UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die Theorie der Gleichungen

Euler, Leonhard

Berlin, 1791

2. Von der Auflösung der Gleichungen eines jeden Grades, von Leonhard Euler. Aus dem neunten Theile der neuen Commentarien der St. Petersb. Akad. der Wissenschaften, vom Jahr 1764.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53259

Visual Library

2. Von der Auflösung der Gleichungen eines jeden Grades.

Von

Leonhard Euler.

Aus dem neunten Theile der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften, vom J. 1764.

§. 1.

Alles, was bis jetzt in der Algebra über die Auflösung der Gleichungen gelehrt wird, erstreckt sich, wenn von allgemeinen Regeln die Rede ist, bloß bis auf die Gleichungen vom vierten Grade, und noch hat man keine allgemeine Methode, die Wurzeln der Gleichungen vom fünften oder irgend einem höhern Grade zu finden. Ich sage aber ausdrücklich, keine allgemeine Methode, d. h. eine solche, nach welcher man alle Gleichungen, die zu Einem Grade gehören, auflösen kann; denn es giebt von jedem Grade mehrere Gleichungen, die sich durch die Division in zwey oder mehrere Gleichungen auflösen lassen, deren Wurzeln zusammen genommen die Wurzeln jener Gleichungen ausmachen. Auch hat Moivre in jedem Grade gewisse specielle Gleichungen entdeckt, deren Auflösung möglich ist, ob man sie gleich nicht durch die Division in andere Gleichungen zerfällen kann.

§. 2.

§. 2.

Aus der allgemeinen Methode die Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade aufzulösen, ist bekannt, daß sich die Gleichungen des ersten Grades ohne alle Extraction der Wurzel entwickeln lassen, dahingegen die Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades die Extraction der Quadratwurzel erfordert. Die Auflösung der cubischen Gleichungen ferner geht ohne die Extraction der Quadrat- und Cubikwurzel, nicht von statten, und die Auflösung der biquadratischen Gleichungen macht außerdem noch die Extraction der Biquadrat-Wurzel nothwendig. Hieraus läßt sich sicher schließen, daß die Gleichungen des fünften Grades nicht ohne die Extraction der fünften und aller niedrigen Wurzeln möglich sey, und daß überhaupt die Wurzel einer Gleichung vom nten Grade durch eine Formel werde ausgedruckt werden müssen, welche alle Wurzelzeichen sowohl von nten, als von allen niedrigern Graden enthalte.

§. 3.

Hierauf habe ich vor einiger Zeit (in der vorhergehenden Abhandlung) eine Muthmaßung über die Form der Wurzeln einer jeden Gleichung gegründet. Ist nemlich eine Gleichung von irgend einem Grade

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

worin, wie stets angenommen werden kann, das zweyte Glied fehlt, gegeben: so scheint mir allemal eine um einen Grad niedrigere Gleichung von der Form

$$y^{n-1} + \mathfrak{A}y^{n-2} + \mathfrak{B}y^{n-3} + \mathfrak{C}y^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

(die ich die resolvirende Gleichung genennt habe) möglich, durch deren $n-1$ Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. die Wurzel jener Gleichung auf folgende Art ausgedruckt werden müßte:

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{ꝛc.}$$

Diese Muthmaßung habe ich dadurch bestätigt, daß ich gezeigt habe, wie die Auflösung der niedrigern Grade wirklich aus dieser allgemeinen Form fließt, und ich zweifele auch jetzt nicht an ihrer Richtigkeit.

§. 4.

Allein außerdem, daß die Erfindung der resolvirenden Gleichung, sobald die aufzulösende Gleichung den vierten Grad übersteigt, sehr große Schwierigkeiten hat, ja überhaupt genommen, eben so unmöglich scheint, als die Auflösung der gegebenen Gleichung selbst; denn außer den speciellen, den Moivrischen ähnlichen Fällen, kommt man auf nichts wichtiges: so habe ich bey der gedachten Form noch andere Unbequemlichkeiten bemerkt, weswegen ich glaube, daß es vielleicht noch eine andere von jener eben nicht verschiedene Form gebe, wobey diese Unbequemlichkeiten nicht statt fänden, und wobey sich eher hoffen ließe, in dieser schweren algebraischen Materie weitere Fortschritte zu machen. Denn es ist dabey eine Sache von Wichtigkeit, daß man die Form der Wurzeln einer jeden Gleichung genauer kenne.

§. 5.

Vorzüglich mißfällt mir an der Form, welche die Wurzeln aller Gleichungen meiner Muthmaßung nach haben müßten, daß dadurch nicht alle Wurzeln der Gleichung deutlich ausgedruckt werden. Denn obgleich das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{\alpha}$ so viel Werthe in sich schließt als n Einheiten enthält, so daß man, wenn a, b, c, d, e, ꝛc. alle Werthe der Formel $\sqrt[n]{1}$ bedeuten, anstatt $\sqrt[n]{\alpha}$ jede dieser Formeln setzen kann,

$a\sqrt[n]{\beta}$,

$a\sqrt[n]{\alpha}$, $b\sqrt[n]{\alpha}$, $c\sqrt[n]{\alpha}$, $d\sqrt[n]{\alpha}$, ꝛc.: so fällt doch in die Augen, daß man solches nicht bey jedem von den Ausdrücken $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$, ꝛc. zu thun befugt ist. Denn wäre die Verbindung dieser Ausdrücke mit den Buchstaben a, b, c, d, e, ꝛc. willkührlich, so würde man viel mehr Combinationen machen können, als die Gleichung Wurzeln enthält, deren Zahl allemal $= n$ ist.

§. 6.

Wenn also die mitgetheilte Form der Wurzel x alle Wurzeln der Gleichung in sich enthalten soll, so müssen die Combinationen der Glieder $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$, ꝛc. mit den Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. durch gewisse Bedingungen eingeschränkt, und die zur Darstellung der Wurzeln untauglichen ausgeschlossen werden. Aus der Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades wissen wir, daß unter den Wurzeln der Einheit von demselben Grade, a, b, c, d, eine gewisse Ordnung festgesetzt werden muß, und daß darnach auch die Combinationen zu machen sind. Man wird also auch unter den Gliedern der Wurzel $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$, ꝛc. eine ähnliche Ordnung beobachten, und darnach die Combinationen machen müssen. Allein da nicht bekannt ist, wie diese Ordnung bey den Wurzeln der höhern Grade gemacht werden muß, so entsteht daher ein wichtiger Mangel für meine ehemalige Muthmaßung, und ich will jetzt suchen denselben aus dem Wege zu räumen.

§. 7.

Zuvörderst wird es nützlich seyn, den Wurzeln aus der Einheit, ihr Exponent mag seyn welcher er wolle, eine gewisse

wisse Ordnung zu geben, weil dadurch meistens die große Menge der Combinationen eingeschränkt werden kann. Zu dem Ende bemerke ich, daß allemal, wenn ein Werth von denen, welche $\sqrt[n]{1}$ außer 1 hat, $= a$ gesetzt wird, auch a^2, a^3, a^4, ꝛc. passende Werthe von $\sqrt[n]{1}$ geben. Denn ist $a^n = 1$, so ist auch $(a^2)^n = 1$; $(a^3)^n = 1$; $(a^4)^n = 1$; ꝛc. Wenn man also die übrigen Wurzeln b, c, d, ꝛc. nennt, so ergiebt sich daraus, weil sich a^2, a^3, a^4, ꝛc. unter ihnen befinden, eine bestimmte Ordnung für diese Buchstaben. Fängt man z. B. nach der Einheit, welche allemal die erste Stelle bekommen muß, von a an, so sind die Werthe der Formel $\sqrt[n]{1}$ folgende: $1, a^2, a^3, a^4 \ldots a^{n-1}$, und ihre Anzahl $= n$. Es sind nemlich nicht mehr Werthe möglich, weil $a^n = 1$; $a^{n+1} = a$; $a^{n+2} = a^2$; ꝛc. ist. Auf ähnliche Art verhält es sich, wenn man von dem Buchstaben b, c oder d ꝛc. anfängt.

§. 8.

Ich muthmaße daher nicht ohne Grund, daß auch unter den Gliedern, welche die Wurzel einer Gleichung oder x ausdrucken, eine solche Ordnung statt finden, oder daß diese Glieder so beschaffen seyn werden, daß die übrigen von einem jeden unter ihnen Potestäten sind, wobey es aber nöthig wird, ihnen unbestimmte Coefficienten zu geben. Hat man also folgende Gleichung. in welcher das zweyte Glied fehlt,

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + Dx^{n-5} \ldots = 0$$

so ist es sehr wahrscheinlich, daß die allgemeine Form ihrer Wurzel

$$x = A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + C\sqrt[n]{v^3} + D\sqrt[n]{v^4} \ldots + O\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

sey, wo A, B, C, D, ꝛc. entweder rationale Größen sind, oder wenigstens das Radicalzeichen $\sqrt[n]{}$ nicht in sich schließen.

§. 9.

§. 9.

Aus dieser Form erhellet zuvörderst, daß sie nicht mehr als n — 1 Glieder enthalten kann. Denn wollte man dieselbe ihrer Natur gemäß fortsetzen, so würden die folgenden Glieder schon unter den vorhergehenden begriffen seyn, weil $\sqrt[n]{v^{n+1}} = v\sqrt[n]{v}$; $\sqrt[n]{v^{n+2}} = v\sqrt[n]{v^2}$; ꝛc. ist. Setzte man daher jene Reihe selbst ins Unendliche fort: so erhielte man gleichwohl in Ansehung der Irrationalität nicht mehr als n — 1 Glieder. Da wir nun schon vorhin gesehen haben, daß der Ausdruck für die Wurzel nicht mehr Glieder haben darf, so ist dieser Umstand kein unbedeutendes Kennzeichen der Wahrheit jener Form; es giebt indeß dafür noch stärkere Gründe.

§. 10.

Es läßt sich nemlich dieser Ausdruck sehr leicht auch auf die Gleichungen ausdehnen, in welchen das zweyte Glied nicht fehlt, welches bey dem andern nicht angieng, so daß deswegen der gegenwärtige natürlicher zu seyn scheint. Denn setzt man die irrationalen Glieder $\sqrt[n]{v}$, $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$, ꝛc. fort, so erhält man darunter auch $\sqrt[n]{v^0}$, $\sqrt[n]{v^n}$, welche wegen des zweyten Gliedes der Gleichung noch hinzugefügt werden müssen. Man kann daher, und dies ist noch allgemeiner, behaupten, daß die Wurzel einer vollständigen Gleichung vom nten Grade

$$x^n + \Delta x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

die Form habe

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} \ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

wo ω den rationalen Theil der Wurzel bedeutet, von dem man weiß, daß er $= -\frac{1}{n}\Delta$ ist. Die übrigen Glieder enthalten

halten die irrationalen Theile vom Grade n, deren es, insofern sie von einander verschieden sind, nicht mehr als $n-1$ geben kann.

§. 11.

Wenn v eine solche Größe bedeutet, daß man aus ihr die nte Wurzel wirklich ausziehen, oder $\sqrt[n]{v}$ entweder rational oder durch niedrigere Wurzelzeichen darstellen kann, so erhellet, daß die Irrationalität vom nten Grade nicht in der Formel bleibt, wodurch die Wurzel x ausgedruckt ist. Dies muß allemal statt finden, wenn die gegebene Gleichung in Faktoren aufgelöset werden kann, denn alsdann enthält keine Wurzel das Zeichen $\sqrt[n]{\ }$. Da also in diesem Falle alle Radicalzeichen $\sqrt[n]{\ }$ verschwinden, und auf niedrigere reducirt werden; aus der obigen Form aber nicht erhellet, wie die Verschwindung desselben bey einem Gliede $\sqrt[n]{\alpha}$ ein Gleiches bey den übrigen Gliedern $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, ꝛc. nach sich ziehe: so muß man allerdings diese letzte Form der Natur der Gleichungen angemessener halten als die obige.

§. 12.

Ueberdem zeigt dieselbe, welches das vornehmste ist, alle Wurzeln der Gleichungen ohne alle Zweydeutigkeit, und es ist gar nicht weiter die Frage, wie die Werthe von $\sqrt[n]{1}$ mit den Radicalgrößen mit den Zeichen $\sqrt[n]{\ }$ zu verbinden sind. Denn wenn die nten Wurzeln aus 1 folgende sind: 1, a, b, c, d, ꝛc.; und man $\sqrt[n]{v}$ mit einer davon, a, combinirt; so muß man, weil $\sqrt[n]{v}$ allerdings $a\sqrt[n]{v}$ ist, für $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$, $\sqrt[n]{v^4}$

ꝛc.

ꝛc. $a^2\sqrt[n]{v^2}$, $a^3\sqrt[n]{v^3}$, $a^4\sqrt[n]{v^4}$, ꝛc. schreiben. Das beständige Glied ω aber bleibt in allen Wurzeln unverändert, weil es eigentlich die Form $\omega\sqrt[n]{v^0}$ vorstellt, und also in $a^0\omega\sqrt[n]{v^0} = 1\omega$ übergeht. Da dieses aus der Theorie von den Gleichungen schon für sich klar ist, so hat man darin ein neues und sicheres Kennzeichen für die Richtigkeit dieser Form.

§. 13.

Hieraus erhellet ferner, wie man nach der Erfindung Einer Wurzel die übrigen darstellen kann, und man hat dazu bloß die nten Wurzeln aus der Einheit zu wissen nöthig. Setzt man dieselben 1, a, b, c, d, ꝛc. und ist die eine gefundene Wurzel der Gleichung

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

so sind die übrigen

$$x = \omega + \mathfrak{A}a\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}a^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}a^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{O}a^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}b\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}b^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}b^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{O}b^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}c\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}c^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}c^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{O}c^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ꝛc.

Auf diese Art erhält man allemal so viel Wurzeln als die Zahl n, welche den Grad der Gleichung anzeigt, Einheiten in sich faßt.

§. 14.

Durch diese Gründe bekommt also diese neue Form der Wurzeln einen sehr hohen Grad der Wahrscheinlichkeit, und

es

es fehlt zur vollen Gewißheit nichts weiter, als eine Regel zur Erfindung derselben bey jeder gegebenen Gleichung und zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. und der Größe v. Ließe sich diese Regel entdecken, so würde die allgemeine Auflösung der Gleichungen, welche bisher noch immer vergeblich gesucht worden ist, bekannt seyn. Noch kann ich zwar diese Regel nicht versprechen, sondern ich muß mich damit begnügen, die Allgemeinheit jener Form erwiesen zu haben. Für die Auflösung der Gleichungen selbst muß indeß dies nothwendig als ein Gewinn betrachtet werden, da man dazu der Kenntniß jener Form auf keine Weise entbehren kann.

§. 15.

Ob wir gleich noch nicht im Stande sind, aus der gegebenen Gleichung selbst, ihre Wurzel, oder die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. und die Größe v zu bestimmen: so schadet solches doch dem Beweise für die Richtigkeit jener Formel nichts, wenn wir umgekehrt aus der angenommenen Wurzel die Gleichung finden können, wovon sie die Wurzel ist. Diese Gleichung muß das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{\ }$ nicht enthalten, weil man die Gleichungen, deren Wurzeln gesucht werden sollen, aus lauter rationalen Gliedern bestehen zu lassen pflegt. Es kommt also darauf an, die Gleichung

$$x = \omega + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + C\sqrt[n]{v^3} + \ldots + D\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

von der Irrationalität, oder von den Wurzelzeichen $\sqrt[n]{\ }$ zu befreyen, und eine rationale Gleichung daraus herzuleiten, von welcher man mit Gewißheit behaupten kann, daß jener Ausdruck eine Wurzel derselben sey. Vermag man dieses, so ist man auch im Stande alle Wurzeln der Gleichung anzugeben.

Auf

Auf diese Art werden wir wenigstens sehr viele Gleichungen angeben können, deren Wurzeln bekannt sind; und wenn diese Gleichungen die allgemeinen Gleichungen aller Grade in sich fassen, so wird auch dieser ihre Auflösung in unserer Gewalt stehen.

§. 16.

Es wird zwar wenig geleistet zu seyn scheinen, wenn wir nur einige Gleichungen darstellen, deren Wurzeln angegeben werden können, indem aus den Elementen bekannt ist, wie Gleichungen von jedem Grade, die gegebene Wurzeln haben, gemacht werden können. Denn wenn Formeln wie $x - a$, $x - b$, $x - c$, ꝛc. in beliebiger Anzahl mit einander multiplicirt werden, so bekommt man allemal eine Gleichung, deren Wurzeln $x = a$, $x = b$, $x = c$, ꝛc. sind; allein diese Art Gleichungen zu formiren leistet bey der Auflösung der Gleichungen wenig Nutzen. Man erhält nemlich auf diesem Wege bloß solche Gleichungen, die sich in Faktoren auflösen lassen, und deren Auflösung selbst weiter keinen Schwierigkeiten unterworfen ist. Eben so wenig Vortheil stiften gegenwärtig diejenigen Gleichungen, die aus der Multiplication zweyer oder mehrerer Gleichungen von niedrigern Graden entstehen; denn auch ihre Auflösung hat auf die allgemeine Auflösung der Gleichungen keinen Einfluß.

§. 17.

Wenn dagegen aus der Formel $x = \omega + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + $ ꝛc. eine rationale Gleichung gefunden wird, so kann diese Gleichung keine rationale Faktoren haben, weil sonst ihre Wurzeln das Zeichen $\sqrt[n]{}$ nicht bekommen würden, indem sie zugleich Wurzeln niedrigerer Gleichungen wären. Es ist

aber schon viel geleistet, wenn nur die Wurzeln irgend einer Gleichung eines höhern Grades, die sich nicht in Faktoren auflösen läßt, angegeben werden; und es verdient daher Moivre vielen Dank, weil er von einzelnen Graden der Gleichungen eine in Faktoren unauflösbare Gleichung bekannt gemacht hat, deren Wurzeln angegeben werden können. Wenn seine Formeln einen größern Umfang hätten, so würde ihr Einfluß ohne Zweifel noch viel wichtiger seyn, da hingegen den Gleichungen, die in Faktoren aufgelöset werden können, dergleichen gar nicht beygelegt werden kann.

§. 18.

Doch wir kehren zurück zur Befreyung jener Formel von der Irrationalität, die sie durch das Zeichen $\sqrt[n]{}$ hat. Nach der gewöhnlichen Methode die Wurzelzeichen wegzubringen, würde man eine Gleichung bekommen, welche den nten Grad weit überstiege. Denn wenn nur ein Wurzelzeichen da wäre, oder man $x = \alpha + A\sqrt[n]{v}$ hätte; so würde die rationale Gleichung bis zu n Dimensionen von x aufsteigen, und es scheint daher, daß sie viel mehr Dimensionen enthalten wird, wenn mehr Wurzelzeichen von jenem Grade da sind. Hangen diese Wurzelzeichen gar nicht von einander ab, so muß dieses nothwendiger Weise statt finden. Allein da alle Potestäten des ersten sind, so will ich zeigen, daß man die Gleichung rational machen kann, ohne höher als zum nten Grade aufzusteigen. Ich will nemlich darthun, daß die Gleichung

$$x = \alpha + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + C\sqrt[n]{v^3} + \ldots + D\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

auf die Art von der Irrationalität befreyet werden kann, daß die sich ergebende rationale Gleichung die Potestät x^n als

als die höchste enthalte. Es wird also diese Gleichung die Form

$$x^n + \triangle x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

und jene Formel zur Wurzel haben; und da die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung $= n$ ist, so werden wir aus eben dieser Formel alle Wurzeln der Gleichung anzugeben im Stande seyn.

§. 19.

So wie dieses ein sehr deutliches Merkmal von der Richtigkeit dieser Formel ist, so verdient auch bemerkt zu werden, daß die rationale Gleichung, weil die Form der Wurzel $n - 1$ willkührliche Größen enthält, ebenfalls $n - 1$ willkührliche Größen in sich enthalten werde. Hieraus erhellet, daß sich jene Größen auf die Art bestimmen lassen, daß die rationale Gleichung die dadurch gegebenen Coefficienten $\triangle$, A, B, C, ꝛc. bekömmt, und wenn diese Bestimmung wirklich vorgenommen werden kann, so gelangt man dadurch zu einer allgemeinen Auflösung der Gleichungen, ihr Grad mag seyn, welcher er will. Auf diese Art hat man wenigstens keine Ursache an der Möglichkeit jener Auflösung zu zweifeln. Freylich finden sich dabey große Schwierigkeiten, die klar in die Augen fallen werden, wenn wir die Anwendung von jener Form machen, und dabey von den einfachsten Fällen anfangen. Der Kürze und Leichtigkeit wegen wollen wir den rationalen Theil ω weglassen, so daß wir jedesmal zu solchen Gleichungen gelangen, in welchen das zweyte Glied fehlt. Bekanntermaßen leidet dadurch die Allgemeinheit unserer Auflösung nicht.

1.

Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades.

§. 20.

Es sey also, um von den Gleichungen des zweyten Grades anzufangen, $n = 2$. Setzt man $\omega = 0$, so wird unsere Form

$$x = \mathfrak{A}\sqrt{v}$$

und rational gemacht giebt dieselbe

$$xx = \mathfrak{A}\mathfrak{A}v.$$

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der allgemeinen Form der Gleichungen des zweyten Grades, oder mit

$$xx = A,$$

in welcher das zweyte Glied fehlt, so wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}v = A.$$

Man setze, damit dies statt finden könne, $\mathfrak{A} = 1$, so wird

$$v = A$$

und es ergiebt sich demnach aus der Gleichung $xx = A$, wenn man $\mathfrak{A} = 1$ und $v = A$ setzt, für die eine Wurzel derselben

$$x = \mathfrak{A}\sqrt{v} = \sqrt{A}$$

Da $\sqrt{1}$ zwey Werthe hat, nemlich 1 und -1, so ist die andere Wurzel

$$x = \mathfrak{A}\sqrt{v} = -\sqrt{A}$$

wie von selbst klar ist.

2.

Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

§. 21.

Setzt man $n = 3$, so wird die Form der Wurzel

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

Um

Um diese Gleichung rational zu machen, nehme man zuvörderst den Cubus davon

$$x^3 = \mathfrak{A}^3v + 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v} + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v^2} + \mathfrak{B}^3v^2$$

Nun nehme man die cubische Gleichung

$$x^3 = Ax + B$$

woraus, wenn man für x den angenommenen Werth schreibt,

$$x^3 = A\mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + A\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2} + B$$

wird, und diese Formel muß nun jener gleich gemacht werden, so daß man sowohl die rationalen als die irrationalen Theile einander gleich setzt.

§. 22.

Die Vergleichung der rationalen Theile giebt

$$B = \mathfrak{A}^3v + \mathfrak{B}^3v^2$$

und die Vergleichung der irrationalen Theile

$$A\mathfrak{A} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v, \text{ und}$$
$$A\mathfrak{B} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}v;$$

aus beyden folgt

$$A = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v.$$

Wenn also die cubische Gleichung

$$x^3 = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^3v^2 + \mathfrak{B}^3v^2$$

gegeben wäre, so würde die eine Wurzel derselben

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

seyn; und wären 1, a und b die drey cubischen Wurzeln aus 1: so wären die beyden übrigen Wurzeln

$$x = \mathfrak{A}a\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}a^2\sqrt[3]{v^2}, \text{ und}$$
$$x = \mathfrak{A}b\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}b^2\sqrt[3]{v^2}.$$

Es ist aber

$$a = b^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \text{ und}$$

$$b = a^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

§. 23.

Es lassen sich aber auch umgekehrt, wenn eine cubische Gleichung

$$x^3 = Ax + B$$

gegeben ist, aus den Coefficienten A und B die Größen A, B und v bestimmen, und so alle drey Wurzeln jener Gleichung angeben. Da man nur zwey Gleichungen hat, so kann man dabey einen von den Buchstaben A und B willkührlich bestimmen. Setzt man also $A = 1$, so giebt die Gleichung

$$A = 3ABv = 3Bv$$

für B

$$B = \frac{A}{3v}, \text{ oder } B^3 = \frac{A^3}{27v^3}.$$

Bringt man ferner diesen Werth in die erste Gleichung

$$B = v + Bv^3v^2$$

so erhält man

$$B = v + \frac{A^3}{27v}, \text{ oder } vv = Bv - \frac{A^3}{27}$$

und es wird demnach

$$v = \tfrac{1}{2}B \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 - \tfrac{1}{27}A^3)}$$

wo es gleich ist, was für ein Zeichen man annehmen will.

§. 24.

Da auf diese Art der Werth für v gefunden worden, und aus $B = \frac{A}{3v}$

$B\sqrt[3]{v^2}$

$$B\sqrt[3]{v^2} = \frac{A}{\sqrt[3]{v}}$$

fließt, so werden die drey Wurzeln der Gleichung

$$x^3 = Ax + B$$

$$\text{I. } x = \sqrt[3]{v} + \frac{A}{\sqrt[3]{v}}$$

$$\text{II. } x = a\sqrt[3]{v} + \frac{bA}{\sqrt[3]{v}}$$

$$\text{III. } x = b\sqrt[3]{v} + \frac{aA}{\sqrt[3]{v}}$$

Da aber

$$\frac{1}{v} = \frac{\frac{1}{2}B \mp \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 - \frac{1}{27}A^3)}}{\frac{1}{27}A^3}$$

ist, so wird

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 - \tfrac{1}{27}A^3)})} \text{ und}$$

$$\frac{A}{\sqrt[3]{v}} = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 - \tfrac{1}{27}A^3)})}$$

und hieraus fließen die gewöhnlichen Formeln für die Auflösung der cubischen Gleichungen.

3.
Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

§. 25.

Nun wollen wir $n = 4$ setzen, wodurch unsere Wurzelform in

$$x = A\sqrt[4]{v} + B\sqrt[4]{v^2} + C\sqrt[4]{v^3}$$

übergeht, und die Gleichung aufsuchen, deren Wurzel diese

Form hat. Um hier die Irrationalität wegzuschaffen bedarf es nur einer leichten Rechnung. Denn da $\sqrt[4]{v^2} = \sqrt{v}$ ist, so nehme man die Gleichung

$$x - B\sqrt{v} = A\sqrt[4]{v} + C\sqrt[4]{v^3}$$

und quadrire sie. Hierdurch wird

$$x^2 - 2Bx\sqrt{v} + BBv = AA\sqrt{v} + 2AC v + CCv\sqrt{v}$$

oder

$$x^2 + (BB - 2AC)v = 2Bx\sqrt{v} + (AA + CCv)\sqrt{v}.$$

Quadrirt man abermals, so bekommt man folgende rationale Gleichung

$$x^4 + 2(BB - 2AC)vx^2 + (BB - 2AC)^2vv$$
$$=$$
$$4BBvxx + 4(AA + CCv)Bvx + (AA + CCv)^2v$$

oder

$$x^4 = 2(BB + 2AC)vxx + 4(AA + CCv)Bvx + A^4v^2 - B^4vv + C^4v^3 + 4ABBCvv - AACCvv.$$

§. 26.

Von dieser biquadratischen Gleichung ist also die eine Wurzel

$$x = A\sqrt[4]{v} + B\sqrt[4]{v^2} + C\sqrt[4]{v^3}$$

und wenn man die vier biquadratischen Wurzeln der Einheit 1, a, b und c nennt, also

$$a = +\sqrt{-1};\quad b = -1;\quad \text{und } c = -\sqrt{-1}$$

setzt, so wird

$$a^2 = -1 = b;\quad a^3 = -\sqrt{-1} = c$$
$$b^2 = +1;\qquad b^3 = -1 = b;$$
$$c^2 = -1 = b;\quad c^3 = +\sqrt{-1} = a.$$

Folglich sind die übrigen Wurzeln jener Gleichung

$$x =$$

$$x = \mathfrak{A}a\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}b\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}c\sqrt[4]{v^3}$$
$$x = \mathfrak{A}b\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}b\sqrt[4]{v^3}$$
$$x = \mathfrak{A}c\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}b\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}a\sqrt[4]{v^3}$$

§. 27.

Es läßt sich aber auch umgekehrt jede biquadratische Gleichung auf jene Form zurückführen, und die Wurzeln derselben angeben. Denn sollen aus der Gleichung

$$x^4 = Ax^2 + Bx + C$$

die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und die Größe v bestimmt werden, als worauf es bey der Erfindnng ihrer Wurzeln lediglich ankommt: so ist

$$A = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v;$$
$$B = 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}v$$
$$C = \mathfrak{A}4v - \mathfrak{B}4vv + \mathfrak{C}4v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv$$

oder

$$C = (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2v - (\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2vv + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv.$$

Aus den beyden ersten Formeln fließt

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = \tfrac{1}{2}A$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4\mathfrak{B}v}$$

und setzt man diese Werthe in die dritte Gleichung, so wird

$$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \tfrac{1}{4}AA + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv$$

Nun giebt aber die erste Formel ebenfalls

$$4\mathfrak{A}\mathfrak{C}v = A - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}v$$

und substituirt man auch diesen Werth, so wird

$$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \tfrac{1}{4}AA + 2A\mathfrak{B}\mathfrak{B}v - 4\mathfrak{B}4vv$$

so daß also schon die beyden Buchstaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ weggeschaft sind.

§. 28.

Da auf diese Art noch zwey unbekannte Größen B und v übrig bleiben, so kann man B willkührlich annehmen. Setzt man daher $B = 1$, so muß v aus der Gleichung

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

bestimmt werden, und hat man daraus v gefunden, so sind noch A und C aus den vorhergehenden Gleichungen zu suchen. Da also

$$AA + CCv = \frac{B}{4v}; \quad 2ACv = \frac{A - 2v}{2v}$$

ist, so ergiebt sich durch die Addition, Subtraction und Extraction der Wurzel

$$A + Cv = \sqrt{(\frac{B}{4v} + \frac{A}{2v} - v)} \text{ und}$$

$$A - Cv = \sqrt{(\frac{B}{4v} + \frac{A}{2v} + v)}; \text{ also}$$

$$A = \frac{1}{4v}\sqrt{(B + 2Av - 4vv} + \frac{1}{4v}\sqrt{(B - 2Av + 4vv}$$

$$C = \frac{1}{4v}\sqrt{(B + 2Av - 4vv} - \frac{1}{4v}\sqrt{(B - 2Av + 4vv}.$$

§. 29.

Da also $A\sqrt[4]{v} \pm C\sqrt[4]{v^3} = (A \pm Cv)\sqrt[4]{v}$ ist, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 = Ax^2 + Bx + C$$

nachdem man den Werth von v aus der Gleichung

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

gefun-

gefunden hat, folgende:

$$\text{I. } x = \sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$$

$$\text{II. } x = \sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$$

$$\text{III. } x = -\sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$$

$$\text{IV. } x = -\sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$$

Auf diese Art pflegt man bekannter Maßen die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf die Auflösung der cubischen Gleichungen zurückzuführen.

4.
Auflösung der Gleichungen des fünften Grades.

§. 30.

Setzt man $n = 5$, so verwandelt sich unsere Form in

$$x = A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4}$$

und es kommt zuvörderst darauf an, eine Gleichung vom fünften Grade zu finden, deren Wurzel auf diese Art ausgedruckt wird, oder jene Form von ihrer Irrationalität zu befreyen. Allein hierbey zeigen sich große Schwierigkeiten, weil man gegenwärtig nicht mehr auf die Art verfahren kann, wie vorhin. Zwar lassen sich, wenn man

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

annimmt, und darin jenen Werth von x substituirt, vier Gleichungen machen, vermittelst welcher je vier Wurzelzeichen weggebracht werden können; aber die Bestimmung der angenommenen Buchstaben A, B, C, und D, geht nicht von statten.

§. 31.

§. 31.

Ich bin daher auf einen andern Weg verfallen, der bey jedem Grade Anwendung leidet, und wobey zugleich erhellet, daß die rationale Gleichung den nten Grad nie übersteige. Es beruhet derselbe auf der Natur der Gleichungen selbst, und auf der Art die Coefficienten der Glieder aus allen Wurzeln zu bestimmen. Da wir nemlich alle fünf Wurzeln der gesuchten Gleichung kennen, so sind wir nach den bekannten Regeln auch im Stande, die Coefficienten der Glieder der Gleichung zu finden. Es seyen also 1, a, b, c und d die fünf Wurzeln des fünften Grades aus 1, oder die Wurzeln der Gleichung $z^5 - 1 = 0$: so ist, wenn man die Wurzeln der gesuchten Gleichung $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ε nennt,

$$\alpha = A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4}$$
$$\beta = Aa\sqrt[5]{v} + Ba^2\sqrt[5]{v^2} + Ca^3\sqrt[5]{v^3} + Da^4\sqrt[5]{v^4}$$
$$\gamma = Ab\sqrt[5]{v} + Bb^2\sqrt[5]{v^2} + Cb^3\sqrt[5]{v^3} + Db^4\sqrt[5]{v^4}$$
$$\delta = Ac\sqrt[5]{v} + Bc^2\sqrt[5]{v^2} + Cc^3\sqrt[5]{v^3} + Dc^4\sqrt[5]{v^4}$$
$$\varepsilon = Ad\sqrt[5]{v} + Bd^2\sqrt[5]{v^2} + Cd^3\sqrt[5]{v^3} + Dd^4\sqrt[5]{v^4}$$

§. 32.

Diese Bestimmung der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ε vorausgesetzt, nehme man die Gleichung

$$x^5 - \triangle x^4 + Ax^3 - Bx^2 + Cx - D = 0$$

an. Alsdann ist

$\triangle$ = der Summe der Wurzeln
A = der Summe der Produkte aus je zweyen
B = der Summe der Produkte aus je dreyen
C = der Summe der Produkte aus je vieren
D = dem Produkte aus allen fünf Wurzeln.

Nun

Nun sey der größern Leichtigkeit wegen

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4$$
$$T = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5$$

so wird

$$A = P$$
$$B = \frac{\triangle P - Q}{2}$$
$$C = \frac{AP - \triangle Q + R}{3}$$
$$D = \frac{BP - AQ + \triangle R - S}{4}$$
$$E = \frac{CP - BQ + AR - \triangle S + T}{5}$$

§. 33.

Um die Werthe P, Q, R, S, T zu erforschen, muß man zuvor alle Potestäten der Wurzeln der Einheit 1, a, b, c, d, summiren. Da dieselben die Wurzeln der Gleichung $z^5 - 1 = 0$ sind: so ist

$$1 + a + b + c + d = 0$$
$$1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$$
$$1 + a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$$
$$1 + a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 0$$
$$1 + a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = 5$$

Die Summen der sechsten, der siebenten, ꝛc. bis zu den zehnten Potestäten verschwinden ebenfalls, die Summe der zehnten Potestäten aber wird wieder $= 5$, da $a^5 = 1$; $b^5 = 1$; $c^5 = 1$; $d^5 = 1$ ist. Der Kürze wegen können bey der gegenwärtigen Rechnung die Wurzelzeichen weggelassen

lassen werden, wenn man nur vor Augen behält, daß am Ende mit den Buchstaben A, B, C, D, die Größen $\sqrt[5]{v}$, $\sqrt[5]{v^2}$, $\sqrt[5]{v^3}$, $\sqrt[5]{v^4}$ verbunden werden müssen.

§. 34.

Addirt man nunmehr die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$: so wird

$$P = A(1 + a + b + c + d) + B(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \text{&c.} = 0$$

und geht man zu den übrigen Potestäten fort, so findet man außerdem

$$P = 0$$
$$Q = 10(AD + BC)$$
$$R = 15(AAC + AB^2 + BD^2 + C^2D)$$
$$S = 20(A^3B + AC^3 + B^3D + CD^3) + 30(AADD + BBCC) + 120ABCD$$
$$T = 5(A^5 + B^5 + C^5 + D^5) + 100(A^3CD + AB^3C + BC^3D + ABD^3) + 150(AC^2D^2 + A^2BC^2 + B^2CD^2 + A^2B^2D).$$

Hier kommen keine andern Produkte vor als solche, welche bey Hinzufügung der Wurzelzeichen die Potestät von v rational machen; mit andern Worten, wenn man dem Buchstaben A eine, dem Buchstaben B zwey, dem Buchstaben C drey, und dem Buchstaben D vier Dimensionen giebt, so ist die Zahl der Dimensionen in allen diesen Produkten durch fünf theilbar, und der Coefficient eines jeden Produkts ist das fünffache des Coefficienten, welcher diesem Produkte nach den Gesetzen der Combinationen zukommen würde.

§. 35.

Da also $P = 0$ ist, so wird auch $\Delta = 0$, und für die übrigen Coefficienten ergiebt sich

A =

$$A = -\tfrac{1}{2}Q; \quad B = \tfrac{1}{3}R;$$
$$C = -\tfrac{1}{4}AQ - \tfrac{1}{4}S; \text{ und } D = -\tfrac{1}{5}BQ + \tfrac{1}{5}AR + \tfrac{1}{5}T$$

Es ist demnach

$$A = -5(AD + BC)$$
$$B = 5(AAC + AB^2 + BD^2 + C^2D)$$
$$C = -5(A^3B + B^3D + AC^3 + CD^3) +$$
$$5(A^2D^2 + B^2C^2) - 5ABCD$$
$$D = A^5 + B^5 + C^5 + D^5 -$$
$$5(A^3CD + AB^3C + BC^3D + ABD^3) +$$
$$5(AC^2D^2 + A^2BC^2 + B^2CD^2 + A^2B^2D).$$

Mit diesen Gliedern aber müssen die zugehörigen Potestäten von v verbunden werden, wenn man ihren wahren Werth haben will.

§. 36.

Wenn also folgende Gleichung, worin A und C die entgegenstehenden Zeichen haben, gegeben ist

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

und die Coefficienten derselben folgende Werthe haben,

$$A = 5(AD + BC)v$$
$$B = 5(A^2C + AB^2 + BD^2v + C^2Dv)v$$
$$C = 5(A^3B + B^3Dv + AC^3v + CD^3vv)v -$$
$$5(A^2D^2 + B^2C^2)vv + 5ABCDv^2$$
$$D = A^5v + B^5v^2 + C^5v^3 + D^5v4 -$$
$$5(A^3CD + AB^3C + BC^3Dv + ABD^3v)v^2 +$$
$$5(A^2B^2D + A^2BC^2 + AC^2D^2v + B^2CB^2v)v^2,$$

so sind die fünf Wurzeln davon

$$\text{I. } x = A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v4}$$
$$\text{II. } x = Aa\sqrt[5]{v} + Ba^2\sqrt[5]{v^2} + Ca^3\sqrt[5]{v^3} + Da4\sqrt[5]{v4}$$
$$\text{III. } x = Ab\sqrt[5]{v} + Bb^2\sqrt[5]{v^2} + Cb^3\sqrt[5]{v^3} + Db4\sqrt[5]{v4}$$

IV.

IV. $x = Ac\sqrt[5]{v} + Bc^2\sqrt[5]{v^2} + Cc^3\sqrt[5]{v^3} + Dc^4\sqrt[5]{v^4}$

V. $x = Ad\sqrt[5]{v} + Bd^2\sqrt[5]{v^2} + Cd^3\sqrt[5]{v^3} + Dd^4\sqrt[5]{v^4}$

wo a, b, c und d die fünften Wurzeln der Einheit außer 1 bedeuten, deren imaginäre Werthe bekannt sind.

§. 37.

Wenn man nun umgekehrt aus den gegebenen Coefficienten A, B, C, D, die Größen A, B, C, D und v bestimmen könnte, so hätte man eine allgemeine Auflösung aller Gleichungen vom fünften Grade. Allein hierin besteht eben die Schwierigkeit, da man keinen Weg kennt, die Buchstaben A, B, C und D, wovon einer willkührlich angenommen werden kann, nach und nach auf die Art wegzuschaffen, daß bloß die Größe v und die Coefficienten A, B, C und D in einer Gleichung zurückblieben, die keine überflüßige Wurzeln enthielte. Man hat indeß Grund zu vermuthen, daß man, bey gehörig angestellter Elimination endlich zur Bestimmung des Werths von v zu einer Gleichung vom vierten Grade gelangen würde. Denn wenn man eine Gleichung von einem höhern Grade fände, so würde der Werth von v Wurzelzeichen von eben diesem Grade enthalten, welches nicht statt finden kann. Da aber die Menge der Glieder diese Arbeit so schwer macht, daß kein Erfolg zu hoffen steht, so wird es nicht undienlich seyn, einige weniger allgemeine Fälle, die nicht zu so verwickelten Formeln führen, zu betrachten.

§. 38.

In dieser Absicht wollen wir den Buchstaben A, B, C und D solche Werthe beylegen, daß dadurch die Rechnung abgekürzt werden kann, und zuvörderst $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ setzen. Auf diese Art bekommen wir

$A = 0$;

$A = o$; $B = o$; $C = o$; und $D = A^5 v$

woraus $A\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{v}$ folgt. Wenn daher folgende Gleichung

$$x^5 = D$$

gegeben ist, so sind ihre fünf Wurzeln

I. $x = \sqrt[5]{D}$

II. $x = a\sqrt[5]{D}$

III. $x = b\sqrt[5]{D}$

IV. $x = c\sqrt[5]{D}$

V. $x = d\sqrt[5]{D}$

Da dieser Fall von selbst klar ist, so war es gut davon auszugehen, damit die Anwendbarkeit unserer Methode auf die bekannten Fälle einleuchtend würde.

§. 39.

Nun mögen von den Buchstaben A, B, C und D zwey verschwinden, weil, wenn man drey $= o$ werden läßt, sie mögen seyn welche sie wollen, allemal der vorige Fall wiederkehrt. Es sey also $C = o$ und $D = o$, oder eine Gleichung zu suchen, deren Wurzel

$$x = A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2}$$

ist. Bey dieser Voraussetzung wird

$$A = o;\quad B = 5AB^2v;\quad C = 5A^3Bv;$$
$$D = A^5v + B^5v^2$$

und die gesuchte Gleichung ist demnach

$$x^5 = 5AB^2vx^2 + 5A^3Bvx + A^5v + B^5v^2$$

Vergleicht man dieselbe mit folgender Form

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

so wird

$$D \qquad AB^2v$$

$$AB^2v = P \text{ und } A^3Bv = Q$$

also

$$A^5v = \frac{QQ}{P} \text{ und } B^5v^2 = \frac{P^3}{Q}$$

folglich

$$R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}.$$

§. 40.

Hierdurch gelangen wir zur Auflösung folgender speciellen Gleichung des fünften Grades.

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$$

Denn da $A\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}}$ und $B\sqrt[5]{v^2} = \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$ ist, so werden die fünf Wurzeln derselben folgende:

$$\text{I. } x = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$$

$$\text{II. } x = a\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + a^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$$

$$\text{III. } x = b\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + b^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$$

$$\text{IV. } x = c\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + c^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$$

$$\text{V. } x = d\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + d^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}.$$

Diese Gleichung weicht von der Moivrischen nicht sehr ab, und da sie sich nicht in Faktoren auflösen läßt, so verdient die gegenwärtige Auflösung um so mehr bemerkt zu werden.

§. 41.

§. 41.

Man kann diese Gleichung auch von den Brüchen befreyen, wenn man $P = MN$ und $Q = M^2N$ setzt. Man bekommt nemlich durch diese Substitution die Gleichung

$$x^5 = 5MNxx + 5M^3Nx + M^3N + MN^2$$

deren Wurzel

$$x = \sqrt[5]{M^3N} + \sqrt[5]{MN^2}$$

ist. Bedeutet a irgend eine von den fünften Wurzeln der Einheit, so ist die allgemeine Form der übrigen Wurzeln

$$x = a\sqrt[5]{M^3N} + a^2\sqrt[5]{MN^2}$$

Setzt man z. B. $M = 1$ und $N = 2$, so ist die Wurzel der Gleichung

$$x^5 = 10xx + 10x + 6$$

allgemein ausgedruckt

$$x = a\sqrt[5]{2} + a^2\sqrt[5]{4}$$

und diese Gleichung ist von der Art, daß sie auf keinem andern Wege aufgelöset werden kann.

§. 42.

Wenn man B und D verschwinden läßt, so kommt man auf eben denselben Fall zurück. Es wird nemlich alsdann

$$A = 0;\quad B = 5\mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v;\quad C = 5\mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv$$

$$D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{C}^5v^3$$

und wenn man also die Gleichung

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

annimmt, so daß $P = \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v$ und $Q = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3v^2$ wird: so ergiebt sich

$$\frac{QQ}{P} = \mathfrak{C}^5v^3 \text{ und } \frac{P^3}{Q} = \mathfrak{A}^5v.$$

Hieraus fließt wie vorhin

$$R = \frac{QQ}{P} \dagger \frac{P^3}{Q}$$

und eben so findet man dieselben Wurzeln. Ein gleiches findet statt, wenn man entweder $A = 0$ und $B = 0$, oder $A = 0$ und $C = 0$ setzt. Läßt man aber A und D, oder B und C verschwinden, so finden sich einige Verschiedenheiten, und es wird daher nützlich seyn, diese Fälle genauer zu erwägen.

§. 43.

Es sey also $B = 0$ und $C = 0$. Alsdann bekommt man

$$A = 5ADv; \quad B = 0; \quad C = -5AADDvv;$$
$$D = A^5v \dagger D^5v^4.$$

Setzt man daher $ADv = P$, so wird

$$A = 5P \text{ und } C = -5PP,$$

ferner

$$DD - 4P^5 = (A^5v - D^5v^4)^2 \text{ und } A^5v - D^5v^4 = \sqrt{(DD - 4P^5)}.$$

Folglich

$$A^5v = \tfrac{1}{2}D \dagger \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)}$$
$$D^5v^4 = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)}.$$

Ist daher folgende Gleichung gegeben

$$x^5 = 5Px^3 - 5PPx \dagger D$$

so ist jede ihrer Wurzeln

$$x = a\sqrt{(\tfrac{1}{2}D \dagger \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)})} \dagger a^4\sqrt{(\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)})}.$$

Dieses ist die Gleichung, deren Auflösung Moivre gelehret hat.

§. 44.

Es lassen sich aber aus der allgemeinen Formel unzählige Gleichungen vom fünften Grade ableiten, deren Wurzeln angegeben werden können, ohnerachtet die Gleichungen selbst

selbst die Auflösung in Faktoren gar nicht zulassen. Denn haben die Coefficienten der Gleichung des fünften Grades

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

folgende Werthe:

$$A = \frac{5}{gk}(g^3 + k^3)$$

$$B = \frac{5}{2mnrr}((m+n)(m^2g^3 - n^2k^3) - (m-n)rr)$$

$$C = \frac{5}{mnggkkrr}(g^3(m^2g^3 - n^2k^3) - \big(m(m+n)g^6 - (m^2 + mn - n^2)g^3k^3 + n(m-n)k^6)rr - k^3r^4\big)$$

$$D = \frac{g^7}{mmnk^4g^3}\Big((m^2g^3 - nnk^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + rn^2k^3) - n^2k^3r^4\Big) + \frac{kk}{mnng^4r^3}(m^2g^3r^2(m^2g^3 - n^2k^3) - 2m^2g^3 + n^2k^3)r^4 + r^6) + \frac{5(m-n)(g^3-k^2)(m^2g^3-n^2k^3)}{2mngkrr} - \frac{5(m+n)(g^3k^3)}{2mngk}$$

so kann man allemal die Wurzeln angeben.

§. 45.

Man setze, der Kürze wegen,

$$T = (m^2g^3 - n^2k^3)^2 - 2(m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^4$$

und dabey sey

$$P = \left.\begin{array}{l}(m^2g^3 - n^2k^3)^3 \\ - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + 2n^2k^3)rr \\ - n^2k^3r^4 \\ + ((m^2g^3 - n^2k^3)^2 - n^2k^3rr)\sqrt{T}\end{array}\right\} : 2mnnr$$

$$Q = \left.\begin{array}{l} (m^2g^3 - n^2k^3)^3 \\ -(m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + 2n^2k^3)rr \\ -n^2k^3r^4 \\ -((m^2g^3 - n^2k^3)^2 - n^2k^3rr)\sqrt{T} \end{array}\right\} : 2mnnr$$

$$R = \left.\begin{array}{l} (m^2g^3 - n^2k^3)m^2g^3 \\ -(2m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^4 \\ +(m^2g^3 - rr)\sqrt{T} \end{array}\right\} : 2mnnr$$

$$S = \left.\begin{array}{l} (m^2g^3 - n^2k^3)m^2g^3 \\ -(2m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^4 \\ -(m^2g^3 - rr)\sqrt{T} \end{array}\right\} : 2mnnr$$

so ist jede Wurzel der Gleichung

$$x = a\sqrt[5]{\frac{gg}{k^4}}P + a^2\sqrt[5]{\frac{kk}{g^4}}R + a^3\sqrt[5]{\frac{kk}{g^4}}S + a^4\sqrt[5]{\frac{gg}{k^4}}Q.$$

§. 46.

Um zur Erläuterung ein Paar Beyspiele hinzuzufügen, so fließet daraus:

I. daß die Wurzel der Gleichung

$$x^5 = 40x^3 + 70x^2 - 50x - 98$$

folgende

$$x = \sqrt[5]{(-31 - 3\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-18 + 10\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-18 - \sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-31 - 3\sqrt{-7})}$$

und

II. die Wurzel der Gleichung

$$x^5 = 2625x + 16600$$

folgende sey,

$$x = \sqrt[5]{75(5 + 4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35 + 11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35 - 11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75(5 - \sqrt{4\sqrt{10}})}.$$

Diese

Diese Fälle verdienen um so mehr bemerkt zu werden, weil ihre Auflösung auf keine andere Art möglich ist. Auf ähnliche Art lassen sich diese Untersuchungen auf die höhern Gleichungen ausdehnen, und es ist leicht von jedem Grade eine unzählige Menge von Gleichungen zu finden, deren Auflösung nach andern Methoden gar nicht von statten geht, davon man aber gleichwohl nach der gegenwärtigen nicht blos eine, sondern alle Wurzeln angeben kann.