# Die Theorie der Gleichungen

**Euler, Leonhard**

**Berlin, 1791**

4. Zusätze zu der vorhergehenden Abhandlung, von Hrn. de la Grange. Aus dem 24sten Bande der Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

# 4. Zusätze zu der vorhergehenden Abhandlung.

Vom

Herrn de la Grange.

Aus dem vier und zwanzigsten Bande der Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Ich habe unter dem Titel: Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen, eine allgemeine Methode dieser Auflösung, woran es bis jetzt noch fehlte, mitgetheilt, und hoffe, daß dadurch die Lücke ausgefüllt seyn wird, welche der gemachten Versuche ungeachtet noch immer statt fand. Sie lehrt nemlich nicht nur, wie man die Menge der reellen positiven oder negativen, gleichen oder ungleichen Wurzeln in jede Gleichung finden kann, sondern sie macht auch mit den Wegen bekannt, sich dem Werthe dieser Wurzeln in rationalen Zahlen so weit zu nähern als man irgend will; und dies ist es meiner Meinung nach, worauf es bey der Auflösung der Gleichungen ankommt.

Da ich Gelegenheit gehabt habe über diesen Gegenstand weiter nachzudenken, so habe ich verschiedene Bemerkungen gesammlet, wodurch meine Methode noch vollkommner und leichter gemacht werden kann. Es scheinen mir diese Bemerkungen

kungen der Aufmerksamkeit der Mathematiker nicht unwerth, und ich will sie daher ebenfalls mittheilen.

## §. 1.

## Ueber die imaginären Wurzeln der Gleichungen.

### Erste Anmerkung.

**Wie man erkennen kann, daß eine Gleichung lauter reelle Wurzeln habe.**

1.

Ich habe Nr. 8. der vorhergehenden Abhandlung allgemeine Formeln gegeben, vermittelst welcher man aus jeder gegebenen Gleichung eine andere herleiten kann, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Sind nun alle Wurzeln einer Gleichung reell, so ist klar, daß die Quadrate ihrer Differenzen insgesammt positiv seyn müssen; und es muß folglich die Gleichung, deren Wurzeln diese Quadrate sind, und welche in der Folge die Gleichung der Differenzen heißen soll, da sie keine andere als reelle positive Wurzeln hat, vom Anfang bis zu Ende lauter Abwechselungen der Zeichen enthalten, so daß daher die ursprüngliche Gleichung, wenn diese Bedingung nicht statt findet, nothwendiger Weise imaginäre Wurzeln hat.

2.

Da ferner die Anzahl der imaginären Wurzeln in den Gleichungen allemal eine grade Zahl, und die allgemeine Form dieser Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ ist, wo $\alpha$ und $\beta$ reelle Größen bedeuten: so kann die allgemeine

meine Form der Differenz jeder zweyer zusammen gehörigen imaginären Wurzeln keine andere seyn, als $2 b\sqrt{-1}$, und folglich das Quadrat dieser Differenz keine andere Form haben als $-4b^2$, so daß dasselbe allemal eine reelle negative Größe wird. Wenn also die gegebene Gleichung imaginäre Wurzeln hat, so muß die Gleichung der Differenzen zum wenigsten eben so viel reelle negative Wurzeln enthalten, als es in der gegebenen Paare von imaginären Wurzeln giebt.

Dieses habe ich bereits im 2ten §. der gedachten Abhandlung bemerkt; allein es läßt sich daraus noch eine andere Folge herleiten, welche ich ihrer Wichtigkeit wegen hersetzen will.

3.

Wir haben gesehen, daß jedes Paar imaginärer Wurzeln einer gegebenen Gleichung zum wenigsten eine reelle negative Wurzel in der Gleichung ihrer Differenzen hervorbringt. Nun ist bekannt, daß eine jede Gleichung nicht mehr reelle positive Wurzeln als Abwechslungen ungleicher, und nicht mehr reelle negative Wurzeln als Folgen gleicher Zeichen haben kann. Wenn also eine Gleichung imagnäre Wurzeln hat, so kann die Anzahl derselben nie größer seyn, als die doppelte Anzahl der Folgen gleicher Zeichen in der Gleichung der Differenzen.

4.

Hieraus und aus dem Obigen fließt, daß die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, wenn die Gleichung der Differenzen lauter Abwechslungen ungleicher Zeichen enthält, und daß dagegen nothwendig imaginäre Wurzeln in ihr angetroffen werden, wenn dieses nicht statt findet. Auf diese Art läßt sich also allemal beurtheilen, ob eine Gleichung imaginäre Wurzeln hat oder nicht.

## Zweyte Anmerkung.

### Regeln zur Bestimmung der Menge der imaginären Wurzeln der Gleichungen.

5.

Es seyen a, b, c, d, ꝛc. die reellen Wurzeln einer Gleichung, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$, ꝛc. die imaginären. Dann sind die Quadrate der Differenzen dieser Wurzeln

$(a - b)^2$, $(a - c)^2$, $(a - d)^2$, ꝛc.

$(b - c)^2$, $(b - d)^2$, ꝛc.

$(c - d)^2$, ꝛc.

$-4\beta^2$, $\quad -4\delta^2$, ꝛc.

$(\alpha - a + \beta\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2$

$(\alpha - b + \beta\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - b - \beta\sqrt{-1})^2$

$(\alpha - c + \beta\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - c - \beta\sqrt{-1})^2$

$(\alpha - d + \beta\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - d - \beta\sqrt{-1})^2$

ꝛc.

$(\gamma - a + \delta\sqrt{-1})^2$, $(\gamma - a - \delta\sqrt{-1})^2$

$(\gamma - b + \delta\sqrt{-1})^2$, $(\gamma - b - \delta\sqrt{-1})^2$

$(\gamma - c + \delta\sqrt{-1})^2$, $(\gamma - c - \delta\sqrt{-1})^2$

$(\gamma - d + \delta\sqrt{-1})^2$, $(\gamma - d - \delta\sqrt{-1})^2$

ꝛc.

$(\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$

$(\alpha - \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - \gamma - (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$

ꝛc.

und selbige also auch die Wurzeln der Gleichung der Differenzen.

Es sey m der Exponent der gegebenen Gleichung, wo also m gleich ist der Menge der Wurzeln a, b, c, ꝛc. $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{1}$, ꝛc; so ist der Exponent der Gleichung der Differenzen $\frac{m(m-1)}{2} = n$ (N. 8. d. vorherg. Abh.). Nun sey p die Anzahl der reellen Wurzeln a, b, c, ꝛc., und 2q die Anzahl der imaginären $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$, ꝛc, folglich $m = p + 2q$. Dies vorausgesetzt erhellet aus der vorstehenden Tabelle leicht, daß es unter den n Wurzeln der Gleichung der Differenzen $\frac{p(p-1)}{2}$ reelle und positive, q reelle und negative, und $2q(p + q - 1)$ imaginäre Wurzeln geben wird.

6.

Sucht man nun das Produkt aller dieser Wurzeln, so ist klar, daß das Produkt der $\frac{p(p-1)}{2}$ positiven Wurzeln allemal positiv, das Produkt der q negativen Wurzeln aber positiv oder negativ seyn wird, je nachdem q eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und was die $2q(p + q - 1)$ negative Wurzeln betrift, so ist das Produkt derselben ebenfalls allemal positiv. Da nemlich je zwey und zwey imaginäre Wurzeln unter die allgemeine Form $(A + B\sqrt{-1})^2$, $(A - B\sqrt{-1})^2$, gebracht werden können, so hat das Produkt aus je zweyen die Form $(A^2 + B^2)^2$, und es ist demnach das Produkt aller dieser Wurzeln allemal positiv.

Folglich ist das Total-Produkt allemal positiv oder negativ, je nachdem q eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Nun

Nun ist, wie bekannt, das letzte Glied einer Gleichung gleich den Produkten aller Wurzeln, und positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl dieser Wurzeln eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Es muß folglich das letzte Glied der Gleichung der Differenzen, deren Exponent n ist, positiv seyn, wenn n und q beyde entweder gerade oder ungerade Zahlen sind, negativ aber, wenn die eine von diesen Zahlen gerade und die andere ungerade ist.

7.

Wenn nun die Zahlen n und q entweder beyde gerade oder beyde ungerade Zahlen sind, so ist $n - q$ nothwendig eine gerade Zahl, ist aber die eine von ihnen gerade und die andere ungerade, so ist $n - q$ nothwendig eine ungerade Zahl. Da also $n = \frac{m(m-1)}{2}$, und $m = p + 2q$ ist, so wird

$n - q = \frac{p(p-1)}{2} + 2q(p + q - 1)$, und es ist folglich $n - q$ allemal eine gerade oder eine ungerade Zahl, je nachdem $\frac{p(p-1)}{2}$ gerade oder ungerade ist.

Auf diese Art muß also nothwendig das letzte Glied der Gleichung der Differenzen positiv oder negativ seyn, je nachdem $\frac{p(p-1)}{2}$ gerade oder ungerade ist, d. h. je nachdem die Menge der Combinationen der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung zu zwey durch eine gerade oder durch eine ungerade Zahl ausgedruckt wird.

8. An-

8.

Angenommen also 1) daß das gedachte letzte Glied positiv sey, so muß $\frac{p(p-1)}{2}$ eine gerade Zahl, und folglich entweder

$$\frac{p}{2} = 2\lambda \text{ und } p = 4\lambda, \text{ oder } \frac{p-1}{2} = 2\lambda \text{ und } p = 4\lambda + 1$$

seyn. Hieraus folgt, daß in diesem Falle die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn der Exponent der Gleichung eine gerade Zahl ist, ein Vielfaches von 4, wenn aber dieser Exponent eine ungerade Zahl ist, ein Vielfaches von 4 um 1 vermehrt seyn muß. Es kann also in diesem Falle die Gleichung nicht 2 oder 3 oder 6 oder 7 reelle Wurzeln u. s. f. haben.

Ist aber 2) das letzte Glied der Gleichung der Differenzen negativ und also $\frac{p(p-1)}{2}$ eine ungerade Zahl; so muß entweder

$$\frac{p}{2} = 2\lambda + 1 \text{ und } p = 4\lambda + 2, \text{ oder } \frac{p-1}{2} = 2\lambda + 1 \text{ und}$$
$$p = 4\lambda + 3$$

seyn. Es ist also in diesem Falle die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung nothwendiger Weise entweder ein Vielfaches von 4 um 2 vermehrt, wenn der Exponent der Gleichung eine gerade, oder ein Vielfaches von 4 um 3 vermehrt, wenn der Exponent der Gleichung eine ungerade Zahl ist. Es kann also die Gleichung in diesem Falle nicht 1 oder 4 oder 5 oder 8 oder 9 reelle Wurzeln u. s. w. haben.

9.

Auf diese Art ist man im Stande beym bloßen Anblicke der Zeichen der Gleichung der Differenzen zu beurtheilen

1) ob

1) ob alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind oder nicht.

2) ob die Menge der reellen Wurzeln eine von den Zahlen 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, ꝛc. oder von diesen 2, 3, 6, 7, 10, 11, ꝛc. ist. Dieses reicht hin zur Bestimmung der Menge der reellen und imaginären Wurzeln derer Gleichungen, welche den fünften Grad nicht übersteigen, und überhaupt, wenn man zum voraus weiß, daß die Anzahl der imaginären Wurzeln nicht größer als 4 seyn kann.

Vielleicht lassen sich, wenn man diese Theorie weiter fortsetzt, sichere Regeln finden, um die Anzahl der reellen Wurzeln einer jeden Gleichung zu bestimmen, wozu die bisherigen Regeln entweder nicht hinreichend sind, wie die von Newton, Maclaurin ꝛc., oder nicht würklich gebraucht werden können, wie die von Stirling, Gua u. s. w. weil dabey die Auflösung der Gleichungen der niedrigern Grade vorausgesetzt wird.

## Dritte Anmerkung.

### Anwendung des Bisherigen auf die Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade.

10.

Es sey eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben, deren allgemeine Form diese ist,

$$x^2 - Ax + B = 0.$$

Die Gleichung der Differenzen ist eine Gleichung des Grades $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, und, nach der 8ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung,

$$v - a = 0$$

wo man also

$$4a = A^2 - 4B$$

hat. Folglich sind die Wurzeln dieser Gleichung entweder beyde reell oder beyde imaginär, je nachdem $A^2 - 4B > 0$ oder $< 0$, und beyde einander gleich, wenn $A^2 = 4B$ ist.

11.

Es sey die allgemeine Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

gegeben. Die Gleichung ihrer Differenzen gehört zu dem Grade $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, und ist, nach der gedachten Methode gesucht,

$$v^3 - av^2 + bv - c = 0$$

so daß

$$4a = 2(A^2 - 3B)$$

$$16b = (A^2 - 3B)^2$$

$$4^3c = \frac{4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2}{3}$$

ist. Sollen also alle drey Wurzeln reell seyn, so muß

1) $A^2 - 3B > 0$, und

2) $4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0$

werden. Fehlt eine von diesen Bedingungen, so hat die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln.

12.

Nun sey die allgemeine Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

gegeben, worin das zweyte Glied fehlt. Die Gleichung der Differenzen ist eine Gleichung von 6ten Grade, und ihre Form folgende

$$v^6 - av^5 + bv^4 - cv^3 + dv^2 - ev + f = 0$$

so daß

$$4a = -8B$$
$$16b = 22B^2 + 8D$$
$$4^3c = -18B^3 + 16BD + 26C^2$$
$$4^4d = 17B^4 + 24B^2D - 7.16D^2 + 3.16BC^2$$
$$4^5e = -4B^5 - 2.27C^2B^2 - 8.27C^2D + 3.4^3BD^2 - 2.4^2B^3D$$
$$4^6f = 4D^3 - 2^3.4^2B^2D^2 + 4^2.3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4$$

bedeutet. Wenn daher die Größe

$$4D^3 - 2^3 . 4^2B^2D^2 + 4^2 . 3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 4^3C^4$$

negativ ist, so hat die gegebene Gleichung nothwendig zwey reelle und zwey imaginäre Wurzeln; ist sie aber positiv, so sind entweder alle Wurzeln reell oder alle imaginär.

Nun sind alle Wurzeln reell, wenn die Werthe aller Coefficienten a, b, c, d, e, f, positiv sind, und werden also insgesammt imaginär seyn, wenn f positiv ist, und sich dabey unter den übrigen ein negativer befindet.

Es sey also der Coefficient f positiv, so daß man

$$4D^3 - 2^3.4^2B^2D^2 + 4^2.3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4 > 0$$

habe; so findet man, daß die übrigen Coefficienten ebenfalls positiv seyn werden, wenn zu gleicher Zeit

$$B < 0 \text{ und } B^2 - 4D > 0$$

ist, und daß hingegen einer von ihnen negativ werden muß, wenn

$$B > 0 \text{ oder } B^2 - 4D < 0$$

ist.

Es sind daher im ersten Falle alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell, und im zweyten insgesammt imaginär.

Man könnte auf ähnliche Art die Bedingungen finden, bey welchen die Wurzeln der Gleichungen des fünften Grades entweder insgesammt reell, oder zum Theil reell zum Theil imaginär sind; allein da die Gleichung der Differenzen eine Gleichung von $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ten Grade seyn würde, so wird die Rechnung sehr weitläuftig und verwickelt.

## Vierte Anmerkung.

### Ueber die Art, die imaginären Wurzeln der Gleichungen zu finden.

13.

Wir haben in der zweyten Anmerkung gesehen, daß jedes Paar zusammen gehörige imaginäre Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ eine reelle negative Wurzel $-4\beta^2$ in der Gleichung der Differenzen hervorbringt. Sucht man also die reellen negativen Wurzeln dieser Gleichung, so findet man jedesmal die Werthe von $-4\beta^2$, und vermittelst des daraus leicht zu erhaltenden Werthes von $\beta$ bekommt man ferner, nach den Vorschriften der 17ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung, $\alpha$. Auf diese Art erhält man also Ausdrücke für jede imaginäre Wurzel, deren Erfindung öfters und insbesondere in der Integral-Rechnung nothwendig ist. Hier will ich eine Anmerkung hinzufügen, welche diese Methode noch in ein helleres Licht setzen, und zu gleicher Zeit alle Zweifel zerstreuen wird, die man etwa wegen ihrer Genauigkeit und Allgemeinheit haben könnte.

14.

Wenn die reellen Theile $\alpha$, $\gamma$, ꝛc. der imaginären Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, ꝛc. sowohl unter einander als auch von den reellen Wurzeln a, b, c, ꝛc. unterschieden sind, so erhellet aus der Tabelle der vorhergehenden Anmerkung, daß die Gleichung der Differenzen keine andere reelle negative Wurzeln haben kann, als $-4\beta^2$, $-4\delta^2$, ꝛc., so daß die Anzahl dieser Wurzeln mit der Anzahl der Paare der imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung übereinkömmt.

Allein ereignet es sich, daß sich unter den Größen $\alpha$, $\gamma$, ꝛc. solche befinden, die entweder unter einander oder den Größen a, b, c, ꝛc. gleich sind; so hat die Gleichung der Differenzen nothwendiger Weise mehr negative Wurzeln, als die gegebene Paare von imaginären.

Denn es sey $a = \alpha$, so werden die beyden imaginären Wurzeln $(\alpha - a + \beta\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2$, beyde $-\beta^2$, und also reelle und negative Größen, so daß, wenn die gegebene Gleichung bloß die beyden imaginären Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ enthält, die Gleichung der Differenzen, wenn $\alpha = a$ ist, außer der reellen negativen Wurzel $-4\beta^2$ auch noch diese beyden gleichen Wurzeln $-\beta^2$, $-\beta^2$ in sich schließt.

Hat also die Gleichung der Differenzen drey reelle negative Wurzeln, davon zwey einander gleich sind, so hat die gegebene Gleichung entweder drey Paare oder ein Paar imaginäre Wurzeln.

Enthält die gegebene Gleichung vier imaginäre Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \alpha - \beta\sqrt{-1}$$
$$\gamma + \delta\sqrt{-1},\quad \gamma - \delta\sqrt{-1}$$

so bekommt deswegen die Gleichung der Differenzen die beyden reellen negativen Wurzeln $-4\beta^2$, $-4\delta^2$. Ist ferner $\alpha = a$, so hat sie auch noch diese beyde, $-\beta^2$, $-\beta^2$; ist $\gamma = b$, so hat sie noch $-\delta^2$, $-\delta^2$; und ist endlich $\alpha = \gamma$, so gehen die vier imaginären Wurzeln

$$(\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - \gamma - (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$$

in

$$-(\beta - \delta)^2,\quad -(\beta - \delta)^2,\quad -(\beta + \delta)^2,\quad -(\beta + \delta)^2$$

über, das heißt, sie werden reell und negativ und zu zwey genommen einander gleich.

15.

Hieraus läßt sich leicht folgendes schließen.

1) Wenn alle reelle negative Wurzeln der Gleichung der Differenzen unter einander ungleich sind, so hat die gegebene Gleichung nothwendiger Weise so viel Paar imaginäre Wurzeln, als jene Wurzeln hat.

Nennt man in diesem Falle irgend eine dieser Wurzeln $-w$, so hat man sogleich $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$, und bringt man diesen Werth in die beyden Gleichungen (H) der 17ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung, so ist man im Stande $\alpha$ zu entwickeln, und also durch jede negative Wurzel $-w$ zwey imaginäre Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ zu finden.

2) Wenn

2) Wenn sich unter den reellen negativen Wurzeln der Gleichung der Differenzen einander gleiche befinden, so giebt jede von den ungleichen Wurzeln, wenn dergleichen da sind, ein Paar imaginäre Wurzeln, wie vorhin; allein jedes Paar gleicher Wurzeln kann auch entweder zwey Paare imaginäre Wurzeln geben oder keins. Folglich geben zwey gleiche Wurzeln entweder vier imaginäre Wurzeln oder gar keine, drey gleiche, entweder sechs imaginäre Wurzeln oder zwey, vier gleiche, entweder acht imaginäre Wurzeln oder vier, u. s. f.

16.

Nun seyen z. B. $-w$, $-w$ zwey gleiche negative Wurzeln der Gleichung der Differenzen. Man setze $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$ wie oben, substituire diesen Werth von $\beta$ in den Gleichungen (H) der angeführten Nr., und suche den gemeinschaftlichen Divisor derselben, indem man die Division bloß bis zu einem Reste fortsetzt, wo $\alpha$ nur in der zweyten Dimension vorkommt, weil $\beta$ nur einen doppelten Werth hat.

Setzt man diesen Rest $= 0$, so bekommt man zur Bestimmung von $\alpha$ eine Gleichung des zweyten Grades, die also entweder zwey reelle oder zwey imaginäre Wurzeln hat. Im ersten Falle nenne man ihre Wurzeln $\alpha'$ und $\alpha''$, so sind die vier imaginären Wurzeln

$$\alpha' + \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha' - \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha'' + \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha'' - \beta\sqrt{-1}$$

Im andern Falle sind die Werthe von $\alpha$ wider die Voraussetzung negativ, und dies ist ein Kennzeichen, daß die beyden gleichen Wurzeln $-w$, $-w$ keine imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung geben.

17.

Wenn die Gleichung der Differenzen drey gleiche negative Wurzeln — w, — w, — w hätte, so müßte man, wenn man $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$ setzte, die bekannte Division bloß bis zu einem Reste fortsetzen, worin $\alpha$ in der dritten Dimension enthalten wäre. Setzte man darauf diesen Rest = 0, so hätte man eine Gleichung des dritten Grades für $\alpha$, woraus man entweder drey reelle, oder einen reellen und zwey imaginäre Werthe finden würde. Im ersten Falle hätte man sechs imaginäre Wurzeln, im andern aber nur zwey; denn die imaginären Werthe von $\alpha$ dürfen nicht gebraucht werden, weil sie sich nicht mit der Annahme vertragen. Auf ähnliche Art verhält es sich ferner.

## §. 2.
## Ueber die Methode, sich den Wurzeln der Gleichungen in Zahlen zu nähern.

18.

Wir haben in der 3ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung gesehen, wie man die Wurzeln der numerischen Gleichungen in continuirliche Brüche verwandeln kann, und wie vorzüglich diese Reductionen vor allen andern sind. Jetzt will ich noch einige Anmerkungen mittheilen, wodurch diese Theorie alle mögliche Allgemeinheit und Einfachheit bekommen wird.

### Erste Anmerkung.
#### Ueber die periodischen continuirlichen Brüche.

19.

Wir haben schon unter der 18. Nr. der vorhergehenden Abhandlung bemerkt, daß der continuirliche Bruch, wodurch die

die Wurzel einer Gleichung ausgedruckt wird, endlich seyn muß, wenn diese Wurzel eine commensurable Zahl ist, und man also dieselbe genau angeben kann; allein es giebt noch einen andern Fall, wo man nicht weniger den Werth der Wurzeln genau haben kann, ob gleich der continuirliche Bruch, wodurch er ausgedruckt wird, ohne Ende fortläuft. Dies findet statt, wenn der continuirliche Bruch ein periodischer Bruch ist, das heißt, wenn bey ihm dieselben Nenner in eben der Ordnung ohne Ende wiederkehren. Hätte man z. B. den Bruch

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}$$

so ist klar, daß wenn man den Werth dieses Bruchs x nennt,

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}}$$

seyn wird. Es fließt aber hieraus die Gleichung

$$qx^2 - pqx - p = 0$$

woraus sich x bestimmen läßt. Eben so würde es sich verhalten, wenn die Menge der wiederkehrenden Glieder größer wäre, man bekommt allemal zur Bestimmuug von x eine Gleichung des zweyten Grades Es kann sich aber auch ereignen, daß der continuirliche Bruch in seinen ersten Gliedern irregulär fortgehet, und nur erst nach einer bestimmten Menge derselben periodisch wird. In diesem Falle kann man den Werth des Bruchs auf eben die Art finden, und er wird allemal von einer Gleichung des zweyten Grades abhangen. Es sey z. B. der Bruch folgender

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}}}}$$

Setzt man den ganzen Bruch $= x$, und den periodischen Theil desselben, oder

$$r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}}$$

$= y$, so hat man

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}$$

woraus

$$y = \frac{x - p}{1 - q(x - p)}$$

fließt. Nun hat man auch

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y}}$$

und dieses giebt

$$sy^2 - rsy - r = 0$$

oder, wenn man für $y$ seinen durch $x$ ausgedruckten Werth setzt,

$$s(x - p)^2 - rs(x - p)(1 - q(x - p)) - r(1 - q(x - p)^2 = 0.$$

Wenn man diese Gleichung entwickelt und nach x ordnet, so hat man eine Gleichung vom zweyten Grade.

20.

Man sieht aus dem, was so eben gesagt worden ist, daß der gedachte Fall allemal statt finden muß, wenn unter den Gleichungen (a), (b), (c), (d), ꝛc. der 18ten Nr. der vorhergehenden Abhandlung zwey Gleichungen vorkommen, welche dieselben Wurzeln haben. Denn ist z. B. die Wurzel der Gleichung (c) nemlich z dieselbe als die Wurzel x der Gleichung (a) so hat man

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}}.$$

Wenn daher in einem continuirlichen Bruche gewisse Zahlen in eben der Ordnung wiederkehren, so kann man sich auf die Art davon überzeugen, ob der continuirliche Bruch ein periodischer sey oder nicht, daß man untersucht, ob die Wurzeln der beyden Gleichungen, welche in ganzen Zahlen einander gleich sind, solches auch durchaus sind, d. h ob die beyden Gleichungen eine Wurzel gemein haben. Dies erkennt man leicht, wenn man den größten gemeinschaftlichen Divisor derselben sucht, weil derselbe alle gemeinschaftliche Wurzeln enthalten muß, wenn es dergleichen giebt; und da wir gesehen haben, daß jeder periodische Bruch eine Gleichung vom zweyten Grade giebt, so folgt, daß der größte gemeinschaftliche Divisor, davon hier die Rede ist, nothwendiger Weise zum zweyten Grade gehören wird.

21.

Vorausgesetzt also, daß man schon wisse, daß es unter den Gleichungen (a), (b), (c), (d), ꝛc. zwey gebe, die eine

Wurzel

Wurzel gemein haben, so ist man auch versichert, daß der gesuchte continuirliche Bruch ein periodischer Bruch seyn muß, so daß man also denselben durch bloße Wiederholung der wiederkehrenden Glieder so weit fortsetzen kann als man will. Allein nun wollen wir auch untersuchen, wie man die Reihe der convergirenden Brüche, deren Nr. 23. der vorhergehenden Abhandlung gedacht worden ist, fortsetzen kann, ohne einen nach den andern besonders zu berechnen.

22.

Zu diesem Ende wollen wir annehmen, daß man allgemein habe

$$x = \lambda' + \frac{1}{x'},\quad x' = \lambda'' + \frac{1}{x''},\quad x'' = \lambda''' + \frac{1}{x'''} \text{ ꝛc.}$$

so daß $x$ die gesuchte Wurzel, $x'$, $x''$, $x'''$, ꝛc. aber die Wurzeln der Gleichungen (b), (c), (d), ꝛc. sind, welche wir oben durch $y$, $z$, $u$, ꝛc. bezeichnet haben. Alsdann hat man

$$x = \lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \cfrac{1}{\lambda''' \text{ ꝛc.}}}$$

Setzt man also, wie oben

$$\left.\begin{array}{ll} l = 1 & L = 0 \\ l' = \lambda' & L' = 1 \\ l'' = \lambda'' l' + 1 & L'' = \lambda'' L' \\ l''' = \lambda''' l'' + l' & L''' = \lambda''' L'' + L' \\ l^{\prime v} = \lambda^{\prime v} l''' + l'' & L^{\prime v} = \lambda^{\prime v} L''' + L'' \\ \text{ꝛc.} & \text{ꝛc.} \end{array}\right\} \ldots (A)$$

so hat man folgende Brüche, die sich $x$ nähern

$$\frac{l}{L'},\ \frac{l'}{L'},\ \frac{l''}{L''},\ \frac{l'''}{L'''},\ \frac{l^{\prime v}}{L^{\prime v}} \text{ ꝛc.}$$

23.

Nun giebt die Gleichung $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$

$$xx' = x'\lambda' + 1 = xl' + 1.$$

Setzt man daher für $x'$ in dem zweyten Gliede dieser Gleichung seinen Werth $\lambda'' + \frac{1}{x''}$ und multiplicirt darauf mit $x''$, so bekommt man

$$xx'x'' = (\lambda''l' + 1)x'' + l' = l''x'' + l'$$

und eben so findet man, wenn man für $x''$ in dem zweyten Gliede dieser Gleichung $\lambda''' + \frac{1}{x'''}$ setzt,

$$xx'x''x''' = l'''x''' + l''$$

und so ferner.

Auf ähnliche Art giebt die Gleichung $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$

$$x'x'' = \lambda''x'' + 1 = L''x'' + L'$$

und substituirt man in dem zweyten Gliede $\lambda''' + \frac{1}{x'''}$ für $x''$ und multiplicirt darauf durch $x'''$, so bekommt man

$$x'x''x''' = (\lambda''L'' + L')x''' + L'' = L''x''' + L''$$

und so ferner.

Hieraus folgt, daß man allgemein haben wird, der continuirliche Bruch mag periodisch seyn oder nicht,

$$\left.\begin{array}{l} xx'x''x''' \ldots x^{\rho} = l^{\rho}x^{\rho} + l^{\rho-1} \\ x'x''x''' \ldots x^{\rho} = L^{\rho}x^{\rho} + L^{\rho-1} \end{array}\right\} \ldots (B)$$

24.

Dieses vorausgesetzt wollen wir annehmen, daß man z. B. $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ gefunden habe, d. h., daß die Wurzel

der

der $(\mu + \nu)$ten Gleichung aus der Reihe (b), (c), 2c. der Wurzel der $\mu$ten Gleichung eben dieser Reihe gleich sey; so hat man auch

$$x^{\mu + \nu + 1} = x^{\mu + 1}$$

$$x^{\mu + \nu + 2} = x^{\mu + 2}$$

2c.

$$x^{\mu + 2\nu} = x^{\mu}$$

2c.

und überhaupt

$$x^{\mu + \nu n + \pi} = x^{\mu + \pi}$$

also auch

$$\lambda^{\mu + \nu + 1} = \lambda^{\mu + 1}$$

$$\lambda^{\mu + \nu + 2} = \lambda^{\mu + 2}$$

und überhaupt

$$\lambda^{\mu + n\nu + \pi} = \lambda^{\mu + \pi}$$

so daß daher seyn wird

$$x = \lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \text{2c.} + \cfrac{1}{\lambda^{\mu+1} + \cfrac{1}{\lambda^{\mu+2} + \text{2c.} + \cfrac{1}{\lambda^{\mu+\nu} + \cfrac{1}{\lambda^{\mu+1} + \text{2c.}}}}}}$$

25.

Setzt man nun überhaupt $\varrho = \mu + n\nu + \pi$, so ist leicht einzusehen, daß dadurch die beyden Gleichungen (B) der vorhergehenden Nummer in folgende verwandelt werden

$$xx'x''\ldots x^{\mu}.x^{\mu+1}x^{\mu+2}\ldots x^{\mu+\pi}.(x^{\mu+1}x^{\mu+2}\ldots x^{\mu+\nu})^{n}$$
$$= l^{\rho}x^{\mu+\pi} + l^{\rho-1}$$

und

$$x'x''\ldots x^{\mu}.x^{\mu+1}x^{\mu+2}\ldots x^{\mu+\pi}.(x^{\mu+1}x^{\mu+2}\ldots x^{\mu+\nu})^{n}$$
$$= L^{\rho}x^{\mu+\pi} + L^{\rho-1}.$$

Nun hat man, wenn man in den Formeln (B) der vorhergehenden Nr. $\varrho = \mu$ annimmt,

$$xx'x''\ldots x^{\mu} = l^{\mu}x^{\mu} + l^{\mu-1}$$
$$x'x''\ldots x^{\mu} = L^{\mu}x^{\mu} + L^{\mu-1}.$$

Da ferner $x^{\mu} = \lambda^{\mu+1} + \dfrac{1}{x^{\mu+1}}$, $x^{\mu+1} = \lambda^{\mu+2} + \dfrac{1}{x^{\mu+2}}$

ꝛc. ist, so hat man, wenn man

$$\left.\begin{array}{ll} h = 1 & H = 0 \\ h' = \lambda^{\mu+1} & H' = 1 \\ h'' = \lambda^{\mu+2}h' + h & H'' = \lambda^{\mu+2}H' \\ h''' = \lambda^{\mu+3}h'' + h' & H''' = \lambda^{\mu+3}H'' + H \\ h^{IV} = \lambda^{\mu+4}h''' + h'' & H^{IV} = \lambda^{\mu+4}H''' + H'' \\ \text{ꝛc.} & \text{ꝛc.} \end{array}\right\}\ldots(C)$$

setzt, allgemein

$$(D)\ldots\begin{cases} x^{\mu}x^{\mu+1}x^{\mu+2}\ldots x^{\mu+\sigma} = h^{\sigma}x^{\mu+\sigma} + h^{\sigma-1} \\ x^{\mu+1}x^{\mu+2}\ldots x^{\mu+\sigma} = H^{\sigma}x^{\mu+\sigma} + H^{\sigma-1} \end{cases}$$

Folglich ist

$$x^{\mu+1}x^{\mu+2}\ldots x^{\mu+\pi} = H^{\pi}x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1}$$

und weil $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ seyn soll

$$x^{\mu+1}x^{\mu+2}\ldots x^{\mu+\nu} = H^{\nu}x^{\mu} + H^{\nu-1}$$

26. Bringt

26.

Bringt man demnach diese Werthe in die beyden obigen Gleichungen, so erhält man

$$(l^\mu x^\mu + l^{\mu-1})(H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1})(H^\nu x^\mu + H^{\nu-1})^n$$
$$= l^\rho x^{\mu+\pi} + l^{\rho-1}$$

und

$$(L^\mu x^\mu + L^{\mu-1})(H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1})(H^\nu x^\mu + H^{\nu-1})^n$$
$$= L^\rho x^{\mu+\pi} + L^{\rho-1}$$

27.

Nun geben die Gleichungen (D), durch einander dividirt,

$$x^\mu = \frac{h^\sigma x^{\mu+\sigma} + h^{\sigma-1}}{H^\sigma x^{\mu+\sigma} + H^{\sigma-1}} \ldots (E)$$

und hieraus fließt

$$x^{\mu+\sigma} = \frac{H^{\sigma-1} x^\mu - h^{\sigma-1}}{h^\sigma - H^\sigma x^\mu}$$

Setzt man daher $\sigma = \pi$, so bekommt man

$$x^{\mu+\pi} = \frac{H^{\pi-1} x^\mu - h^{\pi-1}}{h^\pi - H^\pi x^\mu}$$

und hieraus

$$H^\pi x^{\mu+\pi} + H^{\pi-1} = \frac{h^\pi H^{\pi-1} - H^\pi h^{\pi-1}}{h^\pi - H^\pi x^\mu}$$

Da also aus der Natur der Größen $h, h', h''$, rc. $H, H', H''$ rc. erhellet, daß

$$H'h - h'H = 1,\ H''h' - h''H' = -1,\ H'''h'' - h'''H'' = 1 \text{ rc.}$$

ist, so hat man allgemein

$$h^\pi H^{\pi-1} - H^\pi h^{\pi-1} = \pm 1$$

wo

wo das obere Zeichen gilt, wenn $\pi$ eine gerade, und das untere, wenn $\pi$ eine ungerade Zahl ist.

Braucht man also diese Substitutionen in den beyden Gleichungen der 26sten Nummer, so wird

$$\pm (l^{\mu} x^{\mu} + l^{\mu-1})(H^{\nu} x^{\mu} + H^{\nu-1})^{n}$$
$$=$$
$$(l^{\rho} H^{\pi-1} - l^{\rho-1} H^{\pi}) x^{\mu} + l^{\rho-1} h^{\pi} - l^{\rho} h^{\pi-1}.$$

$$\pm (L^{\mu} x^{\mu} + L^{\mu-1})(H^{\nu} x^{\mu} + H^{\nu-1})^{n}$$
$$=$$
$$(L^{\rho} H^{\pi-1} - L^{\rho-1} H^{\pi}) x^{\mu} + L^{\rho-1} h^{\pi} - L^{\rho} h^{\pi-1}$$

und die Zeichen $+$ und $-$ gelten eben so wie vorhin.

28.

Setzt man nun in der Gleichung (E) der vorhergehenden Nummer $\sigma = \nu$, so bekommt man, da $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ ist,

$$x^{\mu} = \frac{h^{\nu} x^{\mu} + h^{\nu-1}}{H^{\nu} x^{\mu} + H^{\nu-1}}$$

Dieses giebt folgende Gleichung für $x^{\mu}$

$$H^{\nu}(x^{\mu})^{2} - (h^{\nu} - H^{\nu-1}) x^{\mu} - h^{\nu-1} = 0 \ldots (F)$$

woraus

$$x^{\mu} = \frac{h^{\nu} - H^{\nu-1} + \sqrt{((h^{\nu} - H^{\nu-1})^{2} + 4H^{\nu} h^{\nu-1})}}{2H^{\nu}}$$

fließt. Es sey der Kürze wegen

$$P = \frac{h^{\nu} - H^{\nu-1}}{2H^{\nu}}, \quad Q = P^{2} + \frac{h^{\nu-1}}{H^{\nu}}$$

und also

$$x^{\mu} = P + \sqrt{Q}$$

so bekommt man, wenn man diesen Werth in die beyden letzten Gleichungen der 27sten Nummer bringt,

$$\pm (l^{\mu} P + l^{\mu-1} + l^{\mu} \sqrt{Q})(H^{\nu} P + H^{\nu-1} + H^{\nu} \sqrt{Q})^{n}$$
$$=$$
$$l^{\rho} H^{\pi-1} - l^{\rho-1} H^{\pi})(P + \sqrt{Q}) + l^{\rho-1} h^{\pi} - l^{\rho} h^{\pi-1};$$

$$\pm (L^{\mu} P + L^{\mu-1} + L^{\mu} \sqrt{Q})(H^{\nu} P + H^{\nu-1} + H^{\nu} \sqrt{Q})^{n}$$
$$=$$
$$(L^{\rho} H^{\pi-1} - L^{\rho-1} H^{\pi})(P + \sqrt{Q}) + L^{\rho-1} h^{\pi} - L^{\rho} h^{\pi-1}.$$

Da die Wurzelgröße $\sqrt{Q}$ einen zwiefachen Werth hat, so hat man hierin vier Gleichungen, um die Werthe von $l^{\rho}$, $l^{\rho-1}$, $L^{\rho}$, $L^{\rho-1}$ zu finden.

29.

Denn setzt man der Kürze wegen

$$l^{\mu} P + l^{\mu-1} = f^{\mu}$$
$$L^{\mu} P + L^{\mu-1} = F^{\mu}$$

und

$$H^{\nu} P + H^{\nu-1} = K^{\nu}$$

so bekommt man folgende vier Gleichungen

$$l^{\rho} H^{\pi-1} - l^{\rho-1} H^{\pi} =$$
$$\pm \left\{ \begin{array}{l} (f^{\mu} + l^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \\ -(f^{\mu} - l^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} - H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \end{array} \right\} : 2\sqrt{Q}$$

$$l^{\rho-1} h^{\pi} - l^{\rho} h^{\pi-1} =$$
$$\pm \left\{ \begin{array}{l} (P + \sqrt{Q})(f^{\mu} - l^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} - H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \\ -(P - \sqrt{Q})(f^{\mu} + l^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n} \end{array} \right\} : 2\sqrt{Q}$$

$L^{\rho}$

$$L^{\rho}H^{\pi-1} - L^{\rho-1}H^{\pi} =$$

$$\pm\left\{\begin{matrix}(F^{\mu} + L^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n}\\ -(F^{\mu} - L^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} - H^{\nu}\sqrt{Q})^{n}\end{matrix}\right\} : 2\sqrt{Q}$$

$$L^{\rho-1}h^{\pi} - L^{\rho}h^{\pi-1} =$$

$$\pm\left\{\begin{matrix}(P + \sqrt{Q})(F^{\mu} - L^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} - H^{\nu}\sqrt{Q})^{n}\\ -(P - \sqrt{Q})(F^{\mu} - L^{\mu}\sqrt{Q})(K^{\nu} - H^{\nu}\sqrt{Q})^{n}\end{matrix}\right\} : 2\sqrt{Q}$$

Addirt man demnach die erste Gleichung, durch $h^{\pi}$ multiplicirt, zur zweyten, durch $H^{\pi}$ multiplicirt, desgleichen das Produkt aus der dritten in $h^{\pi}$ zur vierten in $H^{\pi}$, und setzt man dabey der Kürze wegen

$$-H^{\pi}P + h^{\pi} = G^{\pi}$$

so ist, weil $h^{\pi}H^{\pi-1} - H^{\pi}h^{\pi-1} = \pm 1$ (Nr. 27.)

$$l^{\rho} =$$

$$\left.\begin{matrix}(f^{\mu} + l^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n}\\ -(f^{\mu} - l^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi} - H^{\pi}\sqrt{Q})(K^{\pi} - H^{\pi}\sqrt{Q})^{n}\end{matrix}\right\} : 2\sqrt{Q}$$

$$L^{\rho} =$$

$$\left.\begin{matrix}(F^{\mu} + L^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{Q})(K^{\nu} + H^{\nu}\sqrt{Q})^{n}\\ -(F^{\mu} - L^{\mu}\sqrt{Q})(G^{\pi} - H^{\pi}\sqrt{Q})(K^{\pi} - H^{\pi}\sqrt{Q})^{n}\end{matrix}\right\} : 2\sqrt{Q}$$

wo $\rho = \mu + n\nu + \pi$ ist.

30.

Hat man also vermittelst der Größen $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$, rc. $\lambda^{\mu+1}$ nach den Formeln (A), (C) die Größen $l$, $l'$, $l''$, rc. $L$, $L'$, $L''$, rc. bis zu $l^{\mu}$ und $L^{\mu}$, und $h$, $h'$, $h''$, rc. $H$, $H'$, $H''$, rc. bis zu $h^{\nu}$, $H^{\nu}$ berechnet, so kann man nach den vorhergehenden Formeln die Werthe von $1^\rho$ und $L^\rho$, d. h. der Glieder des Bruchs $\frac{1^\rho}{L^\rho}$ finden, $\rho$ mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will. Man darf nemlich nur $\mu$ von $\rho$ abziehen und die Differenz durch $\nu$ dividiren, weil man auf diese Art in dem Quotienten die Zahl n, und in dem Reste die Zahl $\pi$ erhält, welche daher allemal kleiner ist als $\nu$.

31.

Um übrigens allgemein die Gleichung des zweyten Grades zu finden, wodurch die Wurzel x der gegebenen Gleichung bestimmt werden kann, wenn $x^{\mu+\nu} = x^\mu$, wie Nr. 24; darf man nur bemerken, daß die Gleichungen (B) Nr. 23, durch einander dividirt, allgemein geben

$$x = \frac{1^\rho x^\rho + 1^{\rho-1}}{L^\rho x^\rho + L^{\rho-1}} \; .\;.\;.\;. \; (G)$$

Nimmt man $\rho = \mu$, so fließt hieraus

$$x^\mu = \frac{L^{\mu-1}x - 1^{\mu-1}}{1^\mu - L^\mu x}$$

und bringt man diesen Werth von $x^\mu$ in die Gleichung (E) der 27sten Nummer, so bekommt man

$$H^\nu(L^{\mu-1}x - 1^{\mu-1})^2 - (h^\nu - H^{\nu-1})(L^{\mu-1}x - 1^{\mu-1})$$
$$(1^\mu - L^\mu x) - h^{\nu-1}(1^\mu - L^\mu x)^2 = 0$$

oder

$$(H^\nu(L^{\mu-1})^2 + (h^\nu - H^{\nu-1})L^{\mu-1}L^\mu - h^{\nu-1}(L^\mu)^2)x^2$$
$$-(2H^\nu L^{\mu-1}1^{\mu-1} + (h^\nu + H^{\nu-1})(L^{\mu-1}1^\mu + 1^{\mu-1}L^\mu)$$
$$-(2h^{\nu-1}L^\mu 1^\mu)x + H^\nu(1^{\mu-1})^2 + (h^\nu - H^{\nu-1})1^{\mu-1}1^\mu$$
$$- h^{\nu-1}(1^\mu)^2 = 0$$

und

und diese Gleichung ist nothwendiger Weise ein Divisor der gegebenen Gleichung.

## Zweyte Anmerkung.

### Eine sehr einfache Methode, die Wurzeln der Gleichungen des zweyten Grades in continuirliche Brüche zu verwandeln.

32.

Es sey die allgemeine Gleichung des zweyten Grades

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

gegeben, wo $E'$, $\varepsilon$, und $E$, damit die Wurzeln reell seyn mögen, solche ganze Zahlen bedeuten sollen, daß $\varepsilon^2 + EE' > 0$ ist. Diese Gleichung giebt

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 + EE')}}{E'}$$

und in diesem Ausdrucke kann die Wurzelgröße entweder positiv oder negativ seyn. Es sey die gesuchte Wurzel positiv, und $\lambda'$ die ganze Zahl, die zunächst kleiner ist als der Werth von x. Setzt man bey diesen Umständen $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$, und bringt diesen Werth in die gegebene Gleichung, so bekommt man eine neue Gleichung, worin die unbekannte Größe $x'$ ist. Multiplicirt man aber diese neue Gleichung durch $x'^2$, verändert darauf die Zeichen, und läßt der Kürze wegen

$$\varepsilon' = \lambda'E' - \varepsilon$$
$$E'' = E + 2\varepsilon\lambda' - E'\lambda'^2$$

seyn: so bekommt man die Gleichung

$$E''x'^2 - 2\varepsilon'x' - E' = 0$$

und diese giebt

$$x' = \frac{\varepsilon' + \sqrt{(\varepsilon'^2 + E'E'')}}{E''}.$$

Man kann also auch hier wieder die ganze Zahl $\lambda''$ suchen, die zunächst kleiner ist als der Werth von $x'$, dann $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$ setzen, und auf ähnliche Art weiter handeln.

Substituirt man nun in dem Ausdrucke $\varepsilon'^2 + E'E''$ die Werthe von $\varepsilon'$ und $E''$ und läßt die Größen weg, die sich aufheben, so bekommt man $\varepsilon^2 + EE'$, und also denselben Ausdruck welchen man in der Bestimmung von $x$ hatte. Hieraus ist leicht abzunehmen, daß die Wurzelgröße in den Werthen von $x$, $x'$, $x''$, ꝛc. allenthalben dieselbe seyn wird.

## 33.

Setzt man daher der Kürze wegen

$$B = \varepsilon^2 + EE'$$

und außerdem, wenn das Zeichen $<$ die Bedeutung hat, daß man die zunächst kleinere ganze Zahl nehmen solle,

$$\lambda' < \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'}, \quad \varepsilon' = \lambda'E' - \varepsilon$$

$$E'' = E + 2\varepsilon\lambda' - E'\lambda'^2, \quad \lambda'' < \frac{\varepsilon' + \sqrt{B}}{E''}, \quad \varepsilon'' = \lambda''E'' - \varepsilon'$$

$$E''' = E' - 2\varepsilon'\lambda'' - E''\lambda''^2, \quad \lambda''' < \frac{\varepsilon'' + \sqrt{B}}{E'''}, \quad \varepsilon''' = \lambda'''E''' - \varepsilon''$$

$$E^{iv} = E'' - 2\varepsilon''\lambda''' - E'''\lambda'''^2, \quad \lambda^{iv} < \frac{\varepsilon''' + \sqrt{B}}{E^{iv}}, \quad \varepsilon^{iv} = \lambda^{iv}E^{iv} - \varepsilon'''$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

so bekommt man

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'} = \lambda' + \frac{1}{x'}$$

$$x' = \frac{\varepsilon' + \sqrt{B}}{E''} = \lambda'' + \frac{1}{x''}$$

$x'' =$

$$x'' = \frac{\varepsilon'' + \sqrt{B}}{E'''} = \lambda''' + \frac{1}{x'''}$$

ꝛc.

folglich

$$x = \lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \cfrac{1}{\lambda''' + \text{ꝛc.}}}$$

Was die Wurzelgröße $\sqrt{B}$ betrift, so muß man ihr jedesmal das Zeichen geben, welches man bey derselben in dem Werthe der gesuchten Wurzel $x$ angenommen hatte.

Da man $\varepsilon'^2 + E'E'' = \varepsilon^2 + EE' = B$ gefunden hat, so ist $E'' = \frac{B - \varepsilon'^2}{E'}$, und auf ähnliche Art auch

$$E''' = \frac{B - \varepsilon''^2}{E''},\ E^{IV} = \frac{B - \varepsilon'''^2}{E'''}$$

ꝛc.

Findet man es daher bequemer, so kann man auch diese Formeln statt der oben gegebenen gebrauchen, um die Werthe von $E'$, $E''$, ꝛc. zu bekommen.

34.

Nun behaupte ich, daß der continuirliche Bruch, welcher den Werth von $x$ ausdruckt, allemal und nothwendiger Weise ein periodischer Bruch seyn wird.

Um diesen Lehrsatz zu beweisen, wollen wir zuvörderst allgemein darthun, daß man bey einer jeden Gleichung, wenn man sie auf die §. 3. der vorhergehenden Abhandlung Nr. 18 beschriebene Art verändert, unter den veränderten Gleichungen solche antreffen wird, deren erstes und letztes Glied entgegengesetzte Zeichen haben. Wir haben nemlich in der gedachten

dachten Abhandlung Nr. 19. gesehen, daß man allemal auf eine veränderte Gleichung kommt, die nicht mehr als eine Wurzel hat, welche größer ist als die Einheit, und daß nach ihr allen übrigen veränderten Gleichungen ebenfalls nicht mehr als eine Wurzel zukommt, die größer als die Einheit ist. Es sey also

$$au^m + bu^{m-1} + cu^{m-2} + \text{ꝛc.} + k = 0$$

eine von diesen veränderten Gleichungen, die nicht mehr als eine Wurzel haben, welche größer ist als die Einheit, und dabey sey s der Werth von u in ganzen Zahlen. Setzt man, um die folgende veränderte Gleichung zu finden, $u = s + \frac{1}{w}$ und bringt diesen Werth in die angeführte Gleichung, so ist das erste Glied der dadurch erhaltenen Gleichung

$$(as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \text{ꝛc.} + k)w^m$$

und das letzte a. Da nun der wahre Werth von u in der Gleichung

$$au^m + bu^{m-1} + cu^{m-2} + \text{ꝛc.} + k = 0$$

zwischen $u = s$ und $u = \infty$ fällt, und zwischen diesen beyden Werthen kein anderer Werth von u statt findet: so muß man, wenn man dieselben in die Gleichung für u bringt, nothwendiger Weise Resultate mit entgegengesetzten Zeichen bekommen. Denn es ist leicht einzusehen, daß in diesem Falle nur einer von den Faktoren dieser Gleichung bey dem Uebergange von dem einen Werthe von u zu dem andern das Zeichen verändern kann (Nr. 5. der vorhergehenden Abhandlung). Nun giebt die Substitution $u = \infty$ das Resultat $au^m$ (denn alle übrige Glieder verschwinden gegen dieses) und dieses Resultat hat dasselbe Zeichen welches a hat; folglich muß $u = s$ ein Resultat geben, dessen Zeichen dem Zeichen von a entgegensteht. Da also dieses Resultat $as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \text{ꝛc.} + k$ gleich, und diese Größe auch der

Coeffi-

Coefficient des ersten Gliedes der veränderten Gleichung für w ist, welche a zum letzten Gliede hat: so folgt, daß diese veränderte Gleichung in ihren beyden äußersten Gliedern nothwendiger Weise entgegengesetzte Zeichen haben muß.

Auf eben die Art aber läßt sich beweisen, daß dieser Umstand noch vielmehr bey den folgenden veränderten Gleichungen statt finden muß.

35.

Dieses vorausgesetzt, so giebt die Gleichung

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

folgende veränderte Gleichungen (Nr. 32.)

$$E''x'^2 - 2\varepsilon'x' - E' = 0$$
$$E'''x''^2 - 2\varepsilon''x'' - E'' = 0$$

rc.

und nach dem, was so eben (Nr. 34.) gesagt worden ist, muß man nothwendiger Weise zu Gleichungen gelangen, wie

$$E^{\gamma+1}(x^\gamma)^2 - 2\varepsilon^\gamma x^\gamma - E^\gamma = 0$$
$$E^{\gamma+2}(x^{\gamma+1})^2 - 2\varepsilon^{\gamma+1}x^{\gamma+1} - E^{\gamma+1} = 0$$

rc.

wo das erste und letzte Glied dieselben Zeichen haben, so daß daher die Größen $E^\gamma$, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$, rc. insgesammt von einerley Art sind. Nun ist (Nr. 33)

$$B = (\varepsilon^\gamma)^2 + E^\gamma E^{\gamma+1} = (\varepsilon^{\gamma+1})^2 + E^{\gamma+1}E^{\gamma+2} = \text{rc.}$$

und folglich, da $E^\gamma$, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$, rc. von einerley Art sind, die Produkte $E^\gamma E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+1}E^{\gamma+2}$, rc. nothwendiger Weise positiv. Hieraus folgt

1) daß $(\varepsilon^\gamma)^2 < B$, $(\varepsilon^{\gamma+1})^2 < B$, rc., d. h. wenn man von dem Zeichen abstrahirt, $\varepsilon^\gamma < \sqrt{B}$, $\varepsilon^{\gamma+1} < \sqrt{B}$ u. s. w. ohne Ende ist.

 2) daß

2) daß auch, da $E$, $E'$, $E''$, ꝛc. ganze Zahlen sind, $E^{\gamma} < B$, $E^{\gamma+1} < B$, $E^{\gamma+2} < B$ ꝛc. seyn wird. Da also $B$ gegeben ist, so ist die Menge der ganzen Zahlen, die kleiner als $B$ und $\sqrt{B}$ sind, begrenzt, und es können daher die Zahlen $E^{\gamma}$, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$, ꝛc. $\varepsilon^{\gamma}$, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$, ꝛc. nur eine bestimmte Menge verschiedener Werthe haben, so daß in der einen dieser Reihen sowohl als in der andern, wenn man sie ohne Ende fortsetzt, dieselben Glieder unzähligemal wiederkehren müssen. Aus eben dem Grunde muß auch dieselbe Combination der zugehörigen Glieder in beyden Reihen unzähligemal wiederkehren, und es wird also z. B. nothwendiger Weise

$$E^{\gamma+\delta+\nu} = E^{\gamma+\delta}, \text{ und } \varepsilon^{\gamma+\delta+\nu} = \varepsilon^{\gamma+\delta}$$

oder, wenn man $\gamma + \delta = \mu$ setzt,

$$E^{\mu+\nu} = E^{\mu} \text{ und } \varepsilon^{\mu+\nu} = \varepsilon^{\mu}.$$

Da also $B = (\varepsilon^{\mu})^2 + E^{\mu}E^{\mu+1} = (\varepsilon^{\mu+\nu})^2 + E^{\mu+\nu}E^{\mu+\nu+1}$ ist, so hat man auch $E^{\mu+\nu+1} = E^{\mu+1}$. Nun ist aber

$$x^{\mu} = \frac{\varepsilon^{\mu} + \sqrt{B}}{E^{\mu+1}} \text{ und } x^{\mu+\nu} = \frac{\varepsilon^{\mu+\nu} + \sqrt{B}}{E^{\mu+\nu+1}}$$

folglich ist auch $x^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ und also der continuirliche Bruch nothwendiger Weise periodisch.

## 36.

Man siehet aus den Formeln der 33sten Nummer, daß, wenn

$$E^{\mu+\nu} = E^{\mu} \text{ und } \varepsilon^{\mu+\nu} = \varepsilon^{\mu}$$

ist, auch

$$E^{\mu+\nu+1} = E^{\mu+1},\ \gamma^{\mu+\nu+1} = \gamma^{\mu+1},\ \varepsilon^{\mu+\nu+1} = \varepsilon^{\mu+1}$$

und

und so ferner ist, so daß überhaupt die Glieder dieser drey Reihen

$$E, E', E'', \text{ꝛc.} \quad \epsilon, \epsilon', \epsilon'', \text{ꝛc.} \quad \gamma', \gamma'', \text{ꝛc.}$$

welche zum Exponenten $\gamma + n\nu + \pi$ haben, dieselben sind, als die vorhergehenden, deren Exponenten $\mu + \pi$ sind, wenn $n$ irgend eine ganze positive Zahl bedeutet.

Also wird eine jede dieser drey Reihen von $E^{\mu}$, $\epsilon^{\mu}$, $\gamma^{\mu+1}$ an periodisch, und jede Periode enthält $n$ Glieder, nach welcher dieselben Glieder ohne Ende in derselben Ordnung wiederkehren.

37.

Wir haben bewiesen, daß man bey der Fortsetzung der Reihe der Zahlen $E$, $E'$, $E''$, ꝛc. nothwendiger Weise auf einander folgende Glieder mit einerley Zeichen bekommen muß, und daß darauf die Reihe allemal periodisch wird. Ist man nun in dieser Reihe zu zwey auf einander folgenden Gliedern $E^{\gamma}$, $E^{\gamma+1}$ mit einerley Zeichen gekommen, so behaupte ich, daß das eine von diesen beyden Gliedern schon eins von den periodischen Gliedern seyn und also in jeder Periode wieder erscheinen wird.

Da $E^{\gamma}$ und $E^{\gamma+1}$ dasselbe Zeichen haben, so ist klar, daß die veränderte Gleichung

$$E^{\gamma+1}(x^{\gamma})^2 - 2\epsilon^{\gamma}x^{\gamma} - E^{\gamma} = 0$$

nothwendiger Weise eine positive und negative Wurzel hat, und daß sie also nicht mehr als eine Wurzel haben kann, die größer als eins ist. Folglich haben die folgenden veränderten Gleichungen in ihren äußersten Gliedern nothwendiger Weise entgegengesetzte Zeichen (Nr. 34.) und also die Zahlen

len $E^{\nu}$, $E^{\nu+1}$, $E^{\nu+2}$, ꝛc. dieselben Zeichen, so daß jede von ihnen kleiner als B, und jede von den Zahlen $\varepsilon^{\nu}$, $\varepsilon^{\nu+1}$, $\varepsilon^{\nu+2}$, ꝛc. kleiner als $\sqrt{B}$ ist (Nr. 35.)

38.

Da nun $B = (\varepsilon^{\nu})^2 + E^{\nu}E^{\nu+1}$ ist, so sind die beyden Zahlen $E^{\nu}$ und $E^{\nu+1}$ entweder beyde kleiner als $\sqrt{B}$. oder wenn die eine von ihnen größer ist, so muß doch die andere kleiner seyn, und es ist daher zum wenigsten allemal eine von ihnen kleiner als $\sqrt{B}$.

Es sey $E^{\nu} < \sqrt{B}$, so läßt sich beweisen, daß die Zahlen $E^{\nu}$, $E^{\nu+1}$, $E^{\nu+2}$, ꝛc. $\varepsilon^{\nu}$, $\varepsilon^{\nu+1}$, $\varepsilon^{\nu+2}$, ꝛc. insgesammt eben dasselbe Zeichen haben müssen, welches die Wurzelgröße $\sqrt{B}$ hat. Denn da die Wurzeln der veränderten Gleichungen $x'$, $x''$, $x'''$, ꝛc. wegen der Natur des continuirlichen Bruchs insgesammt größer seyn müssen als die Einheit, so ist auch

$$x^{\nu} > 1,\quad x^{\nu+1} > 1, \text{ ꝛc.}$$

folglich

$$\frac{\varepsilon^{\nu} + \sqrt{B}}{E^{\nu+1}} > 1,\quad \frac{\varepsilon^{\nu+1} + \sqrt{B}}{E^{\nu+2}} > 1 \text{ ꝛc.}$$

und da

$$B = (\varepsilon^{\nu})^2 + E^{\nu}E^{\nu+1} = (\varepsilon^{\nu+1})^2 + E^{\nu+1}E^{\nu+2} = \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$\frac{\varepsilon^{\nu} + \sqrt{B}}{E^{\nu+1}} = \frac{E^{\nu}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu}},\quad \frac{\varepsilon^{\nu+1} + \sqrt{B}}{E^{\nu+2}} = \frac{E^{\nu+1}}{\sqrt{B} - \varepsilon^{\nu+1}} \text{ ꝛc.}$$

also

also auch

$$\frac{E^\gamma}{\sqrt{B}-\varepsilon^\gamma} > 1, \quad \frac{E^{\gamma+1}}{\sqrt{B}-\varepsilon^{\gamma+1}} > 1 \text{ ꝛc.}$$

Da nun $\varepsilon^\gamma$, $\varepsilon^{\gamma+1}$ ꝛc. kleiner sind als $\sqrt{B}$, so müssen, was auch $\varepsilon^\gamma$, $\varepsilon^{\gamma+1}$ ꝛc. für ein Zeichen haben, die Nenner $\sqrt{B}-\varepsilon^\gamma$, $\sqrt{B}-\varepsilon^{\gamma+1}$ ꝛc. nothwendig eben das Zeichen haben als die $\sqrt{B}$, und eben dieses Zeichen muß also auch den Zählern $E^\gamma$, $E^{\gamma+1}$ ꝛc. zukommen.

Der Kürze wegen wollen wir $\sqrt{B}$ positiv annehmen, so daß daher auch $E^\gamma$, $E^{\gamma+1}$ ꝛc. insgesammt positiv seyn müssen; ich behaupte, daß $\varepsilon^\gamma$, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$ ꝛc. es ebenfalls seyn werden. Denn wäre $\varepsilon^\gamma = -\nu$ (wo $\nu$ eine positive Zahl bedeutet) so müßte, da $E^\gamma < \sqrt{B}$ ist, noch mehr $E^\gamma < \sqrt{B}+\nu$, und also $\frac{E^\gamma}{\sqrt{B}-\varepsilon^\gamma} = \frac{E^\gamma}{\sqrt{B}+\nu} < 1$ seyn, welches nicht statt finden kann, da diese Größe $> 1$ seyn muß. Es kann daher auch $\varepsilon^\gamma$ nicht anders als positiv seyn. Ferner sey $\varepsilon^{\gamma+1} = -\nu'$. Da nach Nr. 33. $\varepsilon^{\gamma+1} = \lambda^{\gamma+1}E^{\gamma+1} - \varepsilon^\gamma$ ist, so hat man $\lambda^{\gamma+1}E^{\gamma+1} = \varepsilon^\gamma - \nu'$; folglich (da $\varepsilon^\gamma$ und $\nu'$ positive Zahlen und kleiner als $\sqrt{B}$ sind, und $\lambda^{\gamma+1}$ ebenfalls eine positive Zahl ist) $E^{\gamma+1}$ kleiner als $\sqrt{B}$, und in diesem Falle beweiset man eben so als vorhin, daß $\varepsilon^{\gamma+1}$ positiv seyn muß. Auf ähnliche Art kann man weiter fortgehen.

Wenn

Wenn $\sqrt{B}$ negativ genommen wäre, so bewiese man auf eben die Art, daß $\varepsilon^{\gamma}$, $\varepsilon^{\gamma+1}$ ꝛc. negativ seyn müßten; ja ohne von neuem zu rechnen darf man nur bemerken, daß die Formeln der vorhergehenden Nr. dieselben bleiben, wenn man darin die Zeichen aller dieser Größen $E$, $E'$, $E''$, ꝛc. $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, ꝛc. und der Wurzelgröße $\sqrt{B}$ verändert, so daß man die Wurzelgröße allemal als positiv betrachten kann, wenn man die Größen $E$, $E'$, $E''$, ꝛc. $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ ꝛc. mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt.

39.

Dieses vorausgesetzt, behaupte ich, daß alle vorhergehenden Glieder der Reihen $E^{\gamma}$, $E^{\gamma+1}$, $E^{\gamma+2}$, ꝛc. $\varepsilon^{\gamma}$, $\varepsilon^{\gamma+1}$, $\varepsilon^{\gamma+2}$ ꝛc. gegeben sind, sobald man zwey zusammengehörige Glieder dieser Reihen kennt.

Es sey z. B. $E^{\gamma+3}$ und $\varepsilon^{\gamma+3}$ gegeben, denn der Beweis bleibt allgemein, die gegebenen Glieder mögen seyn, welche sie wollen, so lassen sich nach den Formeln der 33sten Nummer und den Bedingungen der vorigen die vor diesen Gliedern vorhergehende finden. Man hat nemlich sogleich

$$\varepsilon^{\gamma+3} = \lambda^{\gamma+3}E^{\gamma+3} - \varepsilon^{\gamma+2}, \text{ also}$$
$$\varepsilon^{\gamma+2} = \lambda^{\gamma+3}E^{\gamma+3} - \varepsilon^{\gamma+3}.$$

Nun muß $\varepsilon^{\gamma+2} < \sqrt{B}$ seyn, und es ist demnach auch

$$\lambda^{\gamma+3} < \frac{\varepsilon^{\gamma+3} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+3}}$$

Eben so ist

$$\varepsilon^{\gamma+1} = \lambda^{\gamma+2}E^{\gamma+2} - \varepsilon^{\gamma+2}$$

folglich, da $\varepsilon^{\gamma+1} < \sqrt{B}$ ist,

$\lambda^{\gamma+2}$

$$\lambda^{\nu+2} < \frac{s^{\nu+2} + \sqrt{B}}{E^{\nu+2}}$$

und da wegen der Natur des continuirlichen Bruchs $\lambda^{\nu+2}$ eine ganze positive Zahl seyn muß, so muß auch $s^{\nu+2} + \sqrt{B} > E^{\nu+2}$ seyn. Nun hat man auch

$$E^{\nu+2} E^{\nu+3} = B - (s^{\nu+2})^2 = (\sqrt{B} + s^{\nu+2})(\sqrt{B} - s^{\nu+2})$$

folglich $\sqrt{B} - s^{\nu+2} < E^{\nu+3}$, oder indem man für $s^{\nu+2}$ seinen vorigen Werth $\lambda^{\nu+3} E^{\nu+3} - s^{\nu+3}$ setzt

$$\sqrt{B} - \lambda^{\nu+3} E^{\nu+3} + s^{\nu+3} < E^{\nu+3}$$

und daraus bekömmt man

$$\lambda^{\nu+3} > \frac{s^{\nu+3} + \sqrt{B}}{E^{\nu+3}} - 1$$

Da also $\lambda^{\nu+3}$ eine ganze Zahl seyn muß, so ist klar, daß sie bloß der ganzen Zahl gleich seyn kann, die zunächst kleiner ist als $\frac{s^{\nu+3} + \sqrt{B}}{E^{\nu+3}}$; also ist $\lambda^{\nu+3}$ gegeben: und da $E^{\nu+2} = \frac{B - (s^{\nu+2})^2}{E^{\nu+3}}$ ist, so erhellet, daß man auch $E^{\nu+2}$ habe.

Nun ist $$s^{\nu} = \lambda^{\nu+1} E^{\nu+1} - s^{\nu+1}$$

und also, da $s^{\nu} < \sqrt{B}$ ist

$$\lambda^{\nu+1} < \frac{s^{\nu+1} + \sqrt{B}}{E^{\nu+1}}$$

Soll also $\lambda^{\nu+1}$ eine solche ganze Zahl seyn als verlangt wird, so muß

$$s^{\nu+1} + \sqrt{B} > E^{\nu+1}$$

und folglich, da $E^{\nu+1} E^{\nu+2} = B - (s^{\nu+1})^2$ ist,

$\sqrt{B} -$

$$\sqrt{B} - \varepsilon^{\gamma+1} < E^{\gamma+2}$$

oder, wenn man für $\varepsilon^{\gamma+1}$ seinen obigen Werth setzt

$$\sqrt{B} - \lambda^{\gamma+2} E^{\gamma+2} + \varepsilon^{\gamma+2} < E^{\gamma+2}$$

und folglich

$$\lambda^{\gamma+2} > \frac{\varepsilon^{\gamma+2} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+2}} - 1$$

seyn. Es kann demnach $\lambda^{\gamma+2}$ keine andere ganze Zahl seyn als diejenige, die zunächst kleiner ist als die gegebene Größe $\frac{\varepsilon^{\gamma+2} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+2}}$, und es ist daher diese Zahl gegeben und mit ihr auch $\varepsilon^{\gamma+1}$ und $\varepsilon^{\gamma+1}$.

Da endlich $E^{\gamma} < \sqrt{B}$ ist, so ist auch um so mehr $\varepsilon^{\gamma} + \sqrt{B} > E^{\gamma}$, und also, da $E^{\gamma} E^{\gamma+1} = B - (\varepsilon^{\gamma})^2$ ist,

$$\sqrt{B} - \varepsilon^{\gamma} < E^{\gamma}$$

oder, wenn man für $\varepsilon^{\gamma}$ seinen vorhin gefundenen Werth setzt,

$$\sqrt{B} - \lambda^{\gamma+1} E^{\gamma+1} + \varepsilon^{\gamma+1} < E^{\gamma}$$

und also

$$\lambda^{\gamma+1} > \frac{\varepsilon^{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+1}} - 1$$

Es kann demnach $\lambda^{\gamma+1}$ keine andere ganze Zahl seyn, als diejenige, die zunächst kleiner ist als die gegebene Größe $\frac{\varepsilon^{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E^{\gamma+1}}$, und es ist folglich die Zahl gegeben und also auch $\varepsilon^{\gamma}$ und $E^{\gamma}$.

40. Wir

40.

Wir haben gesehen, (Nr. 35.) daß bey der Fortsetzung der Reihen $E^{\gamma}$, $E^{\gamma+1}$ rc. $\varepsilon^{\gamma}$, $\varepsilon^{\gamma+1}$ rc. nach einer bestimmten Anzahl von Gliedern nothwendig zwey zusammengehörige Glieder, wie $E^{\gamma+\delta}$, $\varepsilon^{\gamma+\delta}$, wiederkehren, so daß z. B.

$$E^{\gamma+\nu+\delta} = E^{\gamma+\delta}; \quad \varepsilon^{\gamma+\nu+\delta} = \varepsilon^{\gamma+\delta}$$

wird. Nach dem, was so eben bewiesen worden ist, hat man daher auch rückwärts

$$E^{\gamma+\nu+\delta-1} = E^{\gamma+\delta-1}; \quad \varepsilon^{\gamma+\nu+\delta-1} = \varepsilon^{\gamma+\delta-1}$$

$$E^{\gamma+\nu+\delta-2} = E^{\gamma+\delta-2}; \quad \varepsilon^{\gamma+\nu+\delta-2} = \varepsilon^{\gamma+\delta-2}$$

rc. rc.

$$E^{\gamma+\nu} = E^{\gamma}, \qquad \varepsilon^{\gamma+\nu} = \varepsilon^{\gamma}$$

41.

Wenn man also in der Reihe der Zahlen $E$, $E'$, $E''$, rc. zwey auf einander folgende Zahlen mit demselben Zeichen findet, so ist allemal diejenige von ihnen, welche kleiner als $\sqrt{B}$ ist, nothwendig periodisch.

Wenn also in der Gleichung

$$E'x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

die Coefficienten $E$ und $E'$ einerley Zeichen hätten, so würde die Reihe vom ersten oder vom zweyten Gliede an periodisch seyn.

42.

Wenn $\varepsilon = 0$, also $x = \sqrt{\frac{E}{E'}}$ ist, so wird $B = EE'$, und es ist also von den beyden Zahlen $E$ und $E'$ die kleinere nothwendig kleiner und die größere nothwendig größer als $\sqrt{B}$.

Ist daher die Zahl $\frac{E}{E''}$, wovon die Quadratwurzel gesucht werden soll, kleiner als die Einheit, so ist die Reihe vom ersten Gliede an, ist aber $\frac{E}{E'}$ größer als die Einheit, so ist die Reihe vom zweyten Gliede an periodisch.

43.

Man hat schon längst bemerkt, daß sich jeder periodische continuirliche Bruch auf eine Gleichung vom zweyten Grade zurückführen läßt, aber Niemand hat meines Wissens den umgekehrten Satz bewiesen, nemlich daß jede Gleichung vom zweyten Grade allemal nothwendiger Weise einen periodischen continuirlichen Bruch giebt. Zwar hat Herr **Euler** im 9ten Bande der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften bemerkt, daß die Quadratwurzel einer ganzen Zahl sich allemal auf einen periodischen continuirlichen Bruch zurückbringen lasse; allein er hat diesen Satz, der nur einen speciellen Fall enthält, nicht bewiesen, und es kann derselbe auch, wie mir scheint, nicht anders als vermittelst der oben festgesetzten Principien bewiesen werden.

44.

Wir haben oben allgemeine Formeln zur leichten Erfindung der Glieder der Brüche mitgetheilt, die sich der Wurzel einer gegebenen Gleichung immer mehr nähern, vorausgesetzt, daß man weiß, der continuirliche Bruch, welcher diese Wurzel ausdruckt, sey ein periodischer Bruch.

Ist nun die Gleichung eine Gleichung vom zweyten Grade, und bedient man sich dabey der Methode der 33sten

Nummer,

Nummer, so kann man die Rechnungen der 24sten und der folgenden Nummern um vieles vereinfachen.

Denn da man

$$x^{\mu} = \frac{\sqrt{B} + s^{\mu}}{E^{\mu+1}} \text{ und } x^{\mu+\pi} = \frac{\sqrt{B} + s^{\mu+\pi}}{E^{\mu+\pi+1}}$$

hat, wo $s^{\mu}$, $s^{\mu+\pi}$, $E^{\mu+1}$, $E^{\mu+\pi+1}$ bekannt sind ($\pi$ ist kleiner als $\nu$): so braucht man nur diese Werthe in die beyden Gleichungen Nr. 26. zu bringen, und der Kürze wegen

$$\frac{l^{\mu} s^{\mu}}{E^{\mu+1}} + l^{\mu-1} = f^{\mu}$$

$$\frac{L^{\mu} s^{\mu}}{E^{\mu+1}} + L^{\mu-1} = F^{\mu}$$

$$\frac{H^{\nu} s^{\mu}}{E^{\mu+1}} + H^{\nu-1} = K^{\nu}$$

$$H^{\pi} s^{\mu+\pi} + H^{\pi-1} E^{\mu+\pi+1} = G^{\pi}$$

setzen. Thut man dieses, so bekommt man

$$\left(f^{\mu} + \frac{l^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{B})\left(K^{\nu} + \frac{H^{\nu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{n}$$

$$=$$

$$l^{\rho} s^{\mu+\pi} + l^{\rho-1} E^{\mu+\pi+1} + l^{\rho}\sqrt{B}$$

$$\left(F^{\mu} + \frac{L^{\mu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^{\pi} + H^{\pi}\sqrt{B})\left(K^{\nu} + \frac{H^{\nu}\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^{n}$$

$$=$$

$$L^{\rho} s^{\mu+\pi} + L^{\rho-1} E^{\mu+\pi+1} + L^{\rho}\sqrt{B}$$

und wegen des doppelten Werths der Wurzelgröße $\sqrt{B}$ findet man hieraus sogleich

$$l^\rho =$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(f^\mu + \dfrac{l^\mu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^\pi + H^\pi\sqrt{B})\left(K^\nu + \dfrac{H^\nu\sqrt{B}}{E^{\mu-1}}\right)^n \\ -\left(f^\mu - \dfrac{l^\mu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^\pi - H^\pi\sqrt{B})\left(K^\nu - \dfrac{H^\nu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^n \end{array}\right\} : 2\sqrt{B}$$

$$L^\rho =$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(F^\mu + \dfrac{L^\mu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^\pi + H^\pi\sqrt{B})\left(K^\nu + \dfrac{H^\nu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^n \\ -\left(F^\mu - \dfrac{L^\mu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)(G^\pi - H^\pi\sqrt{B})\left(K^\nu - \dfrac{H^\nu\sqrt{B}}{E^{\mu+1}}\right)^n \end{array}\right\} : 2\sqrt{B}$$

und $\rho$ ist wie oben $= \mu + n\nu + \pi$.

## 45.

Der Werth von $L^\rho$ läßt sich auch vermittelst $l^\rho$ und $l^{\rho-1}$ ohne neue Rechnung bestimmen. Denn da

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E'} = \frac{E}{\sqrt{B} - \varepsilon}, \text{ und eben so}$$

$$x^\rho = \frac{E^\rho}{\sqrt{B} - \varepsilon^\rho}$$

ist, so hat man aus der Gleichung (G) der 31sten Nummer

$$\frac{E}{\sqrt{B} - \varepsilon} = \frac{l^\rho E^\rho + l^{\rho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon^\rho)}{L^\rho E^\rho + L^{\rho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon^\rho)}$$

oder

$$E(L^\rho E^\rho + L^{\rho-1}(\sqrt{B} - \varepsilon^\rho)) = l^\rho E^\rho(\sqrt{B} - \varepsilon) +$$
$$l^{\rho-1}(B + \varepsilon\varepsilon^\rho - (\varepsilon^\rho + \varepsilon)\sqrt{B})$$

Vergleicht man also die rationalen Theile und dann die irrationalen Theile unter einander, so bekommt man

$L^{\rho-1}$

$$L^{\rho-1} = \frac{l^\rho E^\rho - l^{\rho-1}(\varepsilon^\rho + \varepsilon)}{E}, \text{ und}$$

$$L^\rho E^\rho - L^{\rho-1}\varepsilon^\rho = \frac{-l^\rho E^\rho \varepsilon + l^{\rho-1}(B + \varepsilon\varepsilon^\rho)}{E}$$

und da $B - (\varepsilon^\rho)^2 = E^\rho E^{\rho+1}$ ist, so hat man

$$L^\rho = \frac{l^\rho(\varepsilon^\rho - \varepsilon) + l^{\rho-1}E^{\rho+1}}{E}$$

Nun ist $\rho = \mu + n\nu + \pi$, und also $\varepsilon^\rho = \varepsilon^{\mu+\pi} E^{\rho+1} = E^{\mu+\pi+1}$; so daß $\varepsilon^\rho$ und $E^{\rho+1}$ für jede Bedeutung von $\nu$ bekannt sind.

## 46.

Um die Anwendung der vorhergehenden Formeln an einem Beyspiele zu zeigen, wollen wir annehmen, daß die Quadratwurzel aus $\frac{11}{3}$ durch einen continuirlichen Bruch gesucht werden soll.

Setzt man $x = \sqrt{\frac{11}{3}}$, so hat man die Gleichung $3x^2 - 11 = 0$; also (Nr. 32) $E = 11$, $E' = 3$, $\varepsilon = 0$. Man nehme demnach $B = 33$, und rechne (Nr. 33.) auf folgende Art.

$$E = 11 \qquad\qquad \varepsilon = 0$$

$$E' = \frac{33 - 0}{11} = 3, \quad \lambda < \frac{\sqrt{33}+0}{3} = 1, \quad \varepsilon' = 1.3 - 0 = 3$$

$$E'' = \frac{33 - 9}{3} = 8, \quad \lambda'' < \frac{\sqrt{33}+3}{8} = 1, \quad \varepsilon'' = 1.8 - 3 = 5$$

$$E''' = \frac{33 - 25}{8} = 1, \quad \lambda''' < \frac{\sqrt{33}+5}{1} = 10, \quad \varepsilon''' = 10.1 - 5 = 5$$

$$E'''' = \frac{33-25}{1} = 8,\ \lambda'''' < \frac{\sqrt{33}+5}{8} = 1,\ \varepsilon'''' = 1.8-5 = 3$$

$$E^{v} = \frac{33-9}{8} = 3,\ \lambda^{v} < \frac{\sqrt{33}+3}{3} = 2,\ \varepsilon^{v} = 2.3-3 = 3$$

Man bleibt hier stehen, weil man sieht, daß $E^{v} = E'$ und $\varepsilon^{v} = \varepsilon'$ ist, und man hat also in diesem Falle $\mu = 1$ und $\nu = 4$; folglich

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \text{etc.}}}}}}}$$

47.

Dies ist also der continuirliche Bruch, welcher den Werth von $\sqrt{\frac{11}{3}}$ ausdruckt. Will man aber die Brüche finden, welche sich diesem Werthe immer mehr nähern, so nehme man in den Formeln der 44sten Nummer $\mu = 1$, $\nu = 4$, und $\pi$ nach und nach $= 0, 1, 2, 3$, weil $\pi < 4$ seyn muß.

Man hat also $l^{\mu} = l' =$ (Nr. 22. Form. (A)) $\lambda' = 1$, $l^{\mu-1} = l = 1$; $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon' = 3$, $E^{\mu+1} = E'' = 8$, folglich $f^{\mu} =$ (Nr. 44.) $\frac{1 \cdot 3}{8} + 1 = \frac{11}{8}$. Auf ähnliche Art findet man $L^{\mu} = 1$ und $F^{\mu} = \frac{3}{8}$. Nun berechne man die Werthe von $H$, $H'$ etc. bis zu $H^{\nu} = H''''$ nach den Formeln (C) der 25sten Nummer, wodurch man bekommt

$H = 0$

$$
\begin{aligned}
H &= 0 \\
H' &= 1 \\
H'' &= \lambda''' H' = 10 \\
H''' &= \lambda'''' H'' + H' = 11 \\
H'''' &= \lambda^{v} H''' + H'' = 32
\end{aligned}
$$

Es ist demnach $H^{\nu} = 32$, $H^{\nu - 1} = 11$, und daher $K^{\nu} = \frac{32 \cdot 3}{8} + 11 = 23$. Nun sey

1) $\pi = 0$, so hat man $H^{\pi} = 0$, und $H^{\pi - 1} = 1$ (Nr. 25. (C)); also $G^{\pi} = E^{\mu + 1} = 8$. Ferner sey

2) $\pi = 1$, so hat man $H^{\pi} = 1$, $H^{\pi - 1} = 0$; also $G^{\pi} = \varepsilon^{\mu + 1} = \varepsilon'' = 5$. Es sey

3) $\pi = 2$, so hat man $H^{\pi} = 10$, $H^{\pi - 1} = 1$; also $G^{\pi} = 10 \varepsilon^{\mu + 2} + 1 . E^{\mu + 3} = 10 \varepsilon''' + E'''' = 58$. Endlich sey

4) $\pi = 3$, so hat man $H^{\pi} = 11$, $H^{\pi - 1} = 10$; also $G^{\pi} = 11 \varepsilon'''' + 10 E^{v} = 63$.

Bringt man diese Werthe in die Ausdrücke für $l^{\rho}$ und $L^{\rho}$ (Nr. 44.) und multiplicirt die beyden Faktoren

$$f^{\mu} \pm \frac{l^{\mu} \sqrt{B}}{E^{\mu + 1}}, \quad G^{\pi} \pm H^{\pi} \sqrt{B}$$

so wie auch

$$F^{\mu} \pm \frac{L^{\mu} \sqrt{B}}{E^{\mu + 1}}, \quad G^{\pi} \pm H^{\pi} \sqrt{B}$$

mit einander, wodurch man folgende Faktoren bekömmt

$$f^{\mu} G^{\pi} + \frac{l^{\mu} H^{\pi} B}{E^{\mu + 1}} \pm \left(f^{\mu} H^{\pi} + \frac{l^{\mu} G^{\pi}}{E^{\mu + 1}}\right) \sqrt{B}$$

$$F^{\mu}G^{\pi} + \frac{L^{\mu}H^{\pi}B}{E^{\mu+1}} \pm (f^{\mu}H^{\pi} + \frac{L^{\mu}G^{\pi}}{E^{\mu+1}})\sqrt{B}$$

so findet man folgende Formeln:

$$l^{4n+1} = \left.\begin{array}{l}(11 + \sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n \\ -(11 - \sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$L^{4n+1} = \left.\begin{array}{l}(3 + \sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n \\ -(3 - \sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$l^{4n+2} = \left.\begin{array}{l}(11 + 2\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n \\ -(11 - 2\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$L^{4n+2} = \left.\begin{array}{l}(6 + \sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n \\ -(6 - \sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$l^{4n+3} = \left.\begin{array}{l}(121 + 21\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n \\ -(121 - 21\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$L^{4n+3} = \left.\begin{array}{l}(63 + 11\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n \\ -(63 - 11\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$l^{4n+4} = \left.\begin{array}{l}(132 + 23\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n \\ -(132 - 23\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

$$L^{4n+4} = \left.\begin{array}{l}(69 + 12\sqrt{33})(23 + 4\sqrt{33})^n \\ -(69 - 12\sqrt{33})(23 - 4\sqrt{33})^n\end{array}\right\} : 2\sqrt{33}$$

Vermittelst dieser Formeln kann man den Werth jedes von folgenden Brüchen $\frac{l'}{L'}$, $\frac{l''}{L''}$, $\frac{l'''}{L'''}$ ꝛc. finden, welche sich der $\sqrt{\frac{11}{3}}$ immer mehr nähern.

Macht man nemlich zuerst $n = 0$, so bekommt man die vier ersten Glieder. Setzt man ferner $n = 1$, so findet man die vier folgenden Glieder, u. s. w. Man findet aber auf diese Art folgende Brüche

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{23}{11}, \frac{23}{12}, \frac{67}{35}, \frac{90}{47}, \frac{967}{505}, \frac{1057}{552} \text{ ꝛc.}$$

48. Wollte

48.

Wollte man z. B. das 50ste Glied dieser Reihe, d. i. den Bruch $\frac{l^{50}}{L^{50}}$ haben, so dürfte man nur 50 durch 4 dividiren, wodurch man 12 zum Quotienten und 2 zum Reste bekommen würde, und $n = 12$ annehmen. Entwickelte man die 12te Potestät von $23 \pm 4\sqrt{33}$, und setzte der Kürze wegen

$$\begin{aligned} M = {} & (23)^{12} + 66(33)(4)^2(23)^{10} + 495(33)^2(4)^4(23)^8 \\ & + 938(33)^3(4)^6(23)^6 + 495(33)^4(4)^8(24)^4 \\ & + 66(33)^5(4)^{10}(23)^2 + (33)^6(4)^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = {} & 12(4)(23)^{11} + 220(33)(4)^3(23)^9 + 729(33)^2(4)^5(23)^7 \\ & + 792(33)^3(4)^7(23)^5 + 220(33)^4(4)^9(23)^3 \\ & + 12(33)^6(4)^{11}(23) \end{aligned}$$

so bekäme man $(23 \pm 4\sqrt{33})^n = M \pm N\sqrt{33}$, und diese Werthe in die Ausdrücke für $l^{4n+2}$ und $L^{4n+2}$ gesetzt, geben für den gesuchten Bruch

$$\frac{2M + 11N}{M + 6N}.$$

49.

Ich beschließe diese Anmerkung mit folgendem mir merkwürdig scheinenden Zusatze. Wenn die gegebene Gleichung commensurable Divisoren vom ersten Grade hat, so sind die continuirlichen Brüche, welche die Wurzeln dieser Divisoren geben, nothwendiger Weise begrenzte Brüche, und wenn die Gleichung commensurabe Divisoren vom zweyten Grade mit reellen Wurzeln hat, so sind die continuirlichen Brüche, welche diese Wurzeln ausdrucken, nothwendiger Weise periodische Brüche. Auf diese Art hat die Methode die Wurzeln der Gleichungen durch continuirliche Brüche auszudrucken, nicht bloß den Vorzug, daß sie der gesuchten Wurzel so nahe als möglich kommende Werthe giebt, sondern auch den, daß man durch sie alle commensurable Divisoren des ersten und zweyten Grades findet, welche die gegebene Gleichung enthalten kann. Es wäre zu wünschen, daß man ein Kennzeichen entdecken könnte, welches zur Auffindung der commensurablen Divisoren des dritten, des vierten Grades u. s. f. diente, wenn dergleichen Divisoren in der gegebenen Gleichung enthalten wären; es ist dies wenigstens ein Gegenstand, der verdient, von den Mathematikern untersucht zu werden.

## Dritte Anmerkung.

### Verallgemeinerung der Theorie der continuirlichen Brüche.

50.

Im 3ten §. der vorhergehenden Abhandlung haben wir vorausgesetzt, daß die Zahlen $p$, $q$, $r$, ꝛc. die Werthe der Wurzeln $x$, $y$, $z$, ꝛc. in ganzen Zahlen, aber zunächst kleiner wären als diese Wurzeln; es fällt aber in die Augen, daß man darunter durch die zunächst größern ganzen Zahlen verstehen könnte.

51.

Angenommen also, daß $p$ die ganze Zahl bedeutet, die zunächst größer ist als $x$, so daß $p > x$ und $p - 1 < x$ ist: so ist klar, daß man alsdann

$$x = p - \frac{1}{y}$$

setzen, d. h. $y$ negativ nehmen muß. Da nun $x < p$ und $> p - 1$ ist, so wird $\frac{1}{y} > 0$ und $< 1$, und folglich $y > 1$,

so

so wie in dem Falle (Nr. 18. der vorhergehenden Abhandlung) wo p zunächst kleiner als x war. Man kann also von neuem die Zahl q nehmen, die entweder zunächst kleiner oder zunächst größer ist als y. Im ersten Fall setzt man $y = q + \frac{1}{z}$, und im andern $y = q - \frac{1}{z}$, u. s. f.

Auf diese Art hätte man

$$x = p \pm \frac{1}{y},\ y = q \pm \frac{1}{z},\ z = r \pm \frac{1}{u} \text{ etc.}$$

und erhielte so den continuirlichen Bruch

$$x = p \pm \cfrac{1}{q \pm \cfrac{1}{r \pm \cfrac{1}{s \pm \text{etc.}}}}$$

wo bemerkt werden muß, daß jeder der Nenner q, r, etc. auf welchen das Zeichen — folgt, nothwendiger Weise entweder = oder > 2 seyn muß. Denn da $y > 1$ ist, so hat man, wenn man $y = q - \frac{1}{z}$ setzt, $q - \frac{1}{z} > 1$, also $q > 1 + \frac{1}{z}$, und folglich da q eine ganze Zahl seyn muß, nothwendiger Weise q entweder = oder > 2. Eben so kann man in den übrigen Fällen schließen.

52.

Es lassen sich aber die Brüche, bey welchen auf diese Art bald addirt bald subtrahirt wird, allemal sehr leicht in solche Brüche verwandeln, die durch die bloße Addition gebildet sind.

Zu diesem Ende wollen wir überhaupt

$$a - \frac{1}{t} = A + \frac{1}{T}$$

setzen,

setzen, wo a und A ganze Zahlen, und t und T solche Zahlen bedeuten die größer sind als eins. Dieses angenommen ist

$$a - A = \frac{1}{t} + \frac{1}{T},$$

und da $\frac{1}{t} < 1$ und $\frac{1}{T} < 1$ ist, so ist auch

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{T} < 2$$

und es kann daher $a - A$ nur $= 1$ seyn. Dieses giebt $A = a - 1$, und dadurch wird

$$a - \frac{1}{t} = a - 1 + \frac{1}{T}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{t}, \text{ und } T = \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$$

Auf diese Art hat man also allgemein

$$a - \frac{1}{t} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t-1}}$$

und vermittelst dieser Formel kann man aus jedem continuirlichen Bruche alle Zeichen — wegschaffen.

Es sey z. B. der Bruch

$$p - \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}$$

gegeben. Setzt man $a = p$, und $t = q + \frac{1}{r} + \text{ꝛc.}$, so bekommt man

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 1 + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}}$$

Wie

Wäre der Bruch

$$p - \cfrac{1}{q - \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}$$

gegeben, so bekäme man statt desselben sogleich

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 1 - \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}}$$

und darauf

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r - 1 + \text{ꝛc.}}}}}$$

Eben so verhält es sich bey andern ähnlichen Brüchen. Es verdient aber hier angemerkt zu werden, daß bey diesen Verwandlungen Nenner verschwinden können, und so oft dieses geschieht, wird dadurch der Bruch einfacher.

Es sey z. B. der Bruch

$$p - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}$$

zu verwandeln. Der Bruch, welchen man findet, ist

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}}$$

oder

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + r + \text{ꝛc.}}$$

Auf

Auf ähnliche Art giebt der Bruch

$$p - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

diesen

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r - 1 + \text{etc.}}}}}$$

oder

$$p - 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{r - 1 + \text{etc.}}}$$

und so in andern Fällen auf ähnliche Art.

53.

Die vorhin gefundene Formel, welcher man diese Form geben kann,

$$a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t}} = a + 1 - \frac{1}{t + 1}$$

zeigt, daß ein continuirlicher Bruch, worin alle Glieder das Zeichen + haben, oft durch die Einführung des Zeichens − abgekürzt werden kann, und zwar findet dieses statt, wenn Nenner vorkommen, welche = 1 sind. Es sey z. B. der Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

gegeben: so verwandelt sich derselbe nach der vorstehenden Formel in

$$p + 1 - \cfrac{1}{r + 1}$$

welcher, wie der Ausdruck lehrt, ein Glied weniger hat. Hätte man daher den Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}$$

so würde sich derselbe in folgenden

$$p + 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}$$

und wäre der Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}}$$

gegeben, so würde sich dieser sogleich in

$$p + 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s + \text{ꝛc.}}}}$$

und darauf dieser in folgenden

$$p + 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{s + 1}}$$

verwandeln lassen.

Man kann also, wie sich hieraus leicht schließen läßt, jeden continuirlichen Bruch, worin bloß das Zeichen + vorkommt, und Nenner, die $= 1$, enthalten sind, allemal in einen

andern

andern Bruch verwandeln, der so viel Glieder weniger hat, als es dergleichen Nenner in ihm giebt, wofern dieselben nicht unmittelbar auf einander folgen. Denn wenn zwey unmittelbar auf einander folgen, so kann man nur ein Glied, wenn drey unmittelbar auf einander folgen, nur zwey Glieder, und überhaupt, wenn $2n$ oder $2n + 1$ auf einander folgen, nur $n$ oder $n + 1$ Glieder wegschaffen.

54.

Da also der continuirliche Bruch, welcher das Verhältniß des Umfangs des Kreises zum Radius ausdruckt,

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{ꝛc.}}}}}}}}}$$

ist, so läßt sich derselbe in folgenden verwandeln, welcher schon drey Glieder weniger hat,

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 + \text{ꝛc.}}}}}}$$

55.

Um die continuirlichen Brüche, welche bloß das Zeichen $+$ enthalten, mit denen, worin auch das Zeichen $-$ vorkommt, unter eine allgemeine Form zu bringen, ist es gut, diese letzten auf die Art zu verwandeln, daß die Zeichen — bloß zu den Nennern gehören. Dies kann sehr leicht geschehen. Denn ist z. B. der Bruch

$$p - \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r - \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

gegeben, so ist klar, daß man denselben sogleich in

$$p + \cfrac{1}{-q - \cfrac{1}{r - \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

und diesen darauf in

$$p + \cfrac{1}{-q + \cfrac{1}{-r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

verwandeln kann, und so auch in andern ähnlichen Fällen.

Auf diese Art ist die allgemeine Form der continuirlichen Brüche, von denen wir bisher geredet haben,

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

wo p, q, r, ꝛc. insgesammt ganze Zahlen bedeuten, aber dabey sowohl positiv als negativ seyn können, dagegen dieselben bey den obigen Brüchen durchaus positiv waren.

Man muß indeß bemerken, daß allemal, wenn einer von den Nennern q, r, ꝛc. der Einheit, positiv oder negativ genommen, gleich ist, der folgende Nenner eben dasselbe Zeichen haben muß, und dies folgt daraus, weil ein positiver

Nenner, der $= 1$ ist, niemals das Zeichen — nach sich haben kann (Nr. 51.)

56.

Es kann also die Approximations-Methode des 3ten §. der vorhergehenden Abhandlung auf folgende Art allgemeiner gemacht werden.

Es sey $x$ die gesuchte Wurzel. Man setze den Werth derselben in ganzen Zahlen $p$, d. h. man mache $p$ gleich einer von den ganzen Zahlen, zwischen welche der Werth von $x$ fällt und welche man allemal nach §. 1. der vorhergehenden Abhandlung finden kann, und setze darauf $x = p + \frac{1}{y}$. Auf diese Art bekommt man eine veränderte Gleichung, deren unbekannte Größe $y$ ist, und diese Gleichung hat nothwendig eine positive oder negative Wurzel, die größer als 1 ist. Eben so lasse man $q$ den Werth von $y$ in ganzen Zahlen seyn, so daß $q$ entweder zunächst größer oder zunächst kleiner ist als $y$, und setze $y = q + \frac{1}{z}$, und so ferner.

Wenn die Gleichung für $x$ mehrere Wurzeln hätte, so hätte man über die veränderten Gleichungen für $y$ und $z$ ähnliche Schlüsse zu machen als Nr. 19. der vorhergehenden Abhandlung.

57.

Ist daher

$$x = p + \frac{1}{y},\quad y = q + \frac{1}{z},\quad z = r + \frac{1}{u}, \text{ rc.}$$

so hat man

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}$$

wo die Nenner q, r, ꝛc. positiv und negativ seyn können, wie wir schon angemerkt haben; und dieser Bruch läßt sich hernach allemal in einen andern verwandeln, worin die Nenner insgesammt positiv sind und bloß das Zeichen + vorkommt (Nr. 52.).

Der Vortheil, welchen diese gegenwärtige Methode gewährt, besteht darin, daß es dabey frey steht, für p, q, r, ꝛc. unter den beyden ganzen Zahlen, zwischen welchen die Wurzeln x, y, z, ꝛc. fallen, nach Belieben zu wählen, und hierdurch erlangt man öfters Abkürzungen des Calculs, wie weiter unten gezeigt werden wird.

58.

Wollte man übrigens den kürzesten continuirlichen Bruch und also auch denjenigen haben, der sich dem gesuchten Werthe am stärksten näherte, so müßte man die Zahlen p, q, r, ꝛc. allemal kleiner als die Wurzeln x, y, z, ꝛc. nehmen, wenn diese Zahlen von der Einheit verschieden wären; allein wenn sie der Einheit gleich gefunden würden, so müßte man die vorhergehende um eins vermehren, das heißt, dieselbe zunächst größer annehmen als die zugehörige Wurzel. Dieses fließt aufs deutlichste aus dem, was wir (Nr. 53.) über diesen Punkt gesagt haben.

59.

Setzt man nun, wie Nr. 23. der vorhergehenden Abhandlung

$$\alpha = 1 \qquad \alpha' = 1$$
$$\beta = \alpha q + 1 \qquad \beta' = \alpha' q$$

$$\gamma = \beta r + \alpha \qquad \gamma' = \beta' r + \alpha'$$
$$\delta = \gamma s + \beta \qquad \delta' = \gamma' s + \beta'$$
$$\text{rc.} \qquad \text{rc.}$$

so hat man nach Hinzufügung des Bruchs $\frac{1}{0}$, welcher größer ist als jede gegebene Größe, die Brüche

$$\frac{1}{0},\ \frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\beta}{\beta'},\ \frac{\gamma}{\gamma'},\ \frac{\delta}{\delta'},\ \text{rc.}$$

welche sich dem Werthe von x nothwendig nähern.

60.

Zur Beurtheilung der Natur dieser Brüche ist zu bemerken,

1) daß allemal

$$\alpha 0 = 1\alpha' = -1$$
$$\beta\alpha' = \alpha\beta' = 1$$
$$\gamma\beta' = \beta\gamma' = -1$$
$$\delta\gamma' = \gamma\delta' = 1$$
$$\text{rc.}$$

ist. Hieraus erhellet, daß die Zahlen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, rc. keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, und daß folglich die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, rc. bereits auf die kleinsten Zahlen gebracht sind.

2) daß die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma$, rc., $\alpha', \beta', \gamma'$, rc. positiv oder negativ seyn können (wenn der Werth von x positiv ist, so haben beyde Glieder des Bruchs dasselbe Zeichen, und dagegen entgegenstehende, wenn der Werth von x negativ ist) und daß dieselben, wenn man von den Zeichen abstrahirt, immer größer werden.

3) daß

3) daß, da $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$ 2c. ist

$$x = \frac{\alpha y + 1}{\alpha' y}$$

$$x = \frac{\beta z + \alpha}{\beta' z + \alpha'}$$

$$x = \frac{\gamma u + \beta}{\gamma' u + \beta'}$$

2c.

seyn wird.

61.

Wenn daher überhaupt $\pi, \varrho, \sigma$ drey auf einander folgende Glieder der Reihe $\alpha, \beta, \gamma$, 2c., $\pi', \varrho', \sigma'$ aber die gehörigen Glieder aus der Reihe $\alpha', \beta', \gamma'$ 2c. und also $\frac{\pi}{\pi'}$, $\frac{\varrho}{\varrho'}$, $\frac{\sigma}{\sigma'}$ drey auf einander folgende und dem Werthe von x sich nähernde Brüche sind: so ist

$$\varrho\pi' - \pi\varrho' = \pm 1 \text{ und}$$
$$\sigma\varrho' - \varrho\sigma' = \pm 1$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn die Ordnungszahl des Bruchs $\frac{\varrho}{\varrho'}$, vom ersten Bruch $\frac{1}{0}$ an gerechnet, eine ungerade, und die untern, wenn diese Zahl eine gerade Zahl ist. Außerdem hat man, wenn man die Zeichen bey Seite setzt,

$$\varrho > \pi, \quad \sigma > \varrho, \quad \varrho' > \pi', \quad \sigma' > \varrho'$$

Endlich ist, wenn t das zugehörige Glied in der Reihe x, y, z, 2c. bedeutet, in völliger Strenge

$$x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$$

und, wenn k den Werth von t in ganzen Zahlen ausdruckt, es mag k größer oder kleiner seyn als t,

$$\sigma = \varrho k + \pi, \quad \sigma' = \varrho' k + \pi'.$$

62.

Dieses vorausgesetzt wollen wir den Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$ betrachten, und untersuchen, um wie weit derselbe von dem wahren Werthe von x unterschieden ist. Hiezu haben wir

$$x - \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'} - \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\varrho'\pi - \varrho\pi'}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$$
$$= \pm \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$$

Folglich beträgt die Abweichung $\pm \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$. Wenn also $\vartheta$ und $\vartheta + 1$ die beyden Zahlen sind, zwischen welche der wahre Werth von t fällt, so ist klar, daß die Größe $\varrho' t + \pi'$ zwischen diese beyden $\varrho'\vartheta + \pi'$ und $\varrho'(\vartheta + 1) + \pi'$ fallen, und also die Abweichung des Bruchs $\frac{\varrho}{\varrho'}$ zwischen diesen Grenzen

$$\mp \frac{1}{\varrho'(\varrho'\vartheta + \pi')} \text{ und } \mp \frac{1}{\varrho(\varrho'(\vartheta + 1) + \pi')}$$

enthalten seyn wird. Nun kann man $k = \vartheta$ oder $k = \vartheta + 1$ nehmen, so daß man entweder $\sigma' = \varrho\vartheta + \pi'$ oder $\sigma = \varrho'(\vartheta + 1) + \pi'$ hat. Wenn man also, um diese beyden Fälle von einander zu unterscheiden, den Nenner des Bruchs, der auf $\frac{\varrho}{\varrho'}$ folgt, $\sigma'$ nennt, wenn man den kleinern, und $\Sigma'$, wenn man den größern Werth von t nimmt, so ist der Fehler bey dem Bruche $\frac{\varrho}{\varrho'}$ nothwendiger Weise zwischen diesen Grenzen

$\mp$

$$\mp \frac{1}{\varrho'\sigma'} \text{ und } \mp \frac{1}{\varrho'\Sigma'}$$

enthalten.

63.

Man sieht hieraus, daß dieser Fehler immer kleiner und kleiner wird, so wie man von einem Bruche zu dem folgenden fortgeht, weil die Nenner $\varrho'$, $\sigma'$ oder $\Sigma'$ rc. nothwendiger Weise immer größer werden. Auch erhellet daraus, da $\sigma' > \varrho'$ und $\Sigma' > \varrho'$ ist, daß der Fehler allemal kleiner als $\mp \frac{1}{\varrho'^2}$ seyn, d. h. daß die Abweichung eines jeden Bruchs weniger betragen wird, als die Einheit durch das Quadrat des Nenners dieses Bruchs dividirt. Hieraus läßt sich sehr leicht schliessen, daß der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$ dem Werthe von x näher kömmt, als jeder andere Bruch, der durch kleinere Zahlen ausgedruckt wird. Denn sollte der Bruch $\frac{m}{n}$ der Wurzel x näher kommen als der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho'}$ und dabey n kleiner seyn als $\varrho'$; so müßte, da x zwischen $\frac{\varrho}{\varrho'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho'^2}$ oder zwischen $\frac{\varrho}{\varrho'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho'^2}$ enthalten ist, auch $\frac{m}{n}$ zwischen diese Grenzen fallen. Folglich müßte der Unterschied zwischen $\frac{\varrho}{\varrho'}$ und $\frac{m}{n} < \frac{1}{\varrho'^2}$ seyn. Nun ist aber diese Differenz $= \frac{n\varrho - m\varrho'}{\varrho' n}$, wo der Zähler nie kleiner als eins seyn kann, und der Nenner nothwendig größer seyn muß als $\varrho'^2$, weil $\varrho' > n$ ist. Auf diese Art erhellet also die Wahrheit der vorstehenden Behauptung.

64.

Uebrigens muß bemerkt werden, daß die Fehler wechselsweise positiv und negativ sind, wenn die Nenner $\alpha'$ $\beta'$ $\gamma'$ rc. alle dasselbe Zeichen haben, oder die Zeichen bey ihnen abwechseln. Aus diesem Grunde sind auch die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ in diesem Falle wechselsweise kleiner oder größer als der wahre Werth von x, wie Nr. 23. der vorhergehenden Abhandlung. Allein dieser Umstand fällt weg, sobald von den Zahlen $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ rc. nicht je zwey dieselben oder entgegenstehende Zeichen haben, und dieses findet sich allemal nothwendiger Weise, wenn unter den Nennern q, r, s, rc. des continuirlichen Bruchs einige positiv und andere negativ sind, d. h. wenn man die Näherungs-Werthe von x, y, z, rc. bald größer bald kleiner als die wahren Werthe angenommen hat.

65.

Wollte man statt der convergirenden Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ rc. lieber eine Reihe abnehmender Glieder haben, so ist

$$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'\beta'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma'} - \frac{\beta}{\beta'} = \frac{1}{\beta'\gamma'},\ \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}$$

rc.

folglich, da $\alpha' = 1$ ist

$$\frac{\beta}{\beta'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\gamma'\delta'}$$

$$\frac{\delta}{\delta'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} + \frac{1}{\gamma'\delta'},$$

und überhaupt

$$\frac{\varsigma}{\varsigma'} = \alpha + \frac{1}{\alpha'\gamma'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} + \frac{1}{\gamma'\delta'} - \text{rc.} \pm \frac{1}{\pi'\varsigma'}$$

Man hat also den Werth von $x$ in der Reihe $\alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} + \text{rc.}$ welche sich demselben um so mehr nähert, je weiter sie getrieben wird. Will man nach der Fortsetzung dieser Reihe bis zu einem gewissen Gliede $\pm \frac{1}{\pi'\varsigma'}$ wissen, um wie viel sie noch von dem wahren Werthe verschieden ist, so leidet es keinen Zweifel, daß die Abweichung zwischen diesen Grenzen $\mp \frac{1}{\varsigma'\sigma'}$ und $\mp \frac{1}{\varsigma'\Sigma'}$ (Nr. 62.) enthalten seyn, und also allemal weniger betragen wird, als $\frac{1}{\varsigma'^2}$.

66.

Jedes Glied der Reihe $\alpha + \frac{1}{\alpha'\beta'} - \frac{1}{\beta'\gamma'} + \text{rc.}$ entspricht einem Gliede des continuirlichen Bruchs

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{rc.}}}}$$

aus welchem man die Reihe hergeleitet hat, und es wird sich also die Reihe dem wahren Werthe desto stärker nähern, je stärker es der continuirliche Bruch thut. Nun ist oben (Nr. 53.) das Mittel angegeben worden, einen continuirlichen Bruch so convergent als möglich zu machen, und man kann daher auch eine so stark convergirende Reihe finden als möglich ist.

## 67.

Um z. B. die möglichst convergirende Reihe für das Verhältniß des Umfangs des Kreises zum Durchmesser desselben zu finden, nehme man die Reihe, welche dieses Verhältniß ausdruckt, und behandele sie nach Nr. 54. Auf diese Art bekommt man

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{-294 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-3 + \text{ꝛc.}}}}}}$$

und hat also

$$p = 3, \quad q = 7, \quad r = 16, \quad s = -294, \text{ ꝛc.}$$

Hieraus findet man

$$\alpha' = 1, \ \beta' = 7, \ \gamma' = 7.16 + 1 = 113, \ \delta' = 113 \times -294 + 7 = -33215, \ \varepsilon' = -33215 \times 3 + 113 = -99532, \ \zeta' = -99532 \times -3 - 33215 = 265371 \text{ ꝛc.}$$

und es ist demnach die gesuchte Reihe

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{113.33215} - \frac{1}{33215.99532} - \frac{1}{99532.265371} \text{ ꝛc.}$$

Vierte

## Vierte Anmerkung.

### Verschiedene Methoden, die Rechnung mit continnirlichen Brüchen zu vereinfachen.

68.

Wenn $\frac{\pi}{\pi'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'}$ zwey auf einander folgende convergirende Brüche für den Werth x sind, so hat man nach Nr. 61. allgemein

$$x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$$

Setzt man daher diesen Ausdruck von x in die Gleichung, deren Wurzel man sucht, so bekommt man eine Gleichung für t, welche keine andere seyn kann als diejenige, welche man erhalten haben würde, wenn man nach und nach $p + \frac{1}{y}$ für x, $q + \frac{1}{z}$ für y rc. (Nr. 56.) gesetzt hätte; und um den folgenden Bruch $\frac{\sigma}{\sigma'}$ zu erhalten, muß man den Werth von t in ganzen Zahlen suchen. Thut man dieses und ist k die gedachte ganze Zahl, so wird

$$\sigma = k\varrho + \pi, \quad \sigma' = k\varrho' + \pi'.$$

Kennt man demnach die beyden ersten Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\beta}{\beta'}$, welche allemal $\frac{1}{0}$ und $\frac{p}{1}$ sind (Nr. 59.) so kann man nach und nach alle übrige bloß vermittelst der Gleichung für x finden.

69. Ue=

Uebrigens mag man nach und nach die Substitutionen $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$, ꝛc. brauchen, oder den allgemeinen Ausdruck $\frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$ für x setzen, so besteht die Schwierigkeit allemal darin, von jeder veränderten Gleichung den Werth ihrer positiven oder negativen Wurzel, die größer als 1 ist, und welche diese Gleichungen allemal nothwendig enthalten, in ganzen Zahlen zu finden. Kommt der erste näherungsweise gesuchte Werth p nicht mehr als einer Wurzel zu, so haben auch alle übrige veränderte Gleichungen für y, z, ꝛc. nicht mehr als eine Wurzel, die größer ist als eins, so daß man die Werthe dieser Wurzeln in ganzen Zahlen insgesammt durch die bloße Substitution der natürlichen Zahlen zu finden im Stande ist (Nr. 19. der vorhergehenden Abhandlung). Allein wenn p mehrern Wurzeln zugehört, so haben die veränderten Gleichungen nothwendig mehr als eine Wurzel, die größer ist als die Einheit, bis man zu einer Gleichung kommt, die nicht mehr als eine Wurzel von dieser Art hat. Denn in diesem Falle haben alle folgende Gleichungen ebenfalls nicht mehr als eine Wurzel dieser Gattung.

Ehe man zu einer solchen veränderten Gleichung gelangt ist, ist die bloße Substitution der natürlichen Zahlen öfters nicht hinreichend, die Werthe, welche man haben will, in ganzen Zahlen zu finden, weil die Gleichung Wurzeln enthält, die um weniger als eins von einander verschieden sind. In diesem Falle scheint die Methode des 1sten §. der vorhergehenden Abhandlung nothwendig. Allein da man dieselbe schon bey der Erfindung der ersten Werthe von x in der gegebenen Gleichung gebraucht hat, so kann man bey den veränderten Gleichungen einer neuen

Rechnung überhoben seyn; und dieser Umstand verdient aus- einander gesetzt zu werden.

70.

Macht man von der gedachten Methode Gebrauch, so findet man die Grenzen, zwischen welchen jede reelle Wurzel der gegebenen Gleichung enthalten ist, so daß sich zwischen diesen Grenzen nicht mehr als eine einzige Wurzel befindet (Nr. 13. der vorhergehenden Abhandlung.)

Es seyen $\lambda$ und $\Lambda$ die Grenzen der gesuchten Wurzel. Da der Ausdruck $x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$, $t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$ giebt, so ist der Werth von t zwischen den Grenzen $\frac{\pi'\lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\Lambda}$ und $\frac{\pi'\Lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\Lambda}$ enthalten. Wenn also diese letzten Grenzen von einander um weniger als um eins verschieden sind, so hat man sogleich den Werth von t in ganzen Zahlen; sind sie aber von einander um eins oder um mehr als eins unterschieden, so ist solches ein Kennzeichen, daß die gesuchte Wurzel t von den übrigen Wurzeln der veränderten Gleichung für t um Größen unterschieden ist, die der Einheit gleich, oder größer als die Einheit sind. In diesem Falle ist man folglich versichert, den Werth dieser Wurzel in ganzen Zahlen durch die bloße Substitution der natürlichen Zahlen für t zu finden, und dieses um so mehr bey den folgenden veränderten Gleichungen.

71.

Die Formel $t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$ kann auch mit Vortheil gebraucht werden, wenn irgend eine Größe x, die zwischen ge-

gebenen

gebenen Grenzen enthalten ist, in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden soll, wenigstens so weit, als die Glieder dieses Bruchs durch die gedachten Grenzen gegeben seyn können. Denn nennt man diese Grenzen von x wieder $\lambda$ und $\Lambda$, so hat man

$$\frac{\pi'\lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\lambda} \text{ und } \frac{\pi'\Lambda - \pi}{\varrho - \varrho'\Lambda}$$

für die Grenzen von t, so daß man, wenn der Unterschied dieser beyden Grenzen nicht größer ist als eins, den Werth von t in ganzen Zahlen genau zu finden im Stande ist. Nimmt man also $\frac{1}{0}$ und $\frac{p}{1}$ (wo p den Werth von x in ganzen bedeutet) zu den beyden ersten Brüchen an, so kann man die Reihe der convergirenden Brüche, und folglich auch den continuirlichen Bruch, so weit fortsetzen, bis die gedachten Grenzen von einander um mehr als eins unterschieden sind. Ereignet sich dieses, so muß man aufhören weiter zu gehen, weil die Grenzen $\lambda$ und $\Lambda$ dem Werthe von x keine größere Genauigkeit geben.

Bey dieser Methode hat man nicht zu befürchten, den continuirlichen Bruch weiter zu treiben als man soll, wie solches sehr leicht geschehen kann, wenn man, um diesen Bruch zu finden, sich begnügt, eine von den Zahlen $\lambda$ und $\Lambda$ zu nehmen, und, der gewöhnlichen Methode bey der Verwandlung gemeiner Brüche in continuirliche gemäß, dieselbe Operation zu brauchen, durch welche man den größten gemeinschaftlichen Faktor findet.

Wollte man dieses mit Sicherheit thun, so müßte man dieselbe Operation mit den beyden Zahlen $\lambda$ und $\Lambda$ vornehmen, und dann bloß den Theil des continuirlichen Bruchs behal-

behalten, welchen man bey beyden auf einerley Art fände. Es scheint aber die vorhergehende Methode bequemer und einfacher zu seyn.

72.

Jetzt wollen wir noch andere Mittel zur Erleichterung der Erfindung der Werthe der veränderten Gleichungen in ganzen Zahlen kennen zu lernen suchen. Es sey

$$t^n - a t^{n-1} + b t^{n-2} - \text{rc.} = 0$$

eine von diesen veränderten Gleichungen, wo es darauf ankommt, den Werth von t in ganzen Zahlen zu finden. Wir wollen denselben allgemein k nennen. Da die angenommene Gleichung aus der gegebenen Gleichung für x abgeleitet ist, so gehört sie mit dieser zu eben dem Grade, und wir setzen also voraus, daß dieser Grad der nte sey.

Nun haben wir Nr. 70. allgemein $t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$ gefunden, und es ist daher auch

$$t = \frac{\pi'}{\varrho'} \times \frac{x - \frac{\pi}{\pi'}}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x} = \frac{\pi'}{\varrho'} \times \left( \frac{\frac{\varrho}{\varrho'} - \frac{\pi}{\pi'}}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x} - 1 \right)$$

Nun ist aber $\frac{\varrho}{\varrho'} - \frac{\pi}{\pi'} = \pm \frac{1}{\varrho' \pi'}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn die Ordnungszahl des Bruchs $\frac{\varrho}{\varrho'}$ eine gerade, und das untere, wenn diese Zahl eine ungerade Zahl ist. Folglich ist

$$t = \pm \frac{1}{\varrho'^2 \left( \frac{\varrho}{\varrho'} - x \right)} - \frac{\pi'}{\varrho'}$$

Be-

Bedeutet daher x die gesuchte Wurzel, und x′, x″, ꝛc. die übrigen Wurzeln der Gleichung für x, deren Menge = n ist, endlich t, t′, t″, ꝛc. die zugehörigen Werthe von t: so ist

$$t = \pm \frac{1}{\varrho'^2(\frac{\varrho}{\varrho'} - x)} - \frac{\pi'}{\varrho'}$$

$$t' = \pm \frac{1}{\varrho'^2(\frac{\varrho}{\varrho'} - x')} - \frac{\pi'}{\varrho'}$$

$$t'' = \pm \frac{1}{\varrho'^2(\frac{\varrho}{\varrho'} - x'')} - \frac{\pi'}{\varrho'}$$

ꝛc.

Nun ist aber, wie bekannt, $a = t + t' + t'' +$ ꝛc., und setzt man also die gefundenen Werthe von t′, t″, ꝛc. deren Menge $n - 1$ ist, für t′, t″, ꝛc.: so bekommt man

$$a = t - \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$$

$$\pm \frac{1}{\varrho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x''} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho'} - x'''} + \text{ꝛc.}\right)$$

Nun haben wir (Nr. 62.) $\frac{\varrho}{\varrho'} = x \pm \frac{1}{\varrho'(\varrho' t + \pi')}$, oder wenn man

$$\varrho' t + \pi' = \psi \varrho'$$

setzt, $\frac{\varrho}{\varrho'} = x \pm \frac{1}{\psi \varrho'^2}$ gefunden, und da $\varrho' t + \pi'$ zwischen den Grenzen $\sigma'$ und $\Sigma'$ enthalten ist, die beyde größer als $\varrho'$ sind, so muß $\psi$ nothwendiger Weise größer seyn als eins. Braucht man daher diese Substitution in der vorhergehenden Formel, so wird

t =

$$t = a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$$

$$\pm \left( \frac{1}{\varrho'^2(x-x') \pm \frac{1}{\psi}} + \frac{1}{\varrho'^2(x-x'') \pm \frac{1}{\psi}} + \text{rc.} \right)$$

Da aber die Größen $x - x'$, $x - x''$ gegeben sind, und $\varrho'$ immer größer wird, $\frac{1}{\psi}$ aber kleiner ist als eins: so muß auch jede der Größen

$$\frac{1}{\varrho'^2(x-x') \pm \frac{1}{\psi}},\ \frac{1}{\varrho'^2(x-x'') \pm \frac{1}{\psi}},\ \text{rc.}$$

und die Summe der $n - 1$ dieser Größen nothwendiger Weise immer kleiner und endlich auch kleiner als $\frac{1}{2}$ werden.

Man gelangt daher nothwendiger Weise zu einer veränderten Gleichung von der Art, daß die Wurzel derselben $t$, bis auf $\frac{1}{2}$ näherungsweise bestimmt, $= a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$ wird, wo $a$ den Coefficienten des zweyten Gliedes, negativ genommen, bedeutet; d. h. daß diese Wurzel zwischen den Grenzen

$$a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'} + \tfrac{1}{2} \text{ und } a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'} - \tfrac{1}{2}$$

enthalten ist, und eben dieses muß um so mehr bey allen folgenden veränderten Gleichungen statt finden.

So bald man daher zu einer solchen veränderten Gleichung gelangt ist, so braucht man nur die ganze Zahl zu nehmen, welche $a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$ am nächsten kommt, oder zwischen den Grenzen $a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'} + \frac{1}{2}$ und $a + \frac{(n-1)\pi'}{\varrho'}$

$-\frac{1}{2}$ enthalten ist. Es ist nemlich diese Zahl nothwendiger Weise eine von den beyden auf einander folgenden Zahlen, zwischen welchen der wahre Werth von $t$ liegt, so daß man sie mit voller Sicherheit für $k$ nehmen kann (Nr. 68.). Auf diese Art kann man also die Näherung soweit man will, ohne alles Versuchen, fortsetzen.

73.

Da $a = t + t' + t''$ ꝛc. ist, so hat man, wenn man die Werthe von $t$, $t'$ ꝛc. (Nr. 72.) substituirt,

$$a = \pm \frac{1}{\rho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''} + \text{ꝛc.}\right) - \frac{n\pi'}{\rho'}$$

Nun sey

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \text{ꝛc.} = 0$$

die gegebene Gleichung. Setzt man die erste Hälfte dieser Gleichung $= X$, so ist aus der Theorie der Gleichungen leicht einzusehen, daß $\frac{dX}{Xdx}$, wenn man nach der Differenziation $\frac{\rho}{\rho'}$ an die Stelle von $x$ setzt,

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''} + \text{ꝛc.}$$

wird, weil $x$, $x'$, $x''$, ꝛc. die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind. Man hat demnach

$$a = \pm \frac{dX}{\rho'^2 X dx} - \frac{n\pi'}{\rho'}, \text{ und folglich}$$

$$a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} = \pm \frac{dX}{\rho'^2 X dx} - \frac{\pi'}{\rho'}$$

Setzt man daher

$$R = \frac{n\rho^{n-1} - (n-1)A\rho^{n-2}\rho' + (n-2)B\rho^{n-3}\rho'^2 - \text{ꝛc.}}{\rho^n - A\rho^{n-1}\rho' + B\rho^{n-2}\rho'^2 - \text{ꝛc.}},$$

so

so bekommt man $a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} = \frac{\pm R - \pi'}{\rho'}$, und für die Grenzen, wovon in der vorhergehenden Nummer geredet worden,

$$\frac{\pm R - \pi'}{\rho'} + \tfrac{1}{2} \text{ und } \frac{\pm R - \pi'}{\rho'} - \tfrac{1}{2}.$$

Man kann also diese Grenzen unabhängig von der veränderten Gleichung für $t$, bloß vermittelst der gegebenen Gleichung für $x$ finden und diesen Umstand zur Verkürzung der Rechnung benutzen.

74.

Nun ist noch übrig zu untersuchen, wie man erkennen kann, ob die Wurzel $t$ zwischen den gedachten Grenzen liegt. Dieses ist leicht, sobald man die beyden auf einander folgenden ganzen Zahlen $\vartheta$ und $\vartheta + 1$ kennt, zwischen welchen diese Wurzel enthalten ist. Denn es seyen $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ die gegebenen Grenzen, so ist klar, daß $\lambda$, wenn $t$ sich zwischen diesen Grenzen finden soll, zwischen $\vartheta$ und $\vartheta + 1$, und zugleich derjenigen von diesen beyden Zahlen am nächsten liegen muß, der $t$ am nächsten ist. Man untersuche daher

1. ob $\lambda$ zwischen $\vartheta$ und $\vartheta + 1$ fällt.

2. Wenn dieses statt findet, so nehme man von diesen beyden Zahlen diejenige, der $\lambda$ am nächsten kommt, für den Näherungswerth von $t$, welchen wir $k$ nennen wollen, setze $t = k + \frac{1}{w}$, und untersuche, ob die veränderte Gleichung für $w$ eine positive oder negative Wurzel hat, die größer als 2 ist. Findet diese letzte Bedingung statt, so kann man versichert seyn, daß die Wurzel $t$ zwischen die Grenzen $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ falle, und die Rechnung nach dem, was Nr. 72. gesagt worden ist, fortsetzen.

75.

Man kann sich aber auch auf folgende Art davon überzeugen, ob die Wurzel $t$ zwischen den Grenzen $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ falle. Es erhellet aus Nr. 72., daß man dazu bloß zu wissen braucht, daß die Summe der Größen $\frac{1}{\frac{p}{p'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{p}{p'} - x''}$ 2c., dividirt durch $p'^2$, kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Folglich hat man nur nöthig eine Größe zu suchen, die größer ist als diese Summe, und dann zu sehen, ob dieselbe kleiner ist als $\frac{p'^2}{2}$.

Nun seyen $x$, $x'$, $x''$ 2c. die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, und ihre Anzahl $= \mu$, ferner $\xi + \psi\sqrt{-1}$, $\xi - \psi\sqrt{-1}$, $\xi' + \psi'\sqrt{-1}$, $\xi' - \psi'\sqrt{-1}$ 2c. die imaginären Wurzeln eben dieser Gleichung und ihre Anzahl $= 2\nu$, also $\mu + 2\nu = n$. Da der Bruch $\frac{p}{p'}$ von der Wurzel $x$ um weniger als $\frac{1}{p'^2}$ unterschieden ist (Nr. 63.) so ist klar, daß, wenn $\Delta$ eine Größe bedeutet, die gleich oder kleiner ist als der kleinste Unterschied zwischen den reellen Wurzeln eben derselben Gleichung, jede der reellen Größen $\frac{1}{\frac{p}{p'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{p}{p'} - x''}$ 2c. nothwendig kleiner ist als $\frac{1}{\Delta \pm \frac{1}{p'^2}}$, und daher ist denn auch die Summe dieser Größen, deren es $\mu - 1$ giebt, kleiner als $\frac{\mu - 1}{\Delta \pm \frac{1}{p'^2}}$.

Was

Was die imaginären Größen betrift, deren je zwey und zwey unter die Form

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - \xi - \psi\sqrt{-1}}, \quad \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - \xi + \psi\sqrt{-1}}$$

gehören, weswegen man also $\nu$ Größen von der Form $\frac{2(\frac{\rho}{\rho'} - \xi)}{(\frac{\rho}{\rho'} - \xi)^2 + \psi^2}$ hat: so ist allemal, die Zahlen $\frac{\rho}{\rho'}$, $\xi$ und $\psi$ mögen seyn, welche sie wollen $\frac{2(\frac{\rho}{\rho'} - \xi)}{(\frac{\rho}{\rho'} - \xi)^2 + \psi^2}$ kleiner als $\frac{1}{\psi}$. Denn setzt man in $\frac{2y}{y^2 + \psi^2}$, $y = \psi \text{tang.} \phi$, so bekömmt man $\frac{2 \sin. \cos. \phi}{\psi} = \frac{\sin. 2\phi}{\psi}$, und da der größte Werth von $\sin. 2\phi$ der Einheit gleich ist, so folgt das Uebrige leicht.

Bedeutet also $\Pi$ eine Größe, die gleich oder kleiner ist als die kleinste von den Größen $\psi$, $\psi'$ rc., so ist die Größe $\frac{\nu}{\Pi}$ nothwendig größer als die Summe aller der imaginären Größen, wovon hier die Rede ist.

Also ist überhaupt die Größe $\frac{\mu - 1}{\Delta \pm \frac{1}{\rho'^2}} + \frac{\nu}{\Pi}$ größer als die Summe aller dieser Größen $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'}$, $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''}$ rc.

 Wenn

Wenn man daher

$$\frac{\mu - 1}{\rho'^2 \Delta - 1} + \frac{\nu}{\rho'^2 \Pi} = \text{oder} < \tfrac{1}{2}$$

hat, und dabey $\Delta$ und $\Pi$ positiv genommen werden, so hat man daran ein sicheres Kennzeichen, daß die Wurzel t zwischen den gegebenen Grenzen liegt.

Um die Zahlen $\Delta$ und $\Pi$ zu finden, wenn man die Wurzeln der gegebenen Gleichung nicht zum voraus kennt, braucht man nur in der Gleichung der Differenzen (D) (Nr. 8. der vorhergeh. Abhandlung) die Grenze l der positiven und die Grenze $-h$ der negativen Wurzeln zu suchen. Hat man dies gethan, so kann man $\Delta =$ oder $< \frac{1}{\sqrt{l}}$ und $\Pi =$ oder $< \frac{2}{\sqrt{h}}$ nehmen.

76.

Wenn man $\frac{\mu - 1}{\Delta - 1} + \frac{\nu}{\Pi} < \frac{1}{2}$ hätte, so fände die erforderte Bedingung vom Anfang der Reihe an statt, so daß man sich dem Werthe von x ganz ohne alles Versuchen nähern könnte. Man rechnete alsdann auf folgende Art.

Nachdem man den ersten Werth von x in ganzen Zahlen gefunden, so hätte man, vorausgesetzt, daß man diesen Werth, er möchte größer oder kleiner seyn als x, p nennte, die beyden ersten Brüche $\frac{1}{0}$, $\frac{p}{1}$.

Nun setzte man

1) $\pi = 1$, $\pi' = 0$, $\rho = p$, $\rho' = 1$, brächte diese Werthe in den Ausdruck für R (Nr. 73.) und nähme die ganze

Zahl

Zahl, welche $\frac{-R-\pi'}{\rho'}$, d. h. $-R$ am nächsten käme. Nennte man diese ganze Zahl k, so hätte man den Bruch $\frac{k\rho + \pi}{k\rho' + \pi} = \frac{kp+1}{k}$.

2) Setzte man $\pi = p$, $\pi' = 1$, $\rho = kp + 1$, $\rho' = k$, brächte diese Werthe in den Ausdruck für R, und nähme die ganze Zahl, welche $\frac{R-\pi'}{\rho'}$ d. h. $\frac{R-1}{k}$ am nächsten käme. Es sey diese Zahl $= k'$, so hätte man den Bruch $\frac{k'\rho + \pi}{k'\rho' + \pi'} = \frac{k'(kp+1)+p}{k'k+1}$.

3) Setzte man $k = kp + 1$, $\pi' = k$, $\rho = k'(kp+1) + p$, $\rho' = k'k + 1$, substituirte und nähme die ganze Zahl, welche $\frac{-R-\pi'}{\rho'}$ oder $\frac{-R-k}{kk'+1}$ am nächsten käme. Nennte man diese Zahl $k''$, so hätte man den Bruch $\frac{k''\rho + \pi}{k''\rho' + \pi'} =$ rc. u. s. f.

Auf diese Art würde x durch folgenden continuirlichen Bruch

$$p + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k' + \cfrac{1}{k'' + \text{rc.}}}}$$

oder durch diese convergirenden Brüche ausgedruckt

$$\frac{1}{0},\ \frac{p}{1},\ \frac{kp+1}{k},\ \frac{k'(kp+1)+p}{k'k+1},\ \text{rc.}$$

77.

Wenn man nicht sogleich $\frac{\mu - 1}{\Delta - 1} + \frac{\nu}{\pi} < \frac{1}{2}$ hat, so darf man nur den continuirlichen Bruch nach der gewöhnlichen Methode so weit suchen, bis man zu einem Bruche gelangt, bey dessen Nenner $\rho'$ $\frac{\mu - 1}{\rho'^2 \Delta - 1} + \frac{\nu}{\rho'^2 \pi} < 1$ ist, oder bis man zu einer veränderten Gleichung kommt, welche die Nr. 74. beschriebene Beschaffenheit hat. Alsdann läßt sich die Rechnung nach der vorhergehenden Methode fortsetzen.

Da übrigens, wenn man alle Wurzeln einer Gleichung in irgend einem Verhältnisse vergrößert, die Unterschiede dieser Wurzeln dadurch in eben dem Verhältnisse vergrößert werden, so erhellet, daß bey der Substitution von $\frac{x}{f}$ für $x$ in der gegebenen Gleichung und der dadurch hervorgebrachten Vergrößerung ihrer Wurzeln in dem Verhältnisse von $1 : f$, die Zahlen $\Delta$ und $\pi$, welche der neuen Gleichung zukommen, in eben dem Verhältnisse vergrößert werden, und also in $f\Delta$ und $f\pi$ übergehen müssen. Man kann demnach die Bedingung der 76sten Nummer erhalten, wenn man $f$ einen solchen Werth giebt, daß

$$\frac{\mu - 1}{f\Delta - 1} + \frac{\nu}{f\pi} = \text{oder} < \frac{1}{2}$$

wird. Thut man dieses, so kann man sich allemal der vorhergehenden Methode bedienen, um den Werth von $x$ ohne alles Versuchen auf dem Wege der Näherung zu finden; nur muß man den gefundenen Werth darauf noch durch $f$ dividiren, um den Werth der Wurzel der gegebenen Gleichung, zu bekommen. Zwar erhält man auf diese Art die Wurzel nicht mehr in einem bloßen continuirlichen Bruche, aber doch dem

dem wahren Werthe so sehr genähert als man irgend will, und dieses reicht für den gewöhnlichen Gebrauch hin.

78.

Es sey die Gleichung

$$x^n - A = 0$$

gegeben, wo also die nte Wurzel von A zu finden ist.

Es sey 1) n eine gerade Zahl und $= 2m$, so hat die Gleichung, wie bekannt, zwey reelle Wurzeln $+ \sqrt[n]{A}$ und $- \sqrt[n]{A}$, und $n - 2$ imaginäre Wurzeln, welche sich auf folgende Art ausdrucken lassen,

$$(\cos.\frac{sc}{n} \pm \sin.\frac{sc}{n}\sqrt{-1})\sqrt[n]{A}$$

wenn c den Umfang eines Kreises oder einen Winkel von 360° bedeutet, und für s nach und nach alle natürliche Zahlen, 1, 2, 3, rc. bis $m - 1$ gesetzt werden. Man hat also in diesem Falle (Nr. 75.) $\mu = 2$, $\nu = m - 1$, und da $\sin.\frac{c}{n}$ der kleinste von allen $\sin.\frac{sc}{n}$ ist, so kann man $\Delta = 2\sqrt[n]{A}$, $\pi = \sin.\frac{c}{n}\sqrt[n]{A}$ nehmen. Es findet demnach die Bedingung des 76sten §. statt, wenn

$$\frac{1}{2\sqrt[n]{A} - 1} + \frac{m-1}{\sin.\frac{c}{n}\sqrt[n]{A}} = \text{oder} < \tfrac{1}{2},$$

und also sicher allemal, wenn

$$A = \text{oder} > \frac{n}{\sin.\frac{360^\circ}{n}})^n$$

ist.

Ferner sey 2) n eine ungerade Zahl und $= 2m + 1$. In diesem Falle hat die Gleichung nicht mehr als eine reelle Wurzel $\sqrt[n]{A}$, und 2m imaginäre, deren Form

$$(\cos. \frac{sc}{n} \pm \sin. \frac{sc}{n}\sqrt{-1})\sqrt[n]{A}$$

ist, wenn für s nach und nach 1, 2, 3, rc. bis m gesetzt wird. Man hat also für diesen Fall $\mu = 1$, $\nu = m$; und da unter den $\sin. \frac{sc}{n}$ der $\sin. \frac{mc}{2} = \sin. \frac{180^\circ}{n}$ (weil $n = 2m + 1$) der kleinste ist, so kann man $\pi = \sin. \frac{180^\circ}{n}\sqrt[n]{A}$ nehmen. Folglich hat die vorhin gedachte Bedingung statt, wenn

$$\frac{m}{\sin. \frac{180^\circ}{n}\sqrt[n]{A}} = \text{oder} < \tfrac{1}{2}, \text{ d. h. wenn}$$

$$A = \text{oder} > \left(\frac{n-1}{\sin. \frac{180^\circ}{n}}\right)^n \text{ ist.}$$

Ist daher die Zahl A nicht kleiner als die Grenzen, welche wir so eben gefunden haben, so kann man jedesmal ohne alles Versuchen nach der Methode der 76sten Nr. die nte Wurzel dieser Zahl finden; und ist sie kleiner, so kann man sie allemal größer machen, indem man sie durch eine Zahl multiplicirt, welche eine genaue Potestät von eben dem oder vom nten Grade ist. Denn hat man die Wurzel von diesem Produkte gefunden, so darf man dieselbe nur durch die Wurzel des gebrauchten Multiplicators dividiren, um die gesuchte Wurzel von A zu finden.

Der Werth von R (Nr. 72.) für die Gleichung $x^n - A = 0$ ist übrigens

$$R = \frac{n\rho^{n-1}}{\rho^n - A\rho'^n}$$

79. Da

79.

Da der Fall, wenn $n = 2$ ist, nach der Methode der 2ten Anmerkung aufgelöset werden kann, so übergehen wir ihn hier. Es sey also

1. $n = 4$, so hat man $\sin. \frac{360^\circ}{4} = 1$, und also

$A =$ oder $> 4^4$. Ferner sey

2. $n = 6$, so hat man $\sin. \frac{360^\circ}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und also

$A =$ oder $> 3^3 . 4^6$. Nun sey

3. $n = 8$, so hat man $\sin. \frac{360^\circ}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, und also

$A =$ oder $> 2^4 . 4^8$

etc.

Eben so, wenn

1. $n = 3$ ist, so hat man $\sin. \frac{360^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und also

$A =$ oder $> \frac{4^3}{3\sqrt{3}}$. Ist

2. $n = 5$, so hat man $\sin. \frac{360^\circ}{5} = \sin. 72^\circ$, und rechnet man mit den Logarithmen, so findet man

$A =$ oder $> 1315$

u. s. f.

80.

Gesetzt z. B. es sollte die Cubikwurzel aus 17 gesucht werden, so ist $17 > \frac{4^3}{3\sqrt{3}}$, weil $3\sqrt{3} > 4$ ist. Man kann also sogleich die Methode der 76sten Nr. brauchen, und hat, da $n = 3$ und $A = 17$ ist (Nr. 78.)

$$R = \frac{3\rho^2}{\rho^3 - 17\rho'^3}.$$

Nun

Nun ist die ganze Zahl, welche der Cubikwurzel von 17 am nächsten kommt, 2 oder 3, so daß man also $p = 2$ oder $p = 3$ setzen kann.

Es sey $p = 2$, so sind die beyden ersten Brüche $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, folglich

1) $\pi = 1$, $\pi' = 0$, $\rho = 2$, $\rho' = 1$; also $R = \frac{3 \cdot 4}{8 - 17}$ $= -\frac{4}{3}$, und die ganze Zahl, welche $\frac{-R - \pi'}{\rho'} = \frac{4}{3}$ am nächsten kommt, ist $= 1$. Es wird demnach $k = 1$, und $\frac{kp + 1}{k} = \frac{3}{1}$. Ferner ist

2) $\pi = 2$, $\pi' = 1$, $\rho = 3$, $\rho' = 1$; also $R = \frac{39}{10}$ und $\frac{R - \pi'}{\rho'} = \frac{17}{10}$. Da also die ganze Zahl, welche $\frac{17}{10}$ am nächsten kommt, 2 ist, so setze man $k' = 2$, wodurch man den Bruch $\frac{k'\rho + \pi}{k'\rho' + \pi'} = \frac{8}{3}$ bekommt. Nun sey

3) $\pi = 3$, $\pi' = 1$, $\rho = 8$, $\rho' = 3$, also $R = \frac{3 \cdot 8^2}{8^3 - 17 \cdot 3^3}$ $= \frac{192}{33}$ und $\frac{-R - \pi'}{\rho'} = -\frac{245}{159}$. Die ganze Zahl, welche diesem Bruche am nächsten kommt, ist $-2$, und also ist der Bruch $\frac{k''\rho + \pi}{k''\rho' + \pi'} = \frac{-13}{-5}$. Nun kann man

4) $\pi = 8$,

4) $\pi = 8$, $\pi' = 3$, $\rho = -13$, $\rho' = -5$ setzen, und auf ähnliche Art damit verfahren wie vorher.

Auf diese Art erhält man für $\sqrt[3]{17}$ die convergirenden Brüche

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{-13}{-5}, \text{ic.}$$

und den continuirlichen Bruch

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{-2 + \text{ic.}}}}$$

---

5. Neue