Die Theorie der Gleichungen

Euler, Leonhard

Berlin, 1791

5. Neue Methode der Auflösung der Gleichungen vermittelst der Reihen, vom Hrn. de la Grange. Aus dem 24sten Bande der Memoiren der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53259

5. Neue Methode der Auflösung der Gleichungen vermittelst der Reihen.

Vom

Herrn de la Grange.

Aus dem 24sten Bande der Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Ich will in dieser Abhandlung eine sehr einfache und sehr allgemeine Methode mittheilen, die Wurzeln algebraischer Gleichungen in ohne Ende fortlaufende Reihen zu verwandeln; ein Gegenstand, der bereits viel Mathematiker beschäftiget hat.

Meine Methode hat, wo ich nicht irre, vor allen bis jetzt bekannten Methoden beträchtliche Vorzüge. Denn einmal erhält man dadurch einen Ausdruck für jede Wurzel der gegebenen Gleichung, da die übrigen hingegen gewöhnlicher Weise nur zu einem Ausdrucke für eine einzige Wurzel leiten. Zum andern giebt sie die gesuchten Wurzeln in regulären Reihen, d. h. in solchen, deren Glieder nach einem allgemeinen und bekannten Gesetze fortschreiten, so daß es leicht ist, dieselben so weit fortzusetzen als man irgend will. Drittens sind diese Reihen so beschaffen, daß man die Form ihrer letzten Glieder leicht finden und daraus die Bedingungen herleiten kann, wobey sie entweder convergiren oder divergiren.

giren. Auch kann man viertens durch eben diese Methode einen Ausdruck für jede Potestät, ja für jede Funktion der gesuchten Wurzel finden. Endlich läßt sich dieselbe fünftens auch bey den transcendenten Gleichungen, welche Logarithmen und Kreisbogen enthalten, anwenden, und kann gebraucht werden, verschiedene wichtige Probleme dieser Gattung auf eine viel einfachere und genauere Art aufzulösen, als man es bis jetzt gekonnt hat.

§. 1.

Von der Erfindung der Summen der Potestäten eines jeden Grades von allen Wurzeln einer gegebenen Gleichung.

Die Auflösung dieses Problems ist bereits hinlänglich bekannt; ich theile sie indeß gleichwohl auch hier mit, theils weil dieselbe mit dem Gegenstande dieser Abhandlung in Verbindung steht, theils weil meine Methode in verschiedener Rücksicht einfacher und allgemeiner ist als die gewöhnliche.

1.

Es sey

$$o = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{rc.} \ldots (A)$$

eine Gleichung von irgend einem Grade, und ihre Wurzeln p, q, r, rc.: so ist nach der Theorie von den Gleichungen

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{rc.}$$

$$=$$

$$a\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \ldots\ldots (B)$$

Dividirt man demnach durch a, so wird

$$1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{rc.}}{a} =$$

(1 —

$$(1-\frac{x}{p})(1-\frac{x}{q})(1-\frac{x}{r}\ldots\ldots$$

und nimmt man von beyden Seiten die Logarithmen, so bekömmt man

$$l(1-\frac{bx-cx^2+dx^3-\text{ꝛc.}}{a})=$$

$$l(1-\frac{x}{p})+l(1-\frac{x}{q})+l(1-\frac{x}{r})+\text{ꝛc.}$$

Nun ist allgemein

$$l(1-u)=-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}-\text{ꝛc.}$$

und also

$$l(1+\frac{x}{p})+l(1-\frac{x}{q})+l(1-\frac{x}{r})+\text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$-x(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\text{ꝛc.})$$

$$-\frac{x^2}{2}(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}+\text{ꝛc.})$$

$$-\frac{x^3}{3}(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}+\text{ꝛc.})$$

$$\text{ꝛc.}$$

Setzt man daher

$$-l(1-\frac{bx-cx^2+dx^3-\text{ꝛc.}}{a})=$$

$$Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{ꝛc.}$$

so wird

$$A=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\text{ꝛc.}$$

$$2B=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}+\text{ꝛc.}$$

$$3C=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}+\text{ꝛc.}$$

$$\text{ꝛc.}$$

2. Da

2.

Da

$$-l\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{ꝛc.}}{a}\right) =$$

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ꝛc.}$$

angenommen worden ist, so findet man, wenn man beyde Seiten dieser Gleichung differenziirt und durch dx dividirt

$$\frac{b - 2cx + 3dx^2 - \text{ꝛc.}}{a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{ꝛc.}} =$$

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man daher übers Creuz und vergleicht die Glieder, so bekommt man,

$$A = \frac{b}{a}$$

$$2B = \frac{Ab - 2c}{a}$$

$$3C = \frac{2Bb - Ac + 3d}{a}$$

u. s. f. Man findet auf diese Art die bekannten Newtonianischen Formeln.

Ein jeder Coefficient setzt dabey alle vor ihm vorhergehende voraus; will man auf einmal den Ausdruck für den Coefficienten der Potestät x^m haben, welchen wir M nennen wollen und der folglich

$$\frac{\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{ꝛc.}}{m}$$

gleich seyn wird: so kann man diese Absicht auf folgendem Wege erreichen.

§. 3.

Man erwäge, daß

$$l(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a}) =$$

$$l(1 - \frac{bx}{a}) + l(1 - \frac{-cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a(1 - \frac{bx}{a})})$$

ist. Ferner setze man der Kürze wegen

$$\frac{-cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a} = X$$

wodurch man

$$l(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a}) =$$

$$l(1 - \frac{bx}{a}) + l(1 - \frac{X}{1 - \frac{bx}{a}})$$

bekommt. Verwandelt man nun diese beyden letzten Logarithmen in eine Reihe, so wird

$$-l(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \text{etc.}}{a})$$

$$=$$

$$\frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^3x^3}{3a^3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{X}{1 - \frac{bx}{a}} + \frac{X^2}{2(1 - \frac{bx}{a})^2} + \frac{X^3}{3(1 - \frac{bx}{a})^3} + \text{etc.}$$

$$=$$

$$A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} + Mx^m + \text{etc.}$$

Nun ist bekannt, daß

$$\frac{1}{1 - \frac{bx}{a}} = 1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{bx}{a})^2} = 1 + \frac{2bx}{a} + \frac{3b^2x^2}{a^2} + \frac{4b^3x^3}{a^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{bx}{a})^3} = \tfrac{1}{2}(1.2 + \frac{2.3bx}{a} + \frac{3.4b^2x^2}{a^2} + \frac{4.5b^3x^3}{a^3} + \text{ꝛc.})$$

$$\frac{1}{(1-\frac{bx}{a})^4} = \frac{1}{2.3}(1.2.3 + \frac{2.3.4bx}{a} + \frac{3.4.5b^2x^2}{a^2} + \frac{4.5.6b^3x^3}{a^3} + \text{ꝛc.})$$

ꝛc.

ist. Setzt man daher der größern Leichtigkeit wegen

$$X = \alpha x^2 + \alpha' x^3 + \alpha'' x^4 + \text{ꝛc.}$$
$$X^2 = \beta x^4 + \beta' x^5 + \beta'' x^6 + \text{ꝛc.}$$
$$X^3 = \gamma x^6 + \gamma' x^7 + \gamma'' x^8 + \text{ꝛc.}$$

so fällt in die Augen, daß der Coefficient der Potestät x^m in der nach den Potestäten von x entwickelten Größe $\frac{X}{1-\frac{bx}{a}}$ durch

$$\alpha(\frac{b}{a})^{m-2} + \alpha'(\frac{b}{a})^{m-3} + \text{ꝛc.} + \alpha^{m'-2'}$$

der Coefficient eben dieser Potestät in der Größe $\frac{X^2}{2(1-\frac{bx}{a})^2}$

$$\tfrac{1}{2}((m-3)\beta(\frac{b}{a})^{m-4} + (m-4)\beta'(\frac{b}{a})^{m-5} + \text{ꝛc.} + \beta^{m'-4'})$$

und in der Größe $\frac{X^3}{3(1-\frac{bx}{a})^3}$

$$\frac{1}{2.3}((m-4)(m-5)\gamma(\frac{b}{a})^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma'(\frac{b}{a})^{m-7} + \text{ꝛc.} + 1.2\gamma^{m'-6'})$$

und so ferner seyn wird.

Hieraus fließt

$$M = \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$+ \alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \alpha'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \text{ꝛc.} + \alpha^{m'-2'}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left((m-3)\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + (m-4)\beta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \text{ꝛc.} + \beta^{m'-4'}\right)$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left((m-4)(m-5)\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \text{ꝛc.} + 1.2\gamma^{m'-6'}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Da also $Mm = \frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{ꝛc.}$ ist, so hat man allgemein

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{ꝛc.} =$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m + m\alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + m\alpha'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \text{ꝛc.} + m\alpha^{m'-2'}$$

$$+ \frac{m(m-3)}{2}\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + \frac{m(m-4)}{2}\beta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \text{ꝛc.} + \frac{m}{2}\beta^{m'-4'}$$

$$+ \frac{m(m-4)(m-5)}{2\,.\,3}\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)}{2\,.\,3}\gamma'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \text{ꝛc.} + \frac{m}{3}\gamma^{m'-6'}$$

$$+ \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\,.\,3\,.\,4}\delta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-8} + \frac{m(m-6)(m-7)(m-8)}{2\,.\,3\,.\,4}\delta'\left(\frac{b}{a}\right)^{m-9} + \text{ꝛc.} + \frac{m}{4}\delta^{m'-8'}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Erstes

3. Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung des zweyten Grades

$$a - bx + cx^2 = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist $X = \frac{-cx^2}{a}$, folglich

$$X^2 = \frac{c^2x^4}{a^2};\ X^3 = -\frac{c^3x^6}{a^3},\ \text{ꝛc.}$$

also

$$\alpha = -\frac{c}{a},\ \beta = \frac{c^2}{a^2},\ \gamma = -\frac{c^3}{a^3},\ \text{ꝛc.}$$

und alle übrige Größen α', β' ꝛc. $= 0$. Sind daher p und q die Wurzeln dieser Gleichung, so hat man allgemein

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} = (\frac{b}{a})^m - \frac{mc}{a}(\frac{b}{a})^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-3)c^2}{2a^2}(\frac{b}{a})^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)c^3}{2.3a^3}(\frac{b}{a})^{m-6}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

bis man zu Potestäten von $\frac{b}{a}$ mit negativen Exponenten kommt.

4. Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung des dritten Grades

$$a - bx + cx^2 - dx^3 = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist

$$X = \frac{-cx^2 + dx^3}{a} = -\frac{x^2}{a}(c - dx)$$

folglich

$$X^2 = \frac{x^4}{a^2}(c^2 - 2cdx + d^2x^2)$$

$$X^3 = \frac{x^6}{a^3}(c^3 - 3c^2dx + 3cd^2x^2 - d^3x^3)$$

ꝛc.

also

$$\alpha = -\frac{c}{a}, \quad \alpha' = \frac{d}{a}$$

$$\beta = \frac{c^2}{a^2}, \quad \beta' = -\frac{2cd}{a^2}, \quad \beta'' = \frac{d^2}{a^2}$$

$$\gamma = -\frac{c^3}{a^3}, \quad \gamma' = \frac{3c^2d}{a^3}, \text{ ꝛc.}$$

Nennt man demnach die drey Wurzeln der gegebenen Gleichung p, q und r, so hat man allgemein

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m}$$

$$=$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m - \frac{mc}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \frac{md}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3}$$

$$+ \frac{m(m-3)}{2a^2}c^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} - \frac{m(m-4)}{2a^2} \cdot 2cd\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5}$$

$$+ \frac{m(m-5)}{2a^2}d^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3a^3}c^3\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6}$$

$$+ \frac{m(m-5)(m-6)}{2.3.a^3} \cdot 3c^2d\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7}$$

$$- \frac{m(m-6)(m-7)}{2.3a^3} \cdot 3cd^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-8}$$

$$+ \frac{m(m-7)(m-8)}{2.3a^3}d^3\left(\frac{b}{a}\right)^{m-9} + \text{ꝛc.}$$

und diese Reihe läuft fort, bis man zu negativen Potestäten von $\frac{b}{a}$ kommt.

5. Drittes Exempel.

Es sey die Gleichung

$$a - bx - x^n = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist

$$X = \frac{x^n}{a}, \text{ folglich}$$

$$X^2 = \frac{x^{2n}}{a^2},\quad X^3 = \frac{x^{3n}}{a^3},\quad \text{rc.}$$

folglich

$$\alpha^{n'-2'} = \frac{1}{a},\quad \beta^{2n'-4'} = \frac{1}{a^2},\ \text{rc.}$$

und alle übrige Größen $= 0$. Demnach ist

$$\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{rc.}$$

$$=$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m + \frac{m}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-n} + \frac{m(m-2n+1)}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2n}$$

$$+ \frac{m(m-3n+2)(m-3n+1)}{2.3a^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3n}$$

$$+ \frac{m(m-4n+3)(m-4n+2)(m-4n+1)}{2.3.4a^4}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4n}$$

$$+ \text{rc.}$$

bis man zu negativen Potestäten von $\frac{b}{a}$ kommt.

Ohnerachtet wir übrigens hier bloß die Formel für die Summe der Potestäten $\frac{1}{p^m}$, $\frac{1}{q^m}$, $\frac{1}{r^m}$ rc. gegeben haben, wo p, q, r, rc. die Wurzeln einer gegebenen Gleichung sind: so läßt sich doch auch daraus die Summe der Potestäten p^m, q^m, r^m, rc. sehr leicht finden. Zu diesem Ende braucht man bloß die Wurzeln der gegebenen Gleichung in ihre reciproken Größen zu verwandeln, indem man $\frac{1}{x}$ für x setzt. Denn nennt man die Wurzeln der veränderten Gleichung p', q', r' rc., so hat man

 $\frac{1}{p'^m}$

$$\frac{1}{p'^m} + \frac{1}{q'^m} + \frac{1}{r'^m} + \text{rc.} = p^m + q^m + r^m + \text{rc.}$$

6.

Da

$$X = \alpha x^2 + \alpha' x^3 + \text{rc.}$$
$$X^2 = \beta x^4 + \beta' x^5 + \text{rc.}$$
$$X^3 = \gamma x^6 + \gamma' x^7 + \text{rc.}$$

ist (Nr. 3.) so erhellet, daß in dem Falle, wenn man $x = \frac{1}{y}$ setzt, und Y die Funktion von y bedeuten läßt, worin X verwandelt wird,

$$Y y^m = \alpha y^{m-2} + \alpha' y^{m-3} + \text{rc.}$$
$$\frac{d.Y^2 y^{m+1}}{dy} = (m-3)\beta y^{m-4} + (m-4)\beta' y^{m-5} + \text{rc.}$$
$$\frac{d^2.Y^3 y^{m+2}}{dy^2} = (m-4)(m-5)\gamma y^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma' y^{m-7} + \text{rc.}$$

ist. Hieraus folgt, daß man die Formel der angeführten Nummer auch auf diese Art ausdrucken kann

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \text{rc.}\right)$$
$$=$$
$$\frac{y^m}{m} + Y y^m + \frac{d.Y^2 y^{m+1}}{2dy} + \frac{d^2.Y^3 y^{m+2}}{2.3dy^2} + \text{rc.}$$

wenn man nach der Differenziation $\frac{b}{a}$ für y setzt und alle Glieder wegläßt, welche negative Potestäten von y oder $\frac{b}{a}$ enthalten würden. Auf diese Art lassen sich also die Summen der Wurzeln einer jeden Gleichung, und zwar dieser Wurzeln in jeder beliebigen Potestät sehr leicht finden.

§. 2.

§. 2.

Methode, die Wurzeln einer jeden Gleichung durch eine Reihe darzustellen.

7.

Wir wollen wieder die Gleichung

$$o = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{etc.} \ldots\ldots (A)$$

zur Hand nehmen, die Wurzeln derselben p, q, r, etc. nennen, und sehen, wie man den Werth einer jeden dieser Wurzeln insbesondere finden kann.

Es ist, wie wir im vorhergehenden §. gesehen haben,

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{etc.}$$

$$=$$

$$a\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \ldots\ldots (B)$$

Dividirt man diese Gleichung durch bx und verändert darin die Zeichen, so wird

$$1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \text{etc.}}{b}$$

$$=$$

$$-\frac{a}{bx}\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \ldots$$

$$=$$

$$\frac{a}{bp}\left(1 - \frac{p}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \ldots$$

Nimmt man ferner von beyden Seiten die Logarithmen, so wird

$$l\left(1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \text{etc.}}{b}\right)$$

$$=$$

 $l\frac{a}{bp}$

$$l\frac{a}{bp} + l(1 - \frac{p}{x}) + l(1 - \frac{x}{q}) + l(1 - \frac{x}{r}) + \text{ꝛc.} \ldots (C)$$

Setzt man demnach der Kürze wegen

$$X = \frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 - \text{ꝛc.}$$

und verwandelt $l(1 - \frac{X}{b})$, $l(1 - \frac{p}{x})$, $l(1 - \frac{x}{q})$, ꝛc. in Reihen, so ist nach Veränderung der Zeichen,

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$l\frac{bp}{a} + \frac{p}{x} + \frac{p^2}{2x^2} + \frac{p^3}{3x^3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ x(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{ꝛc.})$$

$$+ \frac{x^2}{2}(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{ꝛc.})$$

$$+ \frac{x^3}{3}(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{ꝛc.})$$

$$+ \text{ꝛc.} \ldots\ldots\ldots (D)$$

Nun muß diese Gleichung identisch seyn, da die Gleichung (B) es ist; und wenn man daher an die Stelle von X den Werth desselben, oder $\frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 + \text{ꝛc.}$ wieder setzt und dabey

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{ꝛc.} =$$

$$\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^2} + \text{ꝛc.}$$

$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.}$$

annimmt, so giebt die Vergleichung der Glieder

α =

$$\alpha = l\frac{bp}{a},\quad \beta = p,\quad \gamma = \frac{p^2}{2},\quad \delta = \frac{p^3}{3}\ \text{ꝛc.}$$

Auf diese Art lernt man also nicht nur den Werth der Wurzel p, sondern auch das Quadrat, den Cubus ꝛc., so wie auch den Logarithmen derselben kennen. Dieser Logarithme ist

$$lp = \alpha - l\frac{b}{a} = \alpha + l\frac{a}{b}.$$

8. Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung des zweyten Grades

$$a - bx + cx^2 = 0$$

gegeben. Hier ist

$$X = \frac{a}{x} + cx, \text{ folglich}$$

$$X^2 = \frac{a^2}{x^2} + 2ac + c^2x^2,$$

$$X^3 = \frac{a^3}{x^3} + \frac{3a^2c}{x} + 3ac^2x + c^3x^3$$

$$X^4 = \frac{a^4}{x^4} + \frac{4a^3c}{x^2} + 6a^2c^2 + 4ac^3x^3 + c^4x^4$$

ꝛc.

und also

$$\alpha = \frac{2ac}{2b^2} + \frac{4.3a^2c^2}{2.4b^4} + \frac{6.5.4a^3c^3}{2.3.6b^6} + \text{ꝛc.}$$

$$\beta = \frac{a}{b} + \frac{3a^2c}{3b^3} + \frac{5.4a^3c^2}{2.5b^5} + \frac{7.6.5a^4c^3}{2.3.7b^7} + \text{ꝛc.}$$

$$\gamma = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{4a^3c}{4b^4} + \frac{6.5a^4c^2}{2.6b^6} + \frac{8.7.6a^6c^3}{2.3.8b^8} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Setzt man demnach x in die Stelle von p, so wird

$$lx = l\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{5.4a^3c^3}{2.3b^6} + \text{ꝛc.}$$

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \frac{6.5a^4c^3}{2.3b^7} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3c}{b^4} + \frac{5a^4c^2}{2b^6} + \frac{7.6a^5c^3}{2.3b^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{a^3}{3b^3} + \frac{a^4c}{b^5} + \frac{6a^5c^2}{2b^7} + \frac{8.7a^6c^3}{2.3b^9} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

und überhaupt

$$\frac{x^m}{m} = \frac{a^m}{mb^m} + \frac{a^{m+1}c}{b^{m+2}} + \frac{(m+3)a^{m+2}c^2}{2b^{m+4}}$$
$$+ \frac{(m+5)(m+4)a^{m+3}c^3}{2.3.b^{m+6}} + \text{ꝛc.}$$

Löset man die gegebene Gleichung auf, so findet man

$$x = \frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2c}$$

und verwandelt man die Wurzelgröße in eine Reihe, so bekommt man

$$b - \frac{2ac}{b} - \frac{(2ac)^2}{2b^3} - \frac{1.3(2ac)^3}{2.3b^5} - \frac{1.3.5(2ac)^4}{2.3.4b^7} - \text{ꝛc.}$$

oder

$$b - 2\left(\frac{ac}{b} + \frac{a^2c^2}{b^3} + \frac{4a^3c^3}{2b^5} + \frac{6.5a^4c^4}{2.3b^7} + \text{ꝛc.}\right)$$

so daß die beyden Werthe von x sind

$$\frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{2b^5} - \frac{6.5a^4c^3}{2.3b^7} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \frac{6.5a^4c^3}{2.3b^7} + \text{ꝛc.}$$

Es ist aber dieser letzte Werth mit dem, welchen wir gefunden haben, durchaus einerley.

9.

Da die ganze Schwierigkeit hierbey in der Erfindung der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma,$ rc. der negativen Potestäten von x in $\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} +$ rc. (Nr. 7.) liegt, so wollen wir suchen, diese Erfindung so leicht und zugleich so allgemein zu machen als möglich ist. Zu dem Ende wiederhole ich, daß

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{rc.} = -\,l(1 - \frac{X}{b})$$

ist. Da nun

$$X = \frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 - \text{rc.}$$

ist, so wird, wenn man der Kürze wegen

$$\xi = \frac{cx - dx^2 + ex^3 - \text{rc.}}{b}$$

setzt

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{rc.} = -\,l(1 - \frac{a}{bx} - \xi)$$

$$=$$

$$-\,l(1 - \frac{a}{bx}) - l(1 - \frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}}).$$

Verwandelt man aber diese beyden Logarithmen in Reihen so erhält man

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{rc.}$$

$$=$$

$$\frac{a}{bx} + \frac{a^2}{2b^2x^2} + \frac{a^3}{3b^3x^3} + \text{rc.}$$

$$+ \frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}} + \frac{\xi^2}{2(1 - \frac{a}{bx})^2} + \frac{\xi^3}{3(1 - \frac{a}{bx})^3} + \text{rc.}$$

$=$

$$=$$

$$l\frac{bp}{a} + \frac{p}{x} + \frac{p^2}{2x^2} + \frac{p^3}{3x^3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ x\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{ꝛc.}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{ꝛc.}\right) + \text{ꝛc.} \ldots \ldots (E)$$

Man vergleiche hierbey Nr. 7. Nun ist, in eine Reihe verwandelt,

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{bx}} = 1 + \frac{a}{bx} + \frac{a^2}{b^2x^2} + \frac{a^3}{b^3x^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{(1 - \frac{a}{bx})^2} = 1 + \frac{2a}{bx} + \frac{3a^2}{b^2x^2} + \frac{4a^3}{b^3x^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{(1 - \frac{a}{bx})^3} = \tfrac{1}{2}\left(1.2 + \frac{2.3a}{bx} + \frac{3.4.a^2}{b^2x^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

Setzt man demnach allgemein

$$\xi = \pi + \pi'x + \pi''x^2 + \pi'''x^3 + \text{ꝛc.}$$
$$\xi^2 = \varrho + \varrho'x + \varrho''x^2 + \varrho'''x^3 + \text{ꝛc.}$$
$$\xi^3 = \sigma + \sigma'x + \sigma''x^2 + \sigma'''x^3 + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

so findet man, indem man von eben den Gliedern, welche positive Potestäten von x enthalten würden, abstrahirt,

$$\frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}} = \pi + \pi'\frac{a}{b} + \pi''\frac{a^2}{b^2} + \pi'''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{1}{x}\left(\pi\frac{a}{b} + \pi'\frac{a^2}{b^2} + \pi''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

+

$$+ \frac{1}{x^2}\left(\pi\frac{a^2}{b^2} + \pi'\frac{a^3}{b^3} + \pi''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\xi^2}{2\left(1 - \frac{a}{bx}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\left(\rho + 2\rho'\frac{a}{b} + 3\rho''\frac{a^2}{b^2} + 4\rho'''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2x}\left(2\rho\frac{a}{b} + 3\rho'\frac{a^2}{b^2} + 4\rho''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2x^2}\left(3\rho\frac{a^2}{b^2} + 4\rho'\frac{a^3}{b^3} + 5\rho''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\xi^3}{3\left(1 - \frac{a}{bx}\right)^3} = \frac{1}{2.3}\left(1.2\sigma + 2.3\sigma'\frac{a}{b} + 3.4\sigma''\frac{a^2}{b^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3x}\left(2.3\sigma\frac{a}{b} + 3.4\sigma'\frac{a^2}{b^2} + 4.5\sigma''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3x^2}\left(3.4\sigma\frac{a^2}{b^2} + 4.5\sigma'\frac{a^3}{b^3} + 5.6\sigma''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

und so ferner.

Bringt man daher diese Werthe in die Gleichung (E) und vergleicht die Glieder, worin x^0, x^{-1}, x^{-2} ꝛc., vorkommt, so findet man, weil $l\frac{bp}{a} = lp - l\frac{a}{b}$ ist,

$$lp = l\frac{a}{b} + \pi + \pi'\frac{a}{b} + \pi''\frac{a^2}{b^2} + \pi'''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\rho + 2\rho'\frac{a}{b} + 3\rho''\frac{a^2}{b^2} + 4\rho'''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left(1.2\sigma + 2.3\sigma'\frac{a}{b} + 3.4\sigma''\frac{a^2}{b^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}\left(1.2.3\tau + 2.3.4\tau'\frac{a}{b} + 3.4.5\tau''\frac{a^2}{b^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

p =

$$p = \frac{a}{b} + \pi\frac{a}{b} + \pi'\frac{a^2}{b^2} + \pi''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(2\rho\frac{a}{b} + 3\rho'\frac{a^2}{b^2} + 4\rho''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 3}\left(2.3\sigma\frac{a}{b} + 3\cdot 4\sigma'\frac{a^2}{b^2} + 4\cdot 5\sigma''\frac{a^3}{b^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

$$p^2 = \frac{a^2}{b^2} + 2\left(\pi\frac{a^2}{b^2} + \pi'\frac{a^3}{b^3} + \pi''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{2}{2}\left(3\rho\frac{a^2}{b^2} + 4\rho'\frac{a^3}{b^3} + 5\rho''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{2}{2\cdot 3}\left(3\cdot 4\sigma\frac{a^2}{b^2} + 4\cdot 5\sigma'\frac{a^3}{b^3} + 5\cdot 6\sigma''\frac{a^4}{b^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

$$p^3 = \frac{a^3}{b^3} + 3\left(\pi\frac{a^3}{b^3} + \pi'\frac{a^4}{b^4} + \pi''\frac{a^5}{b^5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{2}{3}\left(4\rho\frac{a^3}{b^3} + 5\rho'\frac{a^4}{b^4} + 6\rho''\frac{a^5}{b^5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{3}{2\cdot 3}\left(4.5\sigma\frac{a^3}{b^3} + 5\cdot 6\sigma'\frac{a^4}{b^4} + 6\cdot 7\sigma''\frac{a^5}{b^5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

und so ferner.

10.

Da man nun

$$\xi = \pi + \pi'x + \pi''x^2 + \text{ꝛc.}$$
$$\xi^2 = \rho + \rho'x + \rho''x^2 + \text{ꝛc.}$$
$$\xi^3 = \sigma + \sigma'x + \sigma''x^2 + \text{ꝛc.}$$

und so ferner angenommen hat, so ist leicht einzusehen, daß wenn $x = \frac{a}{b}$ gesetzt wird

$$lp = lx + \xi + \frac{d.\xi^2 x}{2dx} + \frac{d^2.\xi^3 x^2}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}$$

$$p = x + \xi x + \frac{d.\xi^2 x^2}{2dx} + \frac{d^2.\xi^3 x^3}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}$$

$$p^2 = x^2 + 2(\xi x^2 + \frac{d.\xi^2 x^3}{2dx} + \frac{d^3.\xi^3 x^4}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}$$

$$p^3 = x^3 + 3(\xi x^3 + \frac{d.\xi^2 x^4}{2dx} + \frac{d^2.\xi^3 x^5}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

und überhaupt

$$p^m = x^m + m(\xi x^m + \frac{d.\xi^2 x^{m+1}}{2dx} + \frac{d^2.\xi^3 x^{m+2}}{2.3dx^2} + \text{ꝛc.}) \quad \ldots . (F)$$

ist

Auf diese Art ist p eine Wurzel der Gleichung $0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{ꝛc.}$, oder da $\xi = \frac{cx - dx^2 + \text{ꝛc.}}{b}$, von der Gleichung

$$a - bx + bx\xi = 0$$

wo ξ eine Funktion von x ist.

II. Zweytes Exempel.

Es sey z. B. die Gleichung

$$a - bx + cx^n = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist $bx\xi = cx^n$, und folglich $\xi = \frac{cx^{n-1}}{b}$. Läßt man daher p eine Wurzel von dieser Gleichung seyn, so ist überhaupt

$$p^m = x^m + m(\frac{cx^{m+n-1}}{b} + \frac{c^2 d.x^{m+2n-1}}{2b^2 dx} + \frac{c^3 d^2.x^{m+3n-1}}{2.3b^3 dx^2} + \text{ꝛc.})$$

 wenn

wenn man nach der Differenziation $\frac{a}{b}$ für x setzt. Also hat man, wenn man x für p setzt

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m(\frac{c a^{m+n-1}}{b^{m+n}} + \frac{(m+2n-1)c^2 a^{m+2n-2}}{2 b^{m+2n}}$$

$$+ \frac{(m+3n-1)(m+3n-2)c^3 a^{m+3n-3}}{2 \cdot 3 b^{m+3n}}$$

$$+ \frac{(m+4n-1)(m+4n-2)(m+4n-3)c^4 a^{m+4n-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 b^{m+4n}}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Wenn man $x = \frac{1}{y}$ setzt, so daß man die Gleichung

$$a y^n - b y^{n-1} + c = 0$$

hat, so wird $y^m = x^{-m}$, und um y^m zu finden braucht man folglich in der vorhergehenden Formel nur m negativ zu nehmen. Auf diese Art findet man

$$y^m = \frac{b^m}{a^m} - m(\frac{c b^{m-n}}{a^{m-n+1}} - \frac{(m-2n+1)c^2 b^{m-2n}}{2 a^{m-2n+2}}$$

$$+ \frac{(m-3n+1)(m-3n+2)c^3 b^{m-3n}}{2 \cdot 3 a^{m-3n+3}} - \text{ꝛc.}$$

Diese letzte Formel hat mir vor einiger Zeit Hr. Lambert allein ohne Beweis mitgetheilt.

12. Drittes Exempel.

Es sey folgende Gleichung von vier Gliedern gegeben

$$a - bx + cx^n - x^r = 0.$$

Setzt man $bxz = cx^n - x^r$, und folglich

$$z = \frac{cx^{n-1} - x^{r-1}}{b}$$

so wird

$$z^2 = \frac{c^2 x^{2n-2} - 2cx^{n+r-2} + x^{2r-2}}{b^2}$$

$z^3 =$

$$\xi^3 = \frac{c^3x^{3n-3} - 3c^2x^{2n+r-3} + 3cx^{n+2r-3} - x^{3r-3}}{b^3}$$

ꝛc.

und also, wenn man x an die Stelle von p bringt,

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m\left(\frac{ca^{m+n-1}}{b^{m+n}} - \frac{a^{m+r-1}}{b^{m+r}}\right)$$

$$+ \frac{m}{2}\left(\frac{(m+2n-1)c^2a^{m+2n-2}}{b^{m+2n}} - 2\frac{(m+n+r-1)ca^{m+n+r-2}}{b^{m+n+r}}\right.$$

$$\left. + \frac{(m+2r-1)a^{m+2r-2}}{b^{m+2r}}\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3}\left(\frac{(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{m+3n-3}}{b^{m+3n}}\right.$$

$$- 3\frac{(m+2n+r-1)(m+2n+r-2)c^2a^{m+2n+r-3}}{b^{m+2n+r}}$$

$$+ 3\frac{(m+n+2r-1)(m+n+2r-2)ca^{m+n+2r-3}}{b^{m+n+2r}}$$

$$\left. - \frac{(m+3r-1)(m+3r-2)a^{m+3-3}}{b^{m+3r}}\right)$$

$+$ ꝛc.

14. Viertes Exempel.

Es sey die allgemeine Gleichung

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{ꝛc.} = 0$$

gegeben. Hier ist $bx\xi = cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{ꝛc.}$, und folglich

$$\xi = \frac{cx - dx^2 + ex^3 - fx^4 + \text{ꝛc.}}{b}$$

$$\xi^2 = \frac{c^2x^2 - 2cdx^3 + (d^2 + 2ce)x^4 - \text{ꝛc.}}{b^2}$$

$$\xi^3 = \frac{c^3x^3 - 3cdx^4 + \text{ꝛc.}}{b^3}$$

$$z^4 = \frac{c^4x^4 - \text{rc.}}{b^4}$$

rc.

Also

$$x^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$+ m\left(\frac{a^{m+1}c}{b^{m+2}} - \frac{a^{m+2}d}{b^{m+3}} + \frac{a^{m+3}e}{b^{m+4}} - \frac{a^{m+4}f}{b^{m+5}} + \text{rc.}\right)$$

$$+ \frac{m}{2}\left(\frac{(m+3)a^{m+2}c^2}{b^{m+4}} - \frac{(m+4)a^{m+3}2cd}{b^{m+5}}\right.$$

$$\left. + \frac{(m+5)a^{m+4}(a^2+2ce)}{b^{m+6}} - \text{rc.}\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3}\left(\frac{(m+5)(m+4)a^{m+3}c^3}{b^{m+6}} - \frac{(m+6)(m+5)a^{m+4}3cd}{b^{m+7}} + \text{rc.}\right)$$

$$+ \frac{m}{2.3.4}\left(\frac{(m+7)(m+6)(m+5)a^{m+4}c^4}{b^{m+8}} - \text{rc.}\right)$$

$$+ \text{rc.}$$

Wenn $m = 1$ ist, so hat man die bekannte Newtonianische Formel

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} - \frac{a^3d}{b^4} + \frac{a^4fe}{b^5} - \frac{a^6f}{b^6} + \text{rc.}$$

$$+ \frac{2a^3c^2}{b^5} - \frac{5a^4cd}{b^6} + \frac{3a^5(d^2+2ce)}{b^7} - \text{rc.}$$

$$+ \frac{5a^4c^3}{b^7} - \frac{21a^5cd}{b^8} + \text{rc.}$$

$$+ \frac{14a^5c^4}{b^9} + \text{rc.}$$

$$+ \text{rc.}$$

14.

Nun wollen wir die allgemeine Gleichung

$$\alpha - x + \varphi x = 0$$

betrach-

betrachten, wo φx irgend eine Funktion von x bedeutet. Vergleicht man diese Gleichung mit $a - bx + bx\xi = 0$ Nr 10. oder mit $\frac{a}{b} - x + x\xi = 0$: so hat man $\alpha = \frac{a}{b}$ und $\xi = \frac{\varphi x}{x}$. Bedeutet demnach p eine Wurzel von der gegebenen Gleichung, so ist aus der Formel (F) der angeführten Nummer

$$p^m = x^m + m(x^{m-1}\varphi x + \frac{d.x^{m-1}(\varphi x)^2}{2dx}$$
$$+ \frac{d^2.x^{m-1}(\varphi x)^3}{2.3dx^2} + \text{rc.})$$

wenn man nach der Differenziation $x = \alpha$ setzt

Da nun $mx^{m-1} = \frac{d.x^m}{dx}$ ist, so läßt sich die vorhergehende Formel auch auf diese Art ausdrucken:

$$p^m = x^m + \frac{d.x^m}{dx}\varphi x + \frac{d.\frac{d.x^m}{dx}(\varphi x)^2}{2dx} +$$
$$\frac{d^2.\frac{d.x^m}{dx}(\varphi x)^3}{2.3dx^2} + \text{rc.}$$

Hieraus fließt auf eine leichte Art, daß eine jede Funktion von p, z. B. ψp durch folgende Reihe ausgedruckt wird

$$\psi p = \psi x + \frac{d.\psi x}{dx}\varphi x + \frac{d.\frac{d.\psi x}{dx}(\varphi x)^2}{2dx}$$
$$+ \frac{d^2.\frac{d.\psi x}{dx}(\varphi x)^3}{2.3dx^2} + \text{rc.}$$

wofern man, wie gesagt, nach der Differenziation α für x setzt. Auf diese Art gelangt man zu folgendem, wegen seiner Simplicität und Allgemeinheit merkwürdigen Lehrsatze.

15. Lehrsatz.

Es sey die Gleichung

$$\alpha - x + \varphi x = 0 \ldots . (H)$$

gegeben, und φx bedeute darin irgend eine Funktion von x. Ferner sey p eine von den Wurzeln dieser Gleichung, und dabey werde nach dem Werthe jeder Funktion von p, z. B. ψp gefragt. Bezeichnet man der Kürze wegen die Größe $\frac{d.\psi x}{dx}$ durch $\psi' x$, so hat man allgemein

$$\psi p = \psi x + \varphi x \psi' x + \frac{d.(\varphi x)^2 \psi' x}{2dx} + \frac{d^2.(\varphi x)^3 \psi' x}{2.3dx^2}$$
$$+ \frac{d^3.(\varphi x)^4 \psi' x}{2.3.4dx^3} + \text{ꝛc.} \ldots \ldots . (I)$$

wo man statt x nach der Differenziation α setzen muß.

16.

Wenn man $x = \alpha y$ setzt, so daß die Gleichung (H) in folgende $1 - y + \frac{\phi(\alpha y)}{\alpha} = 0$ übergeht, und q den Werth von y bedeutet: so erhält man den Ausdruck für die Funktion ψq, wenn man in der Formel (I) q anstatt p, y anstatt x und $\frac{\phi(\alpha y)}{\alpha}$ anstatt φx setzt, und nach der Differenziation $y = 1$ annimmt.

Da also $q = y = \frac{x}{\alpha}$, so ist

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi y + \frac{\varphi(\alpha y)\psi' y}{\alpha} + \frac{d.\varphi(\alpha y)^2 \psi' y}{2\alpha^2 dy}$$
$$+ \frac{d^2.\varphi(\alpha y)^3 \psi' y}{2.3\alpha^3 dy^2} + \frac{d^3.\varphi(\alpha y)^4 \psi' y}{2.3.4\alpha^4 dy^3}$$
$$+ \text{ꝛc.} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (K)$$

wo nach der Differenziation $y = 1$ genommen werden muß.

17.

Da also $\psi y = \int \psi' y \, dy$ ist, so bekommt man den Werth von $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, wo x eine Wurzel der Gleichung (H) ist, wenn man den Bruch

$$\frac{\psi' y}{z\left(1 - z\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}\right)}$$

nach den Potestäten von z entwickelt, wodurch man

$$\frac{\psi' y}{z} + \frac{\varphi(\alpha y)\psi' y}{\alpha} + z\frac{\varphi(\alpha y)^2 \psi' y}{\alpha^2} + z^2\frac{\varphi(\alpha y)^3 \psi' y}{\alpha^3} + \text{ꝛc.}$$

bekommt, dann $\frac{1}{z}$ in $\int dy$, z in $\frac{d}{2dy}$, z^2 in $\frac{d^2.}{2.3dy^2}$, z^3 in $\frac{d^3.}{2.3.4dy^3}$ verwandelt, und, nachdem man alle angezeigten Differenziationen vorgenommen hat, $y = 1$ annimmt.

Man kann aber die Reihe, welche den Werth von $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ ausdruckt, nach jedem beliebigen Buchstaben ordnen, denn es ist dazu weiter nichts erforderlich, als die Reihe, welche aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1 - z\frac{\varphi(\alpha x)}{\alpha}}$

 ent=

entspringt, nach eben dem Buchstaben zu ordnen. Folgende Exempel werden dieses zeigen.

18. Fünftes Exempel.

Nimmt man wieder die allgemeine Gleichung

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.}$$

zur Hand, und vergleichet dieselbe mit der Gleichung (H), so hat man nach der Division durch b

$$\alpha = \frac{a}{b},\quad \varphi x = \frac{cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.}}{b}$$

Folglich ist

$$\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha} = \frac{cay^2}{b^2} - \frac{da^2y^3}{b^3} + \frac{ea^3y^4}{b^4} - \frac{fa^4y^5}{b^5} + \text{etc.}$$

und der Bruch

$$\frac{1}{1 - z\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}} =$$

$$\frac{1}{1 - z\frac{cay^2}{b^2} + z\frac{da^2y^3}{b^3} - z\frac{ea^3y^4}{b^4} + \text{etc.}}$$

Verwandelt man diesen Bruch in eine Reihe, und setzt man dabey voraus, daß die Reihe nach dem Buchstaben b geordnet sey, so erhellet, da y und $\frac{1}{b}$ allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, daß die Form der Reihe folgende seyn wird

$$1 + \frac{Py^2}{b^2} - \frac{Qy^3}{b^3} + \frac{Ry^4}{b^4} - \frac{Sy^5}{b^5} + \text{etc.}$$

Multiplicirt man demnach übers Creuz, und vergleicht darauf die Glieder, so findet man

P =

$$P = zcz$$
$$Q = a^2dz$$
$$R = a^3ez + aczP$$
$$S = a^3fz + a^2dzP + aczQ$$
$$T = a^5gz + a^3czP + a^2dzQ + aczR$$
$$\text{rc.}$$

Entwickelt man nun diese Werthe und ordnet dabey dieselben nach z, so erkennt man leicht, daß sie sich auf folgende Art ausdrucken lassen

$$P = Az$$
$$Q = Bz$$
$$R = Cz + C'z^2$$
$$S = Dz + D'z^2$$
$$T = Ez + E'z^2 + E''z^3$$
$$\text{rc.}$$

und findet dabey

$$A = ac$$
$$B = a^2d$$
$$C = a^3e,\ C' = acA$$
$$D = a^4f,\ D' = a^2dA + acB$$
$$E = a^5g,\ E' = a^3eA + a^2dB + acC,\ E'' = acC'$$
$$\text{rc.}$$

Folglich wird

$$\frac{\psi'y}{z\left(1 - \frac{z\phi(\alpha y)}{\alpha}\right)} = \frac{\psi'y}{z} + \frac{A}{b^2}y^2\psi'y - \frac{B}{b^3}y^3\psi'y$$
$$+ \frac{C + C'z}{b^4}y^4\psi'y - \frac{D + D'z}{b^5}y^5\psi'y$$
$$+ \frac{E + E'z + E''z^2}{b^6}y^6\psi'y - \text{rc.}$$

Verwandelt man demnach $\frac{1}{z}$ in $\int dy$, z in $\frac{d}{2dy}$ rc. (Nummer 17.), so bekommt man

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{bx}{a}\right) = \psi y & \\ & + \frac{A}{b^2}y^2\psi'y \\ & - \frac{B}{b^3}y^3\psi'y \\ & + \frac{C}{b^4}y^4\psi'y + \frac{C'}{b^4}\cdot\frac{d.y^4\psi'y}{2dy} \\ & - \frac{D}{b^5}y^5\psi'y - \frac{D'}{b^5}\cdot\frac{d.y^5\psi'y}{2dy} \\ & + \frac{E}{b^6}y^6\psi'y + \frac{E'}{b^6}\cdot\frac{d.y^6\psi'y}{2dy} \\ & \qquad\qquad + \frac{E''}{b^6}\cdot\frac{d^2.y^6\psi'y}{2.3dy^2} \\ & - \text{rc.}\end{aligned}$$

wo man nur nach der Differenziation $y = 1$ zu nehmen hat.

Da die Coefficienten A, B, C, rc. den Buchstaben b nicht in sich schließen, so ist klar, daß diese Reihe nach den negativen Potestäten von b geordnet ist.

Setzt man $\psi y = y^n$, wodurch $\psi'y = my^{m-1}$ wird, so bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{b^m x^m}{a^m} = 1 & \\ & + \frac{mA}{b^2} \\ & - \frac{mB}{b^3} \\ & + \frac{mC + \frac{m(m+3)}{2}C'}{b^4}\end{aligned}$$

—

$$- \frac{mD + \frac{m(m+4)}{2}D'}{b^5}$$

$$+ \frac{mE + \frac{m(m+5)}{2}E' + \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3}E''}{b^6}$$

$$- \text{rc.}$$

Setzt man $\psi y = ly$, so wird $\psi' y = \frac{1}{y}$ und

$$l\frac{bx}{a} = 1$$
$$+ \frac{A}{b^2}$$
$$- \frac{B}{b^3}$$
$$+ \frac{C + \frac{3}{2}C'}{b^4}$$
$$- \frac{D + \frac{4}{2}D'}{b^5}$$
$$+ \frac{E + \frac{5}{2}E' + \frac{4.5}{2.3}E''}{b^6}$$
$$- \text{rc.}$$

19.

Die gefundenen Reihen sind nach den Potestäten von b geordnet; wollte man sie nach dem Buchstaben a ordnen, so dürfte man nur auf eben diese Art die Reihe ordnen, welche aus diesem Bruche sich ergiebt

$$\frac{1}{1 - z\frac{cay^2}{b^2} + z\frac{da^2y^3}{b^3} - z\frac{ea^3y^4}{b^4} + \text{rc.}}$$

Da

Da nun darin jede Potestät von a durch eine gleiche Potestät von $\frac{y}{b}$ multiplicirt ist, so fällt in die Augen, daß die Form dieser Reihe

$$1 + P\frac{ay}{b} + Q\frac{a^2y^2}{b^2} + R\frac{a^3y^3}{b^3} + S\frac{a^4y^4}{b^4} + \text{etc.}$$

seyn wird, und dabey ergiebt sich

$$P = \frac{czy}{b}$$

$$Q = P\frac{czy}{b} - \frac{dzy}{b}$$

$$R = Q\frac{czy}{b} - P\frac{dzy}{b} + \frac{ezy}{b}$$

$$S = R\frac{czy}{b} - Q\frac{dzy}{b} + P\frac{ezy}{b} - \frac{fzy}{b}$$

$$\text{etc.}$$

Entwickelt man nun diese Werthe nach den Dimensionen von $\frac{zy}{b}$, so lassen sich dieselben auf folgende Art ausdrucken

$$P = A\frac{zy}{b}$$

$$Q = B\frac{zy}{b} + B'\left(\frac{zy}{b}\right)^2$$

$$R = C\frac{zy}{b} + C'\left(\frac{zy}{b}\right)^2 + C''\left(\frac{zy}{b}\right)^3$$

$$S = D\frac{zy}{b} + D'\left(\frac{zy}{b}\right)^2 + D''\left(\frac{zy}{b}\right)^3 + D'''\left(\frac{zy}{b}\right)^4$$

$$\text{etc.}$$

und man hat daher

$$A = c$$

$$B = -d$$

$$C = e$$

$$D = -f$$

$$\text{etc.}$$

B' =

$$B' = cA$$
$$C' = -dA + cB$$
$$D' = eA - dB + cC$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$C'' = cB'$$
$$D'' = -dB' + cC'$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$D''' = cC''$$
$$\text{ꝛc.}$$

Folglich bekommt man

$$\frac{\psi'y}{z\left(1 - \frac{z\phi(\alpha y)}{\alpha}\right)} = \frac{\psi'y}{z} + a\frac{Ay^2}{b^2}\psi'y$$
$$+ a^2\left(\frac{By^3}{b^3} + \frac{B'zy^4}{b^4}\right)\psi'y$$
$$+ a^3\left(\frac{Cy^4}{b^4} + \frac{C'zy^5}{b^5} + \frac{C''zy^6}{b^6}\right)\psi'y$$
$$+ a^4\left(\frac{Dy^5}{b^5} + \frac{D'zy^6}{b^6} + \frac{D''z^2y^7}{b^7} + \frac{D'''z^3y^8}{b^8}\right)\psi'y$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Auf diese Art wird die allgemeine Formel (Nr. 17.)

$$\psi\left(\frac{bx}{a}\right) = \psi y$$
$$+ a\frac{A}{b^2}y^2\psi'y$$
$$+ a^2\left(\frac{B}{b^3}y^3\psi'y + \frac{B'}{b^4}\cdot\frac{d.y^4\psi'y}{2dy}\right)$$
$$+ a^3\left(\frac{C}{b^4}y^4\psi'y + \frac{C'}{b^5}\cdot\frac{d.y^5\psi'y}{2dy} + \frac{C''}{b^6}\cdot\frac{d^2y^6\psi'y}{2.3dy^2}\right)$$
$$+ a^4$$

$$+ a^4\left(\frac{D}{b^5}y^5\psi'y + \frac{D'}{b^6}\cdot\frac{d\,y^6\psi'y}{2dy} + \frac{D''}{b^7}\cdot\frac{d.y^7\psi'y}{2.3dy^2}\right.$$

$$\left. + \frac{D'''}{b^8}\cdot\frac{d.y^3\psi'y}{2.3.4dy^3}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

wo nach der Differenziation $y = 1$ gesetzt werden muß.

Es sey z. B. $\psi y = y^m$ und also $\psi' y = my^{m-1}$, so bekommt man

$$\frac{b^m x^m}{x^m} = 1$$

$$+ \frac{mA}{b}\cdot\frac{a}{b}$$

$$+ \left(\frac{mB}{b} + \frac{m(m+3)B'}{2b^2}\right)\frac{a^2}{b^2}$$

$$+ \left(\frac{mC}{b} + \frac{m(m+4)C'}{2b^2} + \frac{m(m+4)(m+5)C''}{2.3b^3}\right)\frac{a^3}{b^3}$$

$$+ \left(\frac{mD}{b} + \frac{m(m+5)D'}{2b^2} + \frac{m(m+5)(m+6)D''}{2.3b^3}\right.$$

$$\left. + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^4}{b^4}$$

$$+ \text{etc.}$$

Setzt man daher $m = 1$ und multiplicirt mit $\frac{a}{b}$, so wird

$$x = \frac{a}{b}$$

$$+ \frac{A}{b}\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$+ \left(\frac{B}{b} + \frac{4B'}{2b^2}\right)\frac{a^3}{b^3}$$

$$+ \left(\frac{C}{b} + \frac{5C'}{2b^2} + \frac{5.6C''}{2.3b^2}\right)\frac{a^4}{b^4}$$

+

$$+ \left(\frac{D}{b} + \frac{6D'}{2b^2} + \frac{6.7D''}{2.3b^3} + \frac{6.7.8D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^5}{b^5}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

und wenn man $\psi y = ly$ setzt, so wird, weil $ly = 0$ ist, wenn $y = 1$ genommen wird,

$$l\frac{bx}{a} = \frac{A}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

$$+ \left(\frac{B}{b} + \frac{3B'}{2b^2}\right)\frac{a^2}{b^2}$$

$$+ \left(\frac{C}{b} + \frac{4C'}{2b^2} + \frac{4.5C''}{2.3b^3}\right)\frac{a^3}{b^3}$$

$$+ \left(\frac{D}{b} + \frac{5D'}{2b^2} + \frac{5.6D''}{2.3b^3} + \frac{5.6.7D'''}{2.3.4b^4}\right)\frac{a^4}{b^4}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Uebrigens sind die Werthe von x^m, welche wir hier und in der vorhergehenden Nummer gefunden haben, im Grunde eben die, welche wir oben im 4ten Exempel bekamen; allein hier ist ihre Form einfacher und bequemer, insbesondere im letzten Falle, und man nimmt dabey sehr leicht das Fortschreitungsgesetz wahr, so daß die Berechnung der verschiedenen Glieder und ihre Fortsetzung, so weit man will, sehr leicht ist.

20. Sechstes Exempel.

Es sey die Gleichung

$$0 = \alpha - x + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{ꝛc.}$$

gegeben. Vergleicht man dieselbe mit der Gleichung (H) Nr. 15., so hat man

$$\phi x = \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{ꝛc.}$$

folglich

$$\frac{\phi(\alpha y)}{\alpha} = \beta\alpha^{p-1}y^p + \gamma\alpha^{p+q-1}y^{p+q} + \delta x^{p+2q-1}y^{p+2q}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

und

und

$$\frac{1}{1 - z\frac{\phi(\alpha y)}{\alpha}} =$$

$$\frac{1}{1 - \beta\alpha^{p-1}y^{p}z - \gamma\alpha^{p+q-1}y^{p+q}z - \text{ꝛc.}}$$

Es sey der Kürze wegen $\alpha^{p-q-1}y^{p-q}z = u$, so hat man den Bruch

$$\frac{1}{1 - \beta u(\alpha y)^{q} - \gamma u(\alpha y)^{2q} - \delta u(\alpha y)^{3q} - \text{ꝛc.}}$$

Entwickelt man denselben nach den Potestäten von αy, so bekommt man dadurch

$$1 + P(\alpha y)^{q} + Q(\alpha y)^{2q} + R(\alpha y)^{3q} + S(\alpha y)^{4q} + \text{ꝛc.}$$

und dabey

$$P = \beta u$$
$$Q = P\beta u + \gamma u$$
$$R = Q\beta u + P\gamma u + \delta u$$
$$S = R\beta u + Q\gamma u + P\delta u + \varepsilon u$$
ꝛc.

Entwickelt man von neuem diese Werthe nach den Potestäten von u, so erhält man

$$P = Au$$
$$Q = Bu + B'u^{2}$$
$$R = Cu + C'u^{2} + C''u^{3}$$
$$S = Du + D'u^{2} + D''u^{3} + D'''u^{4}$$
$$T = Eu + E'u^{2} + E''u^{3} + E'''u^{4} + E''''u^{5}$$
ꝛc.

wenn die Coefficienten A, B, C, ꝛc. auf die Art bestimmt werden, daß

$$A = \beta$$
$$B = \gamma,\quad B' = \beta A$$
$$C = \delta,\quad C' = \gamma A + \beta B,\quad C'' = \beta B'$$

D =

$$D = \varepsilon,\ D' = \delta A + \gamma B + \beta C,\ D'' = \beta B' + \beta C',\ D''' = \beta C''$$

$$E = \zeta,\ E' = \varepsilon A + \delta B + \gamma C + \beta D,\ E'' = \delta B' + \gamma C' + \beta D',\ E''' = \gamma C'' + \beta D'',\ E'''' = \beta D'''$$

rc.

ist. Setzt man demnach wieder an die Stelle von u den Werth desselben, so wird

$$\frac{\psi' y}{z\left(1 - z\frac{\phi(\alpha y)}{\alpha}\right)} = \frac{\psi' y}{z} + A\alpha^{p-1}y^{p}\psi' y$$
$$+ B\alpha^{p+q-1}y^{p+q}\psi' y + B'\alpha^{2p-2}zy^{2p}\psi' y$$
$$+ C\alpha^{p+2q-1}y^{p+2q}\psi' y + C'\alpha^{2p+q-2}zy^{2p+q}\psi' y$$
$$+ C''\alpha^{3p-3}z^{2}y^{3p}\psi' y$$
$$+ \text{rc.}$$

Verwandelt man dieses Resultat nach den Vorschriften der 17ten Nummer, so bekommt man den Werth von $\psi(\frac{x}{\alpha})$ durch folgende Reihe ausgedruckt, wo man aber nicht vergessen muß, nach Vollbringung aller angezeigten Differenziationen $y = 1$ zu setzen.

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi y$$
$$+ A\alpha^{p-1}y^{p}\psi' y$$
$$+ B\alpha^{p+q-1}y^{p+q}\psi' y + B'\alpha^{2p-2}.\frac{d.y^{2p}\psi' y}{2dy}$$
$$+ C\alpha^{p+2q-1}y^{p+2q}\psi' y + C'\alpha^{2p+q-2}.\frac{d.y^{2p+q}\psi' y}{2dy}$$
$$+ C''\alpha^{3p-3}.\frac{d^{2}.y^{3p}\psi' y}{2.3dy^{2}}$$
$$+ D\alpha^{p+3q-1}y^{p+3q}\psi' y + D'\alpha^{2p+2q-2}$$
$$\frac{d.y^{2p+2q}\psi' y}{2dy} + D''\alpha^{3p+q-3}.\frac{d^{2}.y^{3p+q}\psi' y}{2.3dy^{3}}$$
$$+ D'''\alpha^{4p-4}.\frac{d^{3}.y^{4p}\psi' y}{2.3.4dy^{3}}$$

$$+ E\alpha^{p+4q-1}y^{p+4q}\psi'y + E'\alpha^{2p+3q-2}.\frac{d\,y^{2p+3q}\psi'y}{2dy}$$

$$+ E''\alpha^{3p+2q-3}.\frac{d^2.y^{3p+2q}\psi'y}{2.3dy^2}$$

$$+ E'''\alpha^{4p+q-4}.\frac{d^3\,y^{3p+q}\psi'y}{2.3.4dy^3}$$

$$+ E''''\alpha^{5p-5}.\frac{d^4.y^{5p}\psi'y}{2.3.4.5dy^4}$$

$+$ ꝛc.

Setzt man $\psi y = y^m$, wodurch $\psi' y = my^{m-1}$ wird, so bekommt man

$$\frac{x^m}{\alpha^m} = 1$$

$$+ mA\alpha^{p-1}$$

$$+ mB\alpha^{p+q-1} + \frac{m(m+2p-1)}{2}B'\alpha^{2p-2}$$

$$+ mC\alpha^{p+2q-1} + \frac{m(m+2p+q-1)}{2}C'\alpha^{2p+q-2}$$

$$+ \frac{m(m+3p-1)(m+3p-2)}{2.3}C''\alpha^{3p-3}$$

$$+ mD\alpha^{p+3q-1} + \frac{m(m+2p+2q-1)}{2}D'\alpha^{2p+2q-2}$$

$$+ \frac{m(m+3p+q-1)(m+3p+q-2)}{2.3}D''\alpha^{3p+q-3}$$

$$+ \frac{m(m+4p-1)(m+4p-2)(m+4p-3)}{2.3.4}D'''\alpha^{4p-4}$$

$$+ mE\alpha^{p+4q-1} + \frac{m(m+2p+3q-1)}{2}E'\alpha^{2p+3q-2}$$

$$+ \frac{m(m+3p+2q-1)(m+3p+2q-2)}{2.3}E''\alpha^{3p+2q-3}$$

$+$

$$+\frac{m(m+4p+q-1)(m+4p+q-2)(m+4p+q-3)}{2\cdot3\cdot4}E'''\alpha^{4p+q-4}$$

$$+\frac{m(m+5p-1)(m+5p-2)(m+5p-3)(m+5p-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}E''''\alpha^{5p-5}$$

$+$ ꝛc.

und setzt man $\psi y = ly$, so bekommt man, weil $ly = 0$ ist,

$$\begin{aligned}
l\frac{x}{\alpha} = {} & A\alpha^{p-1} \\
& + B\alpha^{p+q-1} + \frac{2p-1}{2}B'\alpha^{2p-2} \\
& + C\alpha^{p+2q-1} + \frac{2p+q-1}{2}C'\alpha^{2p+q-2} \\
& \quad + \frac{(3p-1)(3p-2)}{2\cdot3}C''\alpha^{3p-3} \\
& + D\alpha^{p+3q-1} + \frac{2p+2q-1}{2}D'\alpha^{2p+2q-2} \\
& \quad + \frac{(3p+q-1)(3p+q-2)}{2\cdot3}D''\alpha^{3p+q-3} \\
& \quad + \frac{(4p-1)(4p-2)(4p-3)}{2\cdot3\cdot4}D'''\alpha^{4p-4} \\
& + E\alpha^{p+4q-1} + \frac{2p+3q-1}{2}E'\alpha^{2p+3q-2} \\
& \quad + \frac{(3p+2q-1)(3p+2q-2)}{1\cdot3}E''\alpha^{3p+2q-3} \\
& \quad + \frac{(4p+q-1)(4p+q-2)(4p+q-3)}{2\cdot3\cdot4}E'''\alpha^{4p+q-4} \\
& \quad + \frac{(5p-1)(5p-2)(5p-3)(5p-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}E''''\alpha^{5p-5}
\end{aligned}$$

$+$ ꝛc.

21. Siebentes Exempel.

Hätte man die Gleichung

$$o = \alpha - x^r + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{ꝛc.}$$

so könnte man dieselbe auf das vorhergehende Exempel zurück führen, indem man $x^r = t$ setzte. Dadurch wird nemlich

$$o = \alpha - t + \beta t^{\frac{p}{r}} + \gamma t^{\frac{p+q}{r}} + \delta t^{\frac{p+2q}{r}} + \varepsilon t^{\frac{p+3q}{r}} + \text{ꝛc.}$$

und man hat daher bloß nöthig in den vorhergehenden Formeln t für x, $\frac{p}{r}$ für p, $\frac{q}{r}$ für q u. s. w. zu setzen, um sie auf den angeführten Fall anwenden zu können.

Setzt man der größern Einfachheit wegen $\alpha = \varrho^r$, so bekommt man, wenn man x^r an die Stelle von t setzt, und dieselben Werthe der Coefficienten A, B, B' beybehält

$$\psi\left(\frac{x^r}{\varrho^r}\right) = \psi y$$

$$+ A\varrho^{p-r} y^{\frac{p}{r}} \psi' y$$

$$+ B\varrho^{p+q-r} y^{\frac{p+q}{r}} \psi' y + B'\varrho^{2p-2r}. \frac{d.y^{\frac{2p}{r}} \psi' y}{2dy}$$

$$+ C\varrho^{p+2q-r} y^{\frac{p+2q}{r}} \psi' y + C'\varrho^{2p+q-2r}. \frac{d.y^{\frac{2p+q}{r}} \psi' y}{2dy}$$

$$+ C''\varrho^{3p-3r}. \frac{d^2.y^{\frac{3p}{r}} \psi' y}{2.3dy^2}$$

$$+ D\varrho^{q+3q-r} y^{\frac{p+3q}{r}} \psi' y + D'\varrho^{2p+2q-2r}. \frac{d.y^{\frac{2p+2q}{r}} \psi' y}{2dy}$$

$$+ D''$$

$$+ D''\varrho^{3p+q-3r} \cdot \frac{d^2 . y^{\frac{3p+q}{r}} \psi' y}{2.3 dy^2}$$

$$+ D'''\varrho^{4p-4r} \cdot \frac{d^3 . y^{\frac{4p}{r}} \psi' y}{2.3.4 dy^2}$$

$+$ ꝛc.

wo nach der Differenziation $y = 1$ genommen werden muß.

Setzt man $\psi y = y^{\frac{m}{r}}$, so hat man $\psi(\frac{x^r}{\varrho^r}) = \frac{x^m}{\varrho^m}$ und findet demnach

$$\begin{aligned}
(\frac{x}{\varrho})^m = 1 & \\
& + \frac{m}{r} A\varrho^{p-r} \\
& + \frac{m}{r} B\varrho^{p+q-r} + \frac{m(m+2p-r)}{2r^2} B'\varrho^{2p-2r} \\
& + \frac{m}{r} C\varrho^{p+2q-r} + \frac{m(m+2p+q-r)}{2r^2} C'\varrho^{2p+q-2r} \\
& \quad + \frac{m(m+3p-r)(m+3p-2r)}{2.3r^3} C''\varrho^{3p-3r} \\
& + \frac{m}{r} D\varrho^{p+3q-r} + \frac{m(m+2p+2q-r)}{2r^2} D'\varrho^{2p+2q-2r} \\
& \quad + \frac{m(m+3p+q-r)(m+3p+q-2r)}{2.3r^3} D''\varrho^{3p+q-3r} \\
& \quad + \frac{m(m+4p-r)(m+4p-2r)(m+4p-3r)}{2.3.4r^3} D'''\varrho^{4p-4r} \\
& + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Setzt man $\psi y = ly$, wodurch $\psi(\frac{x^r}{\varrho^r}) - l\frac{x^r}{\varrho^r} = rl\frac{x}{\varrho}$ wird, so bekommt man, wenn man durch r dividirt

$$
\begin{aligned}
l\frac{x}{\varrho} = {} & \frac{1}{r}A\varrho^{p-r} \\
& + \frac{1}{r}B\varrho^{p+q-r} + \frac{2p-r}{2r^2}B'\varrho^{2p-2r} \\
& + \frac{1}{r}C\varrho^{p+q-r} + \frac{2p+q-r}{2r^2}C'\varrho^{2p+q-2r} \\
& \quad + \frac{(3p-r)(3p-2r)}{2.3r^3}C''\varrho^{3p-3r} \\
& + \frac{1}{r}D\varrho^{p+3q-r} + \frac{2p+2q-r}{2r^2}D'\varrho^{2p+2q-2r} \\
& \quad + \frac{(3p+q-r)(3p+q-2r)}{2.3r^3}D''\varrho^{3p+q-3r} \\
& \quad + \frac{(4p-r)(4p-2r)(4p-3r)}{2.3.4r^4}D'''\varrho^{4p-4r} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

22.

Die Formeln, welche wir bey den beyden letzten Exempeln gefunden haben, verdienen sehr gemerkt zu werden, theils wegen ihrer Allgemeinheit, theils wegen ihres Gebrauchs bey der Erfindung aller Wurzeln der Gleichungen, welche der Gegenstand des folgenden §. seyn wird.

Vorher aber müssen wir noch eine Bemerkung machen, welche die Coefficienten A, B, B', etc. betrift. Sie besteht darin, daß diese Coefficienten ganz und gar nicht von der Größe α abhängen, sondern bloß von den Größen β, γ, δ, etc. so daß die gefundenen Reihen in Rücksicht auf den Buchstaben α allezeit schon von selbst geordnet sind, die Funktion von $\frac{x}{\alpha}$, welche sie ausdrucken, mag seyn welche sie will.

Hat

Hat man überdies diese Coefficienten einmal gefunden, so dienen sie für alle mögliche Funktionen von $\frac{x}{u}$, und da das Gesetz, nach welchem sie sich richten, sehr einfach ist, so ist es leicht sie so weit zu berechnen als man irgend will. Man findet z. B.

$$
\begin{array}{llll}
A = \beta & & & \\
B = \gamma, & B' = \beta^2 & & \\
C = \delta, & C' = 2\beta\gamma, & C'' = \beta^3 & \\
D = \varepsilon, & D' = 2\beta\delta + \gamma^2, & D'' = 3\beta^2\gamma, & D''' = \beta^4 \\
E = \zeta, & E' = 2\beta\varepsilon + 2\delta\gamma, & E'' = 3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2, & E''' = 4\beta^3\gamma \\
\text{rc.} & \text{rc.} & \text{rc.} & \text{rc.}
\end{array}
$$

$$E'''' = \beta^5$$

rc.

§. 3.

Methode vermittelst der Reihen alle Wurzeln einer jeden Gleichung zu finden.

23.

Wir haben im vorhergehenden §. gesehen, wie man vermittelst der Reihen den Ausdruck für eine von den Wurzeln einer jeden Gleichung finden kann, jetzt wollen wir die Mittel kennen lernen, alle Wurzeln, welche eine Gleichung haben kann, zu finden. Zu diesem Endzwecke müssen wir einige allgemeine Anmerkungen über die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung und über die Art diese Wurzeln von einander zu unterscheiden, vorausschicken.

Wir wollen die allgemeine Gleichung

$$o = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{rc.}$$

betrachten, welches eine Gleichung vom mten Grade seyn

 mag,

mag, die alle ihre Glieder hat, so daß keiner von den Coefficienten a, b, c, ꝛc. $= 0$ ist. Gesetzt man hätte den Ausdruck für jede Wurzel dieser Gleichung gefunden, so ist klar, daß diese Ausdrücke, deren es m giebt, Funktionen von a, b, c, ꝛc. seyn werden; aber es frägt sich, wie man diese verschiedenen Funktionen von einander unterscheiden könne?

Hier bemerke ich zuvörderst, daß die Gleichung, wenn man $a = 0$ setzt, in folgende übergeht,

$$0 = -bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{ꝛc.}$$

welche sich in diese beyden zerfällen läßt

$$0 = x$$

$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{ꝛc.}$$

Es macht also die Annahme $a = 0$, daß eine von den Wurzeln verschwindet, und es muß folglich unter den Funktionen, welche die Wurzeln der obigen Gleichung ausdrucken, eine geben, die verschwindet wenn man $a = 0$ setzt. Auch ist klar, daß es nicht mehr als eine Funktion darunter geben kann, welche diese Eigenschaft hat, weil das Verschwinden von a nur eine einzige Wurzel auf Null bringt.

Behält man die Voraussetzung, daß $a = 0$ sey, und abstrahirt dabey von der bereits gefundenen Wurzel $x = 0$, so werden die übrigen Wurzeln durch die Gleichung bestimmt

$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun auch $b = 0$, so zerfällt diese Gleichung von neuem in folgende zwey

$$0 = x$$

$$0 = c - dx + ex^2 - \text{ꝛc.}$$

Es macht also diese Annahme, daß wieder eine neue Wurzel verschwindet, und es muß also auch unter den Funktionen, welche

welche die Wurzeln der obigen Gleichung ausdrucken, eine geben, die verschwindet, wenn man $a = 0$ und $b = 0$ setzt.

Schließt man auf diese Art weiter, so sieht man, daß es unter den Funktionen, wovon hier die Rede ist, eine geben muß, die verschwindet, wenn man $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ setzt, so wie auch eine, welche verschwindet, wenn man $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ setzt, u. s. w.

24.

Da es gleich ist, wie man die Glieder einer Gleichung ordnet, so wollen wir die Gleichungen in der Folge allezeit auf die Art geordnet annehmen, daß die Exponenten der unbekannten Größe eine steigende arithmetische Progression bilden. Auf diese Art ist das erste Glied der Gleichung dasjenige, worin sich die unbekannte Größe nicht findet, das zweyte das, welches die unbekannte Größe in einer Dimension enthält u. s. f. Dies vorausgesetzt, wollen wir allgemein unter der ersten Wurzel einer Gleichung diejenige verstehen, welche Null wird, wenn man das erste Glied der Gleichung $= 0$ nimmt; unter der zweyten Wurzel diejenige, welche Null wird, wenn man die beyden ersten Glieder der Gleichung zugleich $= 0$ seyn läßt; unter der dritten Wurzel diejenige, welche verschwindet, wenn die drey ersten Glieder der Gleichung zugleich $= 0$ werden u. s. f.

Auf diese Art kann man die verschiedenen Wurzeln einer jeden Gleichung allemal von einander unterscheiden, und auch, wenn man mehrere Ausdrücke für die Wurzeln einer und derselben Gleichung hat, beurtheilen, ob sie eine und dieselbe oder ob sie verschiedene Wurzeln darstellen.

25.

Wir haben so eben gesehen, daß die Annahme von $a=0$ und $b=0$ zwey Wurzeln der gegebenen Gleichung verschwindend macht, und diese Wurzeln sind hierdurch von allen übrigen hinlänglich unterschieden. Läßt man daher sogleich $b=0$ seyn, so ist klar, daß die Annahme $a=0$ zwey Wurzeln zu gleicher Zeit in Null verwandelt. Die Art und Weise, diese Wurzeln in diesem Falle von einander zu unterscheiden, ist folgende. Setzt man $b=0$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$0 = a + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{etc.}$$

Anstatt $a=0$ zu setzen, nehme man es unendlich klein an, wo denn einleuchtend ist, daß die beyden gedachten Wurzeln ebenfalls unendlich klein seyn werden, weil sie sonst nicht verschwinden könnten, wenn $a=0$ würde. Nimmt man also x unendlich klein an, und läßt die Glieder weg, welche man bey dieser Annahme weglassen muß, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$a + cx^2 = 0$$

und diese Gleichung giebt die beyden Wurzeln $+\sqrt{-\frac{a}{c}}$ und $-\sqrt{-\frac{a}{c}}$. Auf diese Art hat man ein neues Kennzeichen die beyden ersten Wurzeln der gegebenen Gleichung sowohl unter sich als auch von allen übrigen zu unterscheiden. Es müssen folglich die Funktionen, welche diese beyden Wurzeln vorstellen, von der Art seyn, daß sie die Wurzeln der Gleichung $a + cx^2 = 0$ werden, wenn man $b=0$ und a unendlich klein annimmt.

Auf ähnliche Art beweiset man, daß die Funktionen, welche die drey ersten Wurzeln ausdrucken, von der Art

seyn

seyn müssen, daß sie die Wurzeln der Gleichung $a - dx^3 = o$ werden, wenn man $b = o$, $c = o$ und a unendlich klein nimmt.

Da ferner die zweyte und dritte Wurzel Null werden, wenn man $b = o$ und $c = o$ annimmt, nachdem man schon $a = o$ gesetzt hat, so ist klar, daß die Annahme von $b = o$ nach der Annahme von $c = o$ diese beyden Wurzeln zu gleicher Zeit in Null verwandelt. Setzt man daher b unendlich klein, so müssen auch diese beyden Wurzeln unendlich klein werden. Nimmt man aber in der Gleichung

$$o = - b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{etc.}$$

aus welcher man bereits die erste Wurzel durch die Annahme $a = o$ abgesondert hat, $c = o$ und b und x unendlich klein an, so verwandelt sich dieselbe in

$$- b - dx^2 = o$$

und es müssen folglich die Funktionen, welche die zweyte und dritte Wurzel ausdrucken, so beschaffen seyn, daß sie die Wurzeln der Gleichung $- b - dx^2 = o$ werden, wenn man darin $a = o$, $c = o$ und b unendlich klein annimmt. Dieser Umstand kann gebraucht werden um diese Wurzeln zu erkennen und von allen übrigen zu unterscheiden.

Setzt man $c = o$, $d = o$ und b unendlich klein, (vorausgesetzt, daß $a = o$ bleibe) so findet man, daß die Funktionen, welche die zweyte, dritte und vierte Wurzel ausdrucken, Wurzeln der Gleichung

$$- b + ex^3 = o$$

seyn müssen, u. s. f. Ferner erkennt man auf ähnliche Art, daß die dritte und vierte Wurzel der gegebenen Gleichung durch solche Funktionen ausgedruckt seyn müssen, daß sie die Wurzeln der Gleichung

$$c + ex^2 = o$$

werden,

werden, wenn man erst $a = o$, $b = o$ dann $d = o$ und c unendlich klein annimmt, u. s. f.

Diese Methode die Wurzeln einer Gleichung von einander zu unterscheiden ist viel allgemeiner als die der 23sten Nr., welche in vielen Fällen nicht gebraucht werden kann, insbesondere, wenn in der Gleichung ein Zwischenglied fehlt, weil alsdann das Verschwinden eines einzigen Buchstabens mehrere Wurzeln auf einmal in Null verwandelt, wie wir so eben gesehen haben.

Nach diesen Anmerkungen über die Art, die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung von einander zu unterscheiden, wollen wir die Wege kennen zu lernen suchen, diese Wurzeln selbst zu finden. Um alles desto verständlicher zu machen, wollen wir dieselben sogleich bey den Gleichungen einschlagen, welche wir in dem vorhergehenden §. betrachtet haben.

28.

Erste Aufgabe.

Die beyden Wurzeln der Gleichung

$$a - bx + cx^2 = o$$

zu finden.

Erste Auflösung.

Nr. 8. haben wir gesehen, daß der eine von den Werthen von x durch folgende Reihe ausgedruckt wird

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^3}{b^5} + \text{rc.}$$

Ehe man den andern Werth aufsucht ist es nützlich zu wissen, was für eine Wurzel durch diese Reihe ausgedruckt werde. Zu dem Ende setze ich nach der Methode der 23sten Nr.

Nr. $a = 0$, und da diese Voraussetzung alle Glieder jener Reihe in Null verwandelt, so schließe ich daraus, daß diese Reihe die erste Wurzel der gegebenen Gleichung ausdruckt. Es ist also die zweyte Wurzel zu finden übrig.

Um dieselbe zu erhalten gebe ich der obigen Gleichung die Form

$$b - cx - \frac{a}{x} = 0$$

welche man auf die Gleichung der 11ten Nr. zurück führen kann, wenn man darin $n = -1$ setzt, a in b, b in c und c in $-a$ verwandelt. Auf diese Art erhält man aus der Formel derselben Nummer, wenn man $m = 1$ nimmt,

$$\frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{b^5} - \frac{5.6a^4c^3}{2.3b^7} - \text{2c.}$$

Setzt man nun hier zuvörderst $a = 0$, so verschwindet diese Reihe bis auf ihr erstes Glied $\frac{b}{c}$, und dieses verschwindet ebenfalls, wenn man $b = 0$ nimmt. Es druckt daher diese Reihe nothwendiger Weise die zweyte Wurzel der gegebenen Gleichung aus, und dieses stimmt aufs vollkommenste mit dem überein, was wir oben Nr. 8. durch die Auflösung der Gleichung selbst gefunden haben.

Nennt man daher die erste und zweyte Wurzel der Gleichung

$$a - bx + cx^2 = 0$$

x' und x'', so hat man nach den angeführten Nrn.

$$x'^m = \frac{a^m}{b^m} + \frac{ma^{m+1}c}{b^{m+2}} + \frac{m(m+3)a^{m+2}c^2}{2b^{m+4}}$$

$$+ \frac{m(m+4)(m+5)a^{m+3}c^3}{2.3b^{m+6}} + \text{2c.}$$

$$x''^m = \frac{b^m}{c^m} - \frac{m b^{m-2} a}{c^{m-1}} + \frac{m(m-3) b^{m-4} a^2}{c^{m-2}}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5) b^{m-3} c^3}{2.3 c^{m-3}} + \text{rc.}$$

und will man die Logarithmen von x' und x'' haben, so ist

$$lx' = l\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{4.5a^3c^3}{2.3b^6} + \frac{5.6.7a^4c^4}{2.3.4b^8}$$

$$+ \text{rc.}$$

$$lx'' = l\frac{b}{c} - \frac{ac}{b^2} - \frac{3a^2c^2}{2b^4} - \frac{4.5a^3c^3}{3.3b^6} - \frac{5.6.7a^4c^4}{2.3.4b^8}$$

$$- \text{rc.}$$

Zweyte Auflösung.

Setzt man $x^2 = t$, so wird $x = \sqrt{t}$, und die gegebene Gleichung dadurch in folgende verwandelt

$$a + ct - b\sqrt{t} = 0$$

welche man wieder mit der Nr. 11. vergleichen kann, wenn man b in $-c$, c in $-b$, x in t und n in $\frac{1}{2}$ verwandelt. Setzt man demnach der Kürze wegen $\sqrt{(\frac{-a}{c})} = \varrho$, so hat man

$$t^m = \varrho^{2m} - 2m\varrho^{2m+1}(\frac{b}{2a}) + \frac{2m.2m}{2}\varrho^{2m+2}(\frac{b}{2a})^2$$

$$- \frac{2m(2m-1)(2m+1)}{2.3}\varrho^{2m+3}(\frac{b}{2a})^3$$

$$+ \frac{2m(2m-2)(2m)(2m+2)}{2.3.4}\varrho^{2m+4}(\frac{b}{2a})^5$$

$$- \frac{2m(2m-3)(2m-1)(2m+1)(2m+3)}{2.3.4.5}\varrho^{2m+5}(\frac{b}{2a})^5$$

$$+ \text{rc.}$$

Da nun $x = \sqrt{t}$ ist, so hat man nur nöthig $m = \frac{1}{2}$ zu setzen, um

$$x = \varrho - \varrho^2\left(\frac{b}{2a}\right) + \tfrac{2}{2}\varrho^3\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1.1.3}{2.3.4}\varrho^5\left(\frac{b}{2a}\right)^4$$
$$+ \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.6}\varrho^7\left(\frac{b}{2a}\right)^6 - \text{rc.}$$

zu finden. Weil aber $\varrho = \sqrt{\left(\frac{-a}{\varrho c}\right)}$ ist, so fällt in die Augen, daß der Werth von ϱ eben sowohl positiv als negativ genommen werden kann, und braucht man demnach diesen doppelten Werth, so bekommt man für x folgende doppelte Reihe

$$\frac{b}{c} \pm \left(1 - \tfrac{1}{2}.\frac{b^2}{4ac} - \frac{1.1.3}{2.3.4}.\frac{b^4}{2^4a^2c^2} - \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.6} \times \right.$$
$$\left.\frac{b^6}{2^6a^3c^3} - \text{rc.}\right)\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$$

Setzt man $b = 0$, so erhält man statt dieser beyden Reihen $\pm\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$, welches ein Kennzeichen ist, daß sie die erste und zweyte Wurzel unserer Gleichung wirklich darstellen. Hiervon kann man sich auch auf die Art leicht überzeugen, daß man die Wurzelgröße $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$, welche in dem Ausdrucke für x (Nr. 8) befindlich ist, in eine Reihe verwandelt, und dabey $-4ac$ als das erste und b^2 als das zweyte Glied des Binomiums betrachtet.

Setzt man daher $\varrho = \pm\sqrt{\left(\frac{-a}{c}\right)}$ so hat man allgemein in der Gleichung

$$a - bx + cx^2 = 0$$

folgenden doppelten Werth für x^m:

$$x^m = \varrho^m\left(1 - \frac{m^2}{2}.\frac{b^2}{4ac} + \frac{m^2(m^2 - 4)}{2.3.4}.\frac{b^4}{2^4a^2c^2}\right.$$
$$\left. - \frac{m^2(m^2 - 4)(m^2 - 16)}{2.3.4.5.6}.\frac{b^6}{2^6a^3c^3} + \text{rc.}\right)$$

— mϱ

$$- m\varrho^{m+1}\frac{b}{2c}\left(1 - \frac{m^2-1}{2.3}\cdot\frac{b^2}{4ac} + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}\right.$$

$$\left.\times\frac{b^4}{2^4a^2c^2} - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{2^6a^3c^3}{b^6} + \text{etc.}\right)$$

Und für den Logarithmen von x bekommt man

$$lx = l\varrho - \varrho\frac{b}{2a}\left(1 + \frac{1.1}{2.3}\cdot\frac{b^2}{4ac} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\cdot\frac{b^4}{2^4a^2c^2}\right.$$

$$\left.+ \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{b^6}{2^6a^3c^3} + \text{etc.}\right)$$

Anmerkung.

Die Reihen, welche wir bey der ersten Auflösung gefunden haben, besitzen den Vorzug, daß sie keine andere als rationale Größen enthalten, dahingegen diejenigen, welche die zweyte Auflösung gegeben hat, die irrationale Größe $\sqrt{-\frac{a}{c}}$ in sich schließen, welche imaginär wird, wenn a und c einerley Zeichen haben, obgleich übrigens die Wurzeln der Gleichung reell seyn können. Es scheinen daher die Reihen der ersten Auflösung vorzüglicher zu seyn als die der zweyten, indeß sind beyde nur alsdann brauchbar, wenn sie convergirende Reihen sind. Hiervon wird weiter hin im 4ten §. geredet werden.

29.

Bey einiger Aufmerksamkeit auf die Art, wie wir das vorhergehende Problem aufgelöset haben, erkennt man leicht allgemein, daß sich bey jeder Gleichung so viel verschiedene Reihen für die Wurzeln derselben finden lassen, als die Gleichung Combinationen ihrer Glieder zu zweyen darbietet, und daß jede dieser Reihen eine einfache oder doppelte oder dreyfache Reihe u. s. w. seyn wird, je nachdem er zu einer Combination

bination gehört, die Exponenten von x in den beyden Gliedern von einander um eins oder um zwey oder um drey u. s. f. unterschieden sind.

Es ist nemlich klar, daß man so viel Reihen für den Werth von x finden kann, als es Arten giebt, die gegebene Gleichung mit der allgemeinen Formel $\alpha - x + \phi x = 0$ (Nr. 15.) zu vergleichen. Da man nun für ϕx jede Funktion von x setzen kann, so folgt, daß man auch für die beyden ersten Glieder $\alpha - x$ in jener Formel jede zwey Glieder der gegebenen Gleichung nach Gefallen zu nehmen berechtiget ist. Hieraus fließt aber, daß man die Vergleichung auf so viel verschiedene Arten anstellen kann, als es angeht, die Glieder der Gleichung zu zwey zu combiniren.

28.

Es seyen überhaupt $Mx^\mu - Nx^{\mu+\nu}$ irgend zwey Glieder der gegebenen Gleichung, und X bedeute die Summe aller übrigen Glieder, so daß die gegebene Gleichung folgende Form bekomme

$$Mx^\mu - Nx^{\mu+\nu} + X = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch Nx^μ, so verwandelt sie sich in

$$\frac{M}{N} - x^\nu + \frac{Xx^{-\mu}}{N} = 0$$

und setzt man nunmehr $x^\nu = t$, folglich $x \sqrt[\nu]{t}$, und läßt dabey T die Funktion von t bedeuten, worin sich die Größe X verwandelt, wenn man $\sqrt[\nu]{t}$ für x setzt, so bekommt man

$$\frac{M}{N} - t + \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N} = 0$$

Q Diese

Diese Gleichung aber läßt sich mit der allgemeinen Form $\alpha - x + \varphi x = o$ vergleichen, wenn man

$$\alpha = \frac{M}{N},\ x = t,\ \text{und}\ \varphi x = \varphi t = \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N}$$

annimmt. Auf diese Art erhält man nach Nr. 15, wenn man t oder x^{ν} an die Stelle von p setzt,

$$\psi . x^{\nu} = \psi t + \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N} + \frac{d.(T^2 t^{-\frac{2\mu}{\nu}} \psi' t)}{2N^2 dt}$$

$$+ \frac{d^2.(T^3 t^{-\frac{3\mu}{\nu}} \psi' t)}{2.3 N^3 dt^2}$$

wo man nach Vollbringung der angezeigten Differenziatio-nen $t = \frac{M}{N}$ setzen muß.

Nimmt man demnach $\psi t = t^{\frac{1}{\nu}}$ und mithin $\psi' t = \frac{t^{\frac{1-\nu}{\nu}}}{\nu}$ um nemlich $\psi . x^{\nu} = x$ zu erhalten, so wird

$$x = t^{\frac{1}{\nu}} + \frac{Tt^{\frac{1-\mu-\nu}{\nu}}}{\nu N} + \frac{d.(T^2 t^{\frac{1-2\mu-\nu}{\nu}})}{\nu N^2 dt}$$

$$+ \frac{d^2.(T^3 t^{\frac{1-3\mu-\nu}{\nu}})}{\nu N^3 dt^2} + \text{rc.} \ldots,\ (L)$$

und dieses ist der Ausdruck, welchen die Combination der Glieder $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu}$ der gegebenen Gleichung für x giebt.

31. Jetzt

29.

Jetzt ist offenbar, daß der für x gefundene Ausdruck nothwendig die Wurzelgröße $\sqrt[n]{\frac{M}{N}}$ enthalten muß, weil man darin $\frac{M}{N}$ für t zu setzen hat, so wie man sich auch leicht davon überzeugt, daß derselbe keine andere Wurzelgröße enthalten kann. Denn da X eine rationale Funktion von x ist, so ist auch T eine rationale Funktion von $\sqrt[n]{t}$, und mithin auch die ganze Reihe eine rationale Funktion von $\sqrt[\nu]{t}$ oder von $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$.

Nun ist bekannt, daß die Wurzelgröße $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$, ν verschiedene Werthe hat, welche die Wurzeln der Gleichung

$$M - Nx^{\nu} = 0$$

sind, und, wie bekannt, allgemein durch die Formel

$$(\cos. \frac{\lambda . 360^{0}}{\nu} + \sqrt{-1} . \sin. \frac{\lambda . 360^{0}}{\nu}) \sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$$

gefunden werden, wenn man darin für λ nach und nach 1, 2, 3 u. s. w. bis ν setzt.

Setzt man also diese Größe für $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ so verwandelt sich die Reihe, welche den Werth von x ausdruckt, in ν Reihen, welche eben so viel verschiedene Werthe von x geben.

30.

Nun behaupte ich, daß diese ν Reihen oder Ausdrücke für x, welche sich aus der Betrachtung der Glieder $Mx^{\mu} - Nx^{\mu + \nu}$ der gegebenen Gleichung ergeben, d. h. welche

 man

man findet, indem man diese beyden Glieder als die ersten Glieder der allgemeinen Form (H) ansieht, nothwendig ν verschiedene Wurzeln dieser Gleichung darstellen, und namentlich die μte, die $(\mu + 1)$te, die $(\mu + 2)$te ꝛc. bis zur $(\mu + \nu - 1)$ten (Nr. 24.).

Dieses zu beweisen hat man nach der Methode der 25sten Nr. nur nöthig darzuthun, daß sich der allgemeine Ausdruck für x in der Formel (L), wenn man darin die Coefficienten derer Glieder der gegebenen Gleichung, worin die Exponenten von x kleiner sind als μ, so wie auch die Coefficienten derjenigen Glieder, die zwischen Mx^{μ} und $Nx^{\mu + \nu}$ fallen, $= 0$ setzt, und zugleich M unendlich klein annimmt, in $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ oder die allgemeine Wurzel der Gleichung $M - Nx^{\nu} = 0$ verwandeln.

Nun ist klar, daß die Größe X nach Vertilgung der so eben gedachten Glieder keine andere Potestäten von x als solche, die größer sind als $x^{\mu + \nu}$, und folglich die Größe T keine andern Potestäten von t als solche, die größer sind als $t^{\frac{\mu + \nu}{\nu}}$, enthalten wird; woher denn folgt, daß die Funktionen

$$Tt^{\frac{1 - \mu - \nu}{\nu}} \quad \frac{d.\left(T^2 t^{\frac{1 - 2\mu - \nu}{\nu}}\right)}{dt}$$ ꝛc. in der Formel (L)

lauter Potestäten von t enthalten müssen, die größer sind als $\frac{1}{t^{\nu}}$. Setzt man demnach $t = \frac{M}{N}$ und M das heißt t unendlich klein, so ist einleuchtend, daß alle diese Potestäten von t

in

in Vergleichung mit der ersten $t^{\frac{1}{\nu}}$ verschwinden und also der Ausdruck für x in $t^{\frac{1}{\nu}}$ oder $(\frac{M}{N})^{\frac{1}{\nu}}$ übergehen wird, weil $t = \frac{M}{N}$ ist.

31.

Hieraus läßt sich leicht folgern, daß man, um vermittelst unserer Reihen alle Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu finden, nur das erste Glied der Gleichung mit dem letzten zu combiniren braucht. Wir nennen aber hier zwey Glieder einer gegebenen Gleichung combiniren, diese Glieder als die beyden ersten Glieder der allgemeinen Form (H) betrachten, und in eben diesem Verstande wollen wir uns dieser Redensart in der Folge bedienen. Nimmt man das erste und letzte Glied, so bekommt man eine Reihe, welche alle Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdruckt. Man kann aber auch das erste Glied mit irgend einem Mittelgliede und darauf dieses mit dem letzten oder wieder mit einem Mittelgliede verbinden, und so fortgehen, bis man endlich zu dem letzten Gliede gelangt. Jede Combination giebt eine einfache oder doppelte oder dreyfache Reihe u, s. w. und druckt dem gemäß entweder eine oder zwey oder drey Wurzeln u. s. w. aus, je nachdem der Zwischenraum zwischen beyden genommenen Gliedern beschaffen ist, so daß man, man mag eine Combinationsart wählen, was für eine man will, nie mehr und nie weniger Wurzeln findet, als die Gleichung wirklich haben muß.

32.

Es verdient hier angemerkt zu werden, daß die Reihen, welche man durch die Combination irgend zweyer Glieder einer gegebenen Gleichung findet, eben so viel reelle und eben so viel imaginäre Werthe haben, als diejenige Gleichung reelle und imaginäre Wurzeln hat, welche man bekommt, wenn man diese beyden Glieder $= 0$ setzt (Nr. 29). Ferner ist klar, daß man nur dann durchaus rationale Reihen findet, wenn man zwey Glieder wie diese $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+1}$ combinirt, und daß man also, wenn die Gleichung alle Glieder hat, lauter rationale Reihen für alle ihre Wurzeln finden kann, wenn man jedes Glied mit dem unmittelbar darauf folgenden combinirt. Wenn hingegen in der Gleichung Glieder fehlen, z. B. wenn auf Mx^{μ} unmittelbar $-Nx^{\mu+\nu}$ folgt und also dazwischen $\nu - 1$ Glieder fehlen, so geben diese beyden auf einander folgenden Glieder eine Reihe, welche die Wurzelgröße $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ in sich schließt, und welche folglich so viel verschiedene Wurzeln ausdruckt, als man durch die Betrachtung aller Zwischenglieder gefunden haben würde, wenn von denselben keins gefehlt hätte.

In diesem Falle hat man demnach so viel imaginäre Reihen, als die Wurzelgröße $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ imaginäre Werthe hat, d. h. als es imaginäre Wurzeln in der Gleichung $x^{\nu} - \frac{M}{N} = 0$ giebt. Nun weiß man, daß eine Gleichung, in welcher Glieder fehlen, nothwendiger Weise so viel imaginäre Wurzeln hat, als es deren in der Gleichung geben würde, welche man bekäme, indem man die Summe der beyden Glieder zwischen welchen die fehlenden liegen müßten, $= 0$ setzte.

Folgt

Folgt daher auf das Glied Mx^{μ} unmittelbar das Glied $-Nx^{\mu+\nu}$, so hat die Gleichung nothwendig eben so viel imaginäre Wurzeln als es deren in der Gleichung $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu} = 0$ oder $\frac{M}{N} - x^{\nu} = 0$ giebt.

Wenn man also alle auf einander folgende Glieder einer Gleichung zu zwey combinirt, so findet man nie anders imaginäre Ausdrücke für die Wurzeln, als wenn die Gleichung wirklich imaginäre Wurzeln hat. Anders hingegen verhält es sich, wenn die beyden combinirten Glieder nicht unmittelbar auf einander folgen, denn in diesem Falle findet man öfters eine imaginäre Reihe, ohnerachtet die Wurzeln reell sind, wie wir solches bereits in der Anmerkung am Ende der vorhergehenden Aufgabe gesehen haben.

33.

Endlich ergiebt sich aus dem, was wir Nr. 30. gesagt haben, daß die Reihen, welche wir bey den Exempeln des vorhergehenden §. gefunden haben, bloß die ersten Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrucken, weil alle diese Reihen durch die Combination der beyden ersten Glieder gefunden worden sind. Um die übrigen Wurzeln zu finden müßte man das zweyte Glied entweder unmittelbar mit dem letzten oder mit einem der folgenden und dann dieses mit dem letzten combiniren, so wie solches bereits vorhin bemerkt worden ist.

34.

Zweyte Aufgabe.

Alle Wurzeln der Gleichung

$$a - bx + cx^n = 0$$

zu finden, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Erste Auflösung.

Combinirt man zuvörderst die beyden ersten Glieder dieser Gleichung, nemlich $a - bx$, so findet man für x dieselbe Reihe, welche wir bereits oben im 2ten Exempel Nr. 11. gefunden haben. Dieser Werth von x ist demnach die erste Wurzel der vorstehenden Gleichung (Nr. 33.) und nennt man ihn x', so ist überhaupt

$$x'^m = \frac{a^m}{b^m}\left(1 + \frac{mca^{n-1}}{b^n} + \frac{m(m+2n-1)c^2a^{2n-2}}{2b^{2n}} + \frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{3n-3}}{2.3b^{3n}} + \text{etc.}\right)$$

Um die übrigen $n-1$ Wurzeln eben dieser Gleichung zu finden, muß man die beyden Glieder $-bx + cx^n$ combiniren. Zu dem Ende wollen wir (Nr. 28.) die Gleichung erst auf diese Form

$$\frac{b}{c} - x^{n-1} - \frac{ax^{-1}}{c} = 0$$

und dann auf diese

$$\frac{b}{c} - t - \frac{at^{\frac{1}{1-n}}}{c} = 0$$

bringen, indem wir $t = x^{n-1}$ und folglich $x = t^{\frac{1}{n-1}}$ setzen.

Da nun diese Gleichung mit der vorhergehenden für x einerley Form hat, so können wir eben dieselbe Formel brauchen und den Werth für t daraus abzuleiten. Setzt man demnach b für a, c für b, $-a$ für c, t für x und $\frac{1}{1-n}$ für n, so hat man überhaupt

$t^m =$

$$t^m = \frac{b^m}{c^m}\left(1 - \frac{m a b^{\frac{n}{1-n}}}{c^{\frac{1}{1-n}}} + \frac{m\left(m + \frac{1+n}{1-n}\right) a^2 b^{\frac{2n}{1-n}}}{2 c^{\frac{2}{1-n}}}\right.$$

$$\left. - \frac{m\left(m + \frac{2+n}{1-n}\right)\left(m + \frac{1+2n}{1-n}\right) a^3 b^{\frac{3n}{1-n}}}{2 \cdot 3 c^{\frac{3}{1-n}}} + \text{ꝛc.}\right)$$

Da nun $t = x^{n-1}$ ist, so wollen wir $\frac{m}{n-1}$ für m, und der Kürze wegen $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \varrho$ setzen. Dadurch bekommt man

$$x^m = \varrho^m\left(1 - \frac{ma}{(n-1)b\varrho} + \frac{m(m-n-1)a^2}{2(n-1)^2 b^2 \varrho^2}\right.$$

$$\left. - \frac{m(m-n-2)(m-2n-1)}{2 \cdot 3(n-1)^3 b^3 \varrho^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

Da nun ϱ der $(n-1)$ten Wurzel aus $\frac{b}{c}$ gleich ist, so hat es auch $n-1$ verschiedene Werthe, deren allgemeiner Ausdruck

$$\varrho = \left(\text{cos.}\frac{\lambda . 360^0}{n-1} + \text{sin.}\frac{\lambda . 360^0}{n-1}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n-1]{\frac{b}{c}}$$

ist, wenn man λ nach und nach $= 1, 2, 3,$ ꝛc. bis $n-1$ setzt.

Substituirt man demnach diesen Ausdruck für ϱ in der vorhergehenden Formel, so bekommt man $n-1$ verschiedene Werthe für x^m, und dieses sind die Werthe für x''^m, x'''^m ꝛc. $(x^n)^m$, wenn x'', x''' ꝛc. (x^n) die zweyte, die dritte, ꝛc. und die nte Wurzel der gegebenen Gleichung anzeigen.

Auf diese Art hat man also alle n Wurzeln der gegebenen Gleichung, ja selbst eine jede Potestät von einer jeden dieser Wurzel. Man kann auch vermittelst unserer Formeln eine jede Funktion dieser Wurzeln finden, indeß ist es nicht nöthig, die Art und Weise davon ausführlich zu zeigen.

Zweyte Auflösung.

Nun wollen wir die beyden äußersten Glieder $a + cx^n$ nehmen, wodurch wir auf einmal alle n Wurzeln der gegebenen Gleichung bekommen werden.

Zu dem Ende bringen wir die Gleichung auf die Form

$$\frac{a}{c} + x^n - \frac{bx}{c} = 0$$

und dann, indem wir $x^n = t$, und folglich $x = t^{\frac{1}{n}}$ setzen, auf diese,

$$\frac{a}{c} + t - \frac{bt^{\frac{1}{n}}}{c} = 0$$

Diese Gleichung läßt sich mit der ursprünglichen $a - bx + cx^n = 0$ vergleichen, und es erfordert daher die Erfindung des Werths t^n aus dem Werthe von x'^m bloß die Verwandlung von x' in t, von b in $-c$, von c in $-b$ und von n in $\frac{1}{n}$. Auf diese Art bekommt man sogleich

$$t^m = \frac{a^m}{(-c)^m}\left(1 - \frac{mba^{\frac{1-n}{n}}}{(-c)^{\frac{1}{n}}} + \frac{m(m + \frac{2-n}{n})b^2a^{\frac{2-2n}{n}}}{2(-c)^{\frac{2}{n}}}\right.$$

$$\left. - \frac{m(m + \frac{3-n}{n})(m + \frac{3-2n}{n})c^3a^{\frac{3-3n}{n}}}{2 \cdot 3(-c)^{\frac{3}{n}}} + \text{etc.}\right)$$

Nun ist $t = x^n$, und setzt man daher $\frac{m}{n}$ für m, und der Kürze wegen $\left(\frac{a}{-c}\right)^{\frac{1}{n}} = \varrho$, so erhält man

$$x^m = \varrho^m\left(1 - \frac{mb\varrho}{na} + \frac{m(m+2-n)b^2\varrho^2}{2n^2a^2} - \frac{m(m+3-n)(m+3-2n)b^3\varrho^3}{2.3n^3a^3} + \text{2c.}\right)$$

Da nun überhaupt

$$\varrho = \left(\text{cos.}\frac{\lambda.360^0}{n} + \text{sin.}\frac{\lambda.360^0}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{\frac{a}{-c}}$$

ist, wenn man für λ nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 2c. bis n setzt, so findet man durch die Substitution dieses Werthes in dem vorhergehenden Ausdrucke n verschiedene Werthe für x^m, und dieses sind die Werthe von x'^m, x''^m, x'''^m 2c. $(x^n)^m$.

35.

Dritte Aufgabe.

Alle Wurzeln der Gleichung

$$a - bx + cx^n - ex^s = 0$$

zu finden, wenn n und s ganze Zahlen sind und $n < s$ ist.

Erste Auflösung.

1) Da sich diese Gleichung mit der im 6ten Exempel Nr. 20. vergleichen läßt, wenn man

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{c}{b}, \quad \gamma = -\frac{e}{b}, \quad \delta = 0, \text{2c.}$$

$$p = n, \quad q = s - n$$

setzt, so hat man auch nur nöthig, diese Substitutionen in

den

den Formeln jenes Exempels vorzunehmen, um sogleich den Ausdruck für eine jede Funktion von $\frac{x}{\alpha}$ zu bekommen, wo x nothwendig die erste Wurzel der gegebenen Gleichung vorstellt, (Nr 33.)

2) Um die übrigen Wurzeln zu finden nehme man die beyden Glieder $- bx + cx^n$ zu den ersten Gliedern an, und bringe also die gegebene Gleichung auf die Form

$$b - cx^{n-1} - ax^{-1} + ex^{s-1} = 0$$

Dann setze man $x^{n-1} = t$, wodurch die Gleichung die Form des angeführten Exempels bekommt, oder vergleiche diese Gleichung mit der im siebenten Exempel, indem man

$$\alpha = \frac{b}{c},\ \beta = \frac{-a}{c},\ \gamma = \frac{e}{c},\ \delta = 0,\ \text{rc.}$$

$$r = n - 1,\ p = - 1,\ q = s$$

setzt. Auf diese Art findet man sogleich den Werth einer jeden Funktion von $\frac{x}{\varrho}$, wo $\varrho = \sqrt[r]{\alpha} = (\frac{b}{c})^{\frac{1}{n-1}}$ ist. Giebt man demnach dem Buchstaben ϱ die r Werthe, welche ihm zukommen, und welche sich insgesammt durch die Formel darstellen lassen

$$\varrho = (\text{cos}.\frac{\lambda . 360^\circ}{r} + \text{sin}.\frac{\lambda . 360^\circ}{n}\sqrt{-1})\sqrt[r]{\alpha}$$

wenn man für λ nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 rc. bis r setzt, so bekommt man r oder $n - 1$ Formeln, welche die 2te, 3te bis nte Wurzel der gegebenen Gleichung ausdrucken.

Endlich nehme man die beyden letzten Glieder $cx^n - ex^s$ zu den beyden ersten Gliedern an, und schreibe die Gleichung auf folgende Art,

$$c - ex^{s-n} - bx^{1-n} + ax^{-n} = 0$$

Ver=

Vergleicht man diese Gleichung mit der im 7ten Exempel, so hat man

$$\alpha = \frac{c}{e},\quad \beta = -\frac{b}{e},\quad \gamma = \frac{a}{e},\quad \delta = 0, \text{ꝛc.}$$

$$s - n = r,\quad 1 - n = p,\quad q = 1$$

und findet dadurch den Ausdruck für jede Funktion von $\frac{x}{\varrho}$, wo ϱ allemal $= \sqrt[r]{\alpha} = \left(\frac{c}{e}\right)^{\frac{1}{s-n}}$ ist. Setzt man darin die r oder $s - n$ verschiedene Werthe von ϱ, so bekommt man eben so viel verschiedene Ausdrücke für die $s - n$ letzten Wurzeln der Gleichung.

Auf diese Art bekommt man drey Formeln, davon die erste die erste Wurzel, die andere die $n - 1$ folgenden, und die dritte die $s - n$ letzten Wurzeln in sich faßt; so daß man nicht bloß alle Wurzeln der gegebenen Gleichung, sondern auch jede Funktion einer jeden dieser Wurzeln auf dem beschriebenen Wege kennen lernt.

Zweyte Auflösung.

Bey der vorhergehenden Auflösung combinirten wir jedesmal zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder; die Combination anderer Gliederpaare wird uns daher noch andere Auflösungen an die Hand geben.

Nun fällt in die Augen, daß man nach der Combination der beyden ersten Glieder $a - bx$, wodurch wir vorhin die erste Wurzel fanden, sogleich das zweyte $- bx$ mit dem letzten $- ex^s$ zusammen nehmen kann, um die noch übrigen Wurzeln zu bekommen. Betrachtet man demnach diese beyden Glieder als die ersten, und schreibt folglich die Gleichung auf diese Art,

$$b + ex^{s-1} - ax^{-1} - cx^{n-s} = 0$$

so giebt die Vergleichung derselben mit dem 7ten Exempel

$$\alpha = \frac{b}{e}, \ \beta = -\frac{a}{e}, \ \gamma = -\frac{c}{e}, \ \delta = 0, \text{ꝛc.}$$

$$r = s - 1, \ p = -1, \ q = n - s + 1$$

Substituirt man daher diese Werthe in dem allgemeinen Ausdrucke einer jeden Funktion von $\frac{x}{\varrho}$, wo $\varrho = \alpha^{\frac{1}{r}} = (\frac{b}{e})^{\frac{1}{s-1}}$ ist, so bekommt man durch die $s - 1$ Werthe von ϱ, $s - 1$ verschiedene Ausdrücke für die gesuchten $s - 1$ Wurzeln.

Combinirt man daher die Formel 1) der vorhergehenden Auflösung mit der gegenwärtigen, so findet man den Werth einer jeden Funktion einer jeden der s Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Dritte Auflösung.

Jetzt wollen wir das erste Glied mit dem Gliede cx^n combiniren, oder diese beyden Glieder als die ersten Glieder unserer allgemeinen Formel betrachten. Vergleicht man die Gleichung bey dieser Voraussetzung mit dem 7ten Exempel, so hat man

$$\alpha = \frac{a}{c}, \ \beta = -\frac{b}{c}, \ \gamma = -\frac{e}{c}, \ \delta = 0, \text{ꝛc.}$$

$$r = n, \ p = 1, \ q = s - 1$$

Substituirt man diese Werthe, so bekommt eine Formel, welche überhaupt jede Funktion von $\frac{x}{\varrho}$ ausdruckt, wenn $\varrho = \sqrt[r]{\alpha} = (\frac{a}{c})^{\frac{1}{n}}$ ist. Setzt man demnach für ϱ jeden der n Werthe, welche diese Größe haben kann, so bekommt man eben

eben so viel Formeln für die n ersten Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Um die übrigen $s - n$ Wurzeln zu finden muß man das Glied cx^n mit dem letzten $-ex^s$ combiniren. Da aber diese Combination schon bey Nr. 3. der ersten Auflösung gebraucht worden ist, so hat man nur nöthig, die daselbst gefundene Formel zu nehmen.

Man hat also hier in allem zwey allgemeine Formeln, so wie bey der vorhergehenden Auflösung, und man kann vermittelst dieser Formeln nicht nur jede Wurzel insbesondere sondern auch jede Funktion dieser Wurzeln finden.

Vierte Auflösung.

Es ist noch eine Combination übrig, nemlich die der beyden äußersten Glieder a und $-ex^s$, welche unmittelbar alle Wurzeln der Gleichung geben wird.

Vergleicht man bey dieser Voraussetzung die gegebene Gleichung mit dem 7ten Exempel, so hat man

$$\alpha = \frac{a}{e},\quad \beta = -\frac{b}{e},\quad \gamma = \frac{c}{e},\quad \delta = 0, \text{ etc.}$$

$$r = s,\quad p = 1,\quad q = n - 1$$

und findet vermittelst dieser Substitutionen eine allgemeine Formel für den Ausdruck einer jeden Funktion von $\frac{x}{\varrho}$, wo

$\varrho = \sqrt[r]{\alpha} = \left(\frac{a}{e}\right)^{\frac{1}{s}}$ ist, so daß man, wenn man nach und nach die s Werthe von ϱ braucht, eben so viel besondere Formeln für die s Wurzeln der gegebenen Gleichung bekommt. Auf diese Art reicht also eine einzige allgemeine Formel hin, um den Werth einer jeden Funktion einer jeden Wurzel zu finden.

Da wir alle Combinationen zu zwey, welche sich mit den Gliedern der gegebenen Gleichung machen lassen, gebraucht haben, so lassen sich außer den gegebenen Auflösungen, wenigstens vermittelst unserer Formeln, keine andere geben. Wir verweilen daher nicht länger bey diesem Gegenstande, weil die erklärten Beyspiele hinlänglich scheinen, um den Gebrauch unserer Methode deutlich vor Augen zu legen.

§. 4.

Ueber die Convergenz oder Divergenz der Reihen, welche die Funktionen der Wurzeln der Gleichungen ausdrucken.

36.

Es ist nicht genug, daß man die Wurzeln der Gleichungen oder ihre Funktionen durch reguläre Reihen ausdrucken kann, deren Fortschreitungsgesetz bekannt ist, man muß auch aus eben diesem Gesetze zu beurtheilen im Stande seyn, ob die Reihen ohne Ende convergiren oder divergiren. Denn soll eine Reihe den Werth einer Größe in der That ausdrucken, so muß sie eine convergirende Reihe seyn, d. h. ihre letzten Glieder müssen unendlich klein oder kleiner werden als jede Größe, die sich angeben läßt. Aus diesem Grunde wollen wir daher nunmehr untersuchen, woran man erkennen kann, ob die Reihen des vorhergehenden §. diese Eigenschaft haben oder nicht.

Um unserer Untersuchung den höchst möglichen Grad der Allgemeinheit zu geben, wollen wir die allgemeine Gleichung (H) der 15ten Nr. oder

$$\alpha - x + \phi x = 0$$

betrachten, welche die allgemeine Formel (K) Nr. 16. giebt,

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi y + \frac{\phi(\alpha y)\psi' y}{\alpha} + \frac{d.(\phi(\alpha y)^2 \psi' y)}{2\alpha^2 dy}$$

$$+ \frac{d^2.(\phi(\alpha y)^3 \psi' y)}{2.3\alpha^3 dy^2} + \text{ꝛc.}$$

wo nach der Differenziation $y = 1$ gesetzt werden muß.

Es sey demnach

$$\frac{d.^{i-1}(\phi(\alpha y)^i \psi' y)}{1.2.3\ldots.i\alpha dy^{i-1}}$$

irgend ein Glied dieser Reihe und sein Anzeiger $i + 1$. Ferner sey die Funktion ϕx irgend eine Reihe von Potestäten von x, oder

$$\phi x = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{ꝛc.}$$

wo A, B, C, ꝛc. jede Coefficienten und a, b, c, ꝛc. jede Exponenten vorstellen. Alsdann hat man gleichfalls

$$\phi(\alpha y) = A\alpha^a y^a + B\alpha^b y^b + C\alpha^c y^c + \text{ꝛc}$$

und es ist folglich ein jedes Glied der $i$ten Potestät dieser Größe, das heißt des Werths von $\phi(\alpha y)^i$

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots i}{1.2.3\ldots.m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots p..} A^m B^n C^p..(\alpha y)^{am+bn+cp}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

wenn m, n, p, ꝛc. solche ganze positive Zahlen bedeuten, daß $m + n + p + \text{ꝛc.} = i$ ist.

Nun wollen wir ferner annehmen, daß auch die Funktion $\psi' y$ durch eine Reihe von Gliedern wie Fy^f ausgedruckt werde. Multiplicirt man also die vorhergehende Größe durch Fy^f, so bekommt man für jedes Glied des Werths von $\phi(\alpha y)^i \psi' y$ den Ausdruck

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots iF.A^m B^n C^p\ldots.\alpha^u}{1.2.3\ldots.m.1.2.3\ldots.n.1.2.3\ldots p\ldots} y^{u+f}$$

wenn man der Kürze wegen

$$ma + nb + pc + \text{rc.} = u$$

setzt. Differenziirt man demnach diese Größe (i — 1)mal, so daß man y veränderlich und dy beständig seyn läßt, und dividirt darauf durch $1.2.3 \ldots . i \alpha^i dy^{i-1}$, so bekommt man für den Werth eines jeden Gliedes

$$\frac{d.^{i-1}(\varphi(\alpha y)^i \psi y)}{1.2.3 \ldots\ldots i \alpha^i dy^{i-1}}$$

nachdem y = 1 gesetzt worden, die Größe

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)}{1.2.3.\ldots m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots p..} FA^m B^n C^p .. \alpha^{u-i}$$

Es kommt also nunmehr alles darauf an, daß man untersuche, was diese Größe wird, wenn man i unendlich groß werden läßt.

37.

Zu dem Ende bemerke ich, daß, wenn π das Verhältniß des Umfangs des Kreises zum Durchmesser ausdruckt,

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \text{rc.} + lx =$$

$$(x + \tfrac{1}{2})lx - x + \tfrac{1}{2}l\pi + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{rc.}$$

ist, wie Stirling, Moivre und andere, insbesondere Euler in seiner Anleitung zur Differenzial Rechnung bewiesen haben. Wenn daher x unendlich groß ist, so hat man ohne merklichen Fehler

$$l1 + l2 + l3 + \text{rc.} + lx = (x + \tfrac{1}{2})lx - x + \tfrac{1}{2}l\pi =$$
$$(x + \tfrac{1}{2})lx - le^x + \tfrac{1}{2}l\pi$$

und geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so folgt aus eben der Voraussetzung

$$1.2.3 \ldots . x = \frac{\sqrt{\pi} . x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x}$$

Ferner

Ferner ist überhaupt, x und y mögen beschaffen seyn wie sie wollen,

$$lx + l(x-1) + l(x-2) + \text{etc.} + l(x-y+1)$$
$$=$$
$$(x+\tfrac{1}{2})lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{etc.}$$
$$-(x-y+\tfrac{1}{2})l(x-y) + x - y - \frac{1}{12(x-y)} + \frac{1}{360(x-y)^3}$$
$$- \text{etc.}$$

und nimmt man also x und y unendlich groß an, so wird

$$lx + l(x-1) + l(x-2) + \text{etc.} + l(x-y+1)$$
$$=$$
$$(x+\tfrac{1}{2})lx - (x-y+\tfrac{1}{2})l(x-y) - y$$

und folglich, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht

$$x(x-1)(x-2) \ldots\ldots (x-y+1)$$
$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-y}}{(x-y)^{x-y+\frac{1}{2}}}.$$

Hieraus fließt, um dies gelegentlich zu berühren, daß der Coefficient des $(y+1)$ten Gliedes des Binomiums in der $x$ten Potestät wenn x und y sehr groß sind,

$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,.\,(x-y)^{x-y+\frac{1}{2}}\,.\,y^{y+\frac{1}{2}}}$$

ist, so daß dieser Coefficient, wenn man $y = px$ setzt und oben und unten durch $x^{x+\frac{1}{2}}$ dividirt

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}(1-p)^{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^y\sqrt{y}}$$

wird.

38.

Dieses vorausgesetzt erhellet, daß m, n, p, 2c. u, wenn i unendlich groß angenommen wird, ebenfalls unendlich groß seyn müssen, weil $m + n + p +$ 2c. $= i$ und $am + bm + cp +$ 2c. $= u$ ist. Auf diese Art hat man

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots m = \frac{\sqrt{\pi} \cdot m^{m+\frac{1}{2}}}{e^m}$$

und eben so in den übrigen Fällen.

Setzt man ferner $g = f + 1$, so hat man

$$(u+f)(u+f-1)(u+f-2) \ldots (u+f-i+2)$$

$$=$$

$$\frac{(u+g)(u+g-1)(u+g-2) \ldots (u+g-i+1)}{u+g}$$

$$=$$

$$\frac{(u+g)^{u+g-\frac{1}{2}}}{(u+g-1)^{u+g-i+\frac{1}{2}} e^i}$$

und folglich, wenn man i unendlich groß annimmt,

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2) \ldots (u+f-i+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p \ldots}$$

$$=$$

$$\frac{(u+g)^{u+g-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{\lambda}{2}} (u+g-i)^{u+g-i+\frac{1}{2}} m^{m+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} p^{p+\frac{1}{2}}}$$

wo λ die Menge der Größen m, n, p, 2c. d. h. die Menge der Glieder der Funktion φx bedeutet.

Setzt man demnach der Kürze wegen

$$V = \frac{(u+g)^{2g-1}}{\pi^{\lambda} (u+g-i)^{2g+1} mnp \ldots}$$

so geht die Größe

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots p\ldots} F A^m B^n C^p \ldots \alpha^{u-1}$$

wenn i unendlich groß wird, in

$$F\sqrt{V}.\frac{(u+g)^u A^m B^n C^p \ldots \alpha^{u-1}}{(u+g-i)^{u-1} m^m n^n p^p \ldots}$$

über.

39.

Setzt man nunmehr

$$\frac{m}{i}=\mu;\quad \frac{n}{i}=\nu;\quad \frac{p}{i}=\pi \text{ rc. } \frac{u}{i}=\upsilon$$

so hat man, weil $m+n+p+$ rc. $=i$, und $am+bn+cp$ $+$ rc. $=u$ ist

$$\mu+\nu+\pi+\text{rc.}=1$$
$$\mu a+\nu b+\pi c+\text{rc.}=\upsilon$$

woraus erhellet, daß die Zahlen μ, ν, π, rc. ächte Brüche sind. Braucht man diese Substitutionen in dem Ausdrucke

$$\frac{(u+g)^u A^m B^n C^p \ldots \alpha^{u-1}}{(u-i+g)^{u-1} m^m n^n p^p \ldots}$$

und dividirt oben und unten durch i^u, so erhält man

$$\left\{\frac{\left(\upsilon+\frac{g}{i}\right)^{\upsilon} A^{\mu} B^{\nu} C^{\pi} \ldots \alpha^{\upsilon-1}}{\left(\upsilon-1+\frac{g}{i}\right)^{\upsilon-1}.\mu^{\mu}.\nu^{\nu}.\pi^{\pi}\ldots}\right\}^i$$

oder, wenn man das Glied $\frac{g}{i}$ wegläßt, weil es unendlich klein wird wenn i unendlich groß ist

$$\left(\frac{\upsilon^{\upsilon}\alpha^{\upsilon-1} A^{\mu} B^{\nu} C^{\pi} \ldots}{(\upsilon-1)^{\upsilon-1}\mu^{\mu}.\nu^{\nu}.\pi^{\pi}\ldots}\right)^i$$

Durch eben diese Substitutionen verwandelt sich die Größe V, wenn man oben und unten durch i^{2g-1} dividirt, in

$$\frac{(\nu + \frac{g}{i})^{2g-1}}{i^{\lambda+2}\pi^{\lambda}(\nu - 1 + \frac{g}{i})^{2g+1}\mu\nu\pi \ldots}$$

oder, wenn man das unendlich kleine Glied $\frac{g}{i}$ wegläßt, und für g seinen Werth $f + 1$ wieder setzt, in

$$\frac{\nu^{2f+1}}{i^{\lambda+2}\pi^{\lambda}(\nu - 1)^{2f+2}\mu\nu\pi \ldots}$$

40.

Setzt man daher

$$M = \frac{\nu^{2f+1}}{\pi^{\lambda}(\nu - 1)^{2f+3}\mu\nu\pi \ldots} \text{ und}$$

$$N = \nu\left(\frac{\nu\alpha}{\nu - 1}\right)^{\nu-1}\left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu}\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\pi} \ldots,$$

so hat man für ein jedes Glied des Werths von

$$\frac{d.^{i-1}(\phi(\alpha y)^i \psi' y)}{1.2.3 \ldots i\alpha^i dy^{i-1}}$$

wenn i unendlich groß ist, den sehr einfachen Ausdruck

$$\frac{F\sqrt{M}\,.\,N^i}{i^{\frac{\lambda+2}{2}}}$$

worin λ die Zahl der Glieder der Funktion ϕx bedeutet, und wo μ, ν, π, 2c. positive Zahlen sind, so daß

$$\mu + \nu + \pi + \text{2c.} = 1, \text{ und}$$

$$a\mu + b\nu + c\pi + \text{2c.} = \nu$$

ist. Folglich wird diese Größe unendlich groß oder $= 0$ seyn, je nachdem N einen positiven oder negativen Werth hat, der größer oder nicht größer ist als die Einheit.

Man

Man sieht hieraus, daß die Reihe, welche den Werth von $\psi(\frac{x}{\alpha})$ Nr. 36. ausdruckt, convergiren wird, wenn ohne auf das Zeichen zu sehen

$$N = \text{oder} < 1$$

ist, im entgegenstehenden Falle divergirt sie.

Da nun die Größe N bloß von den Coefficienten A, B, C, ꝛc. und den Exponenten a, b, c, ꝛc. abhängt, welche in der Funktion von φx enthalten sind, und ganz und gar nicht von denen, welche der Funktion von ψx zugehören, und welche F, f, ꝛc. sind: so folgt, daß wenn die Reihe, welche den Werth irgend einer Funktion von $\frac{x}{\alpha}$ ausdruckt, convergirt, selbige auch für jede andere Funktion von $\frac{x}{\alpha}$ convergiren wird.

41.

Ob übrigens gleich die Coefficienten A, B, C, ꝛc. so wie auch die Größe α positiv oder negativ seyn können, so kommt es doch hier bloß auf den absoluten Werth von der Größe

$$\frac{(u+f)\ldots\ldots(u+f-i+2)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n\ldots} F A^m B^n C^p \ldots \alpha^{u-1}$$

(Nr. 36.) an, und es ist daher gleich, ob man sie positiv oder negativ nimmt. Um daher die imaginären Größen in dem Werthe von N zu vermeiden, wollen wir die Coefficienten A, B, C, ꝛc. positiv nehmen, weil μ, ν, π, ꝛc. ihrer Natur nach positiv seyn müssen, und was α betrift, so wollen wir es so genommen voraussetzen, daß $\frac{\nu\alpha}{\nu-1}$ positiv sey. Hierdurch werden wir für den Werth von N, die Größen μ, ν, π, ꝛc.

und ν mögen seyn, welche sie wollen, allemal eine reelle Form bekommen.

42.

Angenommen daß die Funktion ϕx nicht mehr als ein Glied Ax^α habe und daß also die Gleichung

$$\alpha - x + Ax^\alpha = 0$$

sey: so hat man

$$N = \nu\left(\frac{\nu\alpha}{\nu - 1}\right)^{\nu - 1}\left(\frac{A}{\mu}\right)^\mu$$

und $\mu = 1$, $\alpha\mu = \nu$; folglich $\mu = 1$ und $\nu = a$; folglich

$$N = a\left(\frac{\alpha a}{a - 1}\right)^{a-1}A.$$

Es wird demnach die Reihe convergiren, wenn

$$A = \text{oder} < \frac{1}{a}\left(\frac{a - 1}{\alpha a}\right)^{a-1}$$

ist. Dies ist der Fall der zweyten Aufgabe des vorhergehenden §. Nun hat man in der ersten Auflösung sogleich

$$\alpha = \frac{a}{b},\quad A = \frac{c}{b},\quad a = n.$$

Folglich wird die erste Reihe dieser Auflösung, d. h. diejenige welche sich auf die erste Wurzel bezieht, convergirend seyn, wenn

$$\frac{c}{b} = \text{oder} < \frac{1}{n}\left(\frac{(n - 1)b}{an}\right)^{n-1}$$

ist, das heißt, wenn ohne auf die Zeichen zu sehen

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{oder} < \frac{(n - 1)^{n-1}}{n^n}$$

ist, und a, b, c, positiv genommen werden.

Ist $n = 2$, so muß $\frac{ac}{b^2}$ = oder < $\frac{1}{2^2}$, d. h. b^2 = oder > $4ac$ seyn. Dies ist aber genau die Bedingung, unter welcher die Reihe convergirt, welche man durch die Entwickelung der Wurzelgröße $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ erhält, und welche die nemliche ist als die, welche wir nach unserer Methode gefunden haben.

In der zweyten Reihe eben derselben Auflösung hat man, wenn man die Gleichung

$$\frac{b}{c} - t - \frac{a}{c} t^{\frac{1}{1-n}} = 0$$

mit der obigen allgemeinen Formel vergleicht,

$$\alpha = \frac{b}{c},\quad A = -\frac{a}{c},\quad a = \frac{1}{1-n}$$

und es wird daher diese Reihe convergiren, wenn ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$\frac{a}{c} = \text{oder} < (1 - n(\frac{nc}{b})^{\frac{n}{1-n}}$$

oder

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} = \text{oder} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

ist. Diese Bedingung ist eben dieselbe als die vorhergehende.

In der zweyten Auflösung hat man, wenn man die Gleichung

$$\frac{a}{c} + t - \frac{bt^{\frac{1}{n}}}{c} = 0$$

mit derselben allgemeinen Formel vergleicht,

$$\alpha = -\frac{a}{c},\quad A = \frac{b}{c} \text{ und } a = \frac{1}{n}$$

Sollen daher die Reihen convergiren, so muß ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$\frac{b}{c} = \text{oder} < n\left(\frac{(n-1)c}{a}\right)^{\frac{1-n}{n}}$$

oder

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} = \text{oder} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

seyn, und diese Bedingung steht der bey der ersten Auflösung gerade entgegen.

Wenn man daher 1) in der Gleichung

$$a - bx + cx^n = 0$$

ohne Rücksicht auf die Zeichen der Größen a, b, c

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{oder} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

hat, so muß man die erste Auflösung der zweyten Aufgabe brauchen. Diese wird allemal convergirende und also den Wurzeln selbst gemäße Reihen darbieten, so daß diese Wurzeln reell oder imaginär seyn werden, je nachdem die Reihen, wodurch sie ausgedruckt werden, solches sind.

Es hat daher in diesem Falle die gegebene Gleichung so viel reelle und so viel imaginäre Wurzeln, als es dergleichen in den Gleichungen giebt, die man durch die Combination zweyer ihrer auf einander folgenden Glieder, wenn man dieselben = o setzt, erhält. Diese Gleichungen sind

$$a - bx = 0, \text{ und } b - cx^{n-1} = 0$$

und es muß daher zum wenigsten eine Wurzel reell seyn.

Wenn 2) $\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{oder} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$ ist, so muß man die zweyte Auflösung brauchen, deren Reihen dabey nothwendig convergiren. In diesem Falle hat daher die

Glei-

Gleichung so viel reelle und so viel imaginäre Wurzeln, als es dergleichen in der Gleichung giebt, die man bekömmt, wenn man das erste und letzte Glied mit einander combinirt und $= 0$ setzt, d. h. eben so viel, als der Gleichung $a + cx^n = 0$ zukommen.

43.

Hätte man die Gleichung

$$a - bx^m + cx^{m+n} = 0$$

so dürfte man nur wie Nr. 21., $x^m = t$ annehmen, wodurch die gedachte Gleichung in

$$a - bt + ct^{\frac{m+n}{n}} = 0$$

verwandelt würde. Auf diese Art hätte man wieder den Fall der vorhergehenden Nr. Setzt man daher $\frac{m+n}{n}$ für n, so ergiebt sich, daß die erste Auflösung brauchbar ist, wenn

$$\frac{a^{\frac{n}{m}} c}{b^{\frac{m+n}{n}}} = \text{oder} < \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}}}{\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{m+n}{n}}}$$

oder

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \text{oder} < \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

und die zweyte dagegen, wenn

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \text{oder} > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

ist. Im ersten Falle hat daher die gegebene Gleichung so viel reelle und so viel imaginäre Wurzeln als es dergleichen in den beyden Gleichungen

$$a - bx^m = 0 \text{ und } b - cx^n = 0$$

und in dem zweyten so viel, als es dergleichen in der Gleichung

$$a + cx^{m+n} = 0$$

giebt.

44.

Wenn $\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ wäre, so kämen beyde Bedingungen mit einander überein. In diesem Falle müßte man sagen, daß die Gleichung so viel reelle und so viel imaginäre Wurzeln habe, als es dergleichen in den Gleichungen

$$a - bx^m = 0, \text{ und } b - cx^n = 0$$

und in der Gleichung

$$a + cx^{m+n} = 0$$

giebt. Wäre also die Anzahl der imaginären Wurzeln in jenen beyden Gleichungen verschieden von der Anzahl dieser Wurzeln in der letzten Gleichung, so würde folgen, daß die gegebene Gleichung so viel gleiche Wurzeln hätte, als es mehr imaginäre Wurzeln auf der einen Seite gäbe. Denn da die gleichen Wurzeln die Grenzen zwischen den reellen und imaginären Wurzeln sind, so kann man sie gewissermassen als zu beyden gehörig betrachten.

45.

Wir haben gesehen (Nr. 40.) daß N nicht > 1 seyn darf, wenn die Reihe convergirend seyn soll. Man suche daher in jedem Falle den größten Werth von N, indem man die Größen μ, ν, π, rc. als veränderlich betrachtet, und schließe, wenn derselbe nicht größer sich ergiebt als 1, daß die Reihe convergire, und im entgegenstehenden Falle, daß sie divergire.

Läßt

Läßt man bloß μ und ν veränderlich seyn, so hat man $\frac{dN}{N} = dv\, l\frac{\alpha v}{v-1} + d\mu(l\frac{A}{\mu} - 1) + d\nu(l\frac{B}{\nu} - 1)$. Da nun $\mu + \nu + \pi +$ ꝛc. $= 1$, und $a\mu + b\nu + c\pi +$ ꝛc. $= v$ seyn muß, so wird $d\mu + d\nu = 0$, $ad\mu + bd\nu = dv$; folglich $d\mu = \frac{dv}{a-b}$, und $d\nu = \frac{dv}{b-a}$. Substituirt man diese Werthe und läßt dabey das Differenzial $dN = 0$ werden, so bekommt man

$$l\frac{\alpha v}{v-1} + \frac{l\frac{A}{\mu} - l\frac{B}{\nu}}{a-v} = 0$$

woraus fließt,

$$\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{a}\frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{b}\frac{B}{\nu}$$

Ließe man μ und π veränderlich seyn, so fände man auf ähnliche Art

$$\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{a}\frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{c}\frac{C}{\pi}$$

u. s. f.

Auf diese Art sind die Bedingungen des Größten und Kleinsten in folgenden Gleichungen enthalten,

$$\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{a}\frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{b}\frac{B}{\nu} = \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{c}\frac{C}{\pi} \text{ ꝛc.}$$

Läßt man demnach λ jeden Coefficienten bedeuten, so ist

$$\mu = \lambda A \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{a}$$

$$\nu = \lambda B\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{b}$$

$$\pi = \lambda C\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{c}$$

ꝛc.

und

und es hat also, wenn man diese Werthe in die Gleichungen

$$\mu + \nu + \pi + \text{rc.} = 1, \quad \mu a + \nu b + \pi c + \text{rc.} = \upsilon$$

bringt,

$$\lambda\left(A\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^a + B\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^b + C\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^c + \text{rc.}\right) = 1$$

$$\lambda\left(Aa\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^a + Bb\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^b + Cc\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^c + \text{rc.}\right) = \upsilon$$

Hieraus bekommt man durch die Wegschaffung von λ

$$A(\alpha - \upsilon)\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^\alpha + B(b - \upsilon)\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^b +$$

$$C(c - \upsilon)\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^c + \text{rc.} = 0$$

Hat man durch diese Gleichung υ bestimmt, so wird

$$\lambda = \frac{1}{A\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^\alpha + B\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^b + C\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1}\right)^c + \text{rc.}}$$

und nun lassen sich auch μ, ν, π, rc. finden.

Man kann also durch dieses Mittel allemal erkennen, ob die Reihen, von welchen bisher geredet worden ist, convergiren oder divergiren.