y gleichartige Funktionen sind, werden die Werthe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ sämtlich auf eine verschiedene Art ausgedrückt, und Wurzeln der einfachen Gleichung $\vartheta = 0$ seyn, welche zur Bestimmung der Funktion t, durch m, n, p, ꝛc. dienet; und eben diese Bewandniß wird es mit den Werthen y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ haben: dies hindert indessen nicht, daß nicht einige Werthe von t, oder von y unter einander gleich seyn könnten, wie in dem Fall, welchen wir Nr. 102. untersucht haben; allein es kommt hier blos auf die Form, nicht auf die absolute Größe dieser Werthe an. Sind im Gegentheil die Funktionen t und y nicht gleichartig; so werden sich nothwendig unter den Werthen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, oder y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$

einige

einige finden, die nicht verschieden sind, so daß die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, oder von y, kleiner seyn wird als π, und aus dem was Nr. 97. erwiesen worden, läßt sich leicht schließen, daß diese Zahl blos ein submultiplum von π seyn wird. Wir haben aber hier zwey Fälle zu betrachten, je nachdem die Anzahl der verschiedenen Werthe der gegebenen Funktion von t, entweder $= \pi$, oder ein submultiplum von π ist.

1) Wir wollen annehmen, daß die Werthe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ sämtlich verschieden, d. h. auf eine verschiedene Art ausgedrückt sind; so ist offenbar, daß in diesem Falle, die Gleichung $\vartheta = 0$, alle diese verschiedenen Werthe nothwendig zu Wurzeln haben wird, so daß sie wirklich von dem Grade π seyn wird, wie auch übrigens die Werthe der gesuchten Funktion y beschaffen seyn mögen. Es wird sich folglich die Auflösung Nr. 100, völlig auf diesen Fall anwenden lassen.

2) Wir wollen annehmen, daß unter den Werthen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ sich blos eine Anzahl von ϱ verschiedenen Werthen befinde, und ϱ ein Faktor von π sey, so daß $\pi = \varrho\sigma$. Wenn in diesem Fall $\vartheta = 0$ diejenige Gleichung vorstellt, deren Wurzeln diese verschiedenen Werthe sind, so folget aus dem was Nr. 97. erwiesen worden, daß diejenige Gleichung, welche alle Werthe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ zu Wurzeln hat, $\vartheta^\sigma = 0$ seyn werde, so daß jede Wurzel dieser Gleichung noch $\sigma - 1$ andere Wurzeln neben sich haben wird, die ihr gleich sind. Man wird also auch auf diesen Fall die allgemeine Auflösung Nr. 100. anwenden können, wenn man nur $\vartheta^\sigma = 0$ als die Gleichung für t ansiehet, d. h. wenn man setzet

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{rc.} = 9^{\sigma}$$

Da aber jede Wurzel dieser Gleichung eine von gleichen Wurzeln ist, so wird man die Auflösung nach denen Regeln abändern müssen, welche wir Nr. 102. für den Fall gleicher Wurzeln gegeben haben; und anstatt jeden Werth von y, der jedem Werth von t entspricht, zu finden, wird man blos die Summe von allen y finden, welche gleichen Werthen von t entsprechen: da aber jeder verschiedene Werth von t, in der Reihe $t', t'', t''',$ rc. $t^{(\pi)}$, σmal vorkommt, und da immer jedem in dieser Reihe vorkommenden Werthe, ein Werth in der Reihe $y', y'', y''',$ rc. $y^{(\pi)}$ entspricht, so daß sich einerley Werthe von t und von y, nicht zweymal in eben den Reihen in correspondirenden Stellen befinden, so folget, daß jedem Werthe von t, σ verschiedene Werthe von y entsprechen werden; und daß man also, wenn ein Werth von t bekannt ist, nichts weiter als die Summe von σ verschiedenen Werthen von y finden kann, welche jenem Werthe entsprechen.

Hieraus, und aus Nr. 103. läßt sich also schließen, daß in diesem Fall jeder Werth von y, durch t nicht anders als vermittelst einer Gleichung von dem Grad σ ausgedrückt werden kann, und diese wird alle die Werthe von y zusammen enthalten, welche einem und eben demselben Werthe von t entsprechen.

Uebrigens kann man die Auflösung des Falles, von welchem wir reden, sehr abkürzen, wenn man ihn auf den Fall gleichartiger Funktionen zurückführt; denn es ist offenbar, daß weun z. B. dem Werthe t', die Werthe $y', y'', y''',$ rc. y^{σ} entsprechen, jede Funktion von der Form $f:(y', y'', y''', \text{rc.}\ y^{\sigma})$ von solcher Beschaffenheit seyn werde, daß sie nur ϱ verschiedene

dene Werthe zuläßet, wie die Funktion t', und daß folglich diese beyde Funktionen, gleichartige Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. seyn werden. Nimmt man demnach anstatt der Funktion y irgend eine Funktion von der Form $f:(y', y'', y''', \text{ꝛc. } y^{(\sigma)})$ so wird man geradezu den Werth dieser Funktion, durch t ausgedrückt, vermittelst der Nr. 100. vorgetragenen Auflösung finden; und man wird blos die Gleichung $\vartheta = 0$ brauchen, welche nur die ϱ verschiedenen Werthe von t zu Wurzeln hat. Man kann also auf diese Art alle Coefficienten der Gleichung finden, deren Wurzeln die Werthe y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\sigma)}$ sind; denn jeder dieser Coefficienten ist nothwendig eine Funktion von der nemlichen Form $f:(y', y'', y''' \text{ ꝛc. } y^{(\sigma)})$ (Nr. 89.)

104.

Wenn man demnach 1) irgend zwey Funktionen t und y von den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. der Gleichung $x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \text{ꝛc.} = 0$, hat, und diese Funktionen sind von solcher Beschaffenheit, daß alle Verwechselungen der Wurzeln, welche machen, daß sich die Funktion y verändert, zugleich auch die Funktion t ändern, so kann man, überhaupt genommen, den Werth von y, durch einen rationalen Ausdruck aus t, und aus m, n, p, ꝛc. erhalten, so daß, wenn ein Werth von t bekannt ist, auch der entsprechende Werth von y unmittelbar bekannt seyn wird: ich sage, überhaupt genommen, denn wenn es sich trift, daß der bekannte Werth von t, eine doppelte oder dreyfache ꝛc. Wurzel der Gleichung für t ist, so wird der entsprechende Werth von y, noch von einer quadratischen, cubischen, ꝛc. Gleichung abhängen, deren sämtliche Coefficienten, rationale Funktionen von t, und vom m, n, p, ꝛc. sind.

2) Wenn die Funktionen t und y von solcher Beschaffenheit sind, daß bey Verwechselungen der Wurzeln, welche y ändern, t ungeändert bleibt, so wird man den Werth von y aus t, und m, n, p, ꝛc. nicht anders erhalten können, als vermittelst einer Gleichung vom zweyten Grade, wofern einem und demselben Werthe von t, zwey Werthe von y entsprechen; oder durch eine Gleichung vom dritten Grade, wenn einem und demselben Werthe von t drey Werthe von y entsprechen, und so nach der Reihe weiter. Die Coefficienten dieser Gleichung für y, werden, überhaupt genommen, rationale Funktionen von t, und m, n, p, ꝛc. seyn, so daß man, wenn ein Werth von t gegeben ist, y geradezu durch die Auflösung einer Gleichung vom zweyten, dritten, ꝛc. Grade, finden kann: trift es sich aber, daß der bekannte Werth von t eine doppelte, dreyfache, ꝛc. Wurzel der Gleichung für t ist, so werden auch die Coefficienten dieser Gleichung noch von einer Gleichung vom zweyten, dritten ꝛc. Grade abhängen.

Hieraus lassen sich nun die nothwendigen Bedingungen ableiten, unter welchen man im Stande seyn wird, die Werthe der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. selbst, vermittelst der Werthe irgend einer Funktion dieser Wurzeln zu bestimmen: denn hierzu wird blos nöthig seyn, anstatt der Funktion y, geradezu blos die Wurzel x zu nehmen, und die bisher gemachten Schlüsse auf diesen Fall anzuwenden.

105.

Wir kommen also gegenwärtig, auf die Anwendung der bisher vorgetragenen Theorie, auf die allgemeine Auflösung der Gleichungen. Wir wollen mit der Untersuchung desjenigen Falles anfangen, wo man nicht mehr als drey Wurzeln x', x'', x''', hat, d. h. wo die gegebene Gleichung vom dritten Grade ist.

Wenn

Wenn man in diesem Falle, die allgemeine Funktion $f:(x')(x'')(x''')$, betrachtet, so erhellet, daß sie von einer Gleichung vom (1.2.3)ten Grade abhängen muß, deren sechs Wurzeln folgende sind

$$f:(x')(x'')(x'''),\quad f:(x'')(x')(x''')$$
$$f:(x''')(x'')(x'),\quad f:(x'')(x''')(x')$$
$$f:(x')(x''')(x''),\quad f:(x''')(x')(x'').$$

Um nun diese Gleichung auf einen niedrigern Grad als die gegebene Gleichung herabsetzen zu können, so ist offenbar kein anderes Mittel vorhanden, als drey und drey von diesen Wurzeln gleich zu machen; in welchem Falle sie sich auf den zweyten Grad reduciren wird. In dieser Absicht nehme man an, daß die gegebene Funktion von solcher Beschaffenheit sey, daß

$$f:(x')(x'')(x''') = f:(x'')(x''')(x'),$$

unabhängig von allem Verhältniß unter den Wurzeln x', x'', x'''; d. h. daß diese Funktion unverändert bleibe, wenn man in derselben x' mit x'', x'' mit x''', und x''' mit x' vertauscht; man erhält also aus dem nemlichen Grunde

$$f:(x'')(x''')(x') = f:(x''')(x')(x'')$$

ferner

$$f:(x''')(x')(x'') = f:(x')(x'')(x''')$$

Man siehet hieraus, daß die drey Funktionen

$$f:(x')(x'')(x'''),\quad f:(x'')(x''')(x'),\quad f:(x''')(x')(x'')$$

nothwendig gleich seyn werden, und daß nur diese dreye von der vorausgesetzten Beschaffenheit seyn können. Folglich werden die drey übrigen Funktionen

$$f:(x'')(x')(x'''),\quad f:(x')(x''')(x''),\quad f:(x''')(x'')(x')$$

ebenfalls gleich seyn; so daß die Gleichung, von der die Rede ist, auf den Grad $\frac{1.2.3}{3} = 2$ herabkommen muß. Nr. 98.

 Nimmt

Nimmt man nun, um die Form der gegebenen Gleichung auf eine allgemeine Art zu finden, irgend eine andere Funktion $\phi : (x')(x'')(x''')$ an; bezeichnet man ferner zur Abkürzung, durch y', y'', y''', die drey Funktionen

$$\phi : (x')(x'')(x'''), \quad \phi : (x'')(x''')(x'), \quad \phi : (x''')(x')(x'')$$

welche den ersten drey obigen Funktionen entsprechen; desgleichen durch z', z'', z''', die drey Funktionen

$$\phi : (x'')(x')(x'''), \quad \phi : (x')(x''')(x''), \quad \phi : (x''')(x'')(x')$$

welche den letztern drey gleichen Funktionen entsprechen, so ist klar, daß man jede Funktion von x', x'', x''' durch irgend eine Funktion von y', y'', y''', oder von z', z'', z''', wird ausdrücken können, weil das Zeichen ϕ : irgend eine unbestimmte Funktion bedeutet. Man wird demnach allgemein die Funktion $f : (x')(x'')(x''')$, durch folgende $f : (y')(y'')(y''')$ vorstellen können; aber vermöge der Bedingungen unserer Aufgabe muß diese Funktion unverändert bleiben, wenn man in derselben x' mit x'', x'' mit x''', und x''' mit x' verwechselt; da nun durch diese Verwechselung mit den drey Größen y', y'', y''' nichts weiter vorgehet, als daß sich eine in die andere verwandelt, so folgt, daß die Funktion $f : (y')(y'')(y''')$ von solcher Beschaffenheit seyn muß, daß sie unverändert bleibt, was man auch in derselben für Verwechselungen mit den Größen y', y'', y''', machen mag; sie wird folglich von der Form $f : (y', y'', y''')$ seyn.

Demnach würde jede Funktion von der Form

$$f : (y', y'', y''')$$

die erforderlichen Eigenschaften besitzen, und folglich blos von einer Gleichung vom zweyten Grade abhängen. Es ist in der That nicht schwer, geradezu einzusehen, daß, was man auch für Versetzungen mit den drey Wurzeln x', x'', x''' machen mag, dennoch die drey Größen y', y'', y''' sich nicht an-

ders

ders verwandeln können, als eine in die andere, oder in die drey Größen z', z'', z''': daraus folgt aber, daß die Funktion $f:(y', y'', y''')$ nur entweder ungeändert bleiben, oder in $f:(z', z'', z''')$ übergehen kann; und daß folglich diese beyde Funktionen Wurzeln einer einzigen Gleichung vom zweyten Grade seyn müssen.

Betrachten wir nunmehr diese Funktionen als bekannt, so kommt es noch darauf an vermittelst derselben, die Werthe der einzelnen Größen y', y'', y''', und z', z'', z''' zu bestimmen. Da aber die Funktionen, von welchen die Rede ist, von solcher Beschaffenheit sind, daß sie unverändert bleiben, was man auch für Verwechselungen, sowohl mit den Größen y', y'', y''', als auch mit den Größen z', z'', z''' machen mag, so folgt aus dem was oben erwiesen worden, daß die drey Größen y', y'', y''' Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade, und die Größen z', z'', z''', Wurzeln einer andern Gleichung vom dritten Grade seyn werden. Diese Gleichungen mögen folgende seyn

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0$$
$$z^3 - fz^2 + gz - h = 0$$

Da nun die Coefficienten a, b, c Funktionen von der Form $f:(y', y'', y''')$, und die Coefficienten f, g, h ähnliche Funktionen von der Form $f:(z', z'', z''')$ sind, so folgt aus dem obigen, daß die correspondirenden Coefficienten a und f, Wurzeln einer einzigen Gleichung vom zweyten Grade seyn müssen, deren Coefficienten durch m, n, p gegeben sind; eben die Bewandniß wird es mit den Coefficienten b und g, desgleichen c und h haben. Man bemerke hierbey, daß wenn die Werthe von a und f gefunden sind, vermittelst derselben b, g und c, h unmittelbar gefunden werden können, nach der Nr. 100. erklärten Methode.

Da die Gleichungen für y und z vom dritten Grad sind, so muß man sie auf eine solche Form zu bringen suchen, welche eine Auflösung verstattet. Denn theils kann man sie allgemein nicht auflösen, oder vielmehr man muß voraussetzen, daß man die Methode, sie aufzulösen, nicht wisse, weil die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade gerade der Gegenstand unserer Untersuchung ist; theils läßt sich die Methode von Nr. 99. nicht anwenden, sie auf einen niedrigern Grad zu bringen, weil der Exponent 3 eine Primzahl ist, und keinen Divisor hat.

Da nun die Auflösung der Gleichungen von zwey Gliedern jederzeit möglich ist, so wird es dem Zweck angemessen seyn, sie auf diese Form zu bringen. Wir wollen also annehmen, daß sich die Gleichung für y, in $y^3 - c = 0$ verwandle, oder noch allgemeiner, in $(y + k)^3 - 1 = 0$. Um nun die hierzu nöthigen Bedingungen zu finden, so bemerke man, daß wenn $1, \alpha, \alpha^2$ die Cubikwurzeln der Einheit sind, $y' + k = \sqrt[3]{1}$, $y'' + k = \alpha\sqrt[3]{1}$, $y''' + k = \alpha^2\sqrt[3]{1}$ seyn werde. Hieraus ergiebt sich, (weil $\alpha^3 = 1$),

$$y' + k = \alpha^2(y'' + k) = \alpha(y''' + k)$$

Es wird folglich diejenige Funktion von x', x'', x''', welche wir mit dem Zeichen φ bezeichnet haben, von solcher Beschaffenheit seyn müssen, daß unabhängig von allem Verhältniß zwischen den Wurzeln x', x'', x''', folgende Vergleichung statt finde

$$\begin{aligned} \varphi : (x')(x'')(x''') + k &= \alpha^2(\varphi : (x'')(x''')(x') + k) \\ &= \alpha(\varphi : (x''')(x')(x'') + k) \end{aligned}$$

Ueberdem erhält man, wenn x' mit x' verwechselt wird

$$\begin{aligned} \varphi : (x'')(x')(x''') + k &= \alpha^2(\varphi : (x')(x''')(x'') + k) \\ &= \alpha(\varphi : (x''')(x'')(x') + k); \end{aligned}$$

d. h.

d. h. $z' + k = \alpha^2(z'' + k) = \alpha(z''' + k)$, wodurch sich die Gleichung für z gleichfalls auf die Form $(z + k)^3 - 1 = 0$ reduciret.

Vergleicht man aber die Gleichung $(z + k)^3 - 1 = 0$ mit der Gleichung $y^3 - ay^2 + by - c = 0$, so erhält man $c = 1 - k^3$; und daher, weil $1 = (y + k)^3 = (y' + k)^3$ (man darf nemlich für y jede der Wurzeln setzen), $c = (y' + k)^3 - k^3$; eben so findet man $h = (z' + k)^3 - k^3$. Die beyden Größen

$$(\varphi:(x')(x'')(x''') + k)^3 - k^3, \text{ und } (\varphi:(x'')(x')(x''') + k)^3 - k^3$$

werden demnach die Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grade seyn, welche man folglich als die allgemeine reducirte Gleichung des dritten Grades ansehen kann.

Durch die Auflösung dieser Gleichung wird der Werth der beyden Funktionen $\varphi:(x')(x'')(x''')$ und $\varphi:(x'')(x')(x''')$ bekannt, und vermittelst der obigen Bedingungsgleichungen lassen sich die Werthe von den vier andern Funktionen, aus diesen ableiten. Sind aber diese Funktionen bekannt, so kann man die Werthe jeder der drey Wurzeln x', x'', x''' daraus ableiten Nr. 104.

106.

Wir haben also die Gründe von der Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade auf die directeste und allgemeinste Art entwickelt; und es ist leicht besondere Anwendungen hiervon zu machen, und die verschiedenen im ersten Abschnitte vorgetragenen Theorien daraus abzuleiten.

Die einfachste Form, welche man der Funktion $\varphi:(x')(x'')(x''')$ geben könnte, ist folgende: $Ax' + Bx'' + Cx''' + D$; worin A, B, C, D beständige Größen sind; die Bedingungsgleichung ist demnach

$$Ax' + Bx'' + Cx''' + D + k)$$
$$= \alpha^2 (Ax'' + Bx''' + Cx' + D + k)$$
$$= \alpha\ (Ax''' + Bx' + Cx'' + D + k);$$

woraus sich folgende Gleichungen ergeben

$$A = \alpha^2 C = \alpha B$$
$$B = \alpha^2 A = \alpha C$$
$$C = \alpha^2 B = \alpha A$$
$$D + k = \alpha^2 (D + k) = \alpha (D + k).$$

Die zweyte giebt $B = \alpha^2 A$, und $C = \alpha A$, und diese Werthe thun zugleich der ersten und dritten Genüge, da $\alpha^3 = 1$; was die vierte betrift, so giebt sie $D + k = 0$, und folglich $D = - k$; die gegebene Funktion wird demnach folgende Form haben müssen

$$A(x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') - k;$$

setzt man hier $k = 0$, so erhalten wir gerade die, auf welche wir im ersten Abschnitte a posteriori kamen Nr. 5.

107.

Wir kommen nun auf den Fall, wenn man vier Wurzeln hat, welches bey Gleichungen vom vierten Grade statt findet. Betrachtet man die allgemeine Funktion

$$f : (x')(x'')(x''')(x'''')$$

so zeigt sich, daß sie von einer Gleichung vom $1.2.3.4$ten, oder 24sten Grade abhängen wird, deren 24 Wurzeln folgende sind (Nr. 96)

$$f : (x')(x'')(x''')(x''''), \quad f : (x'')(x')(x''')(x''''),$$
$$f : (x''')(x'')(x')(x''''), \quad f : (x'')(x''')(x')(x''''),$$
$$f : (x')(x''')(x'')(x''''), \quad f : (x''')(x')(x'')(x''''),$$
$$f : (x'''')(x'')(x''')(x'), \quad f : (x'')(x'''')(x''')(x'),$$
$$f : (x''')(x'')(x'''')(x'), \quad f : (x'')(x''')(x'''')(x'),$$
$$f : (x'''')(x''')(x'')(x'), \quad f : (x''')(x'''')(x'')(x'),$$
$$f : (x')(x'''')(x''')(x''), \quad f : (x'''')(x')(x''')(x''),$$

$f : (x''')(x'''')(x')(x'')$, $\quad f : (x'''')(x''')(x')(x'')$,
$f : (x')(x''')(x'''')(x'')$, $\quad f : (x''')(x')(x'''')(x'')$,
$f : (x')(x'')(x'''')(x''')$, $\quad f : (x'')(x')(x'''')(x''')$,
$f : (x'''')(x'')(x')(x''')$, $\quad f : (x'')(x'''')(x')(x''')$,
$f : (x')(x'''')(x'')(x''')$, $\quad f : (x'''')(x')(x'')(x''')$.

Nun muß man versuchen diese Gleichung auf einen niedrigern als den vierten Grad, d. h. auf den zweyten oder dritten Grad, zu bringen; und es wird am zweckmäßigsten seyn den letztern, als den höchsten, den man bey dieser Untersuchung nehmen darf, zu wählen. Man muß demnach die Einrichtung der Rechnung so machen, daß von diesen 24 Wurzeln je achte, gleich werden; und hierzu gelangt man, indem man diese Wurzeln auf alle mögliche Arten unter einander vergleichet, bis man eine Combination findet, welche gerade acht gleiche Wurzeln giebt; denn alsdenn werden auch unter den übrigen sechzehn Wurzeln von selbst achte und achte gleich werden. (Nr. 97.)

Wir setzen zuerst

$$f : (x')(x'')(x''')(x'''') \;=\; f : (x'')(x')(x''')(x'''');$$

so daß die gegebene Funktion, die Form $f : (x', x'')(x''')(x'''')$ habe. Auf diese Art werden immer je zwey Wurzeln gleich werden, so daß die Gleichung nicht höher als vom 12ten Grad seyn wird. (Nr. 98.) Wir setzen ferner, daß auch

$$f : (x', x'')(x''')(x'''') = f : (x', x'')(x'''')(x''')$$

d. h. daß die Form der Funktion folgende sey

$$f : (x', x'')(x''', x''''),$$

wodurch sich die Gleichung auf den sechsten Grad reduciren wird. Setzen wir endlich, daß auch

$$f : (x', x'')(x''', x'''') = f : (x''', x'''')(x', x'')$$

d. h. daß die Funktion von solcher Beschaffenheit sey, daß sie nicht geändert wird, wenn man auf einmal x' mit x'', und

x'''

x''' mit x'''' verwechselt, so erhält die Funktion die verlangte Beschaffenheit; denn sie wird nicht mehr als folgende drey Veränderungen zulassen

$$f : (x', x'')(x''', x''''),$$
$$f : (x', x''')(x'', x''''),$$
$$f : (x', x'''')(x'', x'''),$$

so daß sie blos von einer Gleichung vom dritten Grade abhängen wird, von welcher diese drey Funktionen die Wurzeln sind.

Um die allgemeine Form der Funktionen, von welchen wir reden, zu finden, nehme ich wie Nr. 105. irgend eine andere Funktion, die ich durch $\varphi : (x')(x'')(x''')(x'''')$ bezeichne; diese reducire ich auf die Form $\varphi : (x', x'')(x''', x'''')$ bey welcher sie ungeändert bleibt, wenn ich entweder x' mit x'', oder x''' mit x'''' verwechsele. Setze ich nun zur Abkürzung

$$y' = \varphi : (x', x'')(x''', x''''),$$
$$y'' = \varphi : (x''', x'''')(x', x''),$$

so ist klar, daß sich jede Funktion von der Form

$$f : (x', x'')(x''', x''''),$$

durch eine Funktion von y' und y'' wird ausdrücken lassen; so daß wir die gesuchte Funktion allgemein durch $f : (y')(y'')$ vorstellen können. Vermöge der Voraussetzung muß aber diese Funktion von solcher Beschaffenheit seyn, daß sie ungeändert bleibt, wenn man in derselben zugleich x' mit x'', und x''' mit x'''' verwechselt; weil nun durch diese Verwechselung, die beyden Größen y' und y'' sich eine in die andere verwandeln, so folgt, daß die Funktion $f : (y')(y'')$ die Form $f : (y', y'')$ haben müsse.

Der allgemeine Ausdruck der gesuchten Funktion, ist also $f : (y', y'')$; und setzt man

$z' =$

$$z' = \varphi : (x', x''')(x'', x''''),$$

$$z'' = \varphi : (x'', x'''')(x', x'''),$$

ferner

$$u' = \varphi : (x', x'''')(x'', x'''),$$

$$u'' = \varphi : (x'', x''')(x', x''''),$$

so ist leicht einzusehen, daß durch alle mögliche Verwechselungen unter den vier Wurzeln x', x'', x''', x'''', nicht mehr als folgende drey verschiedene Funktionen herauskommen

$$f : (y', y''), \quad f : (z', z''), \quad f : (u', u'');$$

so daß sie nothwendig Wurzeln einer einzigen Gleichung vom dritten Grade seyn werden.

Man wird demnach durch Auflösung einer Gleichung vom dritten Grade, den Werth jeder solchen Funktion als $f : (y', y'')$ bestimmen können. Nimmt man nun an, daß die Größen y' und y'' die Wurzeln folgender Gleichung vom zweyten Grade seyn

$$y^2 - ay + b = 0$$

so wird jeder der Coefficienten a und b, durch eine Gleichung vom dritten Grade gegeben, indem er von der Form $f : (y', y'')$ seyn wird, so daß man auf diese Art die beyden Größen y' und y'' erhalten wird. Nimmt man aber an, was jederzeit frey stehet, daß die Funktion $\varphi : (x', x'')(x''', x'''')$ blos die beyden Wurzeln x' und x'' enthalte, und daher blos von der Form $f : (x', x'')$ sey, so erhält man $y' = \varphi : (x', x'')$ und $y'' = \varphi : (x''', x'''')$. Sieht man nun x' und x'' als Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - fx + g = 0$$

und x''', x'''' als Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - hx + l = 0$$

an, so werden die Coefficienten f, g, h, l von keinen höhern Gleichungen als vom dritten und zweyten Grad abhängen; und

und wenn diese Werthe bekannt sind, so erhält man die vier gesuchten Wurzeln durch Auflösung der obigen beyden Gleichungen vom zweyten Grade.

Dies ist das allgemeine Princip auf welchem die meisten Methoden Gleichungen vom vierten Grad aufzulösen beruhen; wie man dies aus der im zweyten Abschnitte gelieferten Analyse ersehen kann.

Setzt man $\phi : (x', x'') = x' + x''$, und $f : (y', y'') = (y' - y'')^2$ so erhält man die Auflösung Nr. 32. Setzt man aber $\phi : (x', x'') = x'x''$ und $f : (y', y'') = y' + y''$ so erhält man die Auflösung Nr. 31, u. s. f.

108.

Die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade, läßt sich noch auf eine andere Art bewerkstelligen, indem man die Wurzeln auf eine andere Art als Nr. 106. combiniret. Man setze nemlich zuerst

$$f : (x')(x'')(x''')(x'''') = f : (x'')(x''')(x'''')(x')$$

d. h. die Funktion soll ungeändert bleiben, wenn man darin, x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''', und x'''' in x', und zwar auf einmal verwandelt. Man findet also weiter

$$f : (x'')(x''')(x'''')(x') = f : (x''')(x'''')(x')(x'')$$

ferner

$$f : (x''')(x'''')(x')(x'') = f : (x'''')(x')(x'')(x''')$$

endlich

$$f : (x'''')(x')(x'')(x''') = f : (x')(x'')(x''')(x'''');$$

so daß die Funktionen

$$f : (x')(x'')(x''')(x''''), \quad f : (x'')(x''')(x'''')(x'),$$
$$f : (x''')(x'''')(x')(x''), \quad f : (x'''')(x')(x'')(x'''),$$

und nicht mehrere, gleich seyn werden. Da also unter den Funktionen, von welchen die Rede ist, immer je viere gleich

sind,

sind, so gelangen wir zuerst zu einer Gleichung vom sechsten Grade.

Setzt man aber ferner

$$f : (x')(x'')(x''')(x'''') \;=\; f : (x'''')(x''')(x'')(x')$$

d. h. die Funktion, soll auch ungeändert bleiben, wenn man zu gleicher Zeit x' in x'''', und x'' in x''', und umgekehrt, verwandelt, so erhalten wir noch vier Funktionen, welche den obigen gleich sind, nemlich

$$f : (x'''')(x''')(x'')(x'), \quad f : (x''')(x'')(x')(x''''),$$
$$f : (x'')(x')(x'''')(x'''), \quad f : (x')(x'''')(x''')(x''),$$

wodurch unter den 24 Funktionen Nr. 106. immer je achte gleich werden; daher sie nur von einer Gleichung vom dritten Grad abhängen werden.

Nimmt man aber irgend eine andere Funktion der Wurzeln x', x'', x''', x'''', welche wir mit dem Zeichen φ: bezeichnen wollen; und bezeichnet man ferner durch y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, y^{VII}, y^{VIII}, folgende acht Funktionen:

$$\varphi : (x')(x'')(x''')(x''''), \quad \varphi : (x'')(x''')(x'''')(x'),$$
$$\varphi : (x''')(x'''')(x')(x''), \quad \varphi : (x'''')(x')(x'')(x'''),$$
$$\varphi : (x'''')(x''')(x'')(x'), \quad \varphi : (x''')(x'')(x')(x''''),$$
$$\varphi : (x'')(x')(x'''')(x'''), \quad \varphi : (x')(x'''')(x''')(x''),$$

welche, wie man siehet, den obigen acht gleichen Funktionen entsprechen: so kann man jede Funktion, welche unverändert bleiben soll, sowohl wenn x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''', x'''' in x' verwandelt, als wenn x' mit x'''', x'' mit x''' verwechselt wird, auf folgende Art vorstellen

$$f : (y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, y^{VII}, y^{VIII});$$

denn es ist leicht einzusehen, daß bey allen diesen Verwechselungen, die Größen y', y'', y''', rc. sich blos eine in die andere verwandeln.

Diese

Diese Funktion wird also so beschaffen seyn, daß sie auf keine höhere Gleichung als vom dritten Grade führen kann; Bezeichnet man nun ferner, durch z', z'', z''', z^{IV}, z^{V}, z^{VI}, z^{VII}, z^{VIII}, folgende acht Funktionen,

$$\varphi:(x'')(x')(x''')(x''''),\quad \varphi:(x''')(x'')(x'''')(x'),$$
$$\varphi:(x'''')(x''')(x')(x''),\quad \varphi:(x')(x'''')(x'')(x'''),$$
$$\varphi:(x''')(x'''')(x'')(x'),\quad \varphi:(x'''')(x')(x''')(x''),$$
$$\varphi:(x')(x'')(x'''')(x'''),\quad \varphi:(x'')(x''')(x')(x''''),$$

und durch u', u'', u''', u^{IV}, u^{V}, u^{VI}, u^{VII}, u^{VIII}, folgende acht Funktionen

$$\varphi:(x''')(x')(x'''')(x''),\quad \varphi:(x'''')(x'')(x')(x'''),$$
$$\varphi:(x')(x''')(x'')(x''''),\quad \varphi:(x'')(x'''')(x''')(x'),$$
$$\varphi:(x'')(x'''')(x')(x'''),\quad \varphi:(x')(x''')(x'''')(x''),$$
$$\varphi:(x'''')(x'')(x''')(x'),\quad \varphi:(x''')(x')(x'')(x''''),$$

so bemerket man leicht, daß aus allen möglichen Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', x'''', doch nicht mehr als folgende drey verschiedene Funktionen entspringen können

$$f:(y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, y^{VII}, y^{VIII})$$
$$f:(z', z'', z''', z^{IV}, z^{V}, z^{VI}, z^{VII}, z^{VIII})$$
$$f:(u', u'', u''', u^{IV}, u^{V}, u^{VI}, u^{VII}, u^{VIII})$$

welche folglich Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grad seyn werden.

Setzt man demnach die allgemeine Auflösung dieses Grades voraus, so wird man alle Funktionen, welche die Form der obigen haben, bestimmen können. Allein da die Größen y', y'', ꝛc. z', z'', ꝛc. u', u'', ꝛc. auf ganz gleiche Art in diesen Funktionen enthalten sind, so ist klar, daß die Bestimmung derselben, noch von drey Gleichungen, jede vom achten Grad, abhängen werde.

Man wird also von neuen diese Gleichungen unter den vierten Grad zu bringen suchen müssen. Diese Absicht erreicht

reicht man durch die Voraussetzung, daß die mit φ: bezeichnete Funktion von solcher Beschaffenheit sey, daß sie unverändert bleibe, wenn man x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''' und x'''' in x' verwandelt; denn auf diese Art werden die vier Größen y', y'', y''', y'''', und dann auch die übrigen vier y^{v}, y^{vi}, y^{vii}, y^{viii}, gleich werden. Eben so wird es mit den entsprechenden Größen z', z'', &c., u', u'', &c. beschaffen seyn.

Auf diese Art lassen sich die obigen drey Funktionen, ganz einfach durch folgende Formeln ausdrücken

$$f:(y', y^{v}),\quad f:(z', z^{v}),\quad f:(u', u^{v}),$$

und die Größen y', y^{v}, z', z^{v}, u', u^{v} werden die Wurzeln von drey quadratischen Gleichungen seyn, welche folgende seyn mögen

$$y^2 - ay + b = 0$$
$$z^2 - cz + d = 0$$
$$u^2 - fu + g = 0$$

Die Coefficienten a, c, f, werden Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade seyn. Eben so auch die übrigen Coefficienten b, d, g.

Es ist nichts übrig, als die Form zu finden, welche die Funktion φ haben muß, wenn die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt werden sollen. Um hierzu auf die möglichst allgemeine Art zu gelangen, nehme man irgend eine andere Funktion von x', x'', x''', x'''' an, welche wir durch Φ: bezeichnen wollen. Man formire, wie oben die 24 Funktionen welche den 24 möglichen Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', x'''' entsprechen; diese Funktionen bezeichne man durch Y', Y'', &c. Y^{viii}, Z', Z'', &c. Z^{viii}, V', V'', &c. V^{viii}; d. h. man verwandle in den obigen Formeln das Zeichen φ in Φ, und die kleinen Buchstaben, y, z, u, in die großen Y, Z, V.

Braucht man nun das Zeichen φ: von neuen, um irgend eine Funktion damit zu bezeichnen, so ist leicht einzusehen, daß man allgemein haben werde

$$y' = \varphi : (Y', Y'', Y''', Y'^{v}), \quad y^{v} = \varphi : (Y^{v}, Y^{v'}, Y^{v''}, Y^{v'''})$$
$$z' = \varphi : (Z', Z'', Z''', Z'^{v}), \quad y^{v} = \varphi : (Z^{v}, Z^{v'}, Z^{v''}, Z^{v'''})$$
$$u' = \varphi : (V', V'', V''', V'^{v}), \quad y^{v} = \varphi : (V^{v}, V^{v'}, V^{v''}, V^{v'''})$$

Hieraus läßt sich nun leicht der Schluß machen, daß die Bestimmung der Funktionen Y', Y'', Y''', Y'''', von einer Gleichung vom vierten Grade abhängen wird; eben so auch die Bestimmung der Funktionen Y^{v}, $Y^{v'}$, $Y^{v''}$, $Y^{v'''}$. Die nemliche Bewandniß, wird es mit den Funktionen Z', Z'', ꝛc. $Z^{v'''}$, V', V'', ꝛc. $V^{v'''}$ haben, von denen immer je viere durch eine Gleichung vom vierten Grade bestimmt seyn werden.

Es sey also

$$Y^4 - AY^3 + BY^2 - CY + D = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln Y', Y'', Y''', Y'^{v} sind; so ist klar, daß man dieselbe auf zweyerley Art wird auflösen können.

1) Wenn man die ungeraden Potenzen verschwinden läßt, um sie auf die Form

$$Y^4 + BY^2 + D = 0$$

zu bringen, welche sich nach Art der Gleichungen vom zweyten Grad auflösen läßt; hierzu ist aber erforderlich, daß von den vier Wurzeln Y', Y'', Y''', Y'^{v}, zwey und zwey gleich seyn, aber mit entgegengesetzten Zeichen; d. h. es muß seyn $Y' = - Y''$ und $Y''' = - Y'^{v}$. In diesem Falle muß also die Funktion Φ von solcher Beschaffenheit seyn, daß

$$\Phi : (x')(x'')(x''')(x'''') = - \Phi : (x'')(x''')(x'''')(x')$$

und

$$\Phi : (x''')(x'''')(x')(x'') = - \Phi : (x'''')(x')(x'')(x''')$$

d. h.

d. h. sie muß so beschaffen seyn, daß sie negativ wird, wenn man x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''' und x'''' in x' verwandelt; und in diesem Falle, hat man auch

$$\Phi : (x'')(x''')(x'''')(x') = - \Phi : (x''')(x'''')(x')(x'')$$

woraus erhellet, daß zu gleicher Zeit $Y' = - Y''$, $Y'' = - Y'''$, $Y''' = - Y''''$ seyn werde, d. h. $Y' = Y''' = - Y'' = - Y''''$. Hierdurch kommt die Gleichung für Y auf die Form

$$(Y^2 - E)^2 = 0, \text{ d. h. } Y^2 - E = 0.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die übrigen Gleichungen, deren Wurzeln die Größen Y^v, $Y^{v'}$, $Y^{v''}$, $Y^{v'''}$, oder Z', Z'', Z''', Z'''', oder ꝛc. sind, zugleich auf die nemliche Form kommen werden; denn diese Wurzeln haben unter einander eben die gegenseitige Beziehung, als die Wurzeln Y', Y'', Y''', Y'''', welche darin bestehet, daß eine aus der andern entstehet, wenn man darin, x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''' und x'''' in x' verwandelt.

Die Funktionen $x' + x'' - x''' - x''''$, $x'x''' - x''x''''$ und andere gleichartige, werden die bisher entwickelten Bedingungen erfüllen.

2) Man kann die allgemeine Gleichung $Y^4 - AY^3 + BY^2 - CY + D = 0$, auch dadurch auflösbar machen, daß man sie auf zwey Glieder $Y^4 + D = 0$ reduciret. In diesem Fall lassen sich die vier Wurzeln Y', Y'', Y''', Y'''' auf folgende Art ausdrücken:

$$\sqrt[4]{-D}, \quad \alpha^3\sqrt[4]{-D}, \quad \alpha^2\sqrt[4]{-D}, \quad \alpha\sqrt[4]{-D},$$

wenn 1, α, α^2, α^3, die vier vierten Wurzeln der Einheit anzeigen. In diesem Falle wird also, da $\alpha^4 = 1$, die Bedingung statt finden

$$Y' = \alpha Y'' = \alpha^2 Y''' = \alpha^3 Y'''';$$

d. h. die Funktion Φ muß von solcher Beschaffenheit seyn, daß

$$\begin{aligned} &\Phi : (x')(x'')(x''')(x'''') \\ = \alpha\ &\Phi : (x'')(x''')(x'''')(x') \\ = \alpha^2&\Phi : (x''')(x'''')(x')(x'') \\ = \alpha^3&\Phi : (x'''')(x')(x'')(x'''). \end{aligned}$$

Alsdenn aber werden alle Gleichungen vom vierten Grade, von welchen die übrigen Größen Y^v, $Y^{v'}$, $Y^{v''}$, $Y^{v'''}$, ferner Z', Z'', ꝛc. abhängen, vermöge des oben angegebenen Grundes, auf die nemliche Beschaffenheit reduciret seyn.

Es ist nicht schwer zu finden, daß die Funktion

$$x' \dagger \alpha x'' \dagger \alpha^2 x''' \dagger \alpha^3 x''''$$

die erforderte Beschaffenheit haben werde; und hieraus ergiebt sich der Schluß, daß die obige Analyse, den Grund der Nr. 47. vorgetragenen Methode enthalte.

109.

Dies sind, wenn ich nicht irre, die wahren Gründe von der Auflösung der Gleichungen, und der eigentliche Weg, welcher uns dahin führen kann. Alles reduciret sich, wie man siehet, auf eine Art von Combinationsrechnung, durch welche man die Resultate, auf welche man seine Aufmerksamkeit zu richten hat, a priori findet. Es würde der Mühe werth seyn, hiervon eine Anwendung, auf die Gleichungen vom fünften, und von den höhern Graden zu machen, deren Auflösung bis jetzt unbekannt ist. Allein diese Anwendung erfordert eine zu große Menge von Untersuchungen und Combinationen, deren Erfolg doch immer noch sehr zweifelhaft bleibt, als daß ich mich gegenwärtig dieser Arbeit unterziehen könnte. Doch hoffe ich zu anderer Zeit die Sache wieder vornehmen zu können. Vor jetzt aber begnüge ich mich

den

den Grund einer Theorie gelegt zu haben, welche mir neu und allgemein ſcheint.

110.

Ehe wir dieſen Abſchnitt ſchließen, halte ich es für nützlich, noch mit wenig Worten von der Reduction der Gleichungen auf einen niedrigern Grad zu reden, welche alsdenn ſtatt findet, wenn unter einigen Wurzeln der vorgelegten Gleichung, ein gewiſſes gegebenes Verhältniß findet. Denn wenn alle Wurzeln einer Gleichung gegenſeitig gleiche Beziehungen auf einander haben, ſo iſt die Gleichung weſentlich, und nothwendig von einem Grade, welcher der Anzahl der Wurzeln gleich iſt, und allgemein genommen wird es unmöglich ſeyn, dieſelbe auf einen niedrigern Grad zu bringen. Dies iſt der Grund, warum z. B. das Problem von der Triſection eines Winkels, allgemein genommen, nothwendig vom dritten Grade ſeyn muß, indem demſelben auf drey verſchiedene Arten ein Genüge geſchehen kann, welche ſämtlich auf eine einzige Gleichung führen, in welcher die drey Auflöſungen ganz auf gleiche Art enthalten ſind. Indeſſen giebt es bekanntlich beſondere Fälle, in welchen man das Problem auf den zweyten Grad bringen kann, weil alsdenn unter zwey Wurzeln der Gleichung ein beſonderes Verhältniß ſtatt findet.

Mit allen andern Aufgaben und Gleichungen hat es eben dieſelbe Bewandniß. Wenn gewiſſe beſondere Verhältniſſe zwiſchen einigen Wurzeln irgend einer Gleichung ſtatt finden, ſo iſt man verſichert, daß ſie ſich auf einen niedrigern Grad bringen läßt; und kennt man dies Verhältniß a priori, entweder aus der Form der Gleichung ſelbſt, oder aus der Natur der Aufgabe, ſo wird man jederzeit die Reduction, deren die Gleichung fähig iſt, finden können.

Hudde ist meines Wissens der erste der diese Materie in seinem Briefe über die Reduction der Gleichungen, welcher der Geometrie des Des Cartes angehängt ist, abgehandelt hat. Er zeigt, wie eine Gleichung auf einen niedrigern Grad gebracht werden könne, wenn unter einigen Wurzeln derselben, ein solches Verhältniß statt findet, daß ihre Summe, oder die Summe der Produkte von je zweyen, oder die Produkte von je dreyen, Null, oder einer gegebenen Größe gleich ist; wie auch wenn sie gleiche Wurzeln, oder irgend sonst commensurable Divisoren enthält. Andere Geometer haben die Arbeit auf eben diese Art weiter fortgesetzt, und Huddens Regeln und Methoden vervollkommnet und erweitert. (Man sehe hierüber Warings schon oben angeführtes vortrefliches Werk.) Man kann aber durch Hülfe der Nr. 100. erwiesenen Sätze, bey dieser Untersuchung einen viel allgemeinern Gesichtspunkt fassen.

III.

Wenn man annimmt, daß in der Gleichung vom μten Grade

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

deren Wurzeln $x', x'', x''', \text{ꝛc.}\ x^{(\mu)}$ sind, unter einigen Wurzeln ein gewisses bekanntes Verhältniß statt finde, z. B. unter den Wurzeln $x', x'', x''', \text{ꝛc.}\ x^{(\lambda)}$, (vorausgesetzt daß $\lambda < \mu$); so fällt sogleich in die Augen, daß sich dies Verhältniß jederzeit durch eine Gleichung werde ausdrücken lassen, wovon das erste Glied eine algebraische Funktion von $x', x'', x''', \text{ꝛc.}\ x^{(\lambda)}$ seyn wird, und daß man auf diese Art den Werth einer Funktion von folgender Form $f:(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$, werde kennen lernen.

Wenn

Wenn aber 1) dieſe Gleichung von ſolcher Beſchaffenheit iſt, daß ſie blos zwiſchen den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ ſtatt findet, und zwar nur auf eine einzige Art, ſo daß ſie aufhöret wahr zu ſeyn, ſo bald man irgend eine Verwechſelung mit den Wurzeln machet, ſo wird man, allgemein genommen, den Werth jeder dieſer Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ einzeln, ohne Auflöſung irgend einer Gleichung beſtimmen können; ſo daß in dieſem Falle, alle Wurzeln nothwendig commenſurabel ſeyn werden (Nr. 104.).

2) Wenn diejenige Gleichung, welche das gegebene Verhältniß unter den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ ausdrückt, blos in Abſicht dieſer Wurzeln ſtatt findet, doch ſo, daß ſie auch alsdenn noch wahr bleibt, wenn man z. B. x' mit x'' verwechſelt; ſo erſieht man aus der angeführten Nr., daß alsdenn nothwendig die beyden Wurzeln x', x'', von einer Gleichung vom zweyten Grad

$$x^2 - ax + b = 0$$

abhängen werden, in welcher die Coefficienten a, b commenſurabel ſind.

3) Wenn eben dieſe Gleichung ſo beſchaffen iſt, daß ſie wahr bleibt, wenn man in derſelben x' in x'' und in x''' verwandelt, ſo werden die drey Wurzeln x', x'', x''' von einer Gleichung vom dritten Grad

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

abhängen, in welcher die Coefficienten a, b, c commenſurabel ſeyn werden u. ſ. f.

4) Wenn die Gleichung wie in dem erſten Fall, in Abſicht der Wurzeln x', x'', x''' ꝛc. $x^{(\lambda)}$ nur auf eine einzige Art ſtatt findet, zu gleicher Zeit aber auch in Abſicht der Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(2\lambda)}$ wahr iſt; ſo

so werden, da die Funktion $f:(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)})$ unverändert bleibt, wenn man x' in $x^{(\lambda+1)}$, x'' in $x^{(\lambda+2)}$ ꝛc. verwandelt, es werden alsdenn, sage ich, die Wurzeln x', $x^{(\lambda+1)}$ von einer Gleichung vom zweyten Grade

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0$$

abhängen, in welcher α und β commensurabel sind. Eben dies wird in Absicht der Wurzeln x'', $x^{(\lambda+2)}$, desgleichen x''', $x^{(\lambda+3)}$ u. s. f. statt finden.

Eben so, wenn die Gleichung, auf gleiche Art in Absicht der Wurzeln x', x'', x''' ꝛc. $x^{(\lambda)}$, in Absicht der Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(2\lambda)}$, und in Absicht der Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(3\lambda)}$ wahr bleibt, so werden die Wurzeln x', $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+1)}$ von einer Gleichung vom dritten Grad

$$\alpha^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$$

abhängen, in welcher α, β, γ commensurabel sind; eben dies wird in Absicht der Wurzeln x'', $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, desgleichen x''', $x^{(\lambda+3)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, u. s. f. statt finden.

5) Wenn aber die Gleichung, wie im zweyten Falle, unter den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ auf zweyerley Art statt findet, zugleich aber auch in Ansehung der Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(2\lambda)}$ statt findet; so hat man wie oben für die Wurzeln x', x'' eine Gleichung vom zweyten Grad

$$x^2 - a'x + b'' = 0$$

desgleichen für die Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, auch eine Gleichung vom zweyten Grad

$$x^2 - a''x + b'' = 0$$

in

in welchem die übereinstimmenden Coefficienten a', a'' Wurzeln einer andern Gleichung vom zweyten Grad

$$a^2 - \alpha a + \beta = 0$$

seyn werden, in der α und β commensurabel sind. Eben dies ist von den Coefficienten b' und b'' zu sagen.

Und wenn dieselbe Gleichung auch in Ansehung der Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(3\lambda)}$ statt findet; so hat man für die Wurzeln x', x'', die Gleichung

$$x^2 - a'x + b' = 0,$$

für die Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, die Gleichung

$$x^2 - a''x + b'' = 0,$$

und für die Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, die Gleichung

$$x^2 - a'''x + b''' = 0.$$

Die Coefficienten a', a'', a''' aber sind Wurzeln der Gleichung

$$a^3 - \alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$$

in welcher α, β, γ commensurabel sind. Eben diese Bewandniß hat es mit den Coefficienten b', b'', b''', u. s. w.

6) Eben dergleichen Schlüsse lassen sich auch bey dem dritten Fall machen, wo wir annahmen, daß eben die Gleichung unter den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ statt habe, wenn man darin x' in x'', und in x''' verwandelt; denn wenn eben diese Gleichung auch unter den Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(2\lambda)}$ statt findet, so werden die Wurzeln x', x'', x''', von der Gleichung

$$x^3 - a'x^2 + b'x - c' = 0,$$

abhängen, und die Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$ von einer ähnlichen Gleichung

$$x^3 - a''x^2 + b''x - c'' = 0.$$

In diesen Gleichungen werden die Coefficienten a', a'' durch eine Gleichung vom zweyten Grad gegeben

$$a^2 - a\alpha + \beta = 0$$

und α und β sind rational. Eben dergleichen ist von den Coefficienten b', b'', und c', c'' zu bemerken.

Wenn aber die Gleichung auch unter den Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(3\lambda)}$, so wird man aus eben den Gründen für die drey Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$ die Gleichung

$$x^3 - a'''x^2 + b'''x - c''' = 0$$

haben, und die Coefficienten a', a'', a''' werden in diesem Falle, Wurzeln einer cubischen Gleichung

$$a^3 - \alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$$

seyn, in welcher α, β, γ rational sind. Eben das ist in Ansehung der Coefficienten b', b'', b''' und c', c'', c''' zu bemerken.

Man übersiehet hieraus leicht, wie man ähnliche Schlüsse, für die übrigen Fälle machen kann: nur erinnere man sich, daß diese Schlüsse einige Ausnahmen leiden werden, in dem besondern Fall, wenn gleiche Wurzeln vorhanden sind, (Nr. 104.)

112.

Um das, was wir hier vorgetragen haben, durch einige Beyspiele zu erläutern, wollen wir zuerst diejenigen Gleichungen betrachten, welche man reciproke nennt, und welche von solcher Form sind, daß die Coefficienten solcher Glieder, die von den äußersten gleich weit abstehen, gleich sind. Man kann sie also auf folgende Art vorstellen

$$x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \text{ꝛc.} + nx^2 + mx + 1 = 0.$$

Vermöge der Form dieser Gleichungen ist es augenscheinlich, daß sie unverändert bleiben, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt. Und

hieraus

hieraus folgt, daß wenn x' eine Wurzel der Gleichung ist, auch $\frac{1}{x'}$ eine Wurzel seyn werde; so daß $x'x'' = 1$, oder $x'x'' - 1 = 0$ seyn wird. Aus eben dem Grunde wird auch $x'''x'''' - 1 = 0$, $x^{V}x^{VI} - 1 = 0$, rc. seyn.

Wir haben also in diesem Falle, eine Gleichung zwischen den Wurzeln x', x'', welche auch alsdenn noch statt findet, wenn x' und x'' verwechselt werden; eben diese Gleichung findet aber auch zwischen den Wurzeln x''', x'''', desgleichen x^{V}, x^{VI} u. s. f. statt. Demnach werden immer je zwey von diesen Wurzeln, in folgenden Gleichungen, deren Anzahl $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ ist, enthalten seyn

$$x^2 - a'x + 1 = 0$$
$$x^2 - a''x + 1 = 0$$
$$x^2 - a'''x + 1 = 0$$
rc.

und die Coefficienten a', a'', a''', rc. werden Wurzeln einer einzigen Gleichung von dem Grade $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$, seyn, je nachdem μ gerade oder ungerade ist, wie wir schon durch eine besondere Methode Nr. 22. gezeigt haben. Man sehe über diese Materie außer Moivre's Myscellanea analytica, noch die Commentarien des Bononischen Instituts Th. 1. und die alten Petersburger Commentarien Th. IV.

Uebrigens ergiebt sich aus den oben entwickelten Sätzen der Grund, warum die a. a. O. gebrauchte Substitution $y = x + \frac{1}{x}$, auf eine reducirte Gleichung vom Grade $\frac{\mu}{2}$ führen muß, wenn μ gerade ist. Denn es ist offenbar, daß die Werthe von y, d. h. die Wurzeln der Gleichung für y folgende

folgende seyn werden: $x' + \frac{1}{x'}$, $x'' + \frac{1}{x''}$, $x''' + \frac{1}{x'''}$, $x^{IV} + \frac{1}{x^{IV}}$, ꝛc. Da aber $x'' = \frac{1}{x'}$, $x^{IV} = \frac{1}{x'''}$ ꝛc. so werden eben diese Wurzeln sich so ausdrücken lassen;

$$x' + \frac{1}{x'},\ \frac{1}{x'} + x',\ x''' + \frac{1}{x'''},\ \frac{1}{x'''} + x'''\ \text{ꝛc.}$$

es sind folglich immer zwey derselben einander gleich; so daß die Gleichung für y, welche an und für sich vom Grade μ seyn sollte, auf den Grad $\frac{\mu}{2}$ herabgesetzt wird.

Man kann die Gleichung noch durch eine andere Substitution auf einen niedrigern Grad bringen; indem man alle ungerade Potenzen der unbekannten Größe auf Null bringen kann. Man setze $x = \frac{1 - y}{1 + y}$, so wird $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ alsdenn werden die Wurzeln der umgeformten Gleichung für y, folgende seyn

$$\frac{1 - x'}{1 + x'},\ \frac{1 - x''}{1 + x''},\ \frac{1 - x'''}{1 + x'''},\ \frac{1 - x^{IV}}{1 + x^{IV}}\ \text{ꝛc.}$$

d. h. (weil $x'' = \frac{1}{x'}$, $x^{IV} = \frac{1}{x'''}$ ꝛc.) $\frac{1 - x'}{1 + x'}$, $\frac{x' - 1}{x' + 1}$, $\frac{1 - x'''}{1 + x'''}$, $\frac{x''' - 1}{x''' + 1}$ ꝛc. Von diesen Wurzeln sind also immer zwey einander gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen.

113.

In dem oben betrachteten Beyspiel, ergab sich das Verhältniß unter den Wurzeln, wodurch die Gleichung einer Reduction empfänglich ist, aus der Form der Gleichung selbst: man kann aber die Kenntniß dieses Verhältnisses, auch aus der

der Natur des aufzulösenden Problems erhalten; und es wird nützlich seyn, einige Beyspiele dieser Art anzuführen.

Man soll vier stetig proportionirte Größen finden, deren Summe, wie auch die Summe ihrer Quadrate, gegeben ist.

Wenn man diese unbekannten Größen x, y, z, u nennt, so hat man vermöge der Bedingungen der Aufgabe, folgende vier Gleichungen:

$$xz = y^2, \qquad yu = z^2$$
$$x + y + z + u = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2$$

in welchem a und b bekannte Größen sind.

Um die drey unbekannten Größen y, z, u auf eine leichte Art zu eliminiren, und eine Endgleichung für x zu erhalten, setze ich $y = rx$, und so erhalte ich durch die beyden ersten Gleichungen $z = r^2x$, $u = r^3x$; substituiret man diese Werthe in den beyden letztern Gleichungen, so erhält man

$$x(1 + r + r^2 + r^3) = a$$
$$x^2(1 + r^2 + r^4 + r^6) = b^2,$$

aus welchen blos noch r zu eliminiren ist.

Um diese Elimination zu erleichtern multiplicire ich die erste durch $1 - r$, und die zweyte durch $1 - r^2$; so erhalte ich

$$x(1 - r^4) = a(1 - r), \quad x^2(1 - r^8) = b^2(1 - r^2)$$

diese letzte Gleichung dividire ich durch die erste, so erhalte ich $x(1 + r^4) = \frac{b^2(1 + r)}{a}$, so daß wir nun folgende beyde haben:

$$x(1 - r^4) = a(1 - r), \quad x(1 + r^4) = \frac{b^2}{a}(1 + r);$$

hieraus findet man ohne Schwierigkeit

$$r = \frac{a^2 + b^2 - 2ax}{a^2 - b^2}$$

$$r^4 = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{(a^2 - b^2)x}$$

Sub-

Substituiret man nun den Werth von r, welchen die erste Gleichung giebt, in der zweyten, so erhält man eine Endgleichung für x, welche, wenn man sie entwickelt, zu dem fünften Grade steigt. Substituiret man hingegen eben den Werth von r in der ursprünglichen Gleichung

$$x(1 + r + r^2 + r^3) = a$$

so erhält man für x eine Gleichung, welche nur auf den vierten Grad steigt, und welche die möglichst einfache Gleichung ist, welche man für die unbekannte Größe x erhalten kann.

Ich werde nunmehr beweisen, sogar ohne die Form dieser Gleichung zu kennen, daß sie in zwey Gleichungen vom zweyten Grade auflösbar seyn muß, und zwar vermittelst einer andern Gleichung vom zweyten Grade.

In dieser Absicht bemerke ich, daß wenn man u statt x sucht, man auf eine ganz gleichartige Gleichung kommen muß. Denn setzt man $z = su$, so erhält man $y = s^2 u$ und $x = s^3 u$, so daß die beyden Gleichungen für s und u folgende seyn werden

$$u(1 + s + s^2 + s^3) = a$$
$$u^2(1 + s^2 + s^4 + s^6) = b^2$$

d. h. sie werden mit den Gleichungen für x und r völlig gleichartig seyn. Hieraus aber läßt sich sogleich schließen, daß der Werth der unbekannten Größe u, nothwendig zugleich eine Wurzel, der oben gefundenen Gleichung für x seyn müsse.

Nun ist aber $u = r^3 x$, und wenn man den oben gefundenen Werth von r^4, durch den von r dividiret, so erhält man

$$r^3 = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{x(a^2 + b^2 - 2ax)}; \text{ folglich } u = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{a^2 + b^2 - 2ax}$$

Bezeichnet man nun die vier Wurzeln der Gleichung für x, mit x', x'', x''', x'''', so werden diese Wurzeln von solcher Beschaffenheit seyn, daß

$x'' =$

$$x'' = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x'}{a^2 + b^2 - 2ax'}$$

d. h. $2ax'x'' - (a^2 + b^2)(x' + x'') + 2ab^2 = 0$;
Es iſt aber kein Grund vorhanden, warum dieſe Gleichung, nur zwiſchen den Wurzeln x', x'', nicht aber zwiſchen x''' und x'''' statt finden ſollte; daher haben wir ferner

$$2ax'''x'''' - (a^2 + b^2)(x''' + x'''') + 2ab^2 = 0.$$

Wir haben alſo zwey ähnliche Gleichungen, welche zwiſchen den Wurzeln x', x'', desgleichen x''', x'''' ſtatt finden, und welche überdem ſo beſchaffen ſind, daß ſie ungeändert bleiben, wenn man x' mit x'', und x''' mit x'''' verwechſelt Man iſt alſo nach Nr. 111. verſichert, daß unſere Gleichung vom vierten Grade, in zwey Gleichungen vom zweyten Grade zerfällt werden kann, welche folgende ſeyn mögen

$$x^2 - f'x + g' = 0$$
$$x^2 - f''x + g'' = 0$$

in welchen die Coefficienten f' und f'' Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grade ſeyn werden; eben ſo auch g' und g''.

Und da von dieſen beyden Gleichungen, die eine die beyden Wurzeln x', x'', und die andere die beyden Wurzeln x''', x'''' enthalten muß; ſo wird $f' = x' + x''$, $g' = x'x''$, $f'' = x''' + x''''$, $g'' = x'''x''''$ ſeyn. Demnach erhält man

$$2ag' - (a^2 + b^2)f' + 2ab^2 = 0$$
$$2ag'' - (a^2 + b^2)f'' + 2ab^2 = 0$$

Daher $$g' = \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a}$$

$$g'' = \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a},$$

ſo daß die beyden Faktoren der gegebenen Gleichung folgende ſeyn werden

x^2 —

$$x^2 - f'x + \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a} = 0$$

$$x^2 - f''x + \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a} = 0$$

Um dies augenscheinlich zu machen, und zugleich die Gleichung zu finden, deren Wurzeln f' und f'' sind, müssen wir nun die Gleichung für x, welche unser Problem auflöset, wirklich suchen. Setzen wir also zur Abkürzung

$$c = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{2a}{a^2 - b^2},$$

so ist $r = c - ex$, und wenn man diesen Werth in die Gleichung $x(1 + r + r^2 + r^3) = a$ bringt, und dieselbe nach x ordnet, so erhält man

$$x^4 - \frac{1 + 3c}{e}x^3 + \frac{1 + 2c + 3c^2}{e^2}x^2 - \frac{1 + c + c^2 + c^3}{e^3}x$$
$$+ \frac{a}{e^3} = 0.$$

Da nun $\frac{a^2 + b^2}{2a} = \frac{c}{e}$, und $b^2 = \frac{c^2 - 1}{e^2}$, so werden die beyden Faktoren dieser Gleichung folgende seyn:

$$x^2 - f'x + \frac{cf'}{e} + \frac{1 - c^2}{e^2} = 0$$

$$x^2 - f''x + \frac{cf''}{e} + \frac{1 - c^2}{e^2} = 0,$$

multipliciret man diese beyde Faktoren mit einander, so erhält man

$$x^4 - (f' + f'')x^3 + \left(f'f'' + \frac{c}{e}(f' + f'') + \frac{2(1 - c^2)}{e^2}\right)x^2$$
$$- \left(\frac{2c}{e}f'f'' + \frac{1 - c^2}{e^2}(f' + f'')\right)x + \frac{c^2}{e^2}f'f''$$
$$+ \frac{c(1 - c^2)}{e^3}(f' + f'') + \frac{(1 - c^2)^2}{e^4} = 0$$

Die

Die Vergleichung der drey ersten Glieder dieser Gleichung, mit den drey ersten Gliedern der obigen, giebt

$$f' + f'' = \frac{1 + 3c}{e}$$

$$f'f'' + \frac{c}{e}(f' + f'') + \frac{2(1 - c^2)}{e^2} = \frac{1 + 2c + 3c^2}{e^2}$$

$$\text{folglich } f'f'' = \frac{-1 + c + 2c^2}{e^2}$$

und man wird finden, daß diese Werthe von $f' + f''$, und von $f'f''$, auch der Vergleichung der übrigen Glieder Genüge thun.

Es sind demnach die Größen f' und f'' die Wurzeln folgender Gleichung

$$f^2 - \frac{1 + 3c}{e}f + \frac{-1 + c + 2c^2}{e^2} = 0$$

Ich weiß daß man dieses Problem auf eine viel einfachere Art auflösen kann, so wie dies Newton in seiner Arithmetica universalis gethan hat, wo er es durch eine gewisse gewählte Bestimmung der unbekannten Größen dahin bringt, daß man geradezu auf zwey Gleichungen vom zweyten Grade kommt. Aber es scheint mir theils die Auflösung, welche ich hier gegeben habe, mehr direct, und deutlicher zu seyn, indem sie den Grund entdeckt warum die Gleichung vom vierten Grade, auf welche man geradezu kommt, vermittelst zweyer Gleichungen vom zweyten Grade auflösbar ist; theils hat Newton für die Regel zu der erwähnten gewählten Bestimmung der unbekannten Größen, keinen Beweis gegeben, und dieser kann, wo ich nicht irre, nicht anders, als aus den oben festgesetzten Gründen geführet werden. Doch es ist hier nicht der Ort uns über diesen Gegenstand auszubreiten.

114.

Wenn irgend eine Anzahl μ von stetig proportionirten Größen bestimmt werden soll, deren Summe sowohl, als die

Summe ihrer Quadrate gegeben ist; so läßt sich dieses Problem nach der obigen Methode eben so leicht auflösen.

Denn nennt man das erste Glied der Progression x, das zweyte rx, so erhält man sogleich folgende beyde Gleichungen

$$x(1 + r + r^2 + r^3 + \text{ꝛc.} + r^{\mu - 1}) = a$$

$$x^2(1 + r^2 + r^4 + r^6 + \text{ꝛc.} + r^{2(\mu - 1)}) = b^2$$

welche sich in folgende beyde verwandeln

$$x(1 - r^{\mu}) = a(1 - r),$$

$$x^2(1 - r^{2\mu}) = b^2(1 - r^2);$$

und hieraus ergiebt sich, wie oben

$$r = \frac{a^2 + b^2 - 2ax}{a^2 - b^2}$$

$$r^{\mu} = \frac{2ab^2 + (a^2 - b^2)x}{(a^2 - b^2)x}$$

Wenn man den Werth von r, der sich wie oben unter der Form $r = c - ex$ darstellen lässet, in der ersten Gleichung substituiret, so erhält man

$$x(1 + (c - ex) + (c - ex)^2 + (c - ex)^3 + \text{ꝛc.}$$
$$+ (c - ex)^{\mu - 1}) - a = 0$$

welche Gleichung, wie man siehet, von dem Grade μ ist.

Durch ähnliche Schlüsse als oben, läßt sich nun beweisen, daß das erste und letzte Glied der Progression x', und $r^{\mu - 1}x$ auf gleiche Art Wurzeln der obigen Gleichung seyn müssen. Dividiret man aber den Werth von r^{μ}, durch den von r, so erhält man $r^{\mu - 1} = \dfrac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{x(a^2 + b^2 - 2ax)}$, daher

$$r^{\mu - 1}x = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{a^2 + b^2 - 2ax}.$$

Nennt man nun die Wurzeln unserer Gleichung x', x'', x''', ꝛc.

ꝛc. $x^{(\mu)}$, ſo findet zwiſchen den beyden Wurzeln x', x'' folgende Bedingungsgleichung ſtatt

$$2ax'x'' - (a^2 + b^2)(x' + x'') + 2ab^2 = 0$$

und da kein Grund vorhanden iſt, warum dies Verhältniß, zwiſchen den Wurzeln x''', x^{iv}, oder x^{v}, x^{vi}, oder ꝛc. weniger ſtatt finden ſollte, als zwiſchen x', x'', ſo hat man auf eben die Art

$$2ax'''x^{iv} - (a^2 + b^2)(x''' + x^{iv}) + 2ab^2 = 0$$
$$2ax^{v}x^{vi} - (a^2 + b^2)(x^{v} + x^{vi}) + 2ab^2 = 0$$

ꝛc.

und die Anzahl dieſer Gleichungen wird $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ ſeyn, je nachdem μ gerade oder ungerade iſt.

Hieraus, und aus dem was Nr. III. erwieſen worden, folgt, daß die Gleichung vom μten Grade, in $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ Gleichungen vom zweyten Grade auflösbar iſt. Dieſe Gleichungen ſollen folgende ſeyn

$$x^2 - f'x + g' = 0$$
$$x^2 - f''x + g'' = 0$$
$$x^2 - f'''x + g''' = 0$$

ꝛc.

in welchen die Coefficienten f', f'', f''', ꝛc. die Wurzeln einer einzigen Gleichung von dem Grad $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ ſeyn werden; eben ſo auch die Coefficienten g', g'', g''', ꝛc. Da nun $f' = x' + x''$, $f'' = x''' + x''''$, ꝛc. $g' = x'x''$, $g'' = x'''x''''$, ꝛc. ſo iſt

$$2ag' - (a^2 + b^2)f' + 2ab^2 = 0$$
$$2ag'' - (a^2 + b^2)f'' + 2ab^2 = 0$$

ꝛc.

 daher

daher

$$g' = \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a}$$

$$g'' = \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a}$$

ꝛc.

Die $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ Faktoren unserer Gleichung sind demnach folgende

$$x^2 - f'x + \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a} = 0$$

$$x^2 - f''x + \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a} = 0$$

$$x^2 - f'''x + \frac{(a^2 + b^2)f''' - 2ab^2}{2a} = 0$$

ꝛc.

In dem Falle, wenn μ gerade ist, muß das Produkt aller dieser Gleichungen die obige Gleichung von dem Grade μ geben: ist aber μ ungerade, so muß man noch einen einfachen Faktor $x - h = 0$ hinzunehmen.

Ist die Multiplication verrichtet, so ist nichts übrig, als die ersten Glieder des Produkts mit der oben gefundenen Gleichung zu vergleichen, und diese Vergleichung giebt die Werthe der Größen $f' + f'' + f''' +$ ꝛc. $f'f'' + f'f''' + f''f''' +$ ꝛc. und diese Werthe sind die Coefficienten der Gleichung für f; was aber den Coefficient h betrift, (wenn μ ungerade), so wird dieser durch eine blos lineäre Gleichung bestimmt.

Hieraus folgt nun, daß das vorgelegte Problem sich jederzeit auf die Auflösung einer Gleichung von dem Grad $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ reduciren lässet.

Wollte man übrigens anstatt x, die unbekannte Größe f bestimmen, so kommt man auf eine Gleichung die zu der

Gattung

Gattung der reciproken gehöret. Denn die beyden Gleichungen

$$x(1 - r^{\mu}) = a(1 - r), \quad x^2(1 - r^{2\mu}) = b^2(1 - r^2)$$

geben $x(1 + r^{\mu}) = \frac{b^2}{a}(1 + r)$, und wenn man x wegschaffet, so ist

$$\frac{1 - r^{\mu}}{1 + r^{\mu}} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1 - r}{1 + r}$$

oder vielmehr wenn man durch $1 - r$ dividirt

$$\frac{1 + r + r^2 + r^3 + \text{ꝛc.} + r^{\mu - 1}}{1 + r^{\mu}} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{1 + r};$$

multipliciret man nunmehr über das Kreutz, und setzt zur Abkürzung $\frac{a^2}{b^2} = c^2$, so erhält man

$$(c^2 - 1)r^{\mu} + 2c^2(r^{\mu - 1} + r^{\mu - 2} + \text{ꝛc.} + r) + c^2 - 1 = 0$$

d. h. $r^{\mu} + \frac{2c^2}{c^2 - 1}(r^{\mu - 1} + r^{\mu - 2} + \text{ꝛc.} + r) + 1 = 0$, welche Gleichung nach den bekannten Methoden auf den Grad $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ reduciret werden kann.

Das einfachste Mittel hierzu bestehet in der Substitution $r = \frac{1 - y}{1 + y}$; wodurch die Gleichung $\frac{1 - r^{\mu}}{1 + r^{\mu}} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1 - r}{1 + r}$ in folgende verwandelt wird

$$\frac{(1 + y)^{\mu} - (1 - y)^{\mu}}{(1 + y)^{\mu} + (1 - y)^{\mu}} = \frac{a^2 y}{b^2}$$

in welcher alle ungerade Potenzen von y zugleich verschwinden.

115.

Wir wollen noch ein aus der Geometrie entlehntes Beyspiel hinzufügen. Dies soll das bekannte Problem seyn, durch die Spitze D eines Quadrates ACDB (Fig. 1.) eine gerade Linie MN so zu ziehen, daß der Theil MN von dieser Linie, welcher zwischen den beyden gegenüberstehenden und verlängerten Seite AC und AB, des Quadrats, enthalten ist, von gegebener Länge sey.

Man nenne a die gegebene Seite des Quadrats, und b die gegebene Länge der Linie MN. Um die Lage dieser Linie zu bestimmen, nehme man CM = x für die unbekannte Größe; so ist $MD = \sqrt{(x^2 + a^2)}$; und die beyden ähnlichen Dreyecke MCD, MAN, geben

$$x : \sqrt{(a^2 + x^2)} = a + x : MN = b;$$

hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$bx = (a + x)\sqrt{(a^2 + x^2)};$$

Befreyt man dieselbe vom Wurzelzeichen, und ordnet sie nach x, so erhält man

$$x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 + 2a^3x + a^4 = 0$$

welche, wie man siehet, vom vierten Grade ist.

Wir wollen nunmehr untersuchen, ob man aus der Natur der Aufgabe, nicht gewisse Verhältnisse unter den Wurzeln dieser Gleichung bestimmen könne, durch welche sie in Gleichungen von niedrigern Graden, auflösbar werde.

Um diese Absicht zu erreichen, bemerke ich, daß man durch den Punkt D wirklich vier Linien legen könne, welche die Bedingung der Aufgabe erfüllen; dies sind die Linien MN, M'N', M''N'', und M'''N'''; so daß CM, CM', CM'', CM''' die Wurzeln der obigen Gleichung seyn werden, von welchen die beyden letztern, wie man siehet, negativ seyn werden.

Wir bezeichnen daher diese Linien durch x', x'', x''', x''''; und da die beyden Dreyecke MDC, DNB ähnlich sind, so ist

MC:

$MC : CD = DB : BN$; da aber $M'N' = MN$ seyn muß, auch $CD = DB$, so sieht man leicht, daß auch $M'C = BN$ seyn wird; hierdurch erhält man nun folgende Proportion $x' : a = a : x''$; d. h. $x'x'' - a^2 = o$.

Man wird geradezu, vermöge des Grundsatzes vom zureichenden Grunde, den Schluß machen können, daß unter den beyden andern Wurzeln x''' und x'''' ein ähnliches Verhältniß statt finden müsse. Will man sich aber a posteriori davon überzeugen, so darf man nur bedenken, daß, da $M''N'' = M'''N'''$, auch nothwendig $CM''' = BN''$ seyn müsse, und daß in den ähnlichen Dreyecken DCM'' und DBN'' die Proportion $CM'' : CD = DB : BN'' = CM'''$ statt finde, d. h. $x''' : a = a : x''''$, folglich

$$x'''x'''' - a^2 = o.$$

Da wir nun zwey ähnliche Gleichungen haben, die eine zwischen x', x'', die andere zwischen x''', x'''', und da diese Gleichungen ungeändert bleiben, wenn man x' mit x'', desgleichen x''' mit x'''' verwechselt, so folgt aus den oben erwiesenen Sätzen, daß unsere gefundene Gleichung vom vierten Grade, sich nothwendig in folgende zweye vom zweyten Grade zerfällen lassen muß.

$$x^2 - f'x + g' = o$$
$$x^2 - f''x + g'' = o$$

in welchen f' und f'', so wie auch g' und g'' Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grad seyn werden; da aber $g' = x'x''$, und $g'' = x'''x''''$, so ist $g' = g'' = a^2$; die beyden Faktoren unserer Gleichung sind also

$$x^2 - f'x + a^2 = o$$
$$x^2 - f''x + a^2 = o.$$

Nimmt man hiervon das Produkt, so erhält man

$$x^4 - (f' + f'')x^3 + (f'f'' + 2a^2)x^2$$
$$- a^2(f' + f'')x + a^4 = o;$$

daher

daher ist

$$f' + f'' = -2a, \quad f'f'' + 2a^2 = 2a^2 - b^2$$

also $f'f'' = -b^2$, so daß die Gleichung, deren Wurzeln f' und f'' sind, folgende seyn wird

$$f^2 + 2af - b^2 = 0.$$

Uebrigens ist leicht zu bemerken, daß wenn man in der Gleichung für x vom vierten Grade $x = az$ setzt, dieselbe in die Gattung der reciproken übergehen wird; in welcher man folglich alle ungerade Potenzen der unbekannten Größe auf Null bringen kann, wenn man $z = \frac{1-y}{1+y}$ setzt: so daß die eigentliche Substitution, durch welche man auf einmal diese Absicht erreichet, folgende ist $x = \frac{a(1-y)}{1+y}$.

Wenn man den Werth von y aus dieser Gleichung ableitet, so erhält man $y = \frac{a-x}{a+x} = 1 - \frac{2x}{a+x}$; es ist aber $\frac{x}{a+x} = \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{b} = \frac{MD}{MN}$ (Fig. 2.); daher wird $y = 1 - \frac{2MD}{MN} = \frac{MN - 2MD}{MN} = \frac{2DR}{MN} = \frac{2DR}{b}$, vorausgesetzt, daß die Linie MN in R halbiret sey. Man ersiehet hieraus, daß man gleich von Anfang auf eine Gleichung vom vierten Grade, ohne ungerade Potenzen der unbekannten Größe kommen kann, wenn man die Linie DR für die unbekannte Größe annimmt. Dies hat Newton bey der Auflösung dieses Problems in seiner Arithm. univ. gethan: aber es scheint mir in der That diese Wahl der unbekannten Größe nicht sehr natürlich, und ein Vortheil zu seyn, den man erst finden kann, wenn man schon fertig ist; wenigstens scheint mir die Art, wie ihn Newton ableitet, nicht alle die Evidenz zu haben, welche man bey Untersuchungen dieser Art zu fordern, berechtiget ist.