Die Theorie der Gleichungen

Euler, Leonhard

Berlin, 1791

3. Von der Auflösung der numerischen Gleichungen, von Herrn de la Grange. Aus dem 23sten Bande der Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53259

3. Von der Auflösung der numerischen Gleichungen.

Vom

Herrn la Grange.

Aus dem 23sten Bande der Memoiren der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Vieta ist der erste unter denen, welche eine allgemeine Methode numerische Gleichungen aufzulösen mitgetheilt haben; allein bey aller Vervollkommung und Simplificirung, welche seine Methode durch Harriot, Ougtred, Pell, und andere erfahren hat, ist sie doch noch immer so zusammengesetzt, und wegen der Menge von Operationen, welche sie erfordert, so abschreckend, daß die Mathematiker auf ihren Gebrauch Verzicht gethan zu haben scheinen. Die gewöhnlichste Methode, welche von Newton herrührt, ist sehr leicht und einfach. Es wird dabey vorausgesetzt, daß man den Werth der gesuchten Wurzel wenigstens bis auf ein Zehntel näherungsweise gefunden habe. Dann bringt man diesen Werth um eine neue unbekannte Größe vermehrt, in die gegebene Gleichung, und bekommt dadurch eine neue, deren Wurzel dasjenige ist, was man zu der vorigen hinzuthun muß, wenn sie genau seyn soll. Da aber dieser Theil nach der Voraussetzung kein Zehntel beträgt, so kann man in der gefundenen Glei-

Gleichung das Quadrat und die höhern Potestäten der unbekannten Größe aus der Acht lassen, und auf diese Art verwandelt sich die Gleichung in eine Gleichung des ersten Grades, woraus man den Werth der Wurzel in Zehntheilen sehr leicht und bald findet. Indeß ist auch dieser Werth nicht genau, sondern nur näherungsweise gefunden; allein man kann sich desselben bedienen, um auf eben dem Wege einen genauern Werth zu erhalten. Geht man auf diese Art fort, so bekommt man bey jeder Operation einen neuen Decimalbruch, welchen man entweder zu dem vorhin gefundenen hinzusetzen oder davon wegnehmen muß, und findet also die Wurzel desto genauer, je weiter man fortgeht.

Man kann auch, wie Halley gethan hat, immer wieder zur gegebenen Gleichung zurückkehren, indem man darin anstatt der unbekannten Größe die immer genauer und genauer gefundene Wurzel, um eine unbekannte Größe vermehrt, setzt; und dieser Weg scheint in gewisser Absicht noch einfacher und bequemer.

Auf diese Art pflegt man die numerischen Gleichungen näherungsweise aufzulösen. Es hat viele Mathematiker gegeben, welche diese Methode noch genauer und leichter zu machen gesucht haben, indem sie theils auf die Glieder mit Rücksicht nehmen, in welchen die unbekannte Größe in der zweyten Potestät enthalten ist, theils allgemeine Formeln geben, vermittelst welcher man den Werth des zu der näherungsweise gefundenen Wurzel hinzuzufügenden Decimalbruchs auf einmal finden kann. Allein desto weniger hat man die Unbequemlichkeiten, oder vielmehr Unvollkommenheiten bemerkt, welche dieser Methode ankleben; wenigstens hat meines Wissens noch Niemand Mittel angegeben, denselben abzuhelfen.

Die erste und vornehmste dieser Unvollkommenheiten besteht darin, daß dabey die Erfindung des Werths der Wurzel bis auf ein Zehntel vorausgesetzt wird. Denn da man noch keine allgemeine und sichere Regel hat, von jeder gegebenen Gleichung den Werth einer jeden Wurzel näherungsweise zu finden, so ist jene Methode eigentlich nur in dem Falle anwendbar, wo man den Werth der gesuchten Wurzel schon zum voraus ungefähr zu bestimmen im Stande ist. Zwar hat Rolle eine Methode mitgetheilt, sich den Wurzeln der numerischen Gleichungen so sehr zu nähern, als man nur will; allein es ist dieselbe nicht allemal sicher, zumal, wenn die Gleichungen imaginäre Wurzeln haben. In diesem Falle läßt sie unentschieden, ob die Wurzeln reell sind oder nicht.

Die zweyte Unvollkommenheit betrift die Natur dieser Methode selbst. Man vernachläßiget darnach bey jeder Operation Glieder, deren Werth man nicht kennt, so daß man außer Stande ist, den Grad zu kennen, bis auf welchen man sich dem wahren Werthe genähert hat.

Auch könnte es sich vielleicht ereignen, daß die Reihe, welche die gesuchte Wurzel giebt, nur wenig convergirte, oder daß sie, nachdem sie eine Zeitlang convergirt hätte, zu divergiren anfienge. Man hat wenigstens noch nicht bewiesen, daß dieses nicht seyn könne.

Endlich mag diese Reihe immerfort convergiren, so giebt sie doch auch dann die Wurzel nur näherungsweise, wenn dieselbe eine Rationalzahl ist. Es ist freylich wahr, daß man für diese Wurzeln besondere Regeln hat; allein es bleibt gleichwohl immer ein Fehler der gedachten Methode, daß sie den Werth dieser Wurzeln nicht genau angiebt.

§. I.

§. 1.

Methode, den Werth jeder reellen Wurzel einer jeden numerischen Gleichung in ganzen Zahlen so genau als möglich zu finden.

1. Erster Lehrsatz.

Ist eine Gleichung gegeben, und hat man zwey Zahlen von der Beschaffenheit, daß die Substitution derselben in der Gleichung statt der unbekannten Größe, Werthe von entgegengesetzter Art, oder mit entgegenstehenden Zeichen giebt: so hat die Gleichung zum wenigsten eine reelle Wurzel, und der Werth derselben liegt zwischen diesen Zahlen.

Dieses Theorem ist schon seit langer Zeit bekannt, und man pflegt dasselbe vermittelst der Theorie der Curven zu beweisen; es läßt sich aber der Beweis auch unmittelbar aus der Theorie der Gleichungen führen, und zwar auf folgende Art. Es sey x die unbekannte Größe der Gleichung, und α, β, γ, 2c. die Wurzeln derselben. Dies vorausgesetzt, so ist die Form der Gleichung, wie bekannt,

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots = 0.$$

Nun seyen p und q die Größen, welche, für x in die Gleichung gesetzt, Werthe von entgegenstehender Art geben, so müssen folgende beyde Größen

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\ldots$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)\ldots$$

entgegenstehende Zeichen haben, und es müssen daher zum wenigsten zwey zusammen gehörige Faktoren, wie $p-\alpha$ und $q-\alpha$, einander entgegengesetzt seyn. Es wird daher auch unter den Wurzeln der Gleichung zum wenigsten eine α seyn, die zwischen die Zahlen p und q fällt, das heißt kleiner

ner als die größere, und größer als die kleinere von ihnen ist; und diese Wurzel muß nothwendig reell seyn.

2. Erster Zusatz.

Wenn daher die Zahlen p und q bloß um eine Einheit oder um eine Zahl, die kleiner ist als die Einheit, verschieden sind, so ist die kleinste von diesen Zahlen, wenn dieselbe eine ganze Zahl ist, oder die ganze Zahl, die zunächst kleiner ist als die kleinste von beyden Zahlen, wenn diese keine ganze Zahl ist, die ganze Zahl, welche der einen Wurzel der Gleichung am nächsten liegt. Wenn die Differenz der Zahlen p und q größer ist als die Einheit, so nenne man die ganzen Zahlen, die zwischen p und q fallen, n, $n + 1$, $n + 2$, ꝛc. Setzt man darauf nach und nach in die Stelle der unbekannten Größe, p, n, $n + 1$, $n + 2$, ꝛc. in die Gleichung, so findet man nothwendiger Weise zwey unmittelbar auf einander folgende Zahlen, welche entgegengesetzte Werthe geben; und da diese beyde Zahlen bloß um eine Einheit unterschieden sind, so findet man aus ihnen nach dem Vorhergehenden die Wurzel der Gleichung in ganzen Zahlen so genau, als man sie finden kann.

3. Zweyter Zusatz.

Jede Gleichung, deren letztes Glied negativ ist, vorausgesetzt, daß das erste positiv sey, hat zum wenigsten eine reelle positive Wurzel, und man findet daher dieselbe, so weit sie in ganzen Zahlen gefunden werden kann, wenn man darin anstatt der unbekannten Größe nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ꝛc. setzt, bis man dadurch zwey Werthe bekommt, die entgegenstehende Zeichen haben.

Denn

Denn läßt man das erste Glied x^m und das letzte $-H$ seyn, so daß H eine positive Größe bedeutet: so hat man, wenn man $x = 0$ setzt, den negativen Werth $-H$, und wenn man $x = \infty$ macht, den positiven Werth ∞^m. Also ist in diesem Falle $p = 0$ und $q = \infty$; folglich die ganzen Zwischenzahlen 1, 2, 3, 4, ꝛc., so daß der zweyte Zusatz angewandt werden kann.

Hieraus erkennt man

1) daß jede Gleichung von einem ungeraden Grade, deren letztes Glied negativ ist, nothwendiger Weise Eine reelle positive Wurzel hat.

2) daß jede Gleichung von einem ungeraden Grade, deren letztes Glied positiv ist, nothwendiger Weise eine reelle negative Wurzel hat. Denn verwandelt man x in $-x$, so wird das erste Glied der Gleichung negativ, und folglich, wenn man nunmehr die Zeichen aller Glieder verändert, um das erste Glied wieder positiv zu machen, das letzte negativ. Es hat folglich diese veränderte Gleichung eine reelle positive und also die ursprüngliche eine reelle negative Wurzel.

3) daß jede Gleichung von einem geraden Grade, deren letztes Glied negativ ist, nothwendiger Weise zwey reelle Wurzeln, eine positive und eine negative hat. Denn einmal hat dieselbe eine reelle positive Wurzel, und da das erste Glied, wenn man x in $-x$ verwandelt, positiv bleibt, so hat diese veränderte Gleichung ebenfalls eine reelle positive und also die ursprüngliche Gleichung eine reelle negative Wurzel.

4. Anmerkung.

Da man allemal die negativen Wurzeln einer jeden Gleichung in positive verwandeln kann, indem dazu bloß das Zeichen der unbekannten Größe in das entgegenstehende verändert zu werden braucht: so wollen wir in der Folge der Kürze wegen bloß die positiven Wurzeln betrachten. Wenn also die Wurzeln einer Gleichung untersucht werden sollen, so wollen wir zuvörderst die positiven Wurzeln dieser Gleichung betrachten. Dann wollen wir die Zeichen aller derer Glieder, in welchen die unbekannte Größe in einer Potestät mit einem ungeraden Exponenten vorkommt, in die entgegenstehenden verwandeln, und die positiven Wurzeln dieser neuen Gleichung untersuchen. Diese Wurzeln negativ genommen sind nemlich die negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

5. Zweyter Lehrsatz.

Wenn man in einer Gleichung, die eine oder mehrere reelle und ungleiche Wurzeln hat, an die Stelle der unbekannten Größe nach und nach zwey Zahlen setzt, davon die eine größer, die andere aber kleiner ist, als die eine von diesen Wurzeln, und welche zugleich von einander um weniger unterschieden sind, als diese und irgend eine andere reelle Wurzel der Gleichung: so geben diese beyden Substitutionen nothwendiger Weise zwey einander entgegengesetzte Werthe.

Es sey α eine von den reellen und ungleichen Wurzeln der Gleichung, und β, γ, δ, ꝛc. die übrigen. Ferner sey ε der kleinste von den Unterschieden zwischen der Wurzel α und jeder der übrigen reellen Wurzeln. Alsdann ist klar, daß wenn man $p > \alpha$, $q < \alpha$ und $p - q < \varepsilon$ nimmt, die Größen $p - \alpha$ und $q - \alpha$ entgegenstehende Zeichen, die Größen

$p - \beta$,

$p - \beta$, $p - \gamma$ hingegen dieſelben Zeichen haben werden, als die zugehörige Größen $q - \beta$, $q - \gamma$, ꝛc. Denn ſollten $p - \beta$ und $q - \beta$ entgegengeſetzte Größen ſeyn, ſo müßte β ebenfalls zwiſchen p und q fallen, welches unmöglich iſt. Es haben alſo die beyden Größen

$$(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma) \ldots .$$
$$(q - \alpha)(q - \beta)(q - \gamma) \ldots .$$

d. h. die Werthe, welche man bekommt, wenn man p und q ſtatt x in die Gleichung bringt, entgegengeſetzte Zeichen.

6. Zuſatz.

Wenn man daher in einer Gleichung an die Stelle der unbekannten Größe nach und nach die Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion

$$0,\ \triangle,\ 2\triangle,\ 3\triangle,\ 4\triangle,\ \text{ꝛc.} \ldots\ldots (A)$$

ſetzt, ſo werden die daher entſtehenden Werthe eine Reihe bilden, in welcher eben ſo viel Abwechſelungen der Zeichen ſich befinden, als die Gleichung reelle poſitive und ungleiche Wurzeln hat, deren Unterſchiede aber nicht kleiner ſind, als die Differenz $\triangle$ der Progreſſion. Nimmt man alſo $\triangle$ gleich oder kleiner an, als den kleinſten Unterſchied zwiſchen den poſitiven reellen und ungleichen Wurzeln der Gleichung, ſo muß die gedachte Reihe nothwendiger Weiſe eben ſo viel Abwechslungen der Zeichen enthalten, als die Gleichung reelle poſitive und ungleiche Wurzeln hat.

Wenn folglich die Differenz $\triangle$ gleich oder kleiner iſt als die Einheit, ſo findet man auf dieſem Wege zugleich den Werth jeder von den reellen poſitiven und ungleichen Wurzeln der Gleichung, ſo weit ſich derſelbe in ganzen Zahlen ausdrucken läßt, nach Nr. 2. Zuſatz 1.

Wenn eine Gleichung nicht mehr als eine reelle Wurzel haben kann, oder wenn die Unterschiede ihrer Wurzeln, im Fall sie deren mehrere hat, nicht kleiner sind als die Einheit, so ist klar, daß man $\triangle = 1$ setzen kann, d. h. man kann in diesem Fall die natürlichen Zahlen, 0, 1, 2, 3, ꝛc. nehmen, und sie nach und nach in der Gleichung an die Stelle der unbekannten Größe setzen. Allein wenn die Unterschiede der ungleichen Wurzeln einer Gleichung kleiner als die Einheit sind, so muß man $\triangle$ kleiner als die Einheit, und so annehmen, daß es dem kleinsten Unterschiede dieser Wurzeln gleich oder kleiner wird als derselbe. Also kommt es nunmehr darauf an, der Differenz $\triangle$ einen solchen Werth zu geben, der den kleinsten Unterschied zwischen den positiven und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung nicht übersteigt. Die Art und Weise davon soll der Gegenstand des folgenden Problems seyn.

7. Zusatz. 2.

Jede Gleichung, die nicht mehr als eine Abwechslung der Zeichen hat, kann auch nur eine reelle positive Wurzel haben.

Das ist zuvörderst sogleich klar, daß die Gleichung nothwendiger Weise eine reelle positive Wurzel haben muß, weil ihr letztes Glied ein Zeichen hat, welches das entgegengesetzte von dem Zeichen des ersten Gliedes ist.

Nun sey, vorausgesetzt, daß das erste Glied positiv ist, wie solches gewöhnlich statt findet, X die Summe aller positiven Glieder der Gleichung, und Y die Summe aller negativen, so daß die Gleichung durch $X - Y = 0$ ausgedruckt werden kann. Da nach der Voraussetzung nur eine Abwechswechslung der Zeichen statt finden soll, so ist klar, daß die Potestäten der unbekannten Größe x in dem Polinonium X insgesammt höhere Potestäten seyn müssen, als die in dem Polinonium Y. Wenn also x^r die niedrigste Potestät von x in X ist, und man sowohl X als Y durch x^r dividirt, so enthält die Größe $\frac{X}{x^r}$ lauter Potestäten von x mit positiven, und die Größe $\frac{Y}{x^r}$ lauter Potestäten von x mit negativen Exponenten. Hieraus folgt, daß der Werth von $\frac{X}{x^r}$ mit x wachsen und abnehmen wird, wofern nicht X bloß x^r enthält, denn in diesem Falle würde $\frac{X}{x^r}$ eine beständige Größe seyn; hingegen wird $\frac{Y}{x^r}$ wachsen, wenn x abnimmt, und abnehmen, wenn x zunimmt. Nun sey a eine reelle und positive Wurzel der Gleichung, so hat man

$$x = a;\ X = Y, \text{ und also auch}$$

$$\frac{X}{x^r} = \frac{Y}{x^r}$$

Setzt man daher anstatt x Zahlen, die größer sind als a, so wird allemal $\frac{X}{x^r} > \frac{Y}{x^r}$, und folglich X — Y gleich einer positiven Zahl; setzt man aber anstatt x Zahlen, die kleiner sind als a, so wird allemal $\frac{X}{x^r} < \frac{Y}{x^r}$, und folglich X — Y gleich einer negativen Zahl. Es ist also unmöglich, daß die Gleichung reelle positive Wurzeln habe, die größer oder kleiner wären als a.

8. Aufgabe.

Es ist eine Gleichung gegeben; man soll eine andere Gleichung finden, deren Wurzeln die Differenzen zwischen den Wurzeln jener Gleichung sind.

Es sey die gegebene Gleichung

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{rc.} = 0 \ldots (B).$$

Da x ohne Unterschied jeder Wurzel dieser Gleichung gleich gesetzt werden kann, so bedeute x' irgend eine andere Wurzel eben dieser Gleichung, so daß man auch

$$x'^m - Ax'^{m-1} + Bx'^{m-2} - Cx'^{m-3} + \text{rc.} = 0$$

habe, und dabey sey u die Differenz zwischen x und x', oder $x' = x + u$. Bringt man diesen Werth von x' in die letzte Gleichung, und ordnet dabey die Glieder derselben nach u, so bekommt man eine Gleichung für u von eben dem Grade m, welche, wenn man von dem letzten Gliede anfängt, folgende Form hat

$$X + Yu + Zu^2 + Vu^3 + \text{rc.} + u^m = 0$$

und die Coefficienten X, Y, Z, rc. sind Funktionen von x, so daß

$$X = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{rc.}$$

$$Y = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \text{rc.}$$

$$Z = \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3} + \text{rc.}$$

rc.

d. h.

$$Y = \frac{dX}{dx};\ Z = \frac{d^2X}{2dx^2};\ V = \frac{d^3X}{2.3dx^3};\ \text{rc.}$$

ist. Da also wegen der gegebenen Gleichung (B) $X = 0$ ist, so verwandelt sich die vorhergehende, wenn man durch u dividirt, in

$$Y + Zu + Vu^2 + \text{rc.} + u^{m-1} = 0 \ldots (C).$$

Wenn

Wenn man in dieser Gleichung für x eine von den Wurzeln der Gleichung (B) setzt, so sind ihre Wurzeln die Unterschiede zwischen jener Wurzel und den übrigen Wurzeln der Gleichung (B), und schaft man daher aus (B) und (C) auf dem Wege der Elimination x weg, so bekommt man eine Gleichung für u, deren Wurzeln die Unterschiede zwischen jeder von den Wurzeln der Gleichung (B) und allen übrigen Wurzeln eben dieser Gleichung sind. Es ist daher solches auch die gesuchte Gleichung.

Man hat indeß nicht nöthig, diese Elimination selbst vorzunehmen, sondern darf nur folgendes erwägen.

1) Wenn α, β, γ, ꝛc. die Wurzeln der Gleichung (B) sind, so sind die Wurzeln der Gleichung (C) $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$, ꝛc., $\beta - \alpha$, $\beta - \gamma$, ꝛc., $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$, ꝛc. ꝛc. Hieraus ist klar, daß die Zahl derselben $m(m-1)$ ist, und daß je zwey und zwey derselben einander gleich aber entgegengesetzt sind, so daß die Gleichung (C) kein Glied hat, worin u mit einem ungeraden Exponenten enthalten wäre. Setzt man daher $\frac{m(m-1)}{2} = n$, und $u^2 = v$, so bekommt die Gleichung, von welcher wir reden, folgende Form

$$v^n - av^{n-1} + bv^{n-2} - cv^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (D).$$

2) Da $(\alpha - \beta)^2$, $(\alpha - \gamma)^2$, $(\beta - \gamma)^2$ ꝛc. die verschiedenen Werthe von v in der Gleichung (D) sind, so ist der Coefficient

$$a = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + \text{ꝛc.}$$

Nun ist aber

$$(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + \text{ꝛc.}$$
$$=$$
$$(m-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{ꝛc.} - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{ꝛc.}$$

und dabey ist

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{rc.} = B, \text{ und}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{rc.} = A^2 - 2B$$

folglich ist auch

$$a = (m-1)(A^2 - 2B) - 2B = (m-1)A^2 - 2mB.$$

Auf ähnliche Art kann man den Werth der übrigen Coefficienten b, c, rc. finden.

Um dazu auf eine leichtere Art zu gelangen sey

$$A1 = \alpha + \beta + \gamma + \text{rc.}$$
$$A2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{rc.}$$
$$A3 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{rc.}$$

rc.

so ist bekannter Maßen

$$A1 = A$$
$$A2 = AA1 - 2B$$
$$A3 = AA2 - BA1 + 3C$$
$$A4 = AA3 - BA2 + CA1 - 4D$$

rc.

Nun sey ferner

$$a1 = (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2 + \text{rc.}$$
$$a2 = (\alpha-\beta)^4 + (\alpha-\gamma)^4 + (\beta-\gamma)^4 + \text{rc.}$$
$$a3 = (\alpha-\beta)^6 + (\alpha-\gamma)^6 + (\beta-\gamma)^6 + \text{rc.}$$

rc.

so hat man

$$a1 = (m-1)A2 - 2\left(\frac{(A1)^2 - A2}{2}\right)$$

$$a2 = (m-1)A4 - 4(A1A3 - A4) + 6\left(\frac{(A2)^2 - A4}{2}\right)$$

$$a3 = (m-1)A6 - 6(A1A3 - A6) + 15(A2A4 - A6) - 20\left(\frac{(A3)^2 - A6}{2}\right)$$

rc.

oder

oder

$$a_1 = mA_2 - 2\frac{(A_1)^2}{2}$$

$$a_2 = mA_4 - 4A_1A_3 + 6\frac{(A_2)^2}{2}$$

$$a_3 = mA_6 - 6A_1A_5 + 15A_2A_4 - 20\frac{(A_3)^2}{2}$$

und überhaupt

$$a_\mu = mA_{2\mu} - 2\mu A_1(A_{2\mu-1})$$
$$+ \frac{2\mu(2\mu-1)}{2}A_2(A_{2\mu-2} - \text{etc.}$$
$$\pm \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)\ldots(\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu} \cdot \frac{(A_\mu)^2}{2}$$

Wenn man auf diese Art die Werthe von a_1, a_2, a_3, etc. gefunden hat, so hat man dadurch die Werthe von a, b, c, etc. aus der Gleichung (D) nach folgenden Formeln

$$a = a_1$$

$$b = \frac{aa_1 - a_2}{2}$$

$$c = \frac{ba_1 - aa_2 + a_1}{3}$$

$$d = \frac{ca_1 - ba_2 + aa_3 - a_4}{4}$$

etc.

Auf diese Art kann man die Coefficienten a, b, c, etc. der Gleichung (C) unmittelbar aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung (B) erhalten. Man sucht zu dem Ende nach den vorhergehenden Formeln die Werthe der Größen A_1, A_2, A_3, etc. bis zu A_{2n}, dann die der Größen a, a_2, a_3 bis zu a_n, und nun endlich die von den Coefficienten a, b, c, etc.

9. Anmerkung.

Es verdient hier bemerkt zu werden, daß die Gleichung (D) auf gleiche Art die Unterschiede zwischen den positiven und den negativen Wurzeln der Gleichung (B) ausdruckt, so daß sie auch gültig bleibt, wenn man $-x$ für x setzt, um die negativen Wurzeln zu finden (Nr. 4.).

Ueberdem erhellet, daß die Gleichung (D) dieselbe bleibt, wenn man auch die Wurzeln der gegebenen Gleichung um irgend eine Größe vermehrt oder vermindert. Hat daher diese Gleichung das zweyte Glied, so kann man dasselbe wegschaffen, und wenn man darauf die Gleichung von v sucht, so bekommt man eben die, welche man gefunden haben würde, wenn man das zweyte Glied nicht weggeschaft hätte. Allein das Verschwinden des zweyten Gliedes erleichtert allemal die Erfindung der Coefficienten a, b, c, ꝛc. weil dabey $A = 0$ und folglich auch $A1 = 0$ ist. Hiedurch verwandeln sich die Formeln der vorhergehenden Nummer in folgende:

$$A1 = 0$$

$$A2 = -2B$$

$$A3 = 3C$$

$$A4 = -BA2 - 4D$$

ꝛc.

$$a1 = mA2$$

$$a2 = mA4 + 6\frac{(A2)^2}{2}$$

$$a3 = mA6 + 15A2A4 - 20\frac{(A3)^2}{2}$$

ꝛc.

$$a = a1$$

$$b = \frac{aa1 - a2}{3}$$

$$c = \frac{ba1 - aa2 + a3}{3}$$

ꝛc.

10. Erster Zusatz.

Da die Wurzeln der Gleichung (D) die Quadrate der Differenzen zwischen den Wurzeln der gegebenen Gleichung (B) sind: so ist klar, daß die Differenzen zwischen den Wurzeln der Gleichung (B), wenn alle Glieder der Gleichung (D) dasselbe Zeichen hätten, in welchem Falle dieselbe gar keine reelle und positive Wurzel haben würde, insgesammt imaginär seyn würden. Es könnte also in diesem Falle die Gleichung (B) nicht mehr als eine reelle Wurzel haben, oder wenn sie deren mehrere hätte, so würden dieselben einander gleich seyn. Findet dies letztere statt, so sind die Methoden bekannt, wie man solches zu erkennen und die Auflösung zu verrichten hat, auch kann der folgende zweyte §. nachgesehen werden. Was den ersten Fall betrift, so folgt aus Nr. 6, daß man $\triangle = 1$ nehmen kann.

11. Zweyter Zusatz.

Wenn die Gleichung (B) ein oder mehrere Paare gleicher Wurzeln hat, so ist bekannt, daß dadurch in der Gleichung (D) ein oder mehrere Werthe von v gleich Null werden, so daß alsdenn die Gleichung ein oder mehrere Male durch v dividirt werden kann. Findet diese Division statt, so hat die Gleichung, welche man nach derselben erhält, rückwärts geschrieben, folgende Form

$$1 + \alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + \text{ꝛc.} + \pi v^r = 0 \ldots (E)$$

und r ist = oder < n. Man setze $v = \frac{1}{y}$ und ordne die Gleichung nach y, so bekommt man

$y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} +$ 2c. $+ \pi = 0 \ldots$ (F).

Ferner suche man nach den bekannten Methoden die Grenze der posit ven Wurzeln dieser Gleichung, und setze dieselbe $= l$, so daß l größer sey als jeder positive Werth von y. Alsdann ist $\frac{1}{l}$ kleiner als jeder positive Werth von $\frac{1}{y}$ oder von v, und folglich kleiner als jeder der Werthe von u^2, weil $v = u^2$ gesetzt worden ist.

Dieses vorausgesetzt, so ist auch $\frac{1}{\sqrt{l}}$ nothwendiger Weise kleiner als jeder der Werthe von u, d. h. als jeder von den Unterschieden zwischen den reellen und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (B).

Ist daher 1) $\sqrt{l} < 1$, so ist man sicher, daß die Gleichung (B) keine reelle Wurzeln hat, die um weniger als um 1 verschieden wären, und man kann daher ohne Bedenken $\Delta = 1$ setzen, (Nr. 6).

2) Ist aber $\sqrt{l} =$ oder > 1, so kann es seyn, daß die Gleichung (B) Wurzeln hat, deren Unterschiede kleiner als eins sind; allein da der kleinste von diesen Unterschieden allemal nothwendiger Weise größer ist als $\frac{1}{\sqrt{l}}$, so kann man auch allemal nach der angeführten Nummer $\Delta =$ oder $< \frac{1}{\sqrt{l}}$ nehmen.

Ueberhaupt sey k die ganze Zahl, die entweder der $\sqrt{l}$ gleich oder zunächst größer als $\sqrt{l}$ ist, so kann man allemal $\Delta = \frac{1}{k}$ nehmen.

12. Erste Anmerkung.

Was die Art und Weise betrift, die Grenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, so ist die bequemste und genauste diejenige, welche von Newton herrührt, und wobey es darauf ankommt eine Zahl zu finden, die so beschaffen ist, daß, wenn man die Wurzeln der gegebenen Gleichung um dieselbe vermindert, die dadurch entstehende Gleichung keine Abwechslungen der Zeichen habe. Es kann nemlich in diesem Falle eine Gleichung bloß negative Wurzeln haben, und es muß folglich die Zahl, um welche man die Wurzeln der gegebenen Gleichung verkleinert hat, nothwendiger Weise größer seyn, als die größte von diesen Wurzeln.

Um also die Grenze l der Wurzeln der Gleichung

$$(F) \ldots y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

zu finden, setze man darin $y + l$ statt y, und ordne die dadurch erhaltene Gleichung nach y. Auf diese Art wird

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \text{ꝛc.} + y^r = 0$$

und es ist in dieser Gleichung

$$P = l^r + \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} + \gamma l^{r-3} + \text{ꝛc.} + \pi$$

$$Q = rl^{r-1} + (r-1)\alpha l^{r-2} + (r-2)\beta l^{r-3} + \text{ꝛc.}$$

$$R = \frac{r(r-r)}{2} l^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2} \alpha l^{r-3} + \text{ꝛc.}$$

$$S = \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} l^{r-3} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

so daß man also bloß für l einen solchen Werth zu suchen hat, wobey die Größen P, Q, R, ꝛc. insgesammt positiv werden. Fängt man dabey von der letzten dieser Größen an, so hat dieselbe nur zwey Glieder, und geht man also stufenweise von ihr zu den vorhergehenden fort, so findet man die kleinste ganze Zahl leicht, die man für l setzen kann, und welche die gesuchte Grenze ist.

Will man alles Versuchen vermeiden, so darf man für l nur den größten Coefficienten der negativen Glieder der Gleichung (F) um eins vermehrt nehmen; denn es ist leicht zu beweisen, die Größen P, Q, R, ꝛc. bey diesem Werthe von l allemal positiv sind.

Diese Methode, die Grenze der Wurzeln einer jeden Gleichung zu finden, rührt, wie ich glaube, vom Maclaurin her; ich will aber eine andere mittheilen, welche öfters die Grenzen noch näher giebt.

Sind $- \mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \pi y^{r-p}$ — ꝛc. die negativen Glieder der Gleichung (F), so nehme man für l die Summe der beyden größten Größen aus $\sqrt[m]{\mu}$, $\sqrt[n]{\nu}$, $\sqrt[r]{\pi}$, ꝛc., oder irgend eine Zahl, die größer ist als diese Summe. Die Richtigkeit dieser Methode läßt sich auf eben die Art beweisen, als die der vorhergehenden, und so wäre es überflüßig, dabey zu verweilen.

Uebrigens muß bemerkt werden, daß man auf beyden Wegen selten die nächsten Grenzen der Wurzeln findet; um nähere zu bekommen, muß man nach und nach für l immer kleinere Zahlen setzen, und darunter die kleinste von denen, welche P, Q, R, ꝛc. insgesammt positiv geben, nehmen.

13. Zweyte Anmerkung.

Hat man nun die Grenze l der Gleichung (F) gefunden, und k gleich oder zunächst größer als $\sqrt{l}$ genommen, so mache man $\Delta = \frac{1}{k}$ (Nr. 10.) und setze in der gegebenen Gleichung

an

an die Stelle der unbekannten Größe nach und nach die Zahlen $0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}$, etc. Die Werthe, welche man auf diese Art findet, werden eine Reihe bilden, worin eben so viel Abwechslungen der Zeichen vorkommen, als die gegebene Gleichung reelle positive und ungleiche Wurzeln hat, und jede dieser Wurzeln wird zwischen zwey auf einander folgende Werthe mit entgegen gesetzten Zeichen fallen. Geben daher die Zahlen $\frac{h}{k}$ und $\frac{h+1}{k}$ entgegengesetzte Werthe, so giebt es auch eine Wurzel, welche zwischen $\frac{h}{k}$ und $\frac{h+1}{k}$ fällt, und es ist folglich die ganze Zahl, welche $\frac{h}{k}$ am nächsten kommt, der nächste Werth dieser Wurzel in ganzen Zahlen (Nr. 2.)

Man lernt also auf diese Art nicht bloß die Menge der positiven und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung kennen, sondern man findet auch zugleich dieselben in ganzen Zahlen so genau als möglich.

Ereignet es sich, daß einer oder mehrere von den sich ergebenden Werthen gleich 0 werden, so ist klar, daß die Zahlen, welche diese Werthe hervorgebracht haben, genaue Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Um die Rechnung leichter und kürzer zu machen, wollen wir noch folgendes anmerken.

1) Es fällt in die Augen, daß es bey der Erfindung der Grenze der positiven Wurzeln einer gegebenen Gleichung unnütz seyn würde, wenn man an die Stelle der unbekannten

Größe

Größe Zahlen setzen wollte, die größer wären als diese Grenze, ob es gleich leicht einzusehen ist, daß man dabey nie andere als positive Werthe bekommen wird. Ist daher λ die gedachte Grenze, so ist die Menge der vorzunehmenden Substitutionen $= \lambda k$, und folglich allemal eine endliche Menge.

Ueberhaupt ist es ohne die Grenze λ zu suchen, hinreichend, die Substitutionen so weit zu treiben, bis das erste Glied der Gleichung, oder die Summe der ersten Glieder, wenn es deren mehrere giebt, die eben dasselbe Zeichen haben, gleich oder größer ist als die Summe aller negativen Glieder. Denn nach Nr. 7. beweiset man leicht, daß die Substitution jedes größern Werths keine andere als positive Resultate geben kann.

2) Anstatt für die unbekannte Größe x die Brüche $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$ ꝛc. zu setzen, kann man dafür auch sogleich $\frac{x}{k}$ substituiren, oder welches eben darauf hinausläuft, den Coefficienten des zweyten Gliedes mit k, den Coefficienten des dritten Gliedes mit k^2, u. s. f. multipliciren, und dann an die Stelle von x die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc. setzen, bis die Grenze dieser Gleichung, oder auch das erste Glied, oder die Summe der ersten Glieder, wenn es mehrere mit einerley Zeichen giebt, der Summe der negativen Glieder gleich oder größer ist als dieselbe. Auf diese Art findet man die Resultate in lauter ganzen Zahlen, und die Wurzel der gegebenen Gleichung fällt nothwendiger Weise zwischen die Resultate mit entgegengesetzten Zeichen, wenn man dieselben durch k dividirt.

3. Es

3. Es sey m der Exponent der Gleichung, in welcher man nach und nach die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc. substituiren soll, so behaupte ich, daß man nach der Erfindung von m + 1 Resultaten, d. h. nachdem man für x die Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc m gesetzt hat, die übrigen durch eine bloße Addition finden kann.

Zu diesem Ende darf man nur die Differenzen der gefundenen Resultate suchen, deren man m bekommt, dann die Differenzen von diesen Differenzen, deren Zahl m — 1 ist, und so fortfahren bis zur mten Differenz.

Diese letzte Differenz ist deswegen nothwendiger Weise eine beständige Größe, weil der Exponent der höchsten Dignität der unbekannten Größe m ist, und man kann daher diese mten Differenzen so weit fortsetzen als man will, weil man dazu bloß die gefundene zu wiederholen hat. Hat man dieses gethan, so kann man vermittelst dieser mten Differenzen die (m — 1)ten, vermittelst dieser die (m — 2)ten und so weiter finden, bis man zu der ersten Reihe gelangt, welche die gesuchten Resultate enthält.

Es verdient hier bemerkt zu werden, daß wenn die zugehörigen Glieder der Reihen, welche man auf diese Art findet, einmal insgesammt positiv sind, die folgenden Glieder jeder Reihe ebenfalls positiv seyn werden. Da nun die letzte Differenz allemal positiv ist, so ist klar, daß man in jeder Reihe endlich einmal zu lauter positiven Gliedern kommen muß, und es ist folglich hinlänglich, die Reihen so weit fortzusetzen, bis alle zugehörige Glieder positiv geworden sind. Denn ist dies geschehen, so ist man versichert, daß die Reihe der Resultate, soweit man sie auch fortsetzen mag, immer

immer positiv bleiben, und folglich keine Abwechselung der Zeichen mehr enthalten wird.

Um dies durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir die Gleichung

$$x^3 - 63x + 189 = 0$$

nehmen. Die Resultate, die zu $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, gehören, sind

189, 127, 71, 27, also

die ersten Differenzen

−62 −56 −44

die zweyten Differenzen

6 12

die dritte

Man formire also folgende Reihen

6	6	6	6	6	6	6	ꝛc.
6	12	18	24	30	36	42	ꝛc.
−62	−56	−44	−26	−2	28	64	ꝛc.
189	127	71	27	1	−1	27	ꝛc.

Das Gesetz, nach welchem sie gebildet worden, ist, daß jedes Glied die Summe aus dem vorhergehenden Gliede eben der Reihe und der über diesem befindlichen der vorhergehenden Reihe werde. Auf diese Art ist es leicht, die Reihen so weit fortzusetzen, als es irgend verlangt wird.

Nun ist die vierte Reihe, wie man sieht, die Reihe der Resultate, welche man durch die Substitution der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, für x in der gegebenen Gleichung bekommt; und da die Glieder der 2ten Columne, nemlich 6, 42, 64, 27, insgesammt positiv sind, so werden es die folgenden Glieder ebenfalls seyn, so daß daher diese Reihe, auch noch so weit fortgesetzt, keine Abwechslung der Zeichen ferner enthalten wird.

14. An-

14. Anmerkung.

Es ist bereits angemerkt worden, daß man den Werth aller reellen und ungleichen Wurzeln einer Gleichung finden kann, indem man in der Gleichung statt der unbekannten Größe die Glieder einer arithmetischen Progression substituirt; indeß konnte dies aus Mangel der Bestimmung dieser arithmetischen Progression von keinem sonderlichen Nutzen seyn. Jetzt kennen wir diejenige, welche in jedem Falle gewählt werden muß, und werden von eben dieser Aufgabe nun auch für die gleichen und imaginären Wurzeln Gebrauch zu machen suchen.

§. 2.

Von der Art und Weise die gleichen und imaginären Wurzeln einer Gleichung zu bekommen.

15.

Wir haben im vorhergehenden §. bloß die reellen und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (B) betrachtet, jetzt wollen wir annehmen, daß die Gleichuug gleiche Wurzeln habe. In diesem Falle muß nach Nr. 11. die Gleichung (D) so vielmal durch v dividirt werden können, als es Combinationen der gleichen Wurzeln zu zweyen giebt, und folglich müssen eben so viel von den letzten Gliedern in dieser Gleichung (D) fehlen. Auf diese Art erkennt man sehr leicht, wie viel gleiche Wurzeln in der Gleichung befindlich sind.

Da also in dem Falle, daß gleiche Wurzeln da sind, nothwendiger Weise $u = 0$ ist, (Nr. 8.) so giebt alsdann die Gleichung (C) $Y = 0$. Es müssen folglich die beyden Gleichungen für x, nemlich $X = 0$ und $Y = 0$, wenn x einer

von

von den gleichen Wurzeln der Gleichung (B) gleich ist, zu gleicher Zeit statt finden.

Man suche also auf den bekannten Wegen den größten gemeinschaftlichen Faktor der beyden vieltheiligen Größen X und Y, und setze darauf diesen Faktor $= 0$, so wird man eine Gleichung bekommen, die bloß aus den gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammengesetzt seyn wird, aber erhoben zu einer um eins niedrigern Potestät.

Es sey R der größte gemeinschaftliche Faktor von X nnd Y, und X' der Quotient aus X durch R dividirt, so ist leicht einzusehen, daß die Gleichung $X = 0$ eben dieselben Wurzeln enthalten wird, als die gegebene Gleichung $X = 0$, nur mit dem Unterschiede, daß die in dieser Gleichung öfters vorkommenden Wurzeln in jener nur einmal enthalten sind. Diese Gleichung läßt sich also nach den Regeln des vorhergehenden §. behandeln.

Wenn man will, so kann man auch zwey Gleichungen finden, davon die eine bloß die gleichen, und die andere bloß die ungleichen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ enthält. Zu diesem Ende darf man nur noch den größten gemeinschaftlichen Divisor von X' und Y suchen, und, indem man denselben R' nennt, den Quotienten $\frac{X'}{R'}$ nehmen. Setzt man $\frac{X'}{R'} = X''$, so sind die gedachten beyden Gleichungen $X'' = 0$ und $R' = 0$.

Die erste enthält bloß die ungleichen Wurzeln der Gleichung $X = 0$, und die andere bloß die gleichen Wurzeln eben derselben Gleichungen, aber jede nur einmal, so daß die beyden

den Gleichungen $X'' = 0$ und $R' = 0$ keine andere als ungleiche Wurzeln haben, und sich also nach den Regeln des vorhergehenden §. behandeln lassen.

16.

Kennt man die Anzahl der reellen, sowohl gleichen als ungleichen Wurzeln einer gegebenen Gleichung, und ist diese Anzahl kleiner als der Exponent der Gleichung, so hat man daran ein Kennzeichen, daß die übrigen Wurzeln imaginär sind.

Ueberhaupt, sollen die Wurzeln einer Gleichung (B) insgesammt reell seyn, so müssen die Werthe von u es ebenfalls seyn. Folglich müssen alsdann die Werthe von u^2 oder von v insgesammt reell oder positiv seyn, und also die Gleichung (D) Nr. 8. lauter reelle und positive Wurzeln haben. Hieraus fließt ferner, daß die Zeichen in dieser Gleichung abwechselnd positiv und negativ seyn müssen; und wenn also diese Bedingung nicht statt findet, so ist es ein sicheres Kennzeichen, daß die Gleichung (B) imaginäre Wurzeln hat.

Nun ist bekannt, daß die Anzahl der imaginären Wurzeln einer jeden Gleichung, eine gerade Zahl ist, und daß je zwey und zwey unter diese allgemeine Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ gebracht werden können, wo α und β reelle Größen sind. Hierdurch wird $u = \pm 2\beta\sqrt{-1}$, und folglich $v = -4\beta^2$. Auf diese Art erhellet, daß die Gleichung (D) nothwendig so viel reelle negative Wurzeln hat, als es in der Gleichung (B) Paare imaginärer Wurzeln giebt.

Setzt man daher $v = -w$, wodurch die Gleichung (D) in folgende verwandelt wird,

$$w^n - aw^{n-1} + bw^{n-2} - cw^{n-3} + \text{etc.} = 0 \ldots (G)$$

so hat diese Gleichung nothwendiger Weise so viel reelle positive Wurzeln, als die Gleichung (B) Paare von imaginären Wurzeln.

Hat also die Gleichung (G) nur eine Abwechslung der Zeichen, so hat die Gleichung (B) auch nicht mehr als zwey imaginäre Wurzeln (Nr. 7.).

17.

Es fließt aus dem Vorhergehenden, daß man bloß die reellen positiven Wurzeln der Gleichung (G) zu suchen nöthig hat, wenn man die imaginären Wurzeln der Gleichung (B) haben will. Es mögen w', w'', w''', ꝛc. diese Wurzeln bedeuten, so hat man in $\frac{\sqrt{w'}}{2}$, $\frac{\sqrt{w''}}{2}$, $\frac{\sqrt{w'''}}{2}$, ꝛc. die Werthe von β. Um die zugehörigen Werthe von α zu finden, setze man für x in der Gleichung (B) $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, und mache zwey Gleichungen, davon die eine alle reelle, und die andere alle diejenigen Glieder enthalte, die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt sind. Auf diese Art bekommt man für α zwey Gleichungen von folgender Form

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + \text{ꝛc.} = 0 \\ m\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + q\alpha^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots (H)$$

in welchen die Coefficienten P, Q, ꝛc., p, q, ꝛc. durch a, b, c, ꝛc. und β gegeben sind.

Giebt man daher β einen von den vorhergehenden Werthen, so müssen diese beyden Gleichungen zu gleicher Zeit statt haben, und es muß also auch einen gemeinschaftlichen Divisor von beyden geben. Man suche also den größten gemeinschaftlichen Faktor derselben, und setze ihn $= 0$, so bekommt man eine Gleichung zwischen α und β, woraus man, da β bekannt ist, α finden kann.

Sind

Sind die Werthe von β, welche man aus der Gleichung (G) gefunden hat, insgesammt einander ungleich, so kann zu jedem Werthe von β nicht mehr als ein Werth von α gehören, und es können daher auch die beyden Gleichungen (H) nur eine Wurzel gemein haben. Aus diesem Grunde kann ihr gemeinschaftlicher Faktor die erste Dignität nicht übersteigen.

Man setze daher die Division so lange fort, bis man zu einem Reste gelangt, worin α bloß in der ersten Dignität befindlich ist, und setze diesen Rest $= 0$. Diese Gleichung wird den gesuchten Werth von α geben.

Sind aber unter den Werthen, welche man aus der Gleichung (G) gefunden hat, z. B. zwey einander gleiche, so können zu diesen gleichen Werthen von β verschiedene Werthe von α gehören, und setzt man daher diesen doppelten Werth von β in die Gleichungen (H), so müssen dieselben für jeden der zugehörigen Werthe von α gültig seyn. Aus diesem Grunde müssen sie zwey gemeinschaftliche Wurzeln, und folglich einen gemeinschaftlichen Faktor vom zweyten Grade haben. In diesem Falle muß man daher die Division nicht weiter fortsetzen als bis zu einem Reste, worin α in der zweyten Dignität vorkommt. Setzt man diesen Rest $= 0$, so hat man eine Gleichung vom zweyten Grade, woraus man den doppelten Werth von α bestimmen kann, der allemal reell seyn wird.

Gäbe es drey gleiche Werthe von β, so dürfte man die Division, um α zu finden, nicht weiter als bis zu einem Reste fortsetzen, worin α in der dritten Dignität enthalten wäre. Dieser Rest, $= 0$ gesetzt, gäbe eine Gleichung vom dritten Grade, die drey reelle Werthe von α enthalten würde, und auf ähnliche Art verhält es sich ferner.

§. 3.
Neue Methode die Wurzeln numerischer Gleichungen näherungsweise zu finden.

18.

Es sey die Gleichung

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{ꝛc.} + K = 0 \ldots (a)$$

gegeben, und eine reelle und positive Wurzel derselben entweder nach der vorhergehenden oder irgend einer andern Methode in ganzen Zahlen bekannt. Man nenne diesen ersten Werth p, so daß $x > p$ aber $< p + 1$ sey, und setze $x = p + \frac{1}{y}$. Bringt man diesen Werth für x in die gegebene Gleichung, multiplicirt darauf alle Glieder durch y^m und ordnet sie nach y, so bekommt man eine Gleichung von folgender Form:

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \text{ꝛc.} + K' = 0 \ldots (b)$$

Da nun nach der Voraussetzung $\frac{1}{y} > 0$ und < 1 seyn soll, so ist $y > 1$ und es hat daher die Gleichung (b) zum wenigsten eine reelle Wurzel, die größer als eins ist.

Man suche also auf die §. 1. erklärte Art den Werth dieser Wurzel in ganzen Zahlen. Da dieselbe nothwendiger Weise positiv ist, so ist es genug y als positiv zu betrachten (Nr. 4).

Nachdem man auf diesem Wege den Werth von y in ganzen Zahlen gefunden hat, der q heißen mag, so setze man

man $y = q + \frac{1}{z}$, und bringe diesen Werth in die Gleichung (b). Hiedurch bekömmt man eine dritte Gleichung für z von folgender Form

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \text{rc.} + K'' = 0 \ldots (c)$$

Diese Gleichung hat nothwendiger Weise zum wenigsten eine reelle Wurzel, die größer als eins ist, und man kann also auch den Werth dieser Wurzel in ganzen Zahlen finden.

Es heiße derselbe r. Setzt man $z = r + \frac{1}{u}$ und bringt diesen Werth in die Gleichung (c), so erhält man eine Gleichung für u, die wenigstens eine reelle Wurzel hat, welche größer ist als die Einheit, und eben so verhält es sich ferner.

Fährt man also auf diese Art fort, so nähert man sich dem Werthe der gesuchten Wurzel immer mehr und mehr. Ereignet es sich aber, daß eine von den Zahlen p, q, rc. eine genaue Wurzel ist, so hat man $x = p$, oder $y = q$ u. s. w. und die Operation hört dann auf. In diesem Falle findet man also für x eine commensurable Zahl.

In allen übrigen Fällen ist der Werth der Wurzel nothwendig incommensurabel, und man kann sich demselben nur bis zu jeder beliebigen Grenze nähern.

19.

Hat die gegebene Gleichung mehrere reelle positive Wurzeln, so kann man nach der §. 1. erklärten Methode den Werth von jeder in ganzen Zahlen finden; und nennt man diese Werthe p, p', p'', rc. so kann man sie nach und nach gebrauchen, um sich dem wahren Werthe immer mehr zu nähern. Man bemerke aber folgendes.

1) Wenn die Zahlen p, p′, p″ ꝛc. insgesammt von einander verschieden sind, so haben die Gleichungen (b) (c) ꝛc. der vorhergehenden Nummer nicht mehr als eine reelle Wurzel, die zugleich größer ist als die Einheit. Denn sollte z. B. die Gleichung (b) zwey reelle Wurzeln haben, die größer wären als die Einheit, z. B. y' und y''; so hätte man $x = p + \frac{1}{y'}$ und $x = p + \frac{1}{y''}$, so daß diesen beyden Werthen von x einerley ganze Zahlen p wider die Voraussetzung zukäme. Auf ähnliche Art würde es sich mit der Gleichung (c) und jeder der übrigen verhalten, wenn sie zwey reelle Wurzeln hätten, die größer wären als die Einheit.

Um also die Werthe q, r, ꝛc. der Wurzeln der Gleichung (b) (c) ꝛc. in ganzen Zahlen zu finden, ist es in diesem Falle hinlänglich, für y, z, ꝛc. die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ꝛc. und zwar bloß positiv, zu setzen, bis man durch diese Substitutionen zwey Resultate mit entgegenstehenden Zeichen bekömmt.

2) Wenn es zwey Werthe von x giebt, welchen einerley ganze Zahl p zukommt, so haben, wenn man diese Zahl gebraucht, die Gleichungen (b) (c) ꝛc. jede zwey reelle Wurzeln, die größer als eins sind, bis man zu einer Gleichung kommt, worin die Werthe dieser beyden Wurzeln durch verschiedene ganze Zahlen ausgedruckt werden. Sobald dieses geschehen ist, giebt jeder dieser Werthe eine Reihe von Gleichungen, davon jede nicht mehr als eine reelle Wurzel hat die größer ist als eins.

Denn da x zwey verschiedene Werthe hat, die beyde die ganze Zahl p gemein haben, so lassen sich diese beyden Werthe

Werthe durch $p + \frac{1}{y}$ ausdrücken, und es muß folglich y nothwendig zwey reelle Werthe haben, die größer sind als eins. Haben nun diese beyden Werthe von y die ganze Zahl q gemein, so muß auch, wenn man $y = q + \frac{1}{z}$ setzt, z zwey verschiedene Werthe haben, die größer als eins sind, u. s. w.

Wenn aber die Werthe von y in ganzen Zahlen verschieden wären, so müßte man, wenn man dieselben q und q' nennte, $y = q + \frac{1}{z}$ und $y = q' + \frac{1}{z}$ setzen, und dabey fällt in die Augen, daß z in beyden Fällen nicht mehr als einen reellen Werth haben würde, der größer als eins wäre, weil sonst y, anstatt einen zweyfachen Werth zu haben, einen dreyfachen, vierfachen Werth u. s. w. bekommen würde.

Ist man daher durch die gedachten Substitutionen zu einer Gleichung gekommen, deren beyde Wurzeln, die größer als die Einheit sind, durch verschiedene ganze Zahlen ausgedruckt werden, so hat jede von den folgenden Gleichungen, die man durch diese beyden Werthe erhält, nicht mehr als eine reelle Wurzel, die größer ist als die Einheit. Folglich braucht man, um den Werth dieser Wurzeln in ganzen Zahlen zu finden, in den Gleichungen nur die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 2c. zu substituiren, bis man zwey Resultate mit entgegengesetzten Zeichen bekommt (Nr 6).

Aehnliche Anmerkungen lassen sich über die Fälle machen, wo die Gleichung (a) drey oder mehrere Wurzeln hätte, deren Werthe in ganzen Zahlen nicht von einander verschieden wären.

20.

Wir haben in der 18ten Nummer angenommen, daß die gesuchten Wurzeln positiv sind. Um die negativen Wurzeln zu finden, braucht man in der gegebenen Gleichung nur $-x$ für x zu setzen, und dann die positiven Wurzeln dieser neuen Gleichung zu suchen (Nr. 4).

Was die imaginären Wurzeln betrift, die allemal durch $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ausgedruckt werden können, so sind §. 2. Regeln gegeben worden, nach welchen man Gleichungen finden kann, die α und β zu Wurzeln haben. Man darf also nur die reellen Wurzeln dieser Gleichungen suchen, wenn man die imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung haben will.

21.

Um sich die Substitutionen Nr. 18. von $p + \frac{1}{y}$ für x, von $q + \frac{1}{z}$ für y ꝛc. zu erleichtern, bemerke man, daß sich die Coefficienten der Gleichung (b) unmittelbar aus den Coefficienten der Gleichung (a) herleiten lassen. Es ist nemlich

$$A' = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$B' = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$C' = \frac{m(m-1)}{2}Ap^{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Bp^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

Eben so bekommt man die Coefficienten der Gleichung (c) aus den Coefficienten der Gleichung (b), wenn man in den vorhergehenden Formeln q für p, A'', B'', C'', ꝛc. für A', B', C', ꝛc., und A', B', C', ꝛc. für A, B, C, ꝛc. setzt, und auf ähnliche Art kann man weiter fortgehen.

Man

Man sieht hieraus, daß der erste Coefficient A′ oder A″ ꝛc. nie $= 0$ seyn wird, wofern nicht p oder q ꝛc. eine genaue Wurzel ist, denn in diesem Falle endigt sich mit dieser Zahl der continuirliche Bruch, welchen man auf dem beschriebenen Wege findet (Nr. 18.). Ist nemlich $A'' = 0$ oder $A'' = 0$ ꝛc, so bekommt man $y = \infty$ oder $z = \infty$, und folglich $x = p$ oder $y = q$ ꝛc.

22.

Sind also p, q, r, s, t, ꝛc. die Wurzeln der Gleichungen (a), (b), (c), ꝛc. so daß $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$, $z = r + \frac{1}{u}$ ꝛc. ist: so bekommt man, wenn man diese Werthe nach und nach in den Werth von x bringt,

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}$$

und es wird folglich der Werth von x oder der gesuchten Wurzel durch einen continuirlichen Bruch ausgedruckt. Es ist aber bekannt, daß diese Art Brüche sehr geschickt ist, jede rationale sowohl als irrationale Zahl auf die möglich einfachste und genaueste Weise auszudrucken.

Huygens scheint der erste gewesen zu seyn, der diese Eigenschaft der continuirlichen Brüche bemerkt und dieselben gebraucht hat, um die einfachsten Brüche zu finden, die einem gegebenen Bruche am nächsten kommen. Man sehe seine Abhandlung de Automato planetario.

Nach ihm haben viele große Mathematiker die Theorie dieser Brüche weiter entwickelt und mit Einsicht und Nutzen gebraucht. Allein noch hat man meines Wissens nicht daran gedacht, sich ihrer bey der Auflösung der Gleichungen zu bedienen.

23.

Verwandelt man die continuirlichen Brüche

$$\frac{p}{1},\ p+\frac{1}{q},\ p+\frac{1}{q+\frac{1}{r}}\ \text{rc.}$$

in gemeine Brüche, und setzt dabey

$$\begin{array}{ll} \alpha = p & \alpha' = 1 \\ \beta = q\alpha + 1 & \beta' = q\alpha' = q \\ \gamma = r\beta + \alpha & \gamma' = r\beta' + \alpha' \\ \delta = s\gamma + \beta & \delta' = s\gamma' + \beta', \\ \text{rc.} & \text{rc.} \end{array}$$

so bekommt man

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\beta}{\beta'},\ \frac{\gamma}{\gamma'},\ \frac{\delta}{\delta'},\ \text{rc.}$$

Diese Brüche nähern sich nothwendiger Weise dem wahren Werthe von x, und zwar ist der erste von ihnen kleiner, der andere größer, und der dritte wieder kleiner, der vierte wieder größer u. s. w. als dieser Werth, so daß derselbe allemal zwischen zwey unmittelbar auf einander folgende Brüche fällt. Diese Behauptung läßt sich sehr leicht aus der Natur der Natur der continuirlichen Brüche herleiten.

Nun überzeugt man sich leicht, daß die Werthe von α, β, γ, rc. und α', β', γ', rc. allemal so beschaffen sind, daß

$$\begin{array}{c} \beta\alpha' - \alpha\beta' = 1 \\ \beta\gamma' - \gamma\beta' = 1 \\ \delta\gamma' - \gamma\delta' = 1 \\ \text{rc.} \end{array}$$

ist. Hieraus folgt.

1) Daß diese Brüche bereits auf die kleinsten Zahlen gebracht sind. Denn wenn z. B. γ und γ' einen andern gemeinschaftlichen Divisor hätten als die Einheit, so müßte,

da $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$ ist, auch die Einheit durch diesen Divisor theilbar seyn.

2) Ferner ist $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}$; $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'}$; $\frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}$; rc., und es können daher die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, rc. von dem wahren Werthe von x nicht weiter unterschieden seyn als um eine Größe, die kleiner ist als $\frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{1}{\beta'\gamma'}$, $\frac{1}{\gamma'\delta'}$, rc. Hiernach läßt sich die Größe der jedesmaligen Näherung leicht beurtheilen.

Ueberhaupt da $\beta' > \alpha'$, $\gamma' > \beta'$ rc. ist, so ist auch $\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'}$; $\frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'}$, rc.; und es kann folglich die Abweichung eines jeden Bruchs von dem wahren Werthe der Wurzel nie so viel betragen als die Einheit durch das Quadrat des Nenners dieses Bruchs dividirt.

3) Es kommt nicht nur jeder Bruch dem Werthe von x näher als jeder der vorhergehenden Brüche, sondern auch näher als jeder Bruch, dessen Nenner kleiner ist. Denn sollte der Bruch $\frac{\mu}{\mu'}$ z. B. dem gedachten Werthe näher kommen als der Bruch $\frac{\gamma}{\gamma'}$ und γ' größer seyn als μ', so müßte $\frac{\mu}{\mu'}$ zwischen $\frac{\gamma}{\gamma'}$ und $\frac{\delta}{\delta'}$ fallen. Man hätte folglich $\frac{\mu}{\mu'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{1}{\gamma'\delta'}$ und > 0; also $\mu\gamma' - \mu'\gamma < \frac{\mu'}{\delta'} < 1$ und > 0, welches nicht statt finden kann.

24.

Die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, ꝛc. können Hauptbrüche genennt werden, weil sie sich dem gesuchten Werthe so sehr als möglich nähern; sind aber die Zahlen p, q, r, ꝛc. keine Einheiten, so kann man noch andere Brüche finden, die sich demselben Werthe ebenfalls nähern, und diesen kann man den Namen Nebenbrüche geben.

Ist z. B. $r > 1$, so kann man zwischen die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\gamma}{\gamma'}$ die beyde kleiner sind als der Werth von x, so viel Nebenbrüche einschalten, als $r - 1$ Einheiten enthält, indem man nach und nach 1, 2, 3, ꝛc. $r - 1$ anstatt r setzt. Da $\gamma = r\beta + \alpha$ und $\gamma' = r\beta' + \alpha'$ ist, so bekommt man auf diese Art folgende Reihe von Brüchen:

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\ \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\ \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}\ \text{ꝛc.}\ \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}.$$

Die beyden äußersten Glieder dieser Reihe enthalten die Hauptbrüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, die mittlern hingegen sind Nebenbrüche.

Sucht man nun die Differenz von zwey unmittelbar auf einander folgenden Brüche dieser Reihe, z. B. von $\frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}$ und $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, so findet man $\frac{1}{(2\beta'+\alpha')(3\beta'+\alpha')}$, so daß diese Differenz allemal positiv ist und desto kleiner wird, je weiter vom Anfang die Brüche genommen werden. Da folglich der Bruch $\frac{\gamma}{\gamma'}$ kleiner ist als der Werth von x, so

müssen

müssen auch die gedachten Brüche insgesammt kleiner seyn als dieser Werth, aber sich dabey gleichwohl demselben immer mehr nähern.

Diese Schlüsse passen auch auf alle übrige Hauptbrüche, und wenn man zu denselben diese beyden füget, $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$, wovon der erste allemal kleiner, der andere aber allemal größer ist als jede gegebene Größe: so kann man zwey Reihen von Brüchen machen, welche sich dem gesuchten Werthe nähern, und wovon die eine die Brüche enthält, die kleiner, und die andere diejenigen, welche größer sind als dieser Werth.

Brüche, die kleiner sind.

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1}\ \text{rc.}\ \frac{p}{1}\ \ldots \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)$$

$$\frac{\beta + \alpha}{\beta' + \alpha'},\ \frac{2\beta + \alpha}{2\beta' + \alpha'},\ \frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'}\ \text{rc.}\ \frac{r\beta + \alpha}{r\beta + \alpha'}\ \ldots \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)$$

$$\frac{\delta + \gamma}{\delta' + \gamma'},\ \frac{2\delta + \gamma}{2\delta' + \alpha'},\ \frac{3\delta + \gamma}{3\delta' + \gamma'}\ \text{rc.}\ \frac{t\delta + \gamma}{t\delta' + \gamma}\ \ldots \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$$

rc.

Brüche, die größer sind.

$$\frac{1}{0},\ \frac{\alpha + 1}{\alpha' + 1},\ \frac{2\alpha + 1}{2\alpha' + 1},\ \frac{3\alpha + 1}{3\alpha' + 1}\ \text{rc.}\ \frac{q\alpha + 1}{q\alpha' + 1}\ \ldots \left(\frac{\beta}{\beta'}\right)$$

$$\frac{\gamma + \beta}{\gamma' + \beta'},\ \frac{2\gamma + \beta}{2\gamma' + \beta'},\ \frac{3\gamma + \beta}{3\gamma' + \beta'}\ \text{rc.}\ \frac{s\gamma + \beta}{s\gamma' + \beta'}\ \ldots \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$$

rc.

Was die Natur dieser Brüche betrift, so ist leicht zu beweisen, so wie wir bereits von den Hauptbrüchen bewiesen haben.

1) Daß

1) Daß jeder derselben auf die kleinsten Zahlen gebracht ist. Da also die Zähler und Nenner immer größer werden, je weiter man fortgeht, so folgt, daß diese Brüche immer durch desto größere Zahlen ausgedruckt werden, je weiter dieselben vom Anfang der Reihe entfernt sind.

2) Daß jeder Bruch der ersten Reihe dem Werthe von x näher kommen wird als jeder andere Bruch der kleiner ist als dieser Werth, und dabey einen kleinern Nenner hat, als eben dieser Bruch; so wie auch daß jeder Bruch der zweyten Reihe dem Werthe von x näher liegen muß als jeder andere Bruch, der größer ist als dieser Werth und einen kleinern Nenner hat als eben dieser Bruch.

Denn gäbe es einen Bruch $\frac{\mu}{\mu'}$ der kleiner wäre als der Werth von x, und sich zugleich diesem Werthe mehr näherte als z. B. der Bruch $\frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'}$, so müßte sich, wenn man $3\beta' + \alpha' > \mu'$ annähme, weil der Bruch $\frac{\beta}{\beta'}$ größer ist als der gedachte Werth, die Größe $\frac{\mu}{\mu'}$ zwischen den beyden Größen $\frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'}$, und $\frac{\beta}{\beta'}$ befinden. Sollte dieses seyn, so müßte

$$\frac{\mu}{\mu'} - \frac{3\beta + \alpha}{3\alpha' + \alpha'}$$

$$< \frac{\beta}{\beta'} - \frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'} < \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta(3\beta' + \alpha')} < \frac{1}{\beta'(3\beta' + \alpha')}$$

und folglich

$$\mu(3\beta' + \alpha') - \mu'(3\beta + \alpha) < \frac{\mu'}{3\beta' + \alpha'} < 1$$

seyn, welches nicht statt finden kann.

Uebri-

Uebrigens kann es sich ereignen, daß ein Bruch aus der einen Reihe dem Werthe von x nicht so nahe kommt als ein Bruch aus der andern, obgleich die Zahlen desselben kleiner sind; allein wenn der Bruch, der den größten Nenner hat, ein Hauptbruch ist, so findet dieser Umstand nie statt (Nr. 23).

§. 4.
Anwendung der erklärten Methode auf einige einzelne Fälle.

25.

Das erste Beyspiel mag die Gleichung seyn, welche Newton nach seiner Methode aufgelöset hat, nemlich

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Ich fange davon an, daß ich nach den Formeln der 8ten Nummer die Gleichung für v suche, die aus dieser Gleichung entspringt. Zu dem Ende setze ich

$$m = 3,\ A = 0,\ B = -2 \text{ und } C = 5.$$

Hierdurch erhalte ich

$$n = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3,\ A1 = 0,\ A2 = 4,\ A3 = 15,\ A4 = 8,$$

$$A5 = 50 \text{ und } A6 = 91$$

folglich

$$a1 = 12,\ a2 = 72,\ a3 = -1497$$

und hieraus

$$a = 12,\ b = 36,\ c = -643.$$

so daß die gesuchte Gleichung ist

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0$$

Da in dieser Gleichung die Zeichen nicht durchaus abwechseln, so schließe ich daraus sogleich, daß die gegebene Glei-

chung

chung nothwendiger Weise zwey imaginäre, und folglich nicht mehr als eine reelle Wurzel hat (Nr. 16).

Folglich sind die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, rc. diejenigen, welche man anstatt x zu setzen hat (Nr. 6).

Nehme ich nun x positiv, und suche nach der Nr. 12. erklärten Methode die Grenze der Werthe von x, so finde ich $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} < 3$; folglich ist 3 die gesuchte Grenze in ganzen Zahlen, und es ist daher genug, bey der gedachten Substitution bis 3 fortzugehen. Hierdurch findet man

$$-5, -6, -1, 16$$

und es erhellet auf diese Art, daß die gesuchte Wurzel zwischen 2 und 3 fallen wird. Es ist demnach 2 der Werth derselben in ganzen Zahlen (Nr. 2).

Nun setze ich, nach §. 3. $x = 2 + \frac{1}{y}$, und bekomme dadurch, wenn ich die Glieder nach y ordne, die Gleichung

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$$

worin ich die Zeichen verändert habe, um das erste Glied positiv zu erhalten.

Diese Gleichung hat nun nothwendiger Weise nur eine einzige Wurzel die größer ist als eins (Nr 19), so daß man darin, um den Werth von y durch die Näherung zu finden bloß die Zahlen 0, 1, 2, 3, rc. zu substituiren braucht, bis man zwey Resultate findet, die entgegengesetzte Zeichen haben.

Um nicht zu viel unnütze Substitutionen zu versuchen bemerke ich, daß y = 0 gesetzt, ein negatives Resultat giebt, und daß man dergleichen ebenfalls durch die Substitution y = 10 bekommt. Ich fange daher von y = 10 an, und finde

finde, indem ich nach und nach 10, 11 2c. für y setze, die Resultate — 61, 54 2c. Folglich ist der Werth von y in ganzen Zahlen 10, und also $q = 10$.

Setze ich nunmehr $y = 10 + \frac{1}{z}$, so bekomme ich die Gleichung

$$61z^3 - 94^2 - 20z - 1 = 0$$

und bringe ich in diese Gleichung für z nach und nach die Zahlen 1, 2, 2c., so ergeben sich die Resultate — 54, 71, 2c. und es ist daher $z = 1$.

Nun setze ich noch $z = 1 + \frac{1}{u}$, und bekomme dadurch

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$$

welche, $u = 1, 2$, 2c. genommen, die Resultate — 71, 293 2c. giebt. Folglich ist $r = 1$, u. s. w.

Fährt man auf diese Art fort, so findet man die Zahlen 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, 2c., und es läßt sich daher die gesuchte Wurzel durch folgenden Bruch ausdrucken:

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{2c.}}}}}$$

welcher nach Nr. 23. folgende Brüche giebt

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349},$$
$$\frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837}, \text{2c.}$$

die wechselsweise kleiner und größer sind, als der Werth von x.

Der letzte Bruch $\frac{16415}{7837}$ ist größer als die gesuchte Wurzel, aber die Abweichung beträgt weniger als $\frac{1}{(7837)^2}$ (Nr. 23. 2.) d. h. weniger als 0,0000000163. Wenn man daher den Bruch $\frac{16415}{7837}$ in einen Decimalbruch verwandelt, so ist derselbe bis auf die 7te Stelle genau. Man findet aber durch diese Verwandlung 2,0945514865 . . . und es fällt daher die gesuchte Wurzel zwischen die Zahlen 2,09455149 und 2,09455147.

Newton fand durch seine Methode 2,09455147, und es giebt daher dieselbe hier ein sehr genaues Resultat. Allein man würde sich täuschen, wenn man dieselbe Genauigkeit in allen Fällen von ihr erwarten wollte.

26.

Was die beyden übrigen Wurzeln eben dieser Gleichung betrift, so haben wir bereits gesehen, daß dieselben imaginär sind. Will man sie indeß finden, so enthält Nr. 17. den Weg, welchen man dazu zu betreten hat.

Man nehme also die oben gefundene Gleichung für v wieder zur Hand, und setze darin — w für v. Hierdurch bekommt man

$$w^3 + 12w^2 - 36w - 643 = 0$$

und es kommt hier bloß darauf an, daß man eine reelle und positive Wurzel von dieser Gleichung finde. Da nun das letzte Glied derselben negativ ist, so hat sie nothwendiger Weise eine reelle Wurzel, und man findet den Werth derselben in ganzen Zahlen, wenn man für w nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc. setzt (Nr. 3.) Setzt man w = 6,

so

so ist das Resultat $= - 211$, und setzt man $w = 7$, so ist dasselbe $= + 40$. Folglich ist der Werth der positiven Wurzel dieser Gleichung in ganzen Zahlen $= 6$.

Man setze also $w = 6 + \frac{1}{u}$, wodurch man nach Veränderung der Zeichen

$$211u^3 - 216u^2 - 30u - 1 = 0$$

findet. Läßt man u nach und nach 0, 1, 2, 3, ꝛc. bedeuten, so findet man -1, -36 $+53$, und es ist daher 1 der Werth von u in ganzen Zahlen.

Setzt man also $u = 1 + \frac{1}{x}$, so erhält man, nach abermaliger Veränderung der Zeichen

$$36x^3 - 171x^2 - 417x - 211 = 0.$$

Substituirt man aber für x nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, ꝛc., so geben dieselben bis 6 negative Resultate, und $x = 7$ ein positives, nemlich 9218. Es ist folglich 6 der Werth von x in ganzen Zahlen.

Fährt man auf diese Art fort, so nähert man sich dem Werthe von w immer mehr und mehr, und findet dafür folgenden continuirlichen Bruch

$$w = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{ꝛc.}}}$$

welcher folgende Brüche giebt,

$$\frac{6}{1}, \quad \frac{7}{1}, \quad \frac{48}{7}, \quad \text{ꝛc.}$$

Hat man so w gefunden, so ist (Nr. 17.) $\zeta = \frac{\sqrt{w}}{2}$, und also ζ bekannt.

Nun bringt man $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ für x in die gegebene Gleichung, und formirt daraus zwey Gleichungen, so daß die eine die reellen und die andere die imaginären Glieder mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$ enthält. Hierdurch bekommt man

$$\alpha^3 - (3\beta^2 - 2)\alpha - 5 = 0$$
$$3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0$$

Ferner sucht man den größten gemeinschaftlichen Divisor dieser beyden Gleichungen, und setzt dabey die Division bloß so weit fort, bis man einen Rest findet, worin α nur in der ersten Dignität enthalten ist. Dieser Rest ist

$$-\frac{8\beta^2 + 4}{3}\alpha - 5$$

und $= 0$ gesetzt giebt derselbe

$$\alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2 + 1)}.$$

Auf diese Art hat man also nunmehr die beyden imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

27.

Jetzt wollen wir folgende Gleichung nehmen

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

wo

$$m = 3, \text{ und folglich } n = 3$$

ferner

$$A = 0, \quad B = -7, \quad C = -7$$
$$A1 = 0, \quad A2 = 14, \quad A3 = -21, \quad A4 = 98,$$
$$A5 = -245, \quad A6 = 833$$
$$a1 = 42, \quad a2 = 882, \quad a3 = 18669$$

und

$$a = 42, \quad b = 441, \quad c = 49$$

ist, so daß die Gleichung für v folgende wird:

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0.$$

Da die Zeichen in dieser Gleichung abwechseln, so hat man daran ein Kennzeichen, daß alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell seyn können (Nr. 16.), und da dieselbe nicht durch v theilbar ist, so folgt auch, daß die Gleichung für x keine gleiche Wurzeln hat (Nr. 15.).

Man setze also (Nr. 11.) $v = \frac{1}{y}$, so bekommt man, wenn man noch y ordnet,

$$y^3 - 9y^2 + \frac{42}{49}y - \frac{1}{49} = 0.$$

Da hier der größte negative Coefficient $= 9$ ist, so könnte man $l = 10$ setzen (Nr. 12.); man kann indeß eine genauere Grenze finden, wenn man die kleinste Zahl sucht, wobey folgende drey Größen positiv werden

$$l^3 - 9l^2 + \frac{42}{49}l - \frac{1}{49}$$

$$3l^2 - 18l + \frac{42}{49}$$

$$3l - 9$$

Thut man dieses, so ergliebt sich $l = 9$, und man hat also $k = 3$ (Nr. 11.) und folglich $\Delta = \frac{1}{3}$.

Bringt man demnach $\frac{x}{3}$ für x in die gegebene Gleichung, so bekommt man

$$x^3 - 63x + 189 = 0$$

worin man für x bloß die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc. zu substituiren braucht. Nach der Methode Nr. 13. 3. findet man, daß die Reihe der Resultate nicht mehr als zwey Abwechslungen der Zeichen hat, und es hat daher die gegebene Gleichung auch nicht mehr als zwey positive Wurzeln, wovon die eine zwischen die Zahlen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$, und die andere zwischen $\frac{5}{3}$ und $\frac{6}{3}$ fällt. Man sieht hieraus, daß der Werth von beyden Wurzeln in ganzen Zahlen $= 1$ ist.

Nun nehme man x negativ (Nr. 4.), um auch die negativen Wurzeln der Gleichung zu finden. Hierdurch bekommt man die Gleichung

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

Da das letzte Glied dieser Gleichung negativ ist, so muß sie nothwendig eine positive Wurzel haben (Nr. 3.); allein da wir bereits die beyden übrigen Wurzeln kennen, so wissen wir auch, daß sie deren nicht mehr haben kann. Man hat demnach auch, die gedachte positive Wurzel in ganzen Zahlen zu finden, bloß nöthig, für x die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, rc. zu substituiren, bis man zwey Resultate mit entgegengesetzten Zeichen findet (Nr. 3); und da die Zahlen 3 und 4 dergleichen Resultate geben, so ist 3 der Werth von x in $x^3 - 7x - 7 = 0$, und folglich -3 der Werth von x in der gegebenen Gleichung.

Nachdem man auf diese Art gefunden, daß die Gleichung drey Wurzeln hat, zwey positive und eine negative, und zugleich den Werth dieser Wurzeln in ganzen Zahlen kennt: so kann man sich dem wahren Werthe einer jeden nach §. 3. so sehr nähern als man irgend will.

Wir wollen von den positiven Wurzeln anfangen, und in der Gleichung $x^3 - 7x + 7 = 0$, $x = 1 + \frac{1}{y}$ setzen. Dadurch bekommen wir

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$$

Da

Da 1 der Werth zweyer Wurzeln in ganzen Zahlen ist, so muß diese Gleichung (Nr. 19. 2.) zwey Wurzeln haben, die größer sind als eins.

Ich versuche also, ob sich die Werthe dieser beyden Wurzeln näherungsweise durch die Substitution der ganzen Zahlen 0, 1, 2, ꝛc. finden lassen. Da bloß das Glied $4y^2$ negativ ist, so ist es (Nr. 13. 1.) hinlänglich, diese Substitution nur so weit fortsetzen, bis $y^3 =$ oder $> 4y^2$ oder $y = 4$ wird. Setzt man nun $y = 0, 1, 2, 3, 4,$ so sind die Resultate $1, 1, -1, 1, 13$; woraus folgt daß die gesuchten Wurzeln einmal zwischen 1 und 2, und zweytens zwischen 2 und 3 fallen. Folglich sind die Werthe von y in ganzen Zahlen 1 und 2.

Setzt man also $1) = 1 + \frac{1}{z}$, so bekommt man die Gleichung

$$z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0$$

und diese Gleichung hat nicht mehr als eine reelle Wurzel, die größer ist als eins (Nr. 19. 2.) Setzt man demnach $z = 1, 2,$ ꝛc. bis man zwey Resultate mit entgegen gesetzten Zeichen bekömmt, so findet man bey $z = 2, -1$, und bey $z = 3, +7$. Folglich ist 2 der Werth von z in ganzen Zahlen.

Man setze also $z = 2 + \frac{1}{u}$, so bekommt man nach Veränderung der Zeichen

$$u^3 + 3u^2 - 4u - 1 = 0$$

Setzt man $u = 1, 2,$ ꝛc. so findet man den Werth von u in ganzen Zahlen $= 1$. Auf ähnliche Art kann man weiter fortfahren.

Setzt man 2) $y = 2 + \frac{1}{z}$, so findet man, wenn man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung bringt, und die Zeichen verändert,

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$$

Diese Gleichung hat, so wie die vorhergehende Gleichung für z, nicht mehr als eine Wurzel, die größer ist als eins, so daß man nur $z = 1, 2,$ rc. setzen darf. Hierdurch erhält man die Resultate $-1, +5$, und es ist also 1 der Werth von z in ganzen Zahlen.

Man setze daher $z = 1 + \frac{1}{u}$, so bekommt man nach Veränderung der Zeichen

$$u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0$$

und diese Gleichung, auf die vorhergehende Art behandelt, giebt für u in ganzen Zahlen 4.

Setzt man $u = 4 + \frac{1}{w}$ so läßt sich auf ähnliche Art der Werth von w finden, u. s. w.

Es sind demnach die beyden positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{rc.}}}}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{rc.}}}}$$

und diese Brüche kann man, wenn man will, wie Nr. 23. 24. verwandeln.

Um

Um nun den Werth der negativen Wurzel näherungsweise zu finden, nehme man wieder die Gleichung

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

zur Hand, wovon man schon weiß, daß x in ganzen Zahlen $= 3$ ist. Man setze also $x = 3 + \frac{1}{y}$, so bekommt man nach Veränderung der Zeichen

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0$$

und da diese Gleichung nur eine reelle Wurzel haben kann, die größer als eins ist (Nr. 19. 2.): so findet man den Werth von y in ganzen Zahlen, wenn man nach und nach $y = 1, 2,$ ꝛc. setzt, bis man zwey Resultate mit entgegengesetzten Zeichen findet. Dies geschieht, wenn $y = 20, 21$ wird, und es ist daher der gedachte Werth von $y = 20$.

Fährt man nun auf eben die Art als vorhin fort, so findet man für die negative Wurzel der gegebenen Gleichung

$$x = -3 - \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{3 + 1 \text{ ꝛc.}}}$$
