Die Theorie der Gleichungen

Euler, Leonhard

Berlin, 1791

6. Bemerkungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen, vom Hrn. de la Grange. Aus dem 2ten Bande der neuen Memoiren der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin.

6. Bemerkungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Vom

Herrn de la Grange.

Aus dem 2ten Bande der neuen Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Nach der Wichtigkeit der Theorie von den Gleichungen und nach der Schnelligkeit der Fortschritte zu urtheilen, welche die ersten Erfinder darin machten, müßte dieser Theil der Analyse unter allen der vollkommenste seyn; allein der Bemühungen aller nachfolgenden Mathematiker ungeachtet fehlt demselben zur Vollendung noch sehr viel. Zwar hat man alles erschöpft, was sich über die Natur der Gleichungen, über ihre Verwandlung, über die Bedingungen, unter welchen zwey oder mehrere Wurzeln einander gleich sind oder zu einander ein gegebenes Verhältniß haben, über die Form der imaginären Wurzeln und über die Methode diejenigen reellen Wurzeln zu finden welche sich ihrer Realität ungeachtet in einer imaginären Form darstellen u. s. w. sagen läßt. Man hat auch allgemeine Regeln entdeckt, nach welchen man zu beurtheilen im Stande ist, ob alle Wurzeln einer gegebenen Gleichung reell sind oder nicht, und im ersten Fall, wie viel von diesen Wurzeln positiv und wiel negativ sind; allein

man

man hat bis jetzt noch keine allgemeine Regel zur Bestimmung der Anzahl der imaginären Wurzeln in den Gleichungen die dergleichen enthalten, und noch weniger eine allgemeine Regel zur Bestimmung der Anzahl der reellen, positiven und negativen Wurzeln, wenn man die Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln kennt; ja man hat noch keiue Regel, wornach man mit Sicherheit entscheiden könnte, ob eine gegebene Gleichung reelle Wurzeln habe oder nicht, außer wenn die Gleichung zu einem ungeradeu Grade gehört oder das letzte Glied negativ hat.

Ich will hiermit nicht sagen, daß man die Anzahl der imaginären und reellen, positiven und negativen Wurzeln nicht zu bestimmen im Stande sey, wenn die Coefficienten der gegebenen Gleichung bestimmte Zahlen sind; die Methoden, welche ich dafür gegeben habe, scheinen darüber nichts weiter übrig zu lassen, so wie man sich darnach auch dem Werthe einer jeden Wurzel in diesem Falle so sehr nähern kann, als man irgend will. Es ist vielmehr hier die Rede von den Gleichungen, deren Coefficienten allgemein durch Buchstaben gegeben sind, und von den Bedingungen, die bey diesen Coefficienten statt finden müssen, wenn die Wurzeln einer gegebenen Gleichung diese oder jene Beschaffenheit haben sollen.

In Ansehung der Auflösung dieser Gleichungen ist man noch nicht viel weiter gekommen als man zu Cardan's Zeiten war, welcher zuerst die Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades gegeben hat. Es scheint fast, als müßte man die Entdeckungen der Italienischen Analysten als das höchste betrachten, was man in dieser Materie zu erreichen hoffen darf, wenigstens haben die nachmaligen Versuche

suche noch zu nichts weiter gedient, als zur Erfindung neuer Methoden die Gleichungen des dritten und vierten Grades aufzulösen, davon aber keine einer allgemeinen Anwendung auf die höhern Gleichungen fähig zu seyn scheint.

Ich habe mir gegenwärtig vorgesetzt, die verschiedenen bisherigen Methoden der algebraischen Auflösung der Gleichungen zu untersuchen, dieselben auf allgemeine Principien zu bringen, und aus unwidersprechlichen Gründen zu zeigen, warum sie bey den Gleichungen des dritten und vierten Grades hinlänglich, bey den höhern Gleichungen aber unzulänglich sind.

Diese Untersuchung wird einen zwiefachen Nutzen gewähren. Einmal wird sie über die bekannten Auflösungen der Gleichungen des dritten und vierten Grades ein helleres Licht verbreiten, und zweytens denen nützlich seyn, welche sich mit der Auflösung der Gleichungen der höhern Grade beschäftigen wollen, indem sie ihnen zu dieser Absicht verschiedene Gesichtspunkte vor Augen stellen und sie zugleich einer Menge unnützer Versuche überheben wird.

Erster Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

1.

Da die Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades sehr leicht ist und außer ihrer Leichtigkeit nichts merkwürdiges weiter hat: so wende ich mich sogleich zu der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades, wozu Kunstgriffe erfordert werden, die sich nicht von selbst darbieten.

Es sey also

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

die allgemeine Gleichung des dritten Grades. Da man aus jeder Gleichung durch Vergrößerung ihrer Wurzeln um den Coefficienten des zweyten Gliedes mit dem Exponenten des ersten Gliedes dividirt, das zweyte Glied wegschaffen kann: so läßt sich diese Gleichung dadurch, daß man $m = 0$ setzt, ihrer Allgemeinheit unbeschadet, auf folgende einfachere Form bringen

$$x^3 + nx + p = 0.$$

In dieser Form haben Scipio Ferreo und Tartalea die Gleichungen des dritten Grades untersucht, und ihnen sind wir die Auflösung dieser Gleichungen schuldig, obgleich der Weg, auf welchem sie zu derselben gelangt sind, uns unbekannt ist. Die natürlichste Methode scheint mir diejenige zu seyn, welche Hudde angenommen hat. Man zerfällt darnach die Wurzel in zwey unbestimmte Größen, wobey sich die Gleichung dergestalt in zwey Theile theilen läßt, daß die Erfindung der gedachten unbestimmten Größen bloß von der Auflösung der quadratischen Gleichungen abhängt.

Man setzt also nach dieser Methode

$$x = y + z$$

und reducirt durch diese Substitution die gegebene Gleichung auf folgende

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + n(z + y) + p = 0$$

oder

$$y^3 + z^3 + p + (z + y)(3yz + n) = 0.$$

Nun macht man die beyden abgesonderten Gleichungen

$$y^3 + z^3 + p = 0$$

$$3yz + n = 0$$

und

und bekommt $z = -\frac{n}{3y}$, und, wenn man diesen Werth in die erste Gleichung bringt,

$$y^3 - \frac{n^3}{27y^3} + p = 0$$

oder

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0.$$

Dieses ist nun zwar eine Gleichung des sechsten Grades. Allein da die unbekannte Größe darin nur zweymal vorkommt, und ihr Exponent in dem ersten Gliede das Doppelte des Exponenten im zweyten Gliede ist: so kann man dieselbe als eine Gleichung des zweyten Grades behandeln. Auf diese Art bekommt man

$$y^3 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27})}$$

und daher

$$y = \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27})})}$$

Hat man aber hiernach y, und dann nach $z = -\frac{n}{3y}$ die andere unbestimmte Größe z gefunden, so ist

$$x = y + z = y - \frac{n}{3y}.$$

2.

Es bietet aber diese Auflösung Gelegenheit zu mehrern Anmerkungen dar. Zuvörderst ist bekannt, daß die Größe y sechs Werthe haben muß, weil sie durch eine Gleichung vom sechsten Grade bestimmt wird, und daß daher der Größe x ebenfalls sechs Werthe zukommen. Da aber x die Wurzel einer Gleichung vom dritten Grade ist, so kann der Werth davon nur dreyfach seyn, und es müssen sich daher jene sechs Werthe auf drey zurückführen lassen. Daß dieses möglich sey, lehret der Calcul, wenn man aus den Gleichungen

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0, \text{ und } x = y - \frac{n}{3y}$$

y wegschaft. Setzt man der größern Allgemeinheit wegen

$$x = y - \frac{k}{y} \text{ oder } y^2 - xy - k = 0$$

so hat man $y^2 = xy + k$, und folglich

$$y^3 = xy^2 + ky = y(x^2 + k) + kx$$

$$y^6 = y^2(x^2 + k)^2 + 2kx(x^2 + k)y + k^2x^2$$

$$= yx(x^2 + k)(x^2 + 3k) + kx^4 + 3k^2x^2 + k^3$$

und durch die Substitution dieser Werthe von y^3 und y^6

$$y(x^2 + k)(x^3 + 3kx + p) + kx(x^3 + 3kx + p) + k^3 - \frac{n^3}{27} = 0.$$

Es sey der Kürze wegen

$$\frac{n^3}{27} - k^3 = h, \text{ und } x^3 + 3kx + p = X$$

so wird $(y(x^2 + k) + kx)X - h = 0$, und folglich

$$y = \frac{\frac{h}{X} - kx}{x^2 + k}$$

Bringt man diesen Werth von y in die Gleichung $y^2 - xy - k = 0$, so hat man

$$\left(\frac{h}{X} - kx\right)^2 - x\left(\frac{h}{X} - kx\right)(x^2 + k) - k(x^2 + k)^2 = 0$$

oder

$$k^3X^2 + hXx(x^2 + 3k) - h^2 = 0$$

oder, da $x(x^2 + 3k) = X - p$ ist

$$\frac{n^3}{27}X^2 - hpX - h^2 = 0$$

d. h.

d. h.

$$\left(X - \frac{27hp}{n^3}\right)^2 - \frac{27h^2}{n^3}\left(1 + \frac{27p^2}{4n^3}\right) = 0$$

Setzt man nunmehr $k = \frac{n}{3}$, um $x = y - \frac{n}{3y}$ zu bekommen, so ist klar, daß $h = 0$ wird. Dadurch aber verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in $X^2 = 0$, oder

$$(x^3 + nx + p)^2 = 0$$

eine Gleichung, welche eben dieselben Wurzeln hat als die gegebene, wovon aber eine jede doppelt ist.

Es ist daher die Auflösung einer Gleichung des dritten Grades eigentlich nichts anders als Auflösung einer Gleichung vom sechsten Grade; eine Unbequemlichkeit, welche sich bey dem zweyten Grade nicht findet, die aber bey den höhern Graden noch weit größer wird.

3.

Da es also unter den sechs Werthen von y nicht mehr als drey von einander verschiedene Werthe giebt, so kommt es nunmehr darauf an, Unterscheidungskennzeichen von diesen festzusetzen. Hiezu bedürfen wir eines besondern Ausdrucks für jeden der sechs Werthe von y. Nennt man nun die drey cubischen Wurzeln der Einheit, oder die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$, 1, α und β, und setzt dabey der Kürze wegen $\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27} = q$: so sind die sechs Werthe von y

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}\right)}$$

$$\alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}\right)}$$

$$\beta\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}\right)}$$

Da ferner

$$\sqrt[3]{(-\frac{q}{2} \pm q)} \times \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})} = \sqrt[3]{(\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{n}{3}$$

und folglich

$$\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}} = -\frac{n}{3\sqrt{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})}}$$

ist: so sind die zugehörigen Werthe von z

$$\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\frac{1}{\beta}\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

Da aber 1, α und β die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ sind, so ist $1 . \alpha . \beta = \alpha\beta = 1$; folglich $\frac{1}{\alpha} = \beta$ und $\frac{1}{\beta} = \alpha$, und die vorhergehenden Werthe lassen sich auch auf diese Art ausdrucken:

$$\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\beta\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\alpha\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

Nun ist $x = y + z$, und setzt man daher die zugehörigen Werthe von y und z zusammen, so bekommt man

$$\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})} + \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$$\alpha\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})} + \beta\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

$\beta\sqrt[3]{(-}$

$$\beta\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})} + \alpha\sqrt[3]{(-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q})}$$

und hier ist leicht zu sehen, daß man einerley Werthe für x bekommt, man mag die obern oder die untern Zeichen nehmen.

Hieraus folgt, daß es gleichgültig ist, ob man die Wurzelgröße $\sqrt{q}$ positiv oder negativ nimmt, und daß sich die drey Wurzeln der gegebenen Gleichung unmittelbar aus den drey Werthen des cubischen Ausdrucks $\sqrt{(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q})}$ finden lassen.

4.

Nr. 2. ist gezeigt worden, daß die Auflösung einer jeden Gleichung vom dritten Grade auf eine Gleichung vom sechsten Grade führt; wollte man aber die Gleichung

$$x = \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} + \sqrt{q})} + \sqrt[3]{(-\frac{p}{2} - \sqrt{q})}$$

von ihrer Irrationalität befreyen, so würde man zu einer Gleichung vom neunten Grade gelangen. Denn cubirte man, so ergäbe sich

$$x^3 = -p + 3x\sqrt[3]{(\frac{p^2}{4} - q)}$$

und versetzte man nun das Glied $-p$ und cubirte abermals, so würde

$$(x^3 + p)^3 = 27(\frac{p^2}{4} - q)x^3$$

oder, da $\frac{p^2}{4} - q = \frac{x^3}{27}$ ist

$$x^9 + 3px^6 + (3p^2 + n^3)x^3 + p^3 = 0.$$

Allein diese Gleichung schließt außer den drey Wurzeln der chung $x^3 + nx + p = 0$ noch sechs andere in sich, indem sie sich in folgende drey zerlegen läßt:

$$x^3 + nx + p = 0$$
$$x^3 + \alpha nx + p = 0$$
$$x^3 + \beta nx + p = 0$$

und die beyden letztern Gleichungen hiervon sind von der ersten unterschieden, wie beym ersten Anblick wahrzunehmen ist. Es läßt sich daher auch hieraus nicht so wie oben eine Folge für den Grad herleiten, welchem die Auflösung der gegebenen Gleichung eigentlich zugehört, denn oben mußte solches deswegen geschehen, weil die Gleichung $X^2 = 0$ (Nr. 2.) eben dieselben Wurzeln enthielt als die gegebene.

5.

Die Gleichung des sechsten Grades

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$$

heißt die reducirte Gleichung des dritten Grades, weil man bey der Auflösung der Gleichung $x^3 + nx + p = 0$ auf sie zurückkommt. Da wir also vorhin die Abhängigkeit der Wurzeln dieser letzten Gleichung von den Wurzeln jener Gleichung kennen gelernt haben, so wollen wir nunmehr untersuchen, wie die Wurzeln der reducirten Gleichung von den Wurzeln der gegebenen Gleichung abhängen. Um aber dieser Untersuchung einen höhern Grad von Allgemeinheit und Deutlichkeit zu geben, wollen wir eine Gleichung betrachten, welche alle Glieder hat, und deren Form folgende ist:

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

so wie ihre Wurzeln, allgemein ausgedruckt, a, b, c.

Fängt man davon an, daß man das zweyte Glied wegschaft und zu dem Ende $x = x' - \frac{m}{3}$, so wie der Kürze wegen

$n' =$

$$n' = n - \frac{m^2}{3},\ p' = p - \frac{mn}{3} + \frac{2m^3}{27}$$

setzt, so bekommt man die Gleichung

$$x'^3 + n'x' + p' = 0$$

und diese Gleichung hat die erforderliche Form. Setzt man nunmehr $x' = y - \frac{n'}{3y}$, so erhält man zur reducirten Gleichung

$$y^6 + p'y^3 - \frac{n'^3}{27} = 0,$$

und folglich, wenn man die Cubikwurzel aus $-\frac{p'}{2} + \sqrt{(\frac{p'^2}{4} + \frac{n'^3}{27})}$ mit dem Buchstaben r bezeichnet, für die drey Werthe von y

$$y = r,\ y = \alpha r,\ y = \beta r.$$

Auf diese Art werden die drey Wurzeln

$$x' = r - \frac{n'}{3r},\ x' = \alpha r - \frac{n'}{3\alpha r},\ x' = \beta r - \frac{n'}{3\beta r}$$

und da $x = x' - \frac{m}{3}$ ist, so findet man für x, wenn man der Kürze wegen $\frac{n'}{3r} = s$ setzt,

$$-\frac{m}{3} + r - s$$

$$-\frac{m}{3} + \alpha r - \frac{s}{\alpha}$$

$$-\frac{m}{3} + \beta r - \frac{s}{\beta}$$

und es wird daher

$$a = -\frac{m}{3} + r - s$$

$$b = -\frac{m}{3} + \alpha r - \frac{s}{\alpha}$$

$$c = -\frac{m}{3} + \beta r - \frac{s}{\beta}$$

Zieht man hier nach einander die zweyte und dritte Gleichung von der ersten ab, so bekommt man

$$a - b = (1 - \alpha)(r + \frac{s}{\alpha})$$

$$a - c = (1 - \beta)(r + \frac{s}{\beta})$$

und findet hieraus

$$\frac{\alpha(a - b)}{1 - \alpha} = \alpha r + s$$

$$\frac{b(a - c)}{1 - \beta} = \beta r + s$$

woher sich, wenn man abermals abzieht und durch $\alpha - \beta$ dividirt

$$r = \frac{\frac{\alpha(a - b)}{1 - \alpha} - \frac{\beta(a - c)}{1 - \beta}}{\alpha - \beta}$$

oder

$$r = \frac{a}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} + \frac{\alpha b}{(\alpha - 1)(\alpha - \beta)} + \frac{\beta c}{(\beta - 1)(\beta - \alpha)}$$

ergiebt. Nun sind 1, α und β die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$, und daher

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)$$

folglich, wenn man differenzirt,

$$3x^2 = (x - \alpha)(x - \beta) + (x - 1)(x - \beta) + (x - 1)(x - \alpha)$$

so daß man, wenn man nach und nach $x = 1, \alpha, \beta$ setzt,

$$3 = (1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$3\alpha^2 = (\alpha - 1)(\alpha - \beta)$$

$$3\beta^2 = (\beta - 1)(\beta - \alpha)$$

bekommt.

bekommt. Setzt man demnach diese Werthe in den vorhergehenden Ausdruck für r, so erhält man

$$r = \frac{a}{3} + \frac{b}{3\alpha} + \frac{c}{3\beta}$$

oder, da $\alpha\beta = 1$ ist,

$$r = \frac{a + \beta b + \alpha c}{3}$$

Dieses ist daher der Werth von r, und folglich auch der Werth von y, so daß, wenn man α statt β und umgekehrt setzt, welches erlaubt ist,

$$y = \frac{a + \alpha b + \beta c}{3}$$

wird.

6.

Aus diesem Ausdrucke für y erhellet, warum die reducirte Gleichung eine Gleichung vom sechsten Grade seyn muß. Denn da diese reducirte Gleichung nicht unmittelbar von den Wurzeln a, b, c der gegebenen Gleichung, sondern bloß von den Coefficienten m, n, p abhängt: so ist klar, daß man in dem Ausdrucke für y die Größen a, b und c unter einander nach Gefallen muß verwechseln können. Es muß also die Größe y so viel verschiedene Werthe haben, als sich die drey Wurzeln a, b und c versetzen lassen; und da dieses nach der Theorie der Versetzungen auf sechs verschiedene Arten möglich ist, so muß auch die reducirte Gleichung eine Gleichung vom sechsten Grade seyn.

Außerdem erhellet daraus auch, warum sich die reducirte Gleichung wie eine quadratische Gleichung behandeln läßt. Es rührt dies nemlich daher, weil diese Gleichung bloß die Dignitäten y^3 und y^6, das heißt Dignitäten enthält,

hält, deren Exponenten Vielfache von 3 sind, so daß, wenn r ein Werth von y ist, auch αr und βr Werthe von y seyn müssen, indem $\alpha^3 = 1$ und $\beta^3 = 1$ ist. Es läßt sich dieses aber noch leichter zeigen, wenn man $\beta = \alpha^2$ setzt, und dieser Werth von β ergiebt sich aus $\alpha\beta = 1$ und $\alpha^3 - 1 = 0$, indem daraus $\alpha\beta = \alpha^3$ oder $\beta = \alpha^2$ folgt. Auf diese Art kann man den Werth von y auch durch

$$y = \frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3}$$

ausdrucken, und hieraus durch die Versetzung der Buchstaben a, b und c nach folgender Tabelle die sechs Werthe von y oder die sechs Wurzeln der reducirten Gleichung finden:

$$\frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3}$$

$$\frac{a + \alpha c + \alpha^2 b}{3}$$

$$\frac{b + \alpha a + \alpha^2 c}{3}$$

$$\frac{b + \alpha c + \alpha^2 a}{3}$$

$$\frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{3}$$

$$\frac{c + \alpha a + \alpha^2 b}{3}$$

Multiplicirt man hier den ersten Ausdruck zuvörderst durch α und dann durch β oder α^2, so bekommt man, da $\alpha^3 = 1$ ist,

$$\frac{c + \alpha a + \alpha^2 b}{3} \text{ und } \frac{b + \alpha c + \alpha^2 a}{3}$$

also den sechsten und vierten. Multiplicirt man ferner den zweyten Ausdruck durch α und α^2, so bekommt man

$$\frac{b + \alpha a + \alpha^2 c}{3} \text{ und } \frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{3}$$

oder den dritten und vierten. Eben so bekommt man, wenn man den dritten und vierten oder den fünften und sechsten Ausdruck durch α und α^2 multiplicirt, die übrigen.

7.

Dies leitet auf eine Methode, die reducirte Gleichung für die Gleichungen des dritten Grades directe zu finden. Es sey $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ die gegebene Gleichung und ihre Wurzeln a, b und c. Angenommen, daß die Wurzeln der reducirten Gleichung, allgemein ausgedruckt, Funktionen des ersten Grades von den Wurzeln a, b und c seyen, wie $Aa + Bb + Cc$, wo A, B und C von den Größen a, b und c unabhängige Coefficienten sind: so bekommt man, wenn man die Größen a, b und c so oft als möglich versetzt,

$$\begin{aligned}&Aa + Bb + Cc\\&Aa + Bc + Cb\\&Ab + Ba + Cc\\&Ab + Bc + Ca\\&Ac + Bb + Ca\\&Ac + Ba + Cb\end{aligned}$$

für die sechs Wurzeln der reducirten Gleichung. Soll nun diese Gleichung keine andere Dignitäten enthalten als solche, deren Exponenten Vielfache von 3 sind, so müssen nach dem Obigen, wenn die eine Wurzel r ist, auch αr und βr oder $\alpha^2 r$ Wurzeln von ihr seyn. Setzt man demnach

$$r = Aa + Bb + Cc$$

so muß $\alpha Aa + \alpha Bb + \alpha Cc$ einer von den vorhergehenden fünf übrigen Größen gleich seyn.

Nun kann dieselbe weder $Aa + Bc + Cb$ noch $Ab + Ba + Cc$ gleich werden, als wenn man $\alpha = 1$ annimmt.

Im

Im ersten Falle bekommt man alsdenn $\alpha A = A$ und im zweyten $\alpha C = C$. Vergleicht man aber mit $Ab + Bc + Ca$, so hat man $\alpha A = C$, $\alpha B = A$ und $\alpha C = B$, woraus $C = \alpha A$, $B = \alpha^2 A$ und $\alpha^3 A = A$, oder $\alpha^3 = 1$ fließt. Auf diese Art erhellet, daß α eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ seyn muß, und setzt man daher, der größern Leichtigkeit wegen, $A = 1$, so hat man $A = 1$, $B = \alpha$ und $C = \alpha^2$. Dieses giebt eben die Formeln, welche wir oben gefunden haben, bis auf den Nenner 3.

Setzt man also der Kürze wegen

$$r = a + \alpha b + \alpha^2 c$$
$$s = a + \alpha c + \alpha^2 b$$

so hat man in r, αr, $\alpha^2 r$ und s, αs, $\alpha^2 s$ die sechs Wurzeln der verwandelten Gleichung. Nennt man die unbekannte Größe dieser Gleichung y, so ist das Produkt der drey Faktoren $y - r$, $y - \alpha r$, $y - \alpha^2 r$

$$y^3 - r^3$$

und auf ähnliche Art das Produkt der drey übrigen Faktoren $y^3 - s^3$. Auf diese Art ist das ganze Produkt oder die reducirte Gleichung selbst

$$y^6 - (r^3 + s^3)y^3 + r^3 s^3 = 0$$

und es kommt nunmehr bloß darauf an, die Werthe von $r^3 + s^3$ und $r^3 s^3$ zu finden.

Erhebt man die Größe r zur dritten Potestät, und behält dabey vor Augen, daß $\alpha^3 = 1$ ist: so wird

$$r^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2b + b^2c + c^2a) + 3\alpha^2(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

und folglich auch, wenn man die Buchstaben b und c verwechselt,

$$s^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2c + c^2b + b^2a) + 3\alpha^2(c^2a + b^2c + a^2b)$$

Es sey der Kürze wegen

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = L$$
$$a^2b + b^2c + c^2a = M$$
$$a^2c + b^2a + c^2b = N$$

so wird

$$r^3 = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N$$
$$s^3 = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M, \text{ folglich}$$
$$r^3 + s^3 = 2L + 3(\alpha + \alpha^2)(M + N)$$

Da aber 1, α und α^2 die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ sind, worin das zweyte Glied fehlet: so ist $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ und also

$$r^3 + s^3 = 2L - 3(M + N).$$

Multiplicirt man hierauf die Werthe von r^3 und s^3 mit einander, so bekommt man

$$r^3s^3 = L^2 + 9(M^2 + N^2) + 3(\alpha + \alpha^2)(L(M + N) + 3MN)$$

oder, da $\alpha + \alpha^2 = -1$ ist

$$r^3s^3 = L(L - 3(M + N) + 9((M^2 + N^2) - 3MN)$$

Nun ist leicht einzusehen, daß die Größen α, $M + N$ und MN durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung m, n, p, und zwar ohne Extraction der Wurzel bestimmt werden. Es fließt dies nemlich daraus, weil diese Größen dieselben bleiben, man mag die Buchstaben a, b und c versetzen wie man will, so daß also jede von jenen Größen nicht mehr als einen Werth haben kann.

8.

Da nemlich

$$-m = a + b + c$$
$$n = ab + ac + bc \text{ und}$$
$$-p = abc$$

ist, so ist nach bekannten Regeln

$a^2 +$

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2 - 2n$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = - m^3 + 3mn - 3p$$

und hieraus findet man

$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 = n^3 - 3mnp + 3p^2.$$

Folglich ist

$$L = - m^3 + 3mn - 9p$$

$$M + N = 3p - mn$$

$$MN = n^3 + p(m^3 - 6mn) + 9p^2$$

Hieraus ergiebt sich

$$r^3 + s^3 = - 2m^3 + 9mn - 27p$$

und

$$r^3s^3 = m^6 - 9m^4n + 27m^2n - 27n^3 = (m^2 - 3n)^3.$$

Auf diese Art wird die reducirte Gleichung

$$y^6 + (2m^3 - 9mn + 27p)y^3 + (m^2 - 3n)^3 = 0$$

und diese Gleichung stimmt mit der oben Nr. 5. gefundenen überein, außer daß y in ihr das Dreyfache der unbekannten Größe in jener ist. Löset man daher diese Gleichung nach Art der quadratischen Gleichungen auf, oder setzt man, der Kürze wegen $y^3 = z$, so daß man

$$z^2 + (2m^3 - 9mn + 27p)z + (m^2 - 3n)^3 = 0$$

habe, und nennt dabey die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung z' und z'': so bekommt man $y^3 = z' = z''$, und folglich $y = \sqrt[3]{z'} = \sqrt[3]{z''}$. Da aber angenommen worden, daß r und s die beyden Werthe von y seyen, so ist

$$r = a + \alpha b + \alpha^2 c = \sqrt[3]{z'}$$

$$s = a + \alpha c + \alpha^2 b = \sqrt[3]{z''}$$

und diese beyden Gleichungen, verbunden mit der Gleichung

$$a + b + c = - m$$

setzen in den Stand, die drey Wurzeln a, b und c zu finden. Denn da $\alpha^3 = 1$ und $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ist, so wird

a =

$$a = \frac{-m + \sqrt[3]{z'} + \sqrt[3]{z''}}{3}$$

$$b = \frac{-m + \alpha^2\sqrt[3]{z'} + \alpha\sqrt[3]{z''}}{3}$$

$$c = \frac{-m + \alpha\sqrt[3]{z'} + \alpha^2\sqrt[3]{z''}}{3}$$

welches mit dem Obigen übereinstimmt.

9.

Um diesen Gegenstand in ein noch helleres Licht zu setzen bemerke man, daß die Größen M und N Nr. 7. von der Art sind, daß die eine in die andere übergeht, wenn man die drey Wurzeln a, b und c auf irgend eine Art verwechselt, so daß diese Größen bloß Wurzeln einer quadratischen Gleichung seyn können. Nennt man die unbekannte Größe dieser Gleichung t, so hat dieselbe nothwendiger Weise die Form

$$t^2 - (M + N)t + MN = 0$$

und setzt man daher für M und N die ihnen zukommende Werthe Nr. 8., so hat man

$$t^2 - (3p - mn)t + (n^3 - 6mn)p + 9p^2 = 0$$

Auf diese Art bekommt man durch die Auflösung der vorhergehenden Gleichung die Werthe von M und N, und da die Größe L bereits bekannt ist, indem $L = - m^3 + 3mn - 9p$, so sind auch die Werthe von r^3 und s^3 (Nr. 7.) oder von z' und z'' (Nr. 8.) bekannt. Sie sind nemlich

$$z' = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N$$
$$z'' = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M$$

und vermittelst dieser Werthe findet man die Wurzeln a, b und c, wie wir kurz vorher gesehen haben.

Uebrigens erhellet aus dieser Eigenschaft der Funktionen M und N deutlich, warum die Größe $z = y^3 = (a + \alpha b + \alpha^2 c)^3$ bloß von einer Gleichung des zweyten Grades abhängt, so daß die Gleichung für y bloß die Dignitäten y^3 und y^6 enthalten kann.

10.

Die Methode der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades, welche wir bis jetzt untersucht haben, nennt man gewöhnlich die Cardanische; es giebt aber noch eine andere, deren Erfinder von Tschirnhausen ist, und welche den Vorzug hat, daß sie directer und allgemeiner, obgleich weniger einfach ist. Man findet dieselbe in den Actis Eruditorum vom Jahr 1683 erklärt, und es kommt dabey darauf an, aus jeder gegebenen Gleichung so viel Zwischenglieder wegzuschaffen als man will. Der Erfinder derselben trägt sie als eine allgemeine Methode vor, und wir werden sehen, daß sie solches wirklich ist. Allein sie erfordert öfters die Auflösung höherer Gleichungen als die gegebene selbst ist, und ist deswegen bloß bis bey den Gleichungen des vierten Grades brauchbar.

Wenn x die unbekannte Größe einer Gleichung ist, so kann man daraus ein Glied wegschaffen, wenn man $x = y + a$ setzt, wo y eine neue unbekannte und a eine unbestimmte Größe ist. Eben so kann man zwey Glieder wegbringen, wenn man $x^2 = bx + a + y$, oder drey, wenn man $x^3 = cx^2 + bx + a + y$ setzt u. s. w. und a, b und c rc. sind dabey unbestimmte Coefficienten und immer so viel, als man Glieder wegschaffen will.

Auf diese Art hat man nur die unbekannte Größe x aus der gegebenen Gleichung vermittelst der neuen angenomme-

nen

nen Gleichung wegzuschaffen, und man bekommt dann eine neue Gleichung für y von eben dem Grade als die gegebene ist, worin man so viel Glieder $= 0$ setzen kann, als man unbestimmte Größen a, b, c, ꝛc. hat.

Um also die Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

zu nehmen, setze man $x^2 = bx + a + y$. Auf diese Art hat man $x^3 = bx^2 + ax + yx =$ (wenn man den Werth von x^2 substituirt) $(b^2 + a + y)x + b(a + y)$. Bringt man diese Werthe in die gegebene Gleichung, so wird

$$(b^2 + mb + n + a + y)x = (b + m)(a + y) + p = 0 \quad \ldots (A)$$

und folglich

$$x = -\frac{(b + m)(a + y) + p}{b^2 + mb + n + a + y}$$

Bringt man ferner diesen Werth in die Gleichung $x^2 = bx + a + y$ so bekommt man, $b + m = c$, $b^2 + mb + n = d$ gesetzt,

$$(c(a + y) + p)^2 + b(c(a + y) + p)(d + a + y) - (a + y)(d + a + y)^2 = 0$$

oder wenn man die Glieder nach den Dignitäten von $a + y$ ordnet, und die Werthe von c und d wieder braucht,

$$(y + a)^3 - (mb + m^2 - 2n)(y + a)^2 + (nb^2 + (mn - 3p)b + n^2 - 2mp)(y + a) - p(b^3 + mb^2 + nb + p) = 0 \quad \ldots (B)$$

so daß man durch die Entwickelung der Potestäten von $y + a$ die Gleichung

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0$$

bekommt, worin

$$A = 3a - mb - m^2 + 2n$$

$$B = 3a^2 - 2a(mb + m^2 - 2n) + nb^2 + (mn - 3p)b + n^2 - 2mp$$

$$C = a^3 - (mb + m^2 - 2n)a^2 + (nb^2 + (mn - 3p)b$$
$$+ (n^2 - 2mp)a - p(b^3 + mb^2 + nb + p)$$

ist. Nun kann man das zweyte und dritte Glied verschwinden lassen, indem man $A = 0$ und $B = 0$ annimmt. Dadurch bekommt man die Gleichungen

$$3a - mb - m^2 + 2n = 0$$

$$3a^2 - 2a(mb + m^2 - 2n) + nb^2 + (mn - 3p)b$$
$$+ n^2 - 2mp = 0$$

Durch diese Gleichungen lassen sich a und b bestimmen und die Gleichung für y bekömmt die Form $y^3 + C = 0$, welche sogleich die drey Wurzeln $y = -\sqrt[3]{C}$, $y = -\alpha\sqrt[3]{C}$ und $y = -\alpha^2\sqrt[3]{C}$ giebt, wenn 1, α und α^2 die drey Wurzeln der Gleichung $x - 1 = 0$ sind. Setzt man demnach in den vorhin gefundenen Ausdruck für x die aus den vorhergehenden Gleichungen sich ergebenden Werthe von a und b, und darauf für y die drey Werthe der Gleichung $y^3 + C = 0$, so hat man sogleich die drey Wurzeln x der gegebenen Gleichung.

Da die erste von den beyden Gleichungen, welche a und b geben, zu dem ersten und die andere zu dem zweyten Grade gehört, so ist klar, daß die Bestimmung dieser Größen nur von einer Gleichung vom zweyten Grade abhängt. Auch hat man sogleich

$$a = \frac{mb + m^2 - 2n}{3}$$

und wenn man diesen Werth in die zweyte Gleichung bringt,

$$(m^2 - 3n)b^2 + (2m^3 - 7mn + 9p)b + m^4 - 4m^2n$$
$$+ 6mp + n^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung bekommt man zwey Werthe von b, welche man ohne Unterschied gebrauchen kann, weil sie allemal dieselben Werthe für x geben.

Es

Es hat demnach diese Methode den Vorzug, daß sie unmittelbar auf eine reducirte Gleichung vom zweyten Grade führt, dagegen die gewöhnliche Methode zu einer reducirten Gleichung vom sechsten Grade leitet. Indeß ist die Auflösung, welche sie giebt, von der Unbequemlichkeit nicht frey, welche wir bey der Cardanischen Regel bemerkt haben, Nr. 2. Denn da die Größe y drey Werthe, und jede der Größen a und b zwey Werthe hat, so fällt in die Augen, daß daher sechs Werthe für x entspringen, welche Wurzeln einer Gleichung vom sechsten Grade seyn müssen. Indeß lassen sich diese sechs Werthe auf drey doppelte Werthe zurückführen, wie sich leicht zeigen läßt und wir bey der Cardanischen Regel bereits gezeigt haben.

11.

Es verdient aber bey dieser Methode bemerkt zu werden, daß man nicht, so wie von Tschirnhausen gethan hat, nachdem man die Werthe von a, b und y gefunden, jede Wurzel der Gleichung $x^2 - bx - a - y = 0$ als die Wurzel x betrachten darf. Denn sollte dieses erlaubt seyn, so müßte diese Gleichung zwey Wurzeln von der gegebenen Gleichung enthalten und b die Summe dieser beyden Wurzeln seyn. Da man aber b mit eben dem Rechte als die Summe jeder zweyer andern von den drey Wurzeln der gegebenen Gleichung ansehen könnte, so würde b eben so viel verschiedene Werthe haben müssen, als man die gedachten Wurzeln zu zwey combiniren kann; und es müßte also b sechs Werthe haben, da demselben doch nur zwey zukommen, weil es von einer Gleichung des zweyten Grades abhängt.

Es ist daher bey dieser Methode nothwendig sich so zu nehmen, daß die angenommene Gleichung mit der gegebenen eine gemeinschaftliche Wurzel habe. Hat man also die Werthe von a, b und y so bestimmt, wie es diese Bedingung erfordert, so muß man für den Werth von x die Wurzel der Gleichung $x^2 - bx - a - y = 0$ wählen, welche auch der Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ zukommt. Zu diesem Ende darf man nur den größten gemeinschaftlichen Divisor beyder Gleichungen suchen, und diesen Divisor, worin x bloß in der ersten Dignität vorkommen kann, giebt einen Werth für x, der zugleich eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Es ist aber leicht einzusehen, daß dieser Werth von x kein anderer seyn kann, als der den wir oben auf dem Wege der Elimination gefunden haben.

Ueberhaupt kommt die gewöhnliche Eliminations-Methode mit der Methode überein, den größten gemeinschaftlichen Divisor der beyden Größen zu finden, welche die ersten Hälften zweyer Gleichungen ausmachen, denn die Reste, welche man durch die dabey nöthigen Divisionen bekommt, geben, $= 0$ gesetzt, eben dieselben Gleichungen, welche man durch die Elimination erhält. Der letzte Rest, worin sich die unbekannte Größe nicht mehr findet, muß $= 0$ seyn, wenn die beyden gegebenen Größen einen gemeinschaftlichen Divisor vom ersten Grade haben sollen, und dieser gemeinschaftliche Divisor ist der vorletzte Rest und enthält die unbekannte Größe bloß in der ersten Dignität. Setzt man ihn daher $= 0$, so hat man einen Werth der unbekannten Größe, welcher eine gemeinschaftliche Wurzel beyder Gleichungen ist.

In dem Exempel der 10ten Nr. sind die Gleichungen (A) und (B) diejenigen, welche man bekömmt, wenn man den vorletzten und letzten Rest $= 0$ setzt, und folglich der

Werth

Werth von x, welcher aus der Gleichung (A) gezogen worden, der einzige, welcher zu gleicher Zeit eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist.

12.

Bey dieser Gelegenheit wird es nicht undienlich seyn, eine andere Bemerkung in Ansehung der Methode beyzubringen, welche man einzuschlagen hat, wenn zwey Gleichungen mehr als eine Wurzel mit einander gemein haben sollen. Sollen zwey Gleichungen zwey Wurzeln mit einander gemein haben, so müssen sich beyde durch einen Faktor vom zweyten Grade dividiren lassen. Ist man daher, indem man den größten gemeinschaftlichen Divisor der beyden ersten Hälften der gegebenen Gleichungen sucht, zu einem Reste gelangt, worin die unbekannte Größe den zweyten Grad nicht übersteigt, so muß dieser Rest von selbst Null seyn, wenn die gedachten Gleichungen zwey Wurzeln gemein haben sollen. Nun enthält dieser Rest nicht mehr als zwey Glieder, eins, worin die unbekannte Größe sich nicht findet, und eins, welches die unbekannte Größe in der ersten Dignität enthält. Man muß daher jedes dieser Glieder für sich $= 0$ setzen, um die Bedingungen zu bekommen, wobey die gegebenen Gleichungen zwey gemeinschaftliche Wurzeln haben. Wollte man den Weg der Elimination betreten, so müßte man bey der Gleichung stehen bleiben, worin die unbekannte Größe bloß in der ersten Dignität befindlich wäre, und beyde Glieder derselben $= 0$ setzen, wobey dann die vorhergehende Gleichung des zweyten Grades die beyden gemeinschaftlichen Wurzeln enthalten würde. Es stimmen daher auch hier beyde Wege mit einander überein.

Man erkennt hieraus leicht, wie man sich zu verhalten hat, wenn zwey Gleichungen drey und mehr Wurzeln mit einander gemein haben sollen. Hat man indeß die Bedingungen gefunden, wobey die Gleichungen eine Wurzel gemein haben, so lassen sich daraus leicht diejenigen finden, wobey denselben zwey und mehr Wurzeln gemein sind.

Angenommen nemlich, daß die beyden gegebenen Gleichungen, welche eine gemeinschaftliche Wurzel x haben, allgemein durch $P = 0$ und $Q = 0$ vorgestellt werden, so bekommt man, wenn man $P = y$ anstatt $P = 0$ nimmt und darauf x aus beyden Gleichungen wegschaft, eine Gleichung für y, welche

$$y^m + ay^{m-1} + \text{2c.} + py^2 + qy + r = 0$$

seyn mag. Sollen nun beyde Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, oder beyde zugleich bestehen können, so muß y einen Werth $= 0$ haben, und es ist folglich $r = 0$ die Bedingung, bey welcher jenen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel zukommt. Sollen ferner zwey Wurzeln gemeinschaftlich seyn, so muß es darin zwey Werthe $= 0$ geben, und man hat demnach die Bedingungen $r = 0$ und $q = 0$. Sollen drey Wurzeln gemeinschaftlich seyn, so müssen drey Werthe $= 0$ seyn, und dies giebt die Bedingungen $r = 0$, $q = 0$ und $p = 0$, u. s. f.

Um $P = 0$ in $P = y$ oder $P - y = 0$ zu verwandeln, darf man nur das letzte Glied der Gleichung $P = 0$ um die Größe y vermindern, und also, wenn $P = x^n + \alpha x^{n-1} + \text{2c.} + \varrho$ ist, $\varrho - y$ für ϱ setzen. Nun ist die Gleichung $y^m + ay^{m-1} + \text{2c.} + py^2 + qy + r = 0$ diejenige, welche man durch die Wegschaffung von x aus den Gleichungen $P = y$ und $Q = 0$ erhält. Setzt man also darin $y = 0$, so wird

$r = 0$

$r = 0$ die Gleichung, welche aus den Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ durch die Wegschaffung von x entspringt. Hat man demnach die Gleichung $r = 0$, so darf man darin nur $\varrho - y$ für ϱ setzen, um unmittelbar die Gleichung $y^m + ay^{m-1} +$ 2c. $+ py^2 + qy + r = 0$ zu bekommen. Nun ist aber r eine Funktion von ϱ, und will man darin $\varrho - y$ für ϱ substituiren, so wird

$$r - \frac{dr}{d\varrho}y + \frac{d^2r}{2d\varrho^2}y^2 - \frac{d^3r}{2.3d\varrho^3}y^3 + \text{2c.}$$

und folglich

$$q = -\frac{dr}{d\varrho},\quad p = \frac{d^2}{2d\varrho^2},\quad \text{2c.}$$

Wenn also $r = 0$ seyn muß, damit die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ Eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so wird zu zwey gemeinschaftlichen Wurzeln $r = 0$ und $\frac{dr}{d\varrho} = 0$, und zu dreyen $r = 0$, $\frac{dr}{d\varrho} = 0$ und $\frac{d^2r}{d\varrho^2}$ u. s. f. erfordert, wobey ϱ das letzte Glied der einen von den gegebenen Gleichungen ist.

13.

Uebrigens ist klar, daß die Wurzeln der Gleichung für y nichts anders sind als die Werthe von P, welche sich ergeben, wenn man anstatt x jede von den Wurzeln der andern Gleichung $Q = 0$ setzt, welche wir durch x', x'', x''' 2c. bezeichnen wollen. Läßt man daher P', P'', P''', 2c. die Werthe seyn, welche P durch diese Substitutionen erhält, so hat man $\pm r = P'P''P'''$ 2c. und es ist folglich die Gleichung $r = 0$, welche man durch die Wegschaffung von x aus den Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ bekömmt, nichts anders als ein Produkt aus den Gleichungen $P' = 0$, $P'' = 0$,

$P''' = 0$ ꝛc. Man kann aber dieses Produkt jedesmal finden, ohne die Wurzeln der Gleichung $Q = 0$ zu kennen, indem sich die Funktionen von x', x'', x''', ꝛc., welche in demselben vorkommen, durch die bloßen Coefficienten der Gleichung $Q = 0$, wovon x', x'', x''', ꝛc. die Wurzeln sind, ausdrucken lassen. Man kann über diesen Gegenstand Cramers Introduction a l'analyse des lignes courbes zu Rathe ziehen, so wie auch eine besondere Abhandlung von mir, in welcher ich allgemeine Formeln zur unmittelbaren Darstellung dieses Produkts gegeben habe. Hier begnüge ich mich, daraus, daß die durch die Wegschaffung von x sich ergebende Gleichung mittelst der Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ durch $P'P''P''' = 0$ dargestellt werden kann, die Folge zu ziehen, daß diese Gleichung so beschaffen seyn muß, daß die Coefficienten der Gleichung $P = 0$ darin allenthalben Produkte von so viel Dimensionen bilden, als es Größen P', P'', P''' ꝛc. oder Wurzeln x', x'', x''' ꝛc. in der Gleichung $Q = 0$ giebt, d. h. so viel Einheiten der Exponent dieser Gleichung hat. Eben so verhält es sich mit den Coefficienten der Gleichung $Q = 0$, welche in der durch die Elimination hervorgebrachten Gleichung allenthalben Produkte von so viel Dimensionen bilden, als der Exponent der Gleichung $P = 0$ Einheiten hat.

14.

Hieraus läßt sich überhaupt folgern, daß man nach der Tschirnhausenschen Methode allemal eine Gleichung für y bekommt, welche zu eben dem Grade gehört als die gegebene, und daß in dieser Gleichung die Größen y, a, b, c ꝛc. (die Einheit als den Coefficienten des höchsten Gliedes mit eingeschlossen) allenthalben Produkte von so viel Dimensionen

bilden,

bilden, als die Zahl des Grades der gegebenen Gleichung Einheiten hat.

Angenommen also, daß die gegebene Gleichung für x zu dem mten Grade gehöre, und daß die Hülfsgleichung

$$y + a + bx + cx^2 + \text{rc.} = x^r$$

sey: so wird man eine Gleichung für y vom Grade m von dieser Form enthalten,

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + \text{rc.} = 0$$

so daß A eine einfache, B eine zwiefache, C eine dreyfache Funktion von a, b, c rc. ist, u. s. f.

Ueberhaupt wird das nte Glied allemal eine rationale und ganze Funktion von a, b, c, rc. von n — 1 Dimensionen seyn. Nimmt man demnach so viel unbestimmte Größen an, als man Glieder verschwinden lassen will, so hat man, wie leicht einzusehen ist, zur Wegschaffung des zweyten Gliedes bloß eine Gleichung vom ersten Grade und einer einzigen unbekannten Größe aufzulösen. Sollen hingegen das zweyte und dritte Glied weggebracht werden, so muß man zwey Gleichungen von zwey unbekannten Größen, die eine vom ersten und die andere vom zweyten Grade auflösen, wodurch die Endgleichung allemal eine Gleichung vom zweyten Grade wird, wie wir oben gesehen haben. Soll das zweyte, dritte und vierte Glied weggeschaft werden, so hat man drey Gleichungen von eben so viel unbekannten Größen aufzulösen, davon die eine zum ersten, die andere zum zweyten und die dritte zum dritten Grade gehört, und gelangt also endlich zu einer Gleichung vom sechsten Grade.

Um überhaupt zu gleicher Zeit das pte, qte, rte Glied rc. wegzuschaffen, hat man so viel Gleichungen aufzulösen als man Glieder wegbringen will, und diese Gleichungen enthal-

enthalten zugleich eben so viel unbekannte Größen. Ferner sind diese Gleichungen Gleichungen vom $(p-1)$sten, $(q-1)$sten, $(r-1)$sten Grade u. s. w. so daß die Endgleichung zu dem $(p-1)(q-1)(r-1)\ldots$ sten Grade gehört. Um also aus der Gleichnng $y^m \dagger Ay^{m-1} \dagger By^{m-2} \dagger$ ꝛc. $\dagger M = o$ alle Zwischenglieder wegzuschaffen und dieselbe auf die Form $y^m \dagger M = o$ zu bringen, deren Auflösung allemal möglich ist, gelangt man zu einer Gleichung vom Grade $1.2.3\ldots(m-1)$, und dieser Grad ist allemal höher als der Grad der gegebenen Gleichung m, den einzigen Fall ausgenommen, wenn $m = 3$ ist.

15.

Jetzt wollen wir zur Tschirnhausenschen Auflösung der Gleichungen des dritten Grades zurückkehren und aus allgemeinen Gründen und unabhängig von der erklärten Eliminations-Methode die Ursache kennen zu lernen suchen, warum jene Auflösung zu einer reducirten Gleichung vom zweyten Grade führt, da man bey der gewöhnlichen Methode zu einer reducirten Gleichung vom sechsten Grade gelangt. Zu dem Ende betrachte ich die Hülfsgleichung $x^2 = bx \dagger a \dagger y$, in welcher y durch eine zweygliedrige Gleichung vom dritten Grade von der Form $y^3 \dagger C = o$ bestimmt werden muß, deren Wurzeln $y - \sqrt[3]{C}$, $y = -\alpha\sqrt[3]{C}$, $y = -\alpha^2\sqrt[3]{C}$ sind. Da diese drey Wurzeln den drey Werthen von x in der gegebenen Gleichung $x^3 \dagger mx^2 \dagger nx \dagger p = o$ entsprechen müssen, so hat man, wenn man diese Werthe durch x', x'', x''' ausdruckt, folgende drey Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x'^2 &= bx' \dagger a - \sqrt[3]{C} \\ x''^2 &= bx'' \dagger a - \alpha\sqrt[3]{C} \\ x'''^2 &= bx''' \dagger a - \alpha^2\sqrt[3]{C} \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

und

und aus diesen Gleichungen lassen sich die Werthe von a und b ziehen, wenn man $\sqrt[3]{C}$ daraus weggebracht hat. Denn addirt man dieselben, nachdem man die zweyte durch α und die dritte durch α^2 multiplicirt hat, so bekommt man, da $\alpha^4 = \alpha$ und $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ist,

$$x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2 = b(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')$$

und daraus ergiebt sich

$$b = \frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

Diese Gleichung setzt in den Stand, den Grad der Gleichung zu beurtheilen, durch welche b bestimmt werden muß. Denn da diese Gleichung so viel Wurzeln haben muß, als es Werthe von b giebt, und die Werthe von b nach den Versetzungen sich richten, welche man mit den Wurzeln x', x'', x''', vornehmen kann (Nr. 6, wo die Buchstaben a, b und c eben das bedeuten, was hier x', x'', x'''): so kann die Größe b überhaupt sechs Werthe haben, nemlich

$$\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

$$\frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

$$\frac{x''^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x'^2}{x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x'}$$

$$\frac{x''^2 + \alpha x'^2 + \alpha^2 x'''^2}{x'' + \alpha x' + \alpha^2 x'''}$$

$$\frac{x'''^2 + \alpha x'^2 + \alpha^2 x''^2}{x''' + \alpha x' + \alpha^2 x''}$$

$$\frac{x'''^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'^2}{x''' + \alpha x'' + \alpha^2 x'}$$

Ueberhaupt genommen müßte also die Gleichung für b eine Gleichung vom sechsten Grade seyn; allein man muß hier

nicht

nicht aus der Acht lassen, daß der erste, dritte und fünfte von den vorstehenden Werthen, so wie auch der zweyte, vierte und sechste einander gleich sind. Denn multiplicirt man den Zähler und Nenner des ersten durch α, so geht derselbe in den fünften über, weil $\alpha^3 = 1$ und $\alpha^4 = \alpha$ ist, und multiplicirt man mit α^2, so bekommt man den dritten. Eben so erhält man, wenn man den Zähler und Nenner des zweyten durch α multiplicirt, den vierten, und wenn man mit α^2 multiplicirt, den sechsten. Da also die Gleichung vom sechsten Grade für b zweymal drey einander gleiche Wurzeln hat, so sinkt sie dadurch zu einer Gleichung vom zweyten Grade herab, weil sie nichts anders seyn kann als der Cubus einer Gleichung dieses zweyten Grades, und dies ist die Ursache, warum b bloß durch eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben ist. (Nr. 10.).

Was die Größe a betrift, so hat man, wenn man die drey Gleichungen (C) addirt, da $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ist,

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 = b(x' + x'' + x''') + 3a.$$

Nun ist aber

$$x' + x'' + x''' = -m \text{ und } x'^2 + x''^2 + x'''^2 = m^2 - 2n$$

folglich

$$m^2 - 2n = -bm + 3a$$

und

$$a = \frac{bm + m^2 - 2n}{3}$$

so daß man a kennt, sobald der Werth von b bekannt ist.

16.

Die Formel $\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''}$, welche den Werth von b ausdruckt, ist deswegen sehr merkwürdig, weil sie bey allen Versetzungen, welche man mit den Größen x', x'' und

und x''' vornimmt, entweder dieselbe bleibt, oder in $\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha x''}$ übergeht, weswegen diese beyden Größen nothwendig Wurzeln einer quadratischen Gleichung seyn müssen. Man könnte diese Gleichung a priori finden, wenn man die Summe und das Produkt dieser beyden Größen suchte, wodurch man zu einer solchen Gleichung für b gelangen würde, als wir oben Nr. 10 gefunden haben.

Außerdem läßt sich noch folgendes bemerken. Wenn man die beyden Nenner

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' \text{ und } x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$$

mit einander multiplicirt, so bekommt man zum Produkte

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 + (\alpha + \alpha^2)(x'x'' + x'x''' + x''x''')$$

Nun ist aber

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 = m^2 - 2n;\ x'x'' + x'x''' + x''x'''$$
$$= n \text{ und } \alpha + \alpha^2 = -1$$

folglich wird jenes Produkt

$$= m^2 - 3n$$

Multiplicirt man ferner den Zähler

$x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2$ durch den Nenner $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$ mit einander, so erhält man das Produkt

$$x'^3 + x''^3 + x'''^3 + \alpha(x'^2 x''' + x''^2 x'\ x'''^2 x'') +$$
$$\alpha^2(x'^2 x'' + x''^2 x''' + x'''^2 x')$$

und dieses Produkt läßt sich, da x', x'', x''' eben die Wurzeln sind, welche wir sonst a, b und c genannt haben, auch so

$$L - 6x'x''x''' + \alpha M + \alpha^2 N$$

oder da $x'x''x''' = -p$ ist, (Nr. 7.) durch

$$L + 6p + \alpha M + \alpha^2 N$$

ausdrucken. Auf diese Art verwandelt sich der Bruch

$$\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

wenn

wenn man Zähler und Nenner durch $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$ multiplicirt, in

$$\frac{L + 6p + \alpha M + \alpha^2 N}{m^2 - 3n}$$

und auf ähnliche Art erhält man für

$$\frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

wenn man Zähler und Nenner durch $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ multiplicirt,

$$\frac{L + 6p + \alpha N + \alpha^2 M}{m^2 - 3n}$$

Nun ist aber (Nr. 7.)

$$r^3 = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N \text{ und}$$
$$s^3 = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M$$

folglich

$$\alpha M + \alpha^2 N = \frac{r^3 - L}{3} \text{ und } \alpha N + \alpha^2 M = \frac{s^3 - L}{3}$$

Folglich lassen sich die vorhergehenden Brüche auch durch

$$\frac{r^3 + 2L + 6p}{3(m^2 - 3n)} \text{ und } \frac{s^3 + 2L + 6p}{3(m^2 - 3n)}$$

oder nach Nr. 8. durch

$$\frac{z' + 2L + 6p}{3(m^2 - 3n)} \text{ und } \frac{z'' + 2L + 6p}{3(m^2 - 3n)}$$

ausdrucken, wenn z' und z'' die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + (2m^3 - 9mn + 27p)z + (m^2 - 3n)^3 = 0$$

sind, welches die reducirte Gleichung ist, die man nach der Cardanischen Regel bekommt.

Auf diese Art erhellet die Verbindung und Aehnlichkeit dieser Methode mit der Tschirnhausenschen deutlich.

17.

Der Ausdruck für x (Nr. 10.) welchen die Tschirnhausensche Methode giebt, läßt sich auf die Form

$$x = \frac{f + gy}{k + y}$$

bringen, wenn f, g und k unbestimmte Größen sind, und y die Wurzel einer zweygliedrigen Gleichung des dritten Grades $y^3 + h = 0$ bedeutet.

Man hat also nur nöthig vermittelst dieser beyden Gleichungen y wegzubringen. Da die erste Gleichung $y = \frac{f - kx}{x - g}$ giebt, so bekommt man, wenn man diesen Werth in die zweyte Gleichung bringt, $h + (\frac{f - kx}{x - g})^3 = 0$. Dies ist eine Gleichung des dritten Grades, welche man mit der gegebenen vergleichen kann, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Größen f, g, k und h zu bestimmen. Eine bleibt willkührlich und kann nach Gefallen angenommen werden.

Diese Methode, die Gleichungen des dritten Grades aufzulösen, ist bereits von Bezout gebraucht worden; man vergleiche die Memoiren der Akademie der Wissenschaften zu Paris vom Jahr 1765, wo derselbe auf eine sehr vortheilhafte und glückliche Art vermittelst dieser Substitutionen eine große Menge von Gleichungen von allen Graden auflöset. Ich bemerke hier bloß, daß man nur a priori den Grad und die Form der Gleichung suchen darf, wodurch einer von den Coefficienten f, g, ꝛc. bestimmt wird, wenn man zum voraus wissen will, was man sich von dieser Methode für die Gleichungen des dritten Grades zu versprechen hat. Zu dem

Ende erwäge man, daß man wegen $y^3 + h = 0$ drey Werthe für y hat, nemlich $-\sqrt[3]{h}$, $-\alpha\sqrt[3]{h}$, $-\alpha^2\sqrt[3]{h}$, welche in den Ausdruck $x = \frac{f + gy}{k + y}$ gesetzt, drey Werthe von x oder x', x'', x''' geben.

Nimmt man daher die Gleichung $x(k + y) = f + gy$ oder $kx - f + (x - g)y = 0$, so ergeben sich daraus folgende drey:

$$kx' - f - (x' - g)\sqrt[3]{h} = 0$$

$$kx'' - f - \alpha(x'' - g)\sqrt[3]{h} = 0$$

$$kx''' - f - \alpha^2(x''' - g)\sqrt[3]{h} = 0$$

Addirt man dieselben, so bekommt man, da $x' + x'' + x''' = -m$ und $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ist,

$$mk + 3f + (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')\sqrt[3]{h} = 0$$

Multiplicirt man ferner die zweyte durch α und die dritte durch α^2, und addirt auch nun, so wird

$$k(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') - (x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''')\sqrt[3]{h} = 0$$

Diese Gleichung giebt

$$\sqrt[3]{h} = \frac{k(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

und wenn man diesen Werth in die erste Gleichung bringt und durch k dividirt, so erhält man

$$m + \frac{3f}{k} + \frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''} = 0$$

woraus sich

$$\frac{f}{k} = -m - \frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^2}{3(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')}$$

ergiebt. Aus diesem Ausdrucke läßt sich sogleich erkennen,

daß

daß die Größe $\frac{f}{k}$ nicht mehr als zwey verschiedene Werthe haben und also bloß durch eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben werden kann, denn der Bruch $\frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$ bleibt entweder derselbe oder geht in $\frac{(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$ über, wenn man die drey Wurzeln x', x'', x''' versetzt. Noch leichter überzeugt man sich hiervon, wenn man den Zähler und Nenner der ersten Funktion durch $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ und den Zähler und Nenner der andern durch $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$ multiplicirt. Man erhält nemlich durch diese Multiplication nach der vorhergehenden Nr.

$$\frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3}{m^2 - 3n} \text{ und } \frac{(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3}{m^2 - 3n}$$

oder Nr. 7.

$$\frac{r^3}{m^2 - 3n} \text{ und } \frac{s^3}{m^2 - 3n} \text{ oder } \frac{z'}{m^2 - 3n} \text{ und } \frac{z''}{m^2 - 3n}$$

so daß die beyden Werthe von $\frac{f}{k}$

$$-m - \frac{z'}{3(m^2 - 3n)} \text{ und } -m - \frac{z''}{3(m^2 - 3n)}$$

werden, wenn z' und z'' die Wurzeln der oben für z gegebenen Gleichung sind.

18.

Um zu dem Ausdrucke für x, $\frac{f + gy}{k + y}$ zurückzukehren, so wollen wir, da y darin eine durch die Gleichung $y^3 + h = 0$ bestimmte Wurzelgröße ist, diese Wurzelgröße aus dem Nenner wegbringen. Dies geschieht, wenn man den Zähler und Nenner jenes Bruchs durch $k^3 - ky + y^2$ multiplicirt, indem er dadurch in

$$\frac{k^2f + (k^2g - kf)y + (f - kg)y^2 + gy^3}{k^3 + y^3}$$

oder, wenn man $-h$ für y^3 setzt, in

$$\frac{k^2f - hg + (k^2g - kf)y + (f - kg)y^2}{k^3 - h}$$

verwandelt wird. Diese Größe läßt sich auf die einfachere Form $a + by + cy^2$ zurückführen und man hat also allgemein

$$x = a + by + cy^2$$

wo a, b und c unbestimmte Coefficienten, und y die Wurzel aus einer zweygliedrigen Gleichung des dritten Grades von der Form $y^3 + h = 0$ ist.

Dieser Ausdruck ist eben der, den Euler und Bezout aufgenommen haben, um die Wurzeln der Gleichungen des dritten Grades auszudrucken, und nach ihrem Urtheile läßt sich derselbe auf alle übrige Gleichungen ausdehnen. Man findet dieses ausführlich im neunten Bande der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften und in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahr 1765.

Um also die Gleichungen des dritten Grades nach dieser Methode aufzulösen hat man nur nöthig y vermittelst der beyden Gleichungen $x = a + by + cy^2$ und $y^3 + h = 0$ wegzuschaffen. Hierdurch bekommt man eine Gleichung für x vom dritten Grade, wie man sich davon durch die vorhin erklärte Eliminations-Methode überzeugen kann. Vergleicht man darauf diese Gleichung Glied für Glied mit der gegebenen, so erhält man drey Gleichungen, vermittelst welcher sich drey von den unbestimmten Größen a, b, c, h bestimmen

stimmen lassen, und die vierte kann nach Gefallen angenommen werden. Bezout setzt vom Anfang an $h = -1$, aber Euler behält solches bis zu Ende bey, und setzt darauf diejenige Größe $= 1$, welche ihm das einfachste Resultat zu geben scheint. Dies ist der ganze Unterschied, welcher sich zwischen beyder Methoden findet.

19.

Um diese Methode a priori zu prüfen, suchen wir nach unsern Grundsätzen die Form und den Grad der Gleichungen, wodurch die Coefficienten a, b, ꝛc. bestimmt werden. Da die Gleichung $y^3 + h = 0$ die drey Wurzeln, $-\sqrt[3]{h}$, $-\alpha\sqrt[3]{h}$, $-\alpha^2\sqrt[3]{h}$ hat, so ergeben sich daher sogleich folgende drey Gleichungen:

$$x' = a - b\sqrt[3]{h} + c\sqrt[3]{h^2}$$
$$x'' = a - \alpha b\sqrt[3]{h} + \alpha^2 c\sqrt[3]{h^2}$$
$$x''' = a - \alpha^2 b\sqrt[3]{h} + \alpha c\sqrt[3]{h^2}$$

Addirt man dieselben, so bekommt man

$$a = x' + x'' + x''' = -m$$

Multiplicirt man hierauf die zweyte durch α^2 und die dritte durch α und addirt wieder, so wird

$$x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''' = -3b\sqrt[3]{h}$$

und multiplicirt man endlich die zweyte durch α und die dritte durch α^2, so findet man

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = 3c\sqrt[3]{h^2}$$

Setzt man nun $h = -1$, so ergiebt sich

$$b = \frac{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}{3}$$

$$c = \frac{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}{3}$$

Diese Ausdrücke sind aber eben die, welche wir oben nach der Cardanischen Regel für die Wurzeln der reducirten Gleichung des dritten Grades gefunden haben, und es folgt also daraus, daß auch die Größen b und c durch eben die Gleichung vom sechsten Grade, welche sich wie eine Gleichung des zweyten Grades auflösen läßt, gegeben seyn werden. Diese Gleichung ist (Nr. 5.)

$$y^6 + (p - \frac{mn}{3} + \frac{2m^3}{27})y^3 - \frac{1}{27}(n - \frac{m^2}{3})^3 = 0$$

und dies ist auch das, was Bezout nach seinem Calcul gefunden hat.

Setzt man aber, anstatt $h = -1$ zu nehmen, mit Eulern $b = 1$, so bekommt man

$$x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = -3\sqrt[3]{h} \text{ und } x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$$
$$= 3c\sqrt[3]{h^2}$$

Erhebt man die erste Gleichung zur dritten Dignität, so wird

$$-h = \frac{1}{27}(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3$$

oder wenn man die Benennungen der 8ten Nr. braucht,

$$-h = \frac{s^3}{27} = \frac{z''}{27}$$

Man sieht hieraus, daß die Größe $-h$ durch eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben wird, deren Wurzeln $\frac{z'}{27}$ und $\frac{z''}{27}$ sind. Hat man h gefunden, so braucht man nur die zweyte Gleichung mit der ersten zu multipliciren, um

$$-9ch = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')$$

zu bekommen, und dieses läßt sich (Nr. 16.) auf

— 9ch

$$-9ch = m^2 - 3n$$

zurückführen, woher

$$c = \frac{3n - m^2}{h}$$

wird.

20.

Dies sind die vornehmsten Methoden von denen, welche man bisher erfunden hat, die Gleichungen des dritten Grades aufzulösen. Nach der Untersuchung, welche wir darüber angestellt haben, stimmen sie im Grunde mit einander überein, weil die Hauptsache dabey auf die Erfindung reducirter Gleichungen ankommt, deren Wurzeln allgemein durch $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ oder durch $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$ oder, welches eben darauf hinausläuft, durch Größen, welche diesen proportionell sind, ausgedruckt werden. In dem Falle, wo die Wurzel der reducirten Gleichung $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ ist, gehört diese reducirte Gleichung zum sechsten Grade, läßt sich aber als eine quadratische Gleichung auflösen, weil sie bloß die dritte und sechste Dignität der unbekannten Größe enthält. Den Grund davon findet man Nr. 6. Im andern Falle, wenn die Wurzel der reducirten Gleichung $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$ ist, gehört diese reducirte Gleichung zum zweyten Grade. Dieses fließt theils nothwendiger Weise aus dem Vorhergehenden, theils ist solches Nr. 9. directe bewiesen worden.

21.

Ehe ich diesen Abschnitt beschließe wird es wegen des Folgenden nützlich seyn, ein Paar Worte über die Auflösung der Gleichung $x^3 - 1 = 0$, deren Wurzeln wir 1, α und β gesetzt haben, so wie auch über die Auflösung der allgemeinern Gleichung $x^n - 1 = 0$ zu sagen.

Das fällt sogleich in die Augen, daß die eine von den Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1$ die Einheit ist. Um also die beyden übrigen Wurzeln zu finden, darf man diese Gleichung nur durch $x - 1$ dividiren. Hierdurch bekömmt man $x^2 - x + 1 = 0$, und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Man hat demnach

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ und } \beta = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

und kann sich leicht davon überzeugen, daß $\beta = \alpha^2$ ist, wie bereits oben a priori gezeigt worden. Denn erhebt man α zum Quadrat, so bekommt man

$$\frac{1 - 2\sqrt{-3} - 3}{4} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \beta.$$

Es sey überhaupt die zweygliedrige Gleichung $x^n - 1 = 0$ gegeben. Ist n eine zusammengesetzte Zahl oder $n = pq$, so reducirt sich die Auflösung dieser Gleichung allemal auf die Auflösung zweyer ähnlichen Gleichungen, wovon die eine dem Grade p und die andere dem Grade q zugehört. Denn setzt man $x^q = y$, so wird $x^n = y^p$ und folglich $y^p - 1 = 0$. Angenommen also, daß man diese Gleichung vom Grade p aufgelöset habe, und daß α eine von den Wurzeln derselben sey, so hat man $x^q - \alpha = 0$, oder wenn man $x = t\sqrt[q]{\alpha}$ setzt, $t^q - 1 = 0$. Ist aber diese Gleichung aufgelöset, so kennt man den Werth von t und folglich auch den von x.

Wenn also n in der Gleichung $x^n - 1 = 0$ eine zusammengesetzte Zahl ist, so kommt es bey ihrer Auflösung auf die Auflösung so vieler Gleichungen an, als n Faktoren hat, so so daß die Exponenten dieser Gleichungen diese Faktoren von n sind.

Also besteht das ganze Geschäfte in der Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$, wenn n eine Primzahl ist.

Es sey demnach n eine ungerade Zahl und die aufzulösende Gleichung $x^{2p+1} - 1 = 0$. Da 1 allemal eine Wurzel dieser Gleichung ist, so kann man dieselbe durch $x - 1$ dividiren, wo denn der Quotient ist

$$x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + \text{ic.} + x^2 + x + 1 = 0.$$

Nun läßt sich aber diese Gleichung vom Grade $2p$ auf den Grad p herabbringen. Denn dividirt man durch x^p und setzt die Glieder zusammen, die von der Mitte gleich weit entfernt sind, so bekommt man

$$x^p + \frac{1}{x^p} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} + \text{ic.} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}$$
$$+ 1 = 0.$$

Man setze $x + \frac{1}{x} = y$, und erhebe y zum Quadrate, zum Cubus ꝛc. so wird

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2;\; y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ic.}$$

folglich

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2;\; x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

und überhaupt

$$x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - ry^{r-2} + \frac{r(r-3)}{1 \cdot 2}y^{r-4} -$$
$$\frac{r(r-4)(r-5)}{2 \cdot 3}y^{r-6} + \text{ic.}$$

diese Reihe so weit fortgesetzt, bis man zu negativen Potestäten von y kommt.

Bringt man demnach diese Substitutionen in die vorhergehende Gleichung, so erhält man eine Gleichung für y, worin alle Potestäten von y positiv sind, und die höchste Potestät von y den Exponenten p hat, so daß dieselbe zum $p$ten Grade gehört.

Ist man also im Stande diese Gleichung aufzulösen, so findet man dadurch p Werthe von y, und jeder dieser Werthe giebt darauf durch die Auflösung der Gleichung $x^2 - xy + 1 = 0$ zwey Werthe für x. Auf diese Art bekommt man $2p$ Werthe für x, und setzt man dazu die Einheit, so hat man alle Wurzeln der Gleichung $x^{2p+1} - 1 = 0$.

Folglich lassen sich die Wurzeln der Gleichungen $x^2 - 1 = 0$ $x^3 - 1 = 0$ und $x^5 - 1 = 0$ durch die bloße Extraction der Quadratwurzel finden, und man ist daher auch im Stande, die Gleichung $x^n - 1 = 0$ aufzulösen, wenn n keine andere einfache Faktoren enthält als 2, 3, 5 oder unter die Form $2^\lambda \cdot 3^\mu \cdot 5^\nu$ gehört. Nimmt man die Auflösung der cubischen Gleichungen zu Hülfe, so ist auch die Auflösung der Gleichung $x^7 - 1 = 0$, so wie auch die Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ möglich, wenn n unter der Form $2^\lambda \cdot 3^\mu \cdot 5^\nu \cdot 7^\pi$ begriffen ist.

Weiter kann man indeß nicht gehen, weil die Primzahl, die zunächst auf 7 folgt, 11 ist. Hiezu würde die Auflösung der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ und also die Auflösung einer Gleichung vom fünften Grade erfordert.

Es mag indeß n eine Zahl bedeuten, was für eine es will, so kann man die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ allemal ausdrucken, wenn man die Theilung des Umfangs

des

des Kreises in n Theile zu Hülfe nimmt, wie nachher gezeigt werden wird.

22.

Die Methode, welche wir gebraucht haben, um die Gleichung $x^{2p} + x^{2p-1} + \text{etc.} + x + 1 = 0$ auf den Grad p herabzubringen, läßt sich überhaupt bey jeder Gleichung anwenden, deren Exponent eine gerade Zahl ist und wo die von der Mitte gleichweit abstehenden Glieder gleiche Coefficienten haben. Denn nimmt man die Gleichung

$$x^{2p} + ax^{2p-1} + bx^{2p-2} + \text{etc.} + bx^2 + ax + 1 = 0$$

und dividirt dieselbe durch x^p, so bekommt man

$$x^p + \frac{1}{x^p} + a\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + b\left(x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}}\right) + \text{etc.} = 0$$

so daß man hier die Substitutionen $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ etc. brauchen kann, wodurch die Gleichung eine Gleichung vom pten Grade wird.

Wenn man die Gleichung

$$x^{2p+1} + ax^{2p} + bx^{2p-1} + \text{etc.} + hx^{p+1} + hx^p + \text{etc.}$$
$$+ bx^2 + ax + 1 = 0$$

hätte, so dürfte man dieselbe nur auf folgende Art ordnen,

$$x^{2p+1} + 1 + ax(x^{2p-1} + 1) + bx^2(x^{2p-3} + 1) + \text{etc.}$$
$$+ hx^p(x + 1) = 0$$

um wahrzunehmen, daß sie sich durch $x + 1$ dividiren läßt. Der Quotient, der aus dieser Division entspringt, ist ferner

$$x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + x^{2p-3} + \text{etc.} + 1$$
$$+ ax(x^{2p-2} + x^{2p-3} + \text{etc.} + 1)$$
$$+ bx^2(x^{2p-4} + x^{2p-5} + \text{etc.} + 1)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ hx^p = 0$$

und

und diese Gleichung gehört unter die vorhin betrachtete Form, so daß sie sich durch eben die Methode auf den Grad p herabbringen läßt.

Moivre ist der erste gewesen, der diese Eigenschaft bey den gedachten Gleichungen bemerkt hat, und er hat in seinen Miscellaneis analyticis die allgemeine Form der verwandelten Gleichung mitgetheilt, deren Grad nur halb so hoch ist als der Grad der gegebenen Gleichung. Wir werden weiter hin den Grund, warum sich diese Gleichungen so reduciren lassen, a priori angeben.

23.

Um zu der Nr. 21. gefundenen Formel

$$x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - r y^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2} y^{r-4} - \text{ꝛc.}$$

zurückzukehren, so ist aus der Lehre von der Theilung der Winkel bekannt, daß wenn $y = 2\cos.\varphi$ gesetzt wird

$$y^r - r y^{r-2} + \frac{r(r-2)}{2} y^{r-4} - \text{ꝛc.} = 2\cos.r\varphi$$

ist. Setzt man daher $x + \frac{1}{x} = 2\cos.\varphi$, so hat man allgemein $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos.n\varphi$, und es bestehen folglich die beyden Gleichungen

$$x^2 - 2x\cos.\varphi + 1 = 0 \text{ und}$$
$$x^{2n} - 2x^n\cos.n\varphi + 1 = 0$$

zu gleicher Zeit, n mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will, so daß die erste nothwendiger Weise ein Divisor von der zweyten ist.

Löset man nun diese Gleichungen nach Art der quadratischen Gleichungen auf, so bekommt man

x =

$$x = \cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{-1} \text{ und}$$
$$x^n = \cos.n\varphi \pm \sin.n\varphi\sqrt{-1}.$$

Abstrahirt man hier von dem doppelten Zeichen, welches geschehen kann, da diese Zeichen in beyden Gleichungen dieselben seyn müssen, so ist klar, daß

$$x = \cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1}$$

die Auflösung der Gleichung

$$x^n - \cos.n\varphi - \sin.n\varphi\sqrt{-1} = 0$$

enthält.

Setzt man daher $\sin.n\varphi = 0$ und $\cos.n\varphi = 1$, welches $n\varphi = 360^o$ oder 720^o oder überhaupt $= m \times 360^o$ giebt, wenn m jede ganze Zahl bedeutet, so bekommt man die Gleichung $x^n - 1 = 0$ und die Auflösung derselben ist, da dabey $\varphi = \frac{m}{n} . 360^o$, wird

$$x = \cos.\frac{m}{n}.360^o + \sin.\frac{m}{n}.360^o\sqrt{-1}$$

Dies ist ein allgemeiner Ausdruck für alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, und man erhält alle diese Wurzeln, wenn man nach und nach $m = 1, 2, 3$ rc. bis n mit eingeschlossen annimmt. Wenn man $m > n$ annehmen wollte, so würden dieselben Werthe wiederkehren, die man bey $m < n$ gefunden hätte.

24.

Bey dieser Auflösung müssen alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ von einander verschieden seyn, weil es keine zwey von einander verschiedene Bogen giebt, deren Sinus und Cosinus zu gleicher Zeit einander gleich wären. Außerdem sind alle diese Wurzeln imaginär bis auf die letzte, welche allemal $= 1$ ist, und diejenige, welche zu $m = \frac{n}{2}$ gehört,

wenn

wenn n eine gerade Zahl ist, denn diese ist $= -1$. Denn soll der imaginäre Theil verschwinden, so muß $\frac{m}{n} . 360^\circ = 0$ seyn, und dieses findet nur dann statt, wenn der Bogen entweder 360° oder 180° gleich ist, so daß man entweder $\frac{m}{n} = 1$ oder $= \frac{1}{2}$, folglich entweder $m = n$ oder $m = \frac{n}{2}$ hat. Im ersten Fall ist der reelle Theil $\cos. \frac{m}{n} . 360^\circ = \cos. 360^\circ = 1$ und im andern $\cos. 180^\circ = -1$.

Setzt man nunmehr

$$\alpha = \cos. \frac{360^\circ}{n} + \sin. \frac{360^\circ}{n} . \sqrt{-1}$$

so hat man nach den vorhergehenden Formeln

$$\alpha^m = \cos. \frac{m}{n} . 360^\circ + \sin. \frac{m}{n} . 360^\circ \sqrt{-1}$$

so daß die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ insgesammt durch die Potestäten von α ausgedruckt werden. Es sind demnach diese Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$, ꝛc. α^n, und die letzte oder α^n ist allemal $= 1$, so wie die, welche durch $\alpha^{\frac{n}{2}}$ ausgedruckt wird, wenn n eine gerade Zahl ist, $= -1$.

Wenn n eine Primzahl ist, so kann man alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch die Potestäten einer jeden von diesen Wurzeln ausdrucken, bloß die letzte davon ausgenommen. Denn es sey z. E. $n = 3$, und also die Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$. Nimmt man statt der Wurzel α die folgende α^2, so hat man $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6$. Da aber $\alpha^3 = 1$ ist, so wird $\alpha^4 = \alpha$ und $\alpha^6 = \alpha^3$, und man hat also hier $\alpha^2, \alpha, \alpha^3$

wie

wie vorhin. Ist $n = 5$, so sind die Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$. Nimmt man nun α^2 statt α, so hat man dagegen $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \alpha^8, \alpha^{10}$, d. h. da $\alpha^5 = 1$ ist $\alpha^2, \alpha^4, \alpha, \alpha^3, \alpha^5$. Nimmt man α^3 statt α so findet man auf ähnliche Art, weil $\alpha^5 = 1$ ist, $\alpha^3, \alpha, \alpha^4, \alpha^2, \alpha^5$, und nimmt man α^4 so erhält man $\alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha, \alpha^5$, also allemal dieselben Wurzeln nur in einer andern Ordnung.

Ueberhaupt sey α^m eine von den n Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ rc. α^n, und $m < n$, n aber eine Primzahl. Nimmt man diese Wurzel statt α, so bekommt man $\alpha^m, \alpha^{2m}, \alpha^{3m}$, rc. α^{nm}. Läßt man nun von den Exponenten 2m, 3m, 4m rc., wenn sie größer als n sind, das größte in ihnen enthaltene Vielfache von n weg, und bezeichnet die Reste durch p, q, r, rc. so bekommt man die Wurzeln $\alpha^m, \alpha^p, \alpha^q, \alpha^r$, rc. α^n, und ich behaupte, daß die Zahlen m, p, q, r und n, davon keine größer als n ist, nothwendig insgesammt von einander verschieden sind. Denn sollten zwey davon z. B. p und r einander gleich seyn, so müßte die Differenz zwischen 2m und 4m, da p und r von ihnen die Reste sind, welche übrig bleiben, nachdem man das größte in ihnen enthaltene Vielfache von n von ihnen abgezogen hat, durch n theilbar seyn, welches unmöglich ist, da n eine Primzahl und $m < n$ ist. Da also die Zahlen m, p, q, r, rc. der Menge nach $n - 1$ und dabey insgesammt von einander verschieden und kleiner sind als n, so ist klar, daß sie keine andere Zahlen seyn können als 1, 2, 3, rc. $n - 1$. Folglich sind die Wurzeln $\alpha^m, \alpha^p, \alpha^q, \alpha^r$, rc. eben dieselben als $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, rc. α^n. Es ist leicht einzusehen, daß der vorhergehende Beweis noch seine Kraft behält, wenn auch n keine Primzahl an sich, sondern nur m dergleichen gegen n ist. Allein sind m und n keine Primzahlen zu einander und ist ihr größtes gemeinschaftliches Maaß 1, so sieht man leicht, daß die Zahlen m, p, q, r, ꝛc. durch l theilbar sind, so daß diese Zahlen nichts anders als Vielfache von l seyn können, welche kleiner als n sind.

Hieraus läßt sich leicht allgemein schließen, daß man alle Wurzeln α, α^2, α^3, ꝛc. α^n der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch die 1ste, 2te, 3te, ꝛc. nte Dignität einer jeden dieser Wurzeln, die unter die Form α^m gehört, ausdrucken könne, wofern m und n Primzahlen zu einander sind. Aber wenn m gegen n gehalten keine Primzahl ist, sondern beyde Zahlen das größte gemeinschaftliche Maaß l haben, so bekommt man auf diese Art bloß die Wurzeln α^l, α^{2l}, α^{3l}, ꝛc. α^n und jede davon so vielmal als die Zahl $\frac{n}{l}$ Einheiten hat. Auch läßt sich aus den vorhergehenden Formeln leicht erkennen, daß diese letzten Wurzeln zugleich die Wurzeln der Gleichung $x^f - 1 = 0$ sind, wenn $lf = n$ genommen wird.

Da also die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch α, α^2, α^3, ꝛc. α^n ausgedruckt werden, und $\alpha^n = 1$ ist, so erhellet, daß man dieselben auch durch $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$, ꝛc. $\frac{1}{\alpha^n}$ darstellen kann, weil $\frac{1}{\alpha} = \alpha^{n-1}$, $\frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{n-2}$ ꝛc. ist.

Da ferner in der Gleichung $x^n - 1$ das zweyte Glied fehlt, so hat man allemal $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 +$ ꝛc. $\alpha^n = 0$, und eben so $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3} +$ ꝛc. $+ \frac{1}{\alpha^n} = 0$. Und wenn n eine zusammengesetzte Zahl von der Form lf ist, so ist ferner $\alpha^l + \alpha^{2l} + \alpha^{3l} +$ ꝛc. $+ \alpha^n = 0$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^{2l}} + \frac{1}{\alpha^{3l}} +$ ꝛc. $+ \frac{1}{\alpha^n} = 0$, desgleichen auch $\alpha^f + \alpha^{2f} + \alpha^{3f} +$ ꝛc. $+ \alpha^n = 0$, und $\frac{1}{\alpha^f} + \frac{1}{\alpha^{2f}} + \frac{1}{\alpha^{3f}} +$ ꝛc. $+ \frac{1}{\alpha^n} = 0$. Diese Bemerkungen werden uns in der Folge nützlich seyn.

25.

Hier sind zum Beschluß die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ von $n = 1$ bis zu $n = 6$.

$n = 2$, $\alpha = -1$, $\alpha^2 = 1$

$n = 3$, $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$,

$\alpha^3 = 1$

$n = 4$, $\alpha = \sqrt{-1}$, $\alpha^2 = -1$, $\alpha^3 = -\sqrt{-1}$,

$\alpha^4 = 1$

$n = 5$, $\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4}\sqrt{-1}$

$\alpha^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{4}\sqrt{-1}$

$\alpha^3 = \frac{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{4} + \frac{\sqrt{5} + 1}{4}\sqrt{-1}$

$\alpha^4 = \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4} + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\sqrt{-1}$

$\alpha^5 = 1$

$n = 6$, $\alpha = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\alpha^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

$\alpha^3 = -1$, $\alpha^4 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

$\alpha^5 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$, $\alpha^6 = 1$

Wollte man den Werth für α aus der Gleichung $x^7 - 1 = 0$ haben, so müßte man, wie bereits oben bemerkt worden, eine Gleichung vom dritten Grade auflösen. Setzt man nemlich in den Formeln der 21sten Nr. $p = 3$, so bekommt man für y die Gleichung

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

welche als Gleichung des dritten Grades allemal einen reellen Werth hat. Bringt man diesen Werth in die Gleichung $x^2 - xy + 1 = 0$, so findet man daraus x oder

$$\alpha = \frac{y + \sqrt{(y^2 - 4)}}{2}$$

Was die Gleichungen $x^8 - 1 = 0$, $x^9 - 1 = 0$ und $x^{10} - 1 = 0$ betrifft, so kann man die Wurzeln davon durch bloße Quadratwurzeln ausdrucken, aber die Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ erfordert die Auflösung der Gleichung des fünften Grades

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0$$

nach welcher man für α denselben Ausdruck bekommt wie oben.

Zweyter Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichung des vierten Grades.

26.

Es ist bekannt, daß Ferrari, ein Zeitgenosse und Schüler Cardans der erste gewesen, der eine allgemeine Regel zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades erfunden. Er theilt die gegebene Gleichung in zwey Theile, und setzt darauf zu beyden eine solche Größe hinzu, daß man aus jedem besonders die Quadratwurzel ziehen kann, wodurch die Gleichung auf den zweyten Grad herabgebracht wird. Diese Methode, die unstreitig unter allen zu ähnlicher Absicht erfundefundenen die sinnreichste ist, haben darauf alle Analysten vor Des Cartes angenommen; allein dieser hielt es für besser, dafür eine andere zu gebrauchen, die zwar weniger einfach und weniger direct, aber gleichwohl in mancherley Rücksicht der Natur der Gleichungen angemessener ist. Wir wollen davon anfangen, daß wir diese beyden Methoden nach einander untersuchen, und dann zu den übrigen Methoden fortschreiten, unter welchen die von Tschirnhausen, Eulern und Bezout die vornehmsten sind.

Ich setze mit Ferrari voraus, daß die aufzulösende Gleichung des vierten Grades das zweyte Glied nicht habe, und also folgende sey:

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0.$$

Bringt man hier alle Glieder außer dem ersten auf die andere Seite, und setzt dann auf beyden Seiten $2yx^2 + y^2$ dazu, wo y eine unbestimmte Größe ist, so bekommt man

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = (2y - n)x^2 - px + y^2 - q.$$

Die erste Hälfte dieser Gleichung zeigt sich sogleich als das Quadrat von $x^2 + y$, und es kommt also bloß darauf an, auch die zweyte zu einem Quadrate zu machen. Zu diesem Ende muß man das Quadrat der Hälfte des Coefficienten des zweyten Gliedes $-px$ dem Produkte der Coefficienten der beyden übrigen Glieder gleich setzen. Dieses giebt die Bedingung

$$\frac{p^2}{4} = (2y - n)(y^2 - q)$$

oder

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 - qy + \frac{4nq - p^2}{8} = 0.$$

Setzt man demnach die Auflösung dieser Gleichung und also den Werth von y als bekannt voraus, so wird die zweyte Hälfte der gegebenen Gleichung

$$(2y - n)\left(x - \frac{p}{2(2y - n)}\right)^2$$

und zieht man nun aus beyden Hälften die Quadratwurzel, so bekommt man die Gleichung

$$x^2 + y = \left(x - \frac{p}{2(2y - n)}\right)\sqrt{(2y - n)}$$

worin die höchste Dignität von x die zweyte ist, und wobey sich daher weiter keine Schwierigkeit findet. Setzt man der Kürze wegen

$$z = \sqrt{(2y - n)}$$

so wird

$$x^2 - zx + y + \frac{p}{2z} = 0$$

und folglich

$$x = \frac{z + \sqrt{\left(z^2 - \frac{2p}{z} - 4y\right)}}{2}$$

oder, wenn man den Werth von z wieder braucht,

$$x = \frac{\sqrt{(2y - n)} + \sqrt{\left(- 2y - n - \frac{2p}{\sqrt{(2y - n)}}\right)}}{2}$$

und dieser Ausdruck giebt die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn man darin nach und nach die beyden Wurzelgrößen positiv und negativ nimmt.

27.

Es ist indeß bey dieser Methode nicht schlechthin nothwendig, daß die aufzulösende Gleichung das zweyte Glied nicht habe, sondern sie läßt sich auch bey vollständigen Gleichungen, wie

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

anwenden, wenn man die erste Hälfte nicht zum Quadrate von $x^2 + y$, sondern von $x^2 + \frac{mx}{2} + y$ macht. Denn bringt man, wie vorhin, die drey letzten Glieder der vorstehenden Gleichung auf die andere Seite und setzt darauf auf beyden $(2y + \frac{m^2}{4})x^2 + myx + y^2$ dazu, so bekommt man

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = (2y + \frac{m^2}{4} - n)x^2 + (my - p)x$$
$$+ y^2 - q.$$

Um nun auch das zweyte Glied in ein Quadrat zu verwandeln, setze man

$$(\frac{my - p}{2})^2 = (2y + \frac{m^2}{4} - n)(y^2 - q)$$

wodurch man die cubische Gleichung bekommt

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 + \frac{mp - 4q}{4}y + \frac{(4n - m^2)q - p^2}{8} = 0.$$

Hat man aus dieser Gleichung, die wir in der Folge die reducirte Gleichung nennen wollen, den Werth von y gefunden, und dabey der Kürze wegen

$$z = \sqrt{(2y + \frac{m^2}{4} - n)}$$

gesetzt, so hat man

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = z^2(x + \frac{my - p}{2z^2})^2$$

und zieht man aus beyden Hälften die Quadratwurzel, so wird

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y = zx + \frac{my - p}{2z}$$

oder

$$x^2 + (\frac{m}{2} - z)x + y - \frac{my - p}{2z} = 0$$

oder

$$x = \frac{z - \frac{m}{2} + \sqrt{(z^2 - mz + \frac{m^2}{4} - 4y + \frac{2(my - p)}{2})}}{2}$$

oder, wenn man den Werth von z wieder braucht,

$$x = \frac{-\frac{m}{2} + \sqrt{(2y + \frac{m^2}{4} - n)} + \sqrt{(-2y + \frac{m^2}{2} - \frac{\frac{1}{4}m^3 - mn + 2p}{\sqrt{(2y + \frac{m^2}{4} - n)}})}}{2}$$

und dieser Ausdruck giebt ebenfalls alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn man die darin vorkommenden Wurzelgrößen nach und nach positiv und negativ nimmt.

28.

Da die reducirte Gleichung für y eine cubische Gleichung ist, so hat dieselbe nothwendiger Weise drey Wurzeln, und jede dieser Wurzeln kann in den Ausdruck für x gesetzt werden. Da also die Wurzelgrößen in diesem Ausdrucke theils positiv theils negativ genommen werden können, so ergeben sich daher zwölf Werthe von x, und es läßt sich daraus leicht beurtheilen, daß die vorhergehende Auflösung eigentlich eine Auflösung einer Gleichung des zwölften Grades ist.

Um diese Gleichung zu finden muß man y aus dem Ausdrucke für x wegzuschaffen suchen, und darauf die Wurzelgrößen wegbringen. Oder man kann auch sogleich die rationale Gleichung

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = z^2(x + \frac{my - p}{2z^2})^2$$

nehmen,

nehmen, und hat alsdann bloß y wegzuschaffen, nachdem man für z^2 den Werth $2y + \frac{m^2}{4} - n$ gesetzt hat.

Der größern Allgemeinheit wegen wollen wir z^2 (anstatt $2y + \frac{m^2}{4} - n) = k(2y + \frac{m^2}{4} - n)$ setzen, wo offenbar ist, daß der Coefficient k in dem Grade der gesuchten Gleichung keine Veränderung machen kann. Auf diese Art hat man

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = k(2y + \frac{m^2}{4} - n)x^2 + (my - p)x$$

$$+ \frac{(my - p)^2}{4k(2y + \frac{m^2}{4} - n)}$$

oder da $\frac{(my - p)^2}{4}$, aus der Gleichung für y,

$$= (2y + \frac{m^2}{4} - n)(y^2 - q) \text{ ist}$$

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 = k(2y + \frac{m^2}{4} - n)x^2 + (my - p)x$$

$$+ \frac{y^2 - q}{k}$$

oder

$$x^4 + mx^3 + (kn + (1 - k)(2y + \frac{m^2}{4}))x^2 + px +$$

$$\frac{q + (k - 1)y^2}{k} = 0$$

Es sey der Kürze wegen

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = X$$

und $k - 1 = h$, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$X + h\left(\left(n - \frac{m^2}{4} - 2y\right)x^2 + \frac{y^2 - q}{k}\right) = 0$$

und aus dieser Gleichung hat man nun mittelst der Gleichung

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 + \frac{mp - 2q}{4}y + \frac{(4n - m^2)q - p^2}{8} = 0$$

bloß y wegzuschaffen.

Es seyen y', y'', y''', die drey Wurzeln dieser Gleichung, so kann die Gleichung für x, welche sich durch die Elimination der unbekannten Größe y ergiebt, nach Nr. 13. durch das Produkt aus folgenden drey Größen vorgestellt werden

$$X + h\left(\left(n - \frac{m^2}{4} - 2y'\right)x^2 + \frac{y'^2 - q}{k}\right)$$

$$X + h\left(\left(n - \frac{m^2}{4} - 2y''\right)x^2 + \frac{y''^2 - q}{k}\right)$$

$$X + h\left(\left(n - \frac{m^2}{4} - 2y'''\right)x^2 + \frac{y'''^2 - q}{k}\right)$$

wenn man dieses Produkt $= 0$ setzt. Es sey der Kürze wegen

$$A = X + h\left(\left(n - \frac{m^2}{4}\right)x^2 - \frac{q}{k}\right)$$

$$B = -2hx^2$$

$$C = \frac{h}{k}.$$

Setzt man

$$\alpha = y' + y'' + y'''$$

$$\beta = y'y'' + y'y''' + y''y'''$$

$$\gamma = y'^2 + y''^2 + y'''^2$$

$$\delta = y'y''y'''$$

$$\varepsilon = y'^2y''^2 + y'^2y'''^2 + y''^2y'''^2$$

so wird das gedachte Produkt

$$A^3 + A^2B\alpha + A^2C\gamma + AB^2\beta + ABC(\alpha\beta - 3\delta) + AC^2\varepsilon + B^3\delta + B^2C\alpha\delta + BC^2\beta\delta + C^3\delta^2.$$

Es

Es sey ferner der Kürze wegen

$$a = \frac{n}{2},\ b = \frac{mp - 2q}{2}$$

$$c = \frac{p^2 - (4n - m^2)q}{8}$$

so daß die Gleichung für y

$$y^3 - ay + by - c = 0$$

werde: so ist wegen der Natur der Gleichungen

$$\alpha = a,\quad \beta = b,\quad \delta = c,\ \text{und also}$$

$$\gamma = a^2 - 2b\ \text{und}\ \varepsilon = b^2 - 2ac$$

Folglich ist die durch die Elimination von y aus den beyden Gleichungen

$$A + By + Cy^2 = 0$$

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0$$

gesuchte Gleichung

$$A^3 + aA^2B + (a^2 - 2b)A^2C + bAB^2 + (ab - 3c)ABC$$
$$+ (b^2 - 2ac)AC^2 + cB^3 + acB^2C + bcBC^2$$
$$+ c^2C^3 = 0.$$

Bringt man die Werthe von A, B, C und a, b, c in diese Gleichung, so hat man eine Gleichung für x vom zwölften Grade, weil A alle Potestäten von x bis zur vierten, B bloß x^2 und die übrigen Größen x gar nicht enthalten.

Die Auflösung dieser Gleichung des zwölften Grades ist also die obige

$$x = \frac{z - \frac{m}{2} \pm \surd\left(z^2 - mz + \frac{m^2}{4} - 4y + \frac{2my - p}{z}\right)}{2}$$

wenn man

$$z = \pm \surd\left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right)k$$

setzt, und es giebt hier keine überflüssige Wurzeln, weil die drey Werthe von y verbunden mit den doppelten Zeichen der beyden Wurzelgrößen genau die zwölf Wurzeln der gedachten Gleichung geben.

Nun wollen wir $k = 1$ setzen, um den Fall der 27sten Nr. zu bekommen. Hiedurch wird $h = 0$, und folglich $A = X = x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$; $B = 0$ und $C = 0$. Auf diese Art reducirt sich die obige Gleichung auf $A^3 = 0$ oder

$$(x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q)^3 = 0$$

Diese Gleichung ist, wie in die Augen fällt, die gegebene Gleichung in der dritten Potestät, so daß sie keine andere Wurzeln haben kann als diese, aber eine jede dreyfach.

Man sieht hieraus, warum der für die Wurzel einer Gleichung des vierten Grades gefundene Ausdruck in der That zwölf Wurzeln in sich faßt, die sich auf vier zurückbringen lassen, weil jede davon zweyen andern gleich ist. Außerdem zeigt der vorhergehende Beweis, daß die gleichen Wurzeln bloß von der Wegschaffung der Größe y und nicht von dem doppelten Zeichen der Wurzelgrößen abhängen. Man mag also in dem Ausdrucke für x einen Werth von y gebrauchen, was für einen man will, so bekommt man immer dieselben vier Wurzeln.

29.

Um diesen Gegenstand in ein noch helleres Licht zu setzen, bemerke ich, daß sich die gegebene Gleichung vermittelst der reducirten, welche wegen ihrer dreyfachen Wurzel auf dreyfache Art statt haben kann, auf folgende Weise darstellen läßt

$$(x^2 + \frac{mx}{2} + y)^2 - z^2(x + \frac{my - p}{2z^2})^2 = 0$$

Nr. 27.

Nr. 27, und daß daher dieselbe nichts anders ist als das Produkt aus

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y + z\left(x + \frac{my - p}{2z^2}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y - z\left(x + \frac{my - p}{2z^2}\right) = 0$$

oder

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} + z\right)x + y + \frac{my - p}{2z} = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - z\right)x + y - \frac{my - p}{2z} = 0$$

ist. Es giebt demnach die Auflösung derselben allemal dieselben vier Wurzeln, man mag für y eine Wurzel setzen, was für eine man will.

Nennt man nun die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung a, b, c, d, so müssen zwey davon in der einen und zwey in der andern Gleichung enthalten seyn. Auf diese Art hat man wegen der Natur der Gleichungen

$$a + b = -\frac{m}{2} - z, \quad ab = y + \frac{my - p}{2z}$$

$$c + d = -\frac{m}{2} + z, \quad cd = y - \frac{my - p}{2z}$$

und daraus fließt

$$z = \frac{c + d - a - b}{2}$$

$$y = \frac{ab + cd}{2}$$

Dieser Werth von y zeigt sogleich, warum die reducirte Gleichung eine Gleichung vom dritten Grade ist. Es muß nemlich y so viel verschiedene Werthe haben, als man die Grö-

ßen

ßen a, b, c, d in dem Ausdrucke $\frac{ab + cd}{2}$ versetzen kann, welches lediglich auf folgende drey Arten möglich ist

$$\frac{ab + cd}{2}$$

$$\frac{ac + bd}{2}$$

$$\frac{ad + cb}{2}$$

30.

Vermittelst dieser Bemerkung läßt sich eine directe Methode finden, zu der reducirten Gleichung des vierten Grades und durch diese zu einer allgemeinen Auflösung der Gleichungen dieses Grades zu gelangen. Denn da die Combination $ab + cd$ der vier Wurzeln a, b, c, d nicht mehr als drey Veränderungen zuläßt, nemlich $ab + cd$, $ac + bd$, $ad + cb$, so folgt, daß man, $ab + cd = u$ gesetzt, eine Gleichung des dritten Grades haben werde, deren Wurzeln $ab + cd$, $ac + bd$, $ad + bc$ sind. Diese Gleichung hat die Form

$$u^3 - Au^2 + Bu - C = 0$$

und es ist nach der Natur der Gleichungen

$$A = ab + cd + ac + bd + ad + cb$$

$$B = (ab + cd)(ac + bd) + (ab + cd)(ad + cb) + (ac + bd)(ad + cb)$$

$$C = (ab + cd)(ac + bd)(ad + cb)$$

oder

$$A = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$B = a^2(bc + bd + cd) + b^2(ac + ad + cd) + c^2(ab + ad + bd) + d^2(ab + ac + bc)$$

$$C = abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2.$$

Nun

Nun ist leicht einzusehen, daß die Werthe von A, B, C durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung m, n, p, q gegeben seyn müssen und zwar ohne Extraction der Wurzeln, indem sie dieselben bleiben, man mag die Wurzeln dieser Gleichung a, b, c, d versetzen wie man will. Auch ist in der That

$$-m = a + b + c + d$$
$$n = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$
$$-p = abc + abd + acd + bcd$$
$$q = abcd$$

und folglich sogleich

$$A = n.$$

Um B zu finden bemerke man, daß

$$a(bc + bd + cd) = -p - bcd$$
$$b(ac + ad + cd) = -p - acd$$

ꝛc.

folglich

$$B = (a + b + c + d) \times - p - 4abcd$$

oder

$$B = mp - 4q$$

ist. Was endlich C betrifft, so ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 - 2n, \text{ und folglich}$$
$$abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (m^2 - 2n)q$$

Um ferner den übrigen Theil davon zu finden, mache man das Quadrat von p, woraus man

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 =$$
$$p^2 - 2abcd(ab + ac + bc + ad + bd + cd) =$$
$$p^2 - 2nq, \text{ und folglich}$$
$$C = (m^2 - 4n)q + p^2$$

finden wird. Auf diese Art wird die reducirte Gleichung

$$u^3 - nu^2 + (mp - 4q)u - (m^2 - 4n)q - p^2 = 0,$$

und

und diese Gleichung stimmt mit der obigen für y Nr. 27. durchaus überein, wenn man $u = 2y$ setzt.

31.

Jetzt wollen wir sehen, wie man, wenn man einen Werth von u kennt, die vier Wurzeln a, b, c, d findet. Da $u = ab + cd$ und $abcd = q$ ist, so erhellet, daß die beyden Größen ab und cd die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung

$$t^2 - ut + q = 0$$

sind. Nennt man demnach die Wurzeln dieser Gleichung t' und t'', so hat man $ab = t'$ und $cd = t''$. Ferner ist $-p = ab(c + d) + cd(a + b) = t^2(c + d) + t''(a + b)$, und so hat man, da $a + b + c + d = -m$ ist

$$a + b = \frac{p - mt'}{t' - t''}$$

$$c + d = \frac{p - mt''}{t'' - t'}$$

Da also $ab = t'$ und $cd = t''$ ist, so erhellet, daß a und b die Wurzeln aus

$$x^2 - \frac{p - mt'}{t' - t''}x + t' = 0$$

und c und d die Wurzeln aus

$$x^2 - \frac{p - mt''}{t'' - t'}x + t'' = 0$$

sind. Man sieht hieraus, daß es hinreicht, eine Wurzel der reducirten Gleichung für u zu kennen, um die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung a, b, c und d zu finden, und daß jede dieser Wurzeln der reducirten Gleichung dieselben vier Wurzeln a, b, c und d giebt. Denn hätte man $u = ac + bd$ oder $u = ad + bc$ anstatt $u = ab + cd$ genommen, so wäre dadurch weiter keine Veränderung entstanden, als

daß

daß in den Formeln b in c oder in d umgekehrt übergegangen wäre.

32.

Man kann die Gleichungen des vierten Grades noch auf eine leichtere und einfachere Weise vermittelst einer reducirten Gleichung auflösen, deren Wurzel $z = \frac{c + d - a - b}{2}$ Nr. 29. oder $s = c + d - a - b$ ist, wenn man $s = 2z$ setzt. Um den Grad und die Form dieser Gleichung kennen zu lernen, darf man nur die Versetzungen aufsuchen, welche bey den Buchstaben a, b, c, d möglich sind. Dies sind folgende sechs

$$a + b - c - d$$
$$a + c - b - d$$
$$a + d - c - b$$
$$c + d - a - b$$
$$b + d - a - c$$
$$b + c - a - d$$

Da dies die Wurzeln der reducirten Gleichung für s sind, so gehört diese Gleichung nothwendig zum sechsten Grade. Allein da vorhergehende sechs Größen zu je zweyen genommen einander gleich und nur in Ansehung der Zeichen verschieden sind, so kann die reducirte Gleichung bloß gerade Dignitäten von s enthalten, und läßt sich also wie eine cubische Gleichung behandeln.

Setzt man demnach $s^2 = t$, so hat man eine reducirte Gleichung für t vom dritten Grade, deren Wurzeln

$$(a + b - c - d)^2$$
$$(a + c - b - d)^2$$
$$(a + d - b - c)^2$$

sind.

sind. Man kann also diese Gleichung finden, wenn man die Coefficienten derselben sucht, wie wir oben Nr. 30. bey der reducirten Gleichung für u gethan haben. Es ist indeß hier genug zu bemerken, daß das Quadrat von $a + b - c - d$ ist, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd$. Denn da $ab + ac + ad + bc + bd + cd = n$; $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 - 2n$; und $(a + b - c - d)^2 = s^2 = t$ ist, so hat man $t = m^2 - 4n + 4(ab + cd)$ oder $t = m^2 - 4n + 4u$. Auf diese Art kann man die gesuchte reducirte Gleichung für t bekommen, wenn man in der reducirten Gleichung für u Nr. 30. $\frac{t - m^2 + 4n}{4}$ an die Stelle von u setzt. Hiedurch erhält man

$$t^3 (3m^2 - 8nt)^2 + (3m^4 - 16m^2 n + 16n^2 + 16mp - 64q)t - (m^3 - 4mn - 8p)^2 = 0$$

Läßt man t', t'', t''' die drey Wurzeln dieser Gleichung seyn, so hat man

$$(a + b - c - d)^2 = t'$$
$$(a + c - b - d)^2 = t''$$
$$(a + d - b - c)^2 = t'''$$

und daraus ergiebt sich

$$a + b - c - d = \sqrt{t'}$$
$$a + c - b - d = \sqrt{t''}$$
$$a + d - b - c = \sqrt{t'''}$$

Verbindet man diese Gleichung mit

$$a + b + c + d = -m$$

so findet man für jede der vier Wurzeln a, b, c, d die Werthe, nemlich

$$a = \frac{-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$b = \frac{-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

c =

$$c = \frac{-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

$$d = \frac{-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

Auf diese Art hat man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung ohne die Auflösung einer andern Gleichung als der für t. Allein es zeigt sich hier eine Schwierigkeit. Da nemlich die Wurzelgrößen $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ positiv und negativ genommen werden können, so schließen sie auch folgende Größen ein,

$$\frac{-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

$$\frac{-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$\frac{-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$\frac{-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

welche nicht die Werthe der vier Wurzeln a, b, c, d, sondern die Werthe ihrer Ergänzungen zu der Summe $a + b + c + d = - m$ sind.

Man braucht indeß nicht zu wissen, was für ein Zeichen jede der gedachten Wurzelgrößen haben muß, sondern es ist genug, daß man weiß, ob entweder die eine positiv und die beyden andern positiv oder negativ, oder ob die eine negativ und die beyden andern positiv oder negativ genommen werden müssen. Denn es ist leicht einzusehen, daß die vorhin gefundenen Ausdrücke für die Wurzeln a, b, c, d allemal dieselben Werthe geben, wenn man die Zeichen je zweyer von den Wurzelgrößen $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ zugleich verändert und das Zeichen der dritten beybehält. Folglich kommt alles auf die Bestimmung des Zeichens des Produkts aus $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ an. Nun ist aus der Gleichung für t

$$t't''t''' = (m^3 - 4mn + 8p)^2$$

und also

$$m^3 - 4mn + 8p = \sqrt{t'} \,.\, \sqrt{t''} \,.\, \sqrt{t'''}$$

Bezeichnet man daher die Werthe der Wurzelgrößen $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$, positiv genommen, durch ϑ', ϑ'', ϑ''', so daß $\sqrt{t'} = \pm\,\vartheta'$, $\sqrt{t''} = \pm\,\vartheta''$, $\sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$ wird, so muß man, wenn $m^3 - 4mn + 8p$ eine positive Größe ist, entweder

$$\sqrt{t'} = \vartheta' \text{ und } \sqrt{t''} \pm \vartheta'', \quad \sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$$

oder

$$\sqrt{t''} = \vartheta'' \text{ und } \sqrt{t'} = \pm\,\vartheta', \quad \sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$$

oder

$$\sqrt{t'''} = \vartheta''' \text{ und } \sqrt{t'} = \pm\,\vartheta', \quad \sqrt{t''} = \pm\,\vartheta''$$

nehmen, und man hat in diesem Falle für die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgende vier Werthe

$$\frac{-m + \vartheta' + \vartheta'' + \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m + \vartheta' - \vartheta'' - \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m - \vartheta' + \vartheta'' - \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m - \vartheta' - \vartheta'' + \vartheta'''}{4}$$

Ist hingegen $m^3 - 4mn + 8p$ eine negative Größe, so muß man entweder

$$\sqrt{t'} = -\,\vartheta' \text{ und } \sqrt{t''} = \pm\,\vartheta'', \quad \sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$$

oder

$$\sqrt{t''} = -\,\vartheta'' \text{ und } \sqrt{t'} = \pm\,\vartheta', \quad \sqrt{t'''} = \pm\,\vartheta'''$$

oder

$$\sqrt{t'''} = -\,\vartheta''' \text{ und } \sqrt{t'} = \pm\,\vartheta', \quad \sqrt{t''} = \pm\,\vartheta''$$

nehmen,

nehmen, und dies giebt für die gesuchten vier Wurzeln die Werthe

$$\frac{-m + \vartheta' + \vartheta'' - \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m + \vartheta' - \vartheta'' + \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m - \vartheta' + \vartheta'' + \vartheta'''}{4}$$

$$\frac{-m - \vartheta' - \vartheta'' - \vartheta'''}{4}$$

33.

Die Ferrarische Methode, welche wir bisher untersucht haben, hat uns zur Zerfällung der Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

in die beyden Gleichungen vom zweyten Grade (Nr. 29.)

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} + z\right)x + y + \frac{my - p}{2} = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - z\right)x + y - \frac{my - p}{2z} = 0$$

geleitet, aus deren Auflösung sich die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung ergeben. Man hätte auf eine einfachere und directere Art eben diese Gleichung auch als das Produkt aus

$$x^2 + fx + g = 0$$

$$x^2 + hx + k = 0$$

betrachten und darauf die Coefficienten f, g, h, k durch die Vergleichung der homologen Glieder bestimmen können, wie Des Cartes gethan hat. Denn multiplicirt man diese beyden Gleichungen mit einander, so bekommt man

$$x^4 + (f + h)x^3 + (fh + g + k)x^2 + (fk + gh)x + gk = 0$$

und die Vergleichung dieser Gleichung mit

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

giebt die Gleichungen

$$f + h = m, \quad fh + g + k = n$$

$$fk + gh = p, \quad gk = q$$

woraus sich die Buchstaben f, g, h und k bestimmen lassen.

34.

Es sey, um dieses mit Des Cartes anzunehmen, $m = 0$, so hat man $f + h = 0$, folglich $h = -f$. Auf diese Art ist die gegebene Gleichung ein Produkt aus

$$x^2 + fx + g = 0$$

$$x^2 - fx + k = 0$$

und man hat zur Bestimmung der Coefficienten f, g, k die Gleichungen

$$g + k - f^2 = n, \quad (k - g)f = p, \quad gk = q$$

Die beyden ersten geben

$$g = \frac{n + f^2 - \frac{p}{f}}{2}$$

$$k = \frac{n + f^2 + \frac{p}{f}}{2}$$

und bringt man diese Werthe in die letzte Gleichung, so wird

$$(n + f^2)^2 - \frac{p^2}{f^2} = 4q$$

oder wenn man mit f^2 multiplicirt, und die Gleichung nach f ordnet,

$$f^6 + 2nf^4 + (n^2 - 4q)f^2 - p^2 = 0.$$

Dies ist eine Gleichung des sechsten Grades, die sich aber wie eine Gleichung des dritten Grades behandeln läßt, weil sie bloß gerade Dignitäten der unbekannten Größe enthält.

Dieses ist die Cartesische Methode, die Gleichungen des vierten Grades aufzulösen. Des Cartes betrachtet zwar sogleich die Gleichungen

$$x^2 + fx + \frac{f^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{p}{2f} = 0$$

$$x^2 - fx + \frac{f^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{p}{2f} = 0$$

als die Faktoren der gegebenen Gleichung, allein es ist glaublich, daß er diese Gleichungen vorher auf einem dem unsrigen ähnlichen Wege gefunden habe. Man vergleiche Schootens Commentar und Hudde über die Reduction der Gleichungen.

35.

Die vorhergehende Auflösung stimmt offenbar mit der Nr. 26. f. zusammen, und die unbekannten Größen f und z drucken in beyden Auflösungen dieselbe Größe aus, wenn $m = 0$ ist. Auf diese Art lassen sich die über die Ferrarische Methode beygebrachten Anmerkungen auch auf die Cartesische Methode anwenden, und es ist nicht nöthig dabey besonders zu verweilen. Aber dagegen wird es nützlich seyn, das Prinzip dieser Methode zu untersuchen und den daher fliessenden Folgen a priori nachzuspühren.

Die Hauptsache kommt dabey nach dem Vorhergehenden darauf an, die gegebene Gleichung als durch eine Gleichung des zweyten Grades, wie $x^2 + fx + g = 0$ theilbar zu betrachten, oder anzunehmen, daß sie mit dieser eine Wurzel gemein habe. Die hierzu nöthigen Bedingungen lassen sich nach der Methode der 12ten Nr. finden. Dividirt man nemlich die fünftheilige Größe

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

 durch

durch

$$x^2 + fx + g$$

so bekommt man

$$x^2 + (m - f)x + n - g - f(m - f)$$

zum Quotienten und zum Reste

$$(p - g(m - f) - f(n - g - f(m - f)))x + q$$
$$- g(n - g - f(m - f))$$

Soll also die Division ohne Rest von statten gehen, so muß dieser Rest unabhängig von x gleich o seyn, und so hat man die Gleichungen

$$p - g(m - f) - f(n - g - f(m - f)) = 0$$
$$q - g(n - g - f(m - f)) = 0$$

wodurch man f und g bestimmen kann. Die erste dieser Gleichungen giebt

$$g = \frac{p - fn + f^2m - f^3}{m - 2f}$$

und bringt man diesen Werth in die zweyte, so wird

$$q - (n - mf + f^2)\frac{p - nf + mf^2 - f^3}{m - 2f}$$
$$+ \frac{(p - nf + mf^2 - f^3)^2}{(m - 2f)^2} = 0$$

oder

$$(f^3 - mf^2 + nf - p)^2 - (f^3 - mf^2 + nf - p)(f^2 - mf + n)$$
$$\times (2f - m) + q(2f - m)^2 = 0$$

Ordnet man diese Gleichung nach f, so wird

$$f^6 - 3mf^5 + (3m^2 + 2n)f^4 - m(m^2 + 4n)f^3$$
$$+ (2m^2n + mp + n^2 - 4q)f^2 - m(mp + n^2 - 4q)f$$
$$+ mnp - m^2q - p = 0$$

und dies ist eben die Gleichung, die man aus den vier Gleichungen der Bedingung der 32sten Nr. finden würde.

Es gehört zwar diese Gleichung zum sechsten Grade, und hat dabey alle Glieder. Allein setzt man $m = 0$, so verschwinden alle Glieder, worin die unbekannte Größe in einer ungeraden Dignität enthalten ist, und die Gleichung läßt sich wie eine cubische Gleichung behandeln. Es ist indeß nicht einmal nöthig, $m = 0$ zu setzen, wenn die gedachten Glieder verschwinden sollen, sondern man darf zu dem Ende nur das zweyte Glied wegschaffen, indem man $f = l + \frac{3m}{6} = l + \frac{m}{2}$ setzt. Auf diese Art bekommt man eine Gleichung für l, welche bloß die Dignitäten von l^2 enthält, nemlich

$$l^6 - (\frac{3m^2}{4} - 2n)l^4 + (\frac{3m^4}{16} - m^2n + mp + n^2 - 4q)l^2$$
$$- (\frac{m^3}{8} - \frac{mn}{2} + p)^2 = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit der reducirten Gleichung für t Nr. 33. überein, wenn man darin $t = 4l^2$ setzt. Da also in der angeführten Nr. $t = s^2$ und $s = 2z$ war, so hat man $l = z$, und es ist demnach die Größe $l = f - \frac{m}{2}$ in den vorhergehenden Formeln die Größe z Nr. 27 f. und zwar ohne $m = 0$ zu setzen. Dies zeigt die Verbindung der untersuchten Auflösungen hinlänglich.

36.

Nun wollen wir sehen, warum die Cartesische Methode auf eine solche reducirte Gleichung des sechsten Grades führt, daß darin mit dem zweyten Gliede zugleich alle Glieder, worin die unbekannte Größe in einer ungeraden Dignität enthalten ist, verschwinden. Zu dem Ende bemerke man, daß die Gleichung $x^2 + fx + g = 0$, weil sie ein Faktor der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln a, b, c, d sind, seyn muß, irgend zwey von diesen Wurzeln zu Wurzeln haben muß. Also hat man entweder $-f = a + b$ und $g = ab$, oder $-f = a + c$ und $g = ac$, oder $-f = a + d$ und $g = ad$, oder $-f = b + c$ und $g = bc$, oder $-f = b + d$ und $g = bd$, oder endlich $-f = c + d$ und $g = cd$, und es muß folglich die Gleichung für f, so wie auch die für g, eine Gleichung des sechsten Grades seyn, weil die vier Größen a, b, c, d zu zwey und zwey genommen, sechs Combinationen geben. Man könnte hiernach die Gleichungen für f und g directe finden, indem man den Werth eines jeden ihrer Coefficienten suchte, wie wir schon öfters gethan haben. Es sey nemlich die gesuchte Gleichung

$$f^6 + Af^5 + Bf^4 + Cf^3 + Df^2 + Ef + F = 0$$

Da die Wurzeln dieser Gleichung $-a-b$, $-a-c$, $-a-d$, $-b-c$, $-b-d$, $-c-d$ seyn müssen, so hat man

$$\begin{aligned} A &= a+b+a+c+a+d+b+c+b+d+c+d \\ &= 3(a+b+c+d) = -3m \\ B &= (a+b)(a+c+a+d+b+c+b+d+c+d) \\ &\quad + (a+c)(a+d+b+c+b+d+c+d) \\ &\quad + (a+d)(b+c+b+d+c+d) \\ &\quad + (b+c)(b+d+c+d) \\ &\quad + (b+d)(c+d) \\ &= 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+8(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &= 3(m^2-2n)+8n = 3m^2-2n \end{aligned}$$

und so ferner.

Wollte man nun das zweyte Glied dieser Gleichung wegbringen, so müßte man alle Wurzeln um $\frac{A}{6}$ vermehren oder $l - \frac{A}{6}$ für setzen. Dies würde eine Gleichung für l geben,

ben, wo $l = f + \frac{A}{6} = f + \frac{a+b+c+d}{2}$ wäre, weil $A = 3(a+b+c+d)$ ist. Die Wurzeln dieser Gleichung würden seyn

$$\frac{a+b+c+d}{2} - a - b$$

$$\frac{a+b+c+d}{2} - a - c$$

2c.

oder

$$\frac{a+b-c-d}{2}$$

$$\frac{a+c-b-d}{2}$$

$$\frac{a+d-b-c}{2}$$

$$\frac{b+c-a-d}{2}$$

$$\frac{b+d-a-c}{2}$$

$$\frac{c+d-a-b}{2}$$

Es fällt aber dabey in die Augen, daß jede Wurzel eine ihr entgegenstehende sonst gleiche hat, und nimmt man daher die Quadrate und betrachtet l^2 als die unbekannte Größe, so kann sie nicht mehr als folgende drey Werthe haben

$$\left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a+d-b-c}{2}\right)^2$$

Hieraus folgt, daß die Gleichung für l, wenn man sie nach l^2 ordnet, eine Gleichung des dritten Grades oder eine Gleichung des sechsten Grades ist, worin die unbekannte Größe bloß in den geraden Dignitäten vorkommt, wodurch eben die Auflösung der Gleichungen des vierten Grades möglich wird. Auch erhellet, warum die Gleichung für l mit der für z übereinstimmt, denn es ist klar (Nr. 32) daß die Werthe von z dieselben sind als diejenigen welche wir für l gefunden haben.

37.

Auch verdient hier noch folgendes angemerkt zu werden. Da $-m = a + b + c + d$ ist, und die Werthe von f

$$-a-b,\quad -a-c,\quad -a-d,\quad -b-c,\quad -b-d,\quad -c-d$$

sind, so hat man dieselben Werthe für $m-f$. Es muß demnach die Gleichung für f von der Art seyn, daß sie unverändert bleibt, wenn man darin $m-f$ für f setzt. Nimmt man daher $f = \frac{m}{2} + l$ an, wodurch $m - f = \frac{m}{2} - l$ wird, so muß auch die Gleichung für l so beschaffen seyn, daß sie dieselbe bleibt, wenn man darin l in $-l$ verwandelt, und kann also auch bloß die geraden Dignitäten von l enthalten.

Bringt man nun diesen Werth von f in den Ausdruck für g Nr. 35, so wird

$$g = \frac{l^2}{2} + \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} + \frac{4nm - m^3 - 8p}{16l}$$

und die beyden Faktoren

$$x^2 + fx + g = 0,\quad x^2 + (m-f)x + n - g - f(m-f) = 0$$

worin die Gleichung $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$ zerfällt worden, gehen in

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - l\right)x + \frac{l^2}{2} + \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} + \frac{4nm - m^3 - 8p}{16l} = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - l\right)x + \frac{l^2}{2} - \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} - \frac{4nm - m^3 - 8p}{16l} = 0$$

über, welches dieselben Gleichungen sind, als Nr. 29, wenn man $l = z$, und in diesen letzten für y seinen in z gegebenen Werth setzt, welcher $y = \frac{4z^2 + 4n - m^2}{8}$ ist, Nr. 28.

Die bisher untersuchten Methoden sind außer der von Tschirnhausen, Euler und Bezout die einzigen bekannten Wege zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades. Die so eben gedachten Methoden verdienen aber noch eine besondere Untersuchung, und diese soll der Gegenstand des übrigen Theils dieses Abschnitts seyn.

38.

Zuvörderst ist klar, daß man, die Gleichungen des vierten Grades nach der Tschirnhausenschen Methode aufzulösen, nicht nöthig hat, alle Zwischenglieder wegzuschaffen, wie solches bey den cubischen Gleichungen geschehen mußte, sondern es ist hinlänglich, wenn man nur das zweyte und vierte Glied wegbringt, worin die unbekannte Größe in ungeraden Dignitäten vorkommt, weil man alsdann eine Gleichung hat, welche sich wie eine quadratische Gleichung behandeln läßt. Zu diesem Ende nehme man, wie bey den cubischen Gleichungen Nr. 10. die Hülfsgleichung $x^2 = bx + a + y$ an, welche zwey unbestimmte Größen a und b enthält. Schafft man

man mittelst dieser Gleichung die unbekannte Größe x aus der gegebenen Gleichung $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$ weg, so findet man (Nr. 14.) eine Gleichung für y vom vierten Grade, worin der Coefficient von y^3 eine Funktion von a und b der ersten, der von y^2 eine Funktion von a und b von der zweyten und der von y eine Funktion von a und b von der dritten Dimension ist. Um also auf einmal das zweyte und vierte Glied wegzubringen, muß man die beyden Größen a und b so bestimmen, daß dadurch zweyen Gleichungen, einer vom ersten und einer vom dritten Grade ein Genüge geschieht. Dies giebt eine reducirte Gleichung vom dritten Grade, und es läßt sich daher die Tschirnhausensche Methode auch bey den Gleichungen des vierten Grades anbringen, wie solches aus dem Folgenden noch deutlicher erhellen wird.

39.

Da wir wir bisher die Buchstaben a, b, c, d gebraucht haben, um die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung vorzustellen, so wollen wir zur Vermeidung der Verwirrung zu den Coefficienten der Hülfsgleichung zwey andere Buchstaben wählen, und diese Gleichung so

$$x^2 + fx + g + y = 0$$

ausdrucken. Da nach der Methode, wovon hier die Rede ist, diese Gleichung mit der gegebenen eine gemeinschaftliche Wurzel haben muß, (Nr. 11.): so darf man es nur so einrichten, daß beyde einen gemeinschaftlichen Faktor haben, wie x bloß in der ersten Dimension vorkommt. Man dividire also die fünftheilige Größe

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$$

durch

$$x^2 + fx + g + y$$

und

und setze dabey $g + y = g'$: so findet man wie oben Nr. 25. den Rest

$$(p - g'(m - 2f) - nf + mf^2 - f^3)x + q$$
$$- g'(n - mf + f^2) + g'^2$$

Da dieser Rest bloß x in der ersten Dignität enthält, so muß er ein gemeinschaftlicher Faktor beyder vieltheiligen Größen seyn, und also den vorhergehenden Divisor $x^2 + fx + g'$ genau messen, d. h. der Werth von x, der sich aus der Gleichung

$$(p - g'(m - 2f) - nf + mf^2 - f^3)x + q$$
$$g'(n - mf + f^2 + g'^2 = 0$$

ergiebt, muß auch der Gleichung $x^2 + fx + g' = 0$ ein Genüge thun. Nun hat man

$$x = \frac{q - g'(n - mf + f^2) + g'^2}{f^3 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g'}$$

und bringt man diesen Werth in $x^2 + fx + g' = 0$, so wird

$$(q - g'(n - mf + f^2) + g'^2)^2 +$$
$$f(q - g'(n - mf + f^2) + g'^2)(f^3 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g')$$
$$+ g'(f^3 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g')^2 = 0$$

wo man nur $g + y$ wieder für g' zu setzen, zu entwickeln und nach y zu ordnen braucht.

Es sey der Kürze wegen

$$F = f^3 - mf^2 + nf - p$$
$$G = f^2 - mf + n$$
$$H = 2f - m$$

so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$(q - Gg' + g'^2)^2 + f(q - Gg' + g'^2)(F - Hg') +$$
$$g'(F - Hg')^2 = 0.$$

Ordnet man diese Gleichung nach g', so bekommt man

$$g'^4 - (2G + fH - H^2)g'^3 + (G^2 + 2q + fF + fGH - 2FH)g'^2$$
$$- (2qG + fqH + fFG - F^2)g' + q^2 + qfF = 0$$

und

und braucht man die Werthe von F, G und H wieder, so ergiebt sich

$$g'^4-(mf+2n-m^2)g'^3+(nf^2-(mn-3p)f+n^2-2mp+2q)g'^2$$
$$-pf^3-(mp-4q)f^2+(np-3mq)f-p^2+2nq)g'$$
$$+q(f^4-mf^3+nf^2-pf+q)=0.$$

Es sey nunmehr

$$A=mf+2n-m^2$$
$$B=nf^2-(mn-3p)f+n^2-2mp+2q$$
$$C=pf^3-(mp-4q)f^2+(np-3mq)f-p^2+2nq$$
$$D=q(f^4-mf^3+nf^2-pf+q)$$

um die Gleichung

$$g'^4-Ag'^3+Bg'^2-Cg'+D=0$$

zu bekommen. Setzt man nun wieder $g+y$ für g' und ordnet nach y, so wird

$$y^4+(4g-A)y^3+(6g^2-3gA+B)y^2$$
$$+(4g^3-3Ag^2+2Bg-C)y$$
$$+g^3-Ag^3+Bg^2-Cg+D=0$$

worin man nach Gefallen zwey Glieder $=0$ setzen kann, wenn man die Buchstaben a und b gehörig bestimmt.

Wir wollen also, unserm Vorsatze gemäß, das zweyte und vierte Glied verschwinden lassen. Zu diesem Ende dienen die Gleichungen

$$4g-A=0$$
$$4g^3-3Ag^2+2Bg-C=0.$$

Die erste giebt $g=\frac{A}{4}$, und bringt man diesen Werth in die andere Gleichung, so hat man nach Wegschaffung der Brüche

$$A^3-4AB+8C=0$$

Braucht man in dieser Gleichung die Werthe von A, B und C, so bekommt man eine Gleichung für f vom dritten Grade, nemlich

(m³ –

$$(m^3 - 4mn + 8p)f^3$$
$$- (3m^4 - 14m^2n + 8n^2 + 2mp - 32q)f^2$$
$$+ (m^5 - 16m^3n + 20m^2p + 16m(n^2 - 2q) - 16np)f$$
$$- m^6 + 6m^4n - 8m^3np - 8m^2(n^2 - q) + 8mn^2p$$
$$- 8p^2 = 0$$

Hat man aus dieser Gleichung f bestimmt, so wird die Gleichung für y, da $g = \frac{A}{4}$ ist

$$y^4 - (\frac{3A^2}{8} - B)y^2 - \frac{3A^4}{256} + \frac{A^2B}{16} - \frac{AC}{4} + D = 0$$

oder, wenn man für C seinen Werth $\frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}$ setzt,

$$y^4 - (\frac{3A^2}{8} - B)y^2 + \frac{5A^4}{256} - \frac{A^2B}{16} + D = 0$$

eine Gleichung, welche sich wie eine Gleichung des zweyten Grades behandeln läßt. Auf diese Art wird f und y bekannt und darauf hat man sogleich

$$x = \frac{q - (n - mf + mf^2)(\frac{A}{4} + y) + (\frac{A}{4} + y)^2}{f^3 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)(\frac{A}{4} + y)}$$

und die vier Werthe von y aus der vorhergehenden Gleichung geben allemal dieselben vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, man mag von f eine Wurzel brauchen, was für eine man will. Nöthigenfalls kann man dieses auf eine der Nr. 28. ähnliche Art beweisen.

40.

Wollte man den Grund, warum die vorhin gefundene reducirte Gleichung für f nothwendiger Weise eine Gleichung des dritten Grades ist, a priori finden, so müßte man untersuchen, was der Werth von f für eine Funktion von den Wur-

Wurzeln a, b, c und d seyn muß. Zu dem Ende nehme man wieder die Hülfsgleichung $x^2 + fx + g + y = 0$ zur Hand, und substituire darin nach und nach a, b, c, d für x und für y die vier Wurzeln der vorhergehenden Gleichung. Indeß ist es nicht nöthig, den Werth dieser Wurzeln zu kennen, sondern da diese Gleichung keine ungeraden Dignitäten von y enthält, so darf man nur erwägen, daß je zwey und zwey Wurzeln derselben einander entgegengesetzt, übrigens aber gleich seyn müssen, und sich also durch $y', -y', y'', -y''$ vorstellen lassen. Braucht man demnach die gedachten Substitutionen, so findet man

$$a^2 + fa + g + y' = 0$$
$$b^2 + fb + g - y' = 0$$
$$c^2 + fc + g + y'' = 0$$
$$d^2 + fd + g - y'' = 0$$

Schafft man hier y' und y'' weg, so ergiebt sich

$$a^2 + b^2 + f(a + b) + 2g = 0$$
$$c^2 + d^2 + f(c + d) + 2g = 0$$

und bringt man g weg, so wird

$$f = -\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a + b - c - d}$$

Um also alle Werthe von f zu bekommen, darf man nur die vier Wurzeln a, b, c, d, so oft versetzen als möglich, wodurch man aber nicht mehr als folgende drey Werthe bekommt

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a + b - c - d}$$
$$\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{a + c - b - d}$$
$$\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a + d - b - c}$$

Da dieses die Wurzeln der reducirten Gleichung für f sind, so kann diese Gleichung keine höhere als eine cubische seyn.

Man

Man könnte auch, auf die schon öfters befolgte Art, zu der Gleichung für y zurückgehen und würde dann wieder dieselbe Gleichung wie oben finden.

Um übrigens die reducirte Gleichung für f, wovon hier die Rede ist, desto bequemer mit der obigen, nach der Ferrarischen und Cartesischen Methode gefundenen, vergleichen zu können, bemerke man, daß

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = \frac{(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a-b)^2 - (c-d)^2}{2}$$

ist. Nun ist

$$(a+b)^2 - (c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d)$$
$$= -m(a+b-c-d)$$

und

$$(a-b)^2 - (c-d)^2 = (a+c-b-d)(a+d-b-c)$$

und da ferner

$$(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c) = m^3$$
$$-4mn + 8p$$

ist, so hat man

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = \tfrac{1}{2}\left(-m(a+b-c-d) + \frac{m^3-4mn+8p}{a+b-c-d}\right)$$

und folglich

$$f = -\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{a+b-c-d} = \frac{m}{2} - \frac{m^3-4mn+8p}{2(a+b-c-d)^2}$$

Nun haben wir Nr. 32. gesehen, daß die reducirte Gleichung für t zu ihren Wurzeln die verschiedenen Werthe von $(a+b-c-d)^2$ hat. Folglich ist überhaupt

$$f = \frac{m}{2} - \frac{m^3 - 4mn + 8p}{2t}$$

woraus sich die Verbindung der reducirten Gleichung für f mit der oben gefundenen für t hinlänglich erkennen läßt.

41.

Da wir gesehen haben, wie die Tschirnhausensche Methode bey den Gleichungen des vierten Grades gebraucht wird, wenn zwey Glieder der gegebenen Gleichung weggeschafft werden: so wird es nicht undienlich seyn zu erwägen, was die Wegschaffung aller Zwischenglieder giebt.

Sollen also drey Glieder, nemlich das zweyte, dritte und vierte weggebracht werden, so ist eine Hülfsgleichung von drey unbestimmten Größen nöthig, deren Form folgende ist

$$x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0.$$

Schafft man mittelst dieser und der gegebenen Gleichung

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

x weg, so bekommt man eine Gleichung für y vom vierten Grade

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

worin $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ gesetzt werden muß, um die zweygliedrige Gleichung

$$y^4 + D = 0$$

zu bekommen. Aus dem Nr. 14. allgemein Erwiesenen folgt aber, daß A eine Funktion der unbestimmten Größen f, g, h von einer Dimension, B eine Funktion zweyer und C eine Funktion dreyer von eben diesen Größen seyn muß, und man hat also zur Bestimmung der Größen f, g, h die drey Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, wovon die erste zum ersten, die andere zum zweyten und die dritte zum dritten Grade gehört, so daß man durch die Elimination zuletzt eine Gleichung für f oder g oder h vom sechsten Grade bekommt. Auf diese Art scheint die gegenwärtige Methode keine Anwendung zu leiden, weil sie zu einer höhern reducirten Gleichung führt als die gegebene ist. Allein es läßt sich vielleicht

diese

diese Gleichung auf einen niedrigern Grad herabbringen, und dieses muß zuerst a priori untersucht werden, ehe man sich in den angezeigten Calcul einläßt.

42.

Zu diesem Ende frägt sich, was die unbestimmte Größe f für eine Funktion von a, b, c, d seyn wird, wenn die Gleichung für y die Form $y^4 + D = 0$ haben soll. Nun giebt diese Gleichung die Wurzeln

$$y = \pm \sqrt[4]{-D}$$

$$y = \pm \sqrt{-1} \,.\, \sqrt[4]{-D}$$

und setzt man daher der Kürze wegen $\sqrt[4]{-D} = k$, so darf man nur in die Hülfsgleichung $x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0$ nach und nach a, b, c, d für x und k, $-k$, $k\sqrt{-1}$, $-k\sqrt{-1}$ für y bringen. Hierdurch erhält man die vier Gleichungen

$$a^3 + a^2 f + ag + h + k = 0$$
$$b^3 + b^2 f + bg + h - k = 0$$
$$c^3 + c^2 f + cg + h + k\sqrt{-1} = 0$$
$$d^3 + d^2 f + dg + h - k\sqrt{-1} = 0$$

und aus diesen Gleichungen lassen sich die Größen f, g, h und k finden.

Addirt man die beyden ersten und die beyden letzten zusammen, so bekommt man

$$a^3 + b^3 + (a^2 + b^2)f + (a + b)g + 2h = 0$$
$$c^3 + d^3 + (c^2 + d^2)f + (c + d)g + 2h = 0$$

welche von einander abgezogen

$$a^3 + b^3 - c^3 - d^3 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)f$$
$$+ (a + b - c - d)g = 0$$

geben, worin bloß f und g befindlich sind.

Zieht man nun die beyden ersten und die beyden letzten von einander ab, so erhält man

$$a^3 - b^3 + (a^2 - b^2)f + (a - b)g + 2k = 0$$

$$c^3 - d^3 + (c^2 - d^2)f + (c - d)g + 2k\sqrt{-1} = 0$$

Multiplicirt man die zweyte durch $\sqrt{-1}$, und addirt sie darauf zu der ersten, so wird

$$a^3 - b^3 + (c^3 - d^3)\sqrt{-1} + (a^2 - b^2 + (c^2 - d^2)\sqrt{-1})f$$
$$+ (a - b + (c - d)\sqrt{-1})g = 0$$

eine Gleichung, welche mit der vorhin gefundenen verbunden zur Bestimmung von f und g dient.

Bringt man g weg, so bekommt man eine Gleichung für f, wodurch

$$f = -$$
$$\frac{(a^3+b^3-c^3-d^3)(a-b+(c-d)\sqrt{-1})-(a^3-b^3+(c^3-d^3)\sqrt{-1})(a+b-c-d)}{(a^2+b^2-c^2-d^2)(a-b+(c-d)\sqrt{-1})-(a^2-b^2+(c^2-d^2)\sqrt{-1})(a+b-c-d)}$$

wird. Hieraus lassen sich leicht alle Werthe von f herleiten, wenn man die vier Wurzeln a, b, c, d so oft versetzt als möglich ist. Setzt man der Kürze wegen

$$M =$$
$$(a^3 + b^3 - c^3 - d^3)(a - b) - (a^3 - b^3)(a + b - c - d)$$
$$N =$$
$$(a^3 + b^3 - c^3 - d^3)(c - d) - (c^3 - d^3)(a + b - c - d)$$
$$P =$$
$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(a - b) - (a^2 - b^2)(a + b - c - d)$$
$$Q =$$
$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(c - d) - (c^2 - d^2)(a + b - c - d)$$
$$M' =$$
$$(a^3 + c^3 - b^3 - d^3)(a - c) - (a^3 - c^3)(a + c - b - d)$$
$$N' =$$
$$(a^3 + c^3 - b^3 - d^3)(b - d) - (b^3 - d^3)(a + c - b - d)$$

$P' =$

$$P' =$$
$$(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(a - c) - (a^2 - c^2)(a + c - b - d)$$
$$Q' =$$
$$(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(b - d) - (b^2 - d^2)(a + c - b - d)$$
$$M'' =$$
$$(a^3 + d^3 - b^3 - c^3)(a - d) - (a^3 - d^3)(a + d - b - c)$$
$$N'' =$$
$$(a^3 + d^3 - b^3 - c^3)(b - c) - (b^3 - c^3)(a + d - b - c)$$
$$P'' =$$
$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(a - d) - (a^2 - d^2)(a + d - b - c)$$
$$Q'' =$$
$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(b - c) - (b^2 - c^2)(a + d - b - c)$$

so findet man folgende sechs Werthe

$$-\frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}}, \qquad -\frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$
$$-\frac{M' + N'\sqrt{-1}}{P' + Q'\sqrt{-1}}, \qquad -\frac{M' - N'\sqrt{-1}}{P' - Q'\sqrt{-1}}$$
$$-\frac{M'' + N''\sqrt{-1}}{P'' + Q''\sqrt{-1}}, \qquad -\frac{M'' - N''\sqrt{-1}}{P'' - Q''\sqrt{-1}}$$

welches die sechs Werthe von f sind. Man sieht hieraus, daß diese Gleichung eine Gleichung vom sechsten Grade wird, wie solches auch schon auf eine andere Art gezeigt worden ist.

43.

Nun kommt es darauf an, ob diese Gleichung auf einen niedrigern Grad herabgebracht werden kann. Dies findet wirklich statt, so wie solches vermittelst der Form der sechs Wurzeln der gegenwärtigen Gleichung gezeigt werden soll. Denn nimmt man an, daß die beyden Wurzeln

$$-\frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} \text{ und } -\frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$

durch die quadratische Gleichung

$$f^2 + tf + u = 0$$

vorgestellt werden: so ist wegen der Natur der Gleichungen

$$t = \frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} + \frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$

und

$$u = \frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} \times \frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$

oder

$$t = \frac{2(MP + NQ)}{P^2 + Q^2} \text{ und } u = \frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}$$

Nun behaupte ich, daß die Größen t und u von keiner andern Gleichung abhängen können, als von cubischen Gleichungen von der Form

$$t^3 - Et^2 + Ft - G = 0$$
$$u^3 - Hu^2 + Ku - L = 0$$

worin die Coefficienten E, F, G, H, K, L rationale Funktionen von den Coefficienten m, n, p, q der gegebenen Gleichung sind; dergestalt, daß man, wenn t', t'', t''' die drey Wurzeln der ersten Gleichung ausdrucken, folgende drey Gleichungen für f hat

$$f^2 + t'f + u' = 0$$
$$f^2 + t''f + u'' = 0$$
$$f^2 + t'''f + u''' = 0$$

in welche sich die vorhin gedachte Gleichung für f vom sechsten Grade auflösen läßt.

Um dies zu beweisen darf man nur die verschiedenen Werthe aufsuchen, welche die Größen t und u, d. h. die Funktionen $\frac{MP + NQ}{P^2 + Q^2}$ und $\frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}$ durch die Versetzung der Wurzeln der gegebenen Gleichung a, b, c, d haben können,

nen, denn es fällt in die Augen, daß die daher sich ergebenden Werthe die Wurzeln der Gleichung für t und u sind. Nun ist die Summe aller möglichen Versetzungen der vier Größen a, b, c, d $= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, und es müßten also überhaupt genommen, die Gleichungen für t und u bis zu dem vier und zwanzigsten Grade aufsteigen. Allein es finden sich unter diesen Versetzungen verschiedene, welche eben dieselben Werthe geben, und welche daher nicht besonders genommen werden dürfen. Denn verwechselt man

1. a und b, so bleiben die Größen N und Q dieselben, und die Größen M und P verändern bloß das Zeichen, so daß die Größen t und u dieselben bleiben müssen. Hieraus erhellet, daß die vier und zwanzig Versetzungen der Buchstaben a, b, c, d eigentlich zwölf Paar einander gleiche Setzungen enthalten. Hierdurch wird die Menge der Werthe von t und u schon bis auf zwölf vermindert. Verwechselt man ferner

2. c und d, so bleiben die Größen M und P dieselben, und die Größen N und Q verändern bloß das Zeichen. Dies bringt aber keine Veränderung in den Werthen von t und u hervor, und es bleiben daher, da diese Verwechselungen unabhängig von den vorigen sind, von den vorhergedachten zwölf Werthen der Größen t und u nur noch sechs übrig.

3. Verwechselt man endlich zu gleicher Zeit, a und c, und b und d, so entsteht auch dadurch keine Veränderung in den Werthen von t und u, und es reduciren sich daher die so eben erwähnten sechs Werthe auf drey.

Nun kann man zwar auch noch a und d und b und c zu gleicher Zeit unter ähnlichen Umständen verwechseln, allein da diese Verwechselung schon in dem vorhergehenden enthalten ist, so braucht davon hier weiter keine Rede zu seyn.

Hieraus folgt, daß die Gleichungen für t und u vom 24sten Grade nicht mehr als drey verschiedene Wurzeln enthalten können, wovon aber jede sieben ihr gleiche neben sich hat, so daß diese Gleichungen eigentlich nicht anders als zur achten Potestät erhobene cubische Gleichungen sind.

44.

Wir haben auf diese Art a priori gesehen, daß es nicht mehr als drey verschiedene Werthe von t und von u geben kann. Nun ist leicht zu finden, daß diese Werthe von t

$$\frac{2(MP + NQ)}{P^2 + Q^2}, \quad \frac{2(M'P' + N'Q')}{P'^2 + Q'^2}, \quad \frac{2(M''P'' + M''Q'')}{P''^2 + Q''^2}$$

und von u

$$\frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}, \quad \frac{M'^2 + N'^2}{P'^2 + Q'^2}, \quad \frac{M''^2 + N''^2}{P''^2 + Q''^2}$$

sind, so daß (Nr. 43)

$$t' = \frac{2(MP + NQ)}{P^2 + Q^2}$$

$$t'' = \frac{2(M'P' + N'Q')}{P'^2 + Q'^2}$$

$$t''' = \frac{2(M''P'' + N''Q'')}{P''^2 + Q''^2}$$

$$u' = \frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}$$

$$u'' = \frac{M'^2 + N'^2}{P'^2 + Q'^2}$$

$$u''' = \frac{M''^2 + N''^2}{P''^2 + Q''^2}$$

ist.

ist. Denn bringt man diese Werthe in die Coefficienten E, F, ꝛc. der Gleichungen für t und u, welche bekanntermaßen auf folgende Art ausgedruckt werden müssen

$$E = t' + t'' + t''', \quad F = t't'' + t't''' + t''t''', \quad G = t't''t'''$$
$$H = u' + u'' + u''', \quad K = u'u'' + u'u''' + u''u''', \quad L = u'u''u'''$$

so bekommt man Funktionen von a, b, c, d, welche dieselben bleiben, man mag die Größen a, b, c, d verwechseln wie man will, und welche sich folglich durch rationale Funktionen von den Coefficienten m, n, p, q der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln a, b, c, d sind, ausdrucken lassen. Auf diese Art kann man also den Werth dieser Coefficienten auch directe finden, so wie wir solches bey den bisherigen Untersuchungen schon öfters gethan haben.

Uebrigens kann man, sobald man die Wurzeln t', t'', t''' der Gleichung für t kennt, durch sie die zugehörigen Wurzeln u', u'', u''' der Gleichung für u, ohne Auflösung einer andern Gleichung finden. Denn nimmt man die drey Ausdrücke

$$u' + u'' + u'''$$
$$t'u' + t''u'' + t'''u'''$$
$$t'^2u' + t''^2u'' + t'''^2u'''$$

und setzt darin für t', t'', t''' und u', u'', u''' ihre Werthe in a, b, c, d, so sieht man leicht, daß die daraus entstehenden Funktionen keine Veränderung leiden, wie man auch die Größen a, b, c, d versetzen mag, so daß sie sich allemal durch rationale Funktionen von den Coefficienten m, n, p, q ausdrucken lassen müssen. Auf diese Art lassen sich die Werthe dieser Ausdrücke finden, und dann hat man durch sie drey Gleichungen, durch welche sich die Größen u', u'', u''' leicht bestimmen lassen.

45.

Da wir also a priori überzeugt sind, daß sich die reducirte Gleichung des sechsten Grades, auf welche die hier untersuchte Methode führt, auf eine Gleichung des dritten Grades herabbringen läßt: so wollen wir nun auch die Art und Weise kennen zu lernen suchen, welche die Rechnung dazu erfordert. Man nehme also wieder die Hülfsgleichung (Nr. 40.)

$$x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0$$

zur Hand und suche auf die gewöhnliche Art (Nr. 11.) die Bedingungen, unter welchen diese Gleichung mit der gegebenen

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

eine Wurzel gemein hat. Man dividire also die vieltheilige Größe

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

durch

$$x^3 + fx^2 + gx + h'$$

indem man der Kürze wegen $h' = h + y$ setzt. Den Quotienten bey Seite gesetzt, so ist der Rest

$$Mx^2 + N'x + P'$$

wenn man

$$M = n - g - f(m - f)$$
$$N' = p - h' - g\,m - f)$$
$$P' = q - h'(m - f)$$

annimmt. Ferner dividire man die viertheilige Größe

$$x^3 + fx^2 + gx + h'$$

durch die dreytheilige

$$Mx^2 + N'x + P',$$

so wird der neue Rest

$$(g - \frac{P' + N'f}{M} + \frac{N'^2}{M^2})x + h' - \frac{P'f}{M} + \frac{N'P'}{M^2}$$

und

und dieser muß der gesuchte gemeinschaftliche Divisor seyn, weil er bloß x in der ersten Dignität enthält. Setzt man ihn daher = o, so wird

$$x = -\frac{M^2h' - MP'f + N'P'}{M^2g - M(P' + N'f + N'^2}$$

und dieser Werth, in die Gleichung $Mx^2\ N'x + P' = o$ gesetzt, giebt die gesuchten Bedingungen.

Man setze nunmehr

$$N = p - h - g(m - f)$$
$$P = q - h(m - f)$$

so hat man, da $h' = h + y$ ist

$$N' = N - y$$
$$P' = P - (m - f)y$$

Bringt man diese Werthe in den Ausdruck für x, und setzt ferner

$$Q = M^2h - MPf + NP$$
$$R = M^2 + (Mf - N)f - P$$
$$S = M^2g - M(P + Nf) + N^2$$
$$T = Mm - 2N$$

so wird

$$x = -\frac{Q + Ry + (m - f)y^2}{S + Ty + y^2}$$

und die Gleichung für die gesuchte Bedingung wird

$$M(Q + Ry + (m - f)y^2)^2$$
$$+ (y - N)(Q + Ry + (m - f)y^2)(S + Ty + y^2)$$
$$+ (P - (m - f)y)(S + Ty + y^2) = o$$

Entwickelt man dieselbe und ordnet sie nach den Potestäten von y, so erhält man nach vorgenommener Reduction die Form

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = o$$

wie wir bereits oben gezeigt haben.

In dieser Gleichung für y sind die Coefficienten A, B, C, D ganze rationale Funktionen dreyer unbestimmten Größen f, g, h und zwar A eine Funktion einer, B eine Funktion zweyer Dimensionen u. s. f. Setzt man nun, um diese Gleichung auf zwey Glieder zu bringen, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, so bekommt man darin Gleichungen, aus welchen sich sogleich die Werthe von g und h durch f bestimmen lassen, und außerdem eine Endgleichung für f vom sechsten Grade, die auf dem dritten Grad hervorgebracht werden kann. Denn dividirt man sie durch eine quadratische Gleichung wie $f^2 + tf + u = 0$, so bekommt man zwey Gleichungen für t und u, welche die Bedingungen enthalten, unter denen die Division ohne Rest vorgenommen werden kann, und mittelst dieser Gleichungen läßt sich sogleich u durch t bestimmen, und dann eine Endgleichung für t finden, welche den dritten Grad nicht übersteigt. Löset man diese cubische Gleichung auf, so kennt man t und dann auch u, und lernt darauf f durch die Auflösung der vorhergehenden quadratischen Gleichung und g und h durch einfache Gleichungen kennen. Auf diese Art werden also alle Coefficienten D, Q, R, S, T bekannt.

Ist nun die Gleichung für y durch Wegschaffung der Zwischenglieder auf $y^4 + D = 0$ gebracht, so sind die vier Werthe von y

$$\pm \sqrt[4]{-D} \text{ und } \pm \sqrt[4]{-D} \,.\, \sqrt{-1}$$

und diese Werthe, nach und nach in den obigen Ausdruck für x gesetzt, geben die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung. Da die Formeln, auf welche der Calcul führt, zu weitläuftig sind, so begnüge ich mich, denselben anzuzeigen, und will dagegen Mittel aufsuchen, ihn abzukürzen und einfacher zu machen.

46.

Da die Wurzel x die Form

$$x = -\frac{Q + Ry + (m - f)y^2}{S + Ty + y^2}$$

hat, so daß darin die Größe y aus der Gleichung

$$y^4 + D = 0$$

bestimmt werden muß: so ist leicht einzusehen, daß man diesem Ausdrucke für x die einfachere Form

$$x = a + by + cy + dy^3$$

geben kann, wenn man a, b, c und d von Q, R ꝛc. abhängige Coefficienten seyn läßt. Denn multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{Q + Ry + (m - f)y^2}{S + Ty + y^2}$$

durch $S - Ty + y^2$: so wird der Nenner des neuen Bruchs

$$(S + y^2)^2 - T^2y^2 \text{ oder } S^2 + (2S - T^2)y^2 + y^4$$

oder

$$S^2 - D + (2S - T^2)y^2$$

wenn man $-D$ für y^4 setzt. Multiplicirt man ferner sowohl den Zähler als den Nenner durch

$$S^2 - D - (2S - T^2)y^2,$$

so wird der nunmehrige Nenner

$$(S^2 - D)^2 - (2S - T^2)^2y^4$$

oder, da $y^4 = -D$ ist,

$$(S^2 - D)^2 + D(2S - T^2)^2$$

und enthält also kein y mehr. Man kann also in dem Ausdrucke für x, indem man den Zähler und Nenner durch $(S - Ty + y^2)(S^2 - D - (2S - T^2)y^2)$ multiplicirt, y aus dem Nenner wegbringen. Hierdurch aber wird der Zähler eine vieltheilige Größe, worin y bis zur sechsten Dignität aufsteigt; allein setzt man darin $-D$ für y^4, $-Dy$ für y^5 und $-Dy^2$ für y^6, so enthält er bloß die Dignitäten y^3,

y^2, y, und der Ausdruck für x bekommt demnach die Form $a + by + cy^2 + dy^3$.

Da die Substitution der Werthe von y aus der Gleichung $y^4 + D = 0$ die vier Wurzeln geben muß, welche x in der Gleichung $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$ hat: so kann man diese Gleichung als aus

$$x = a + by + cy^2 + dy^3, \text{ und } y^4 + D = 0$$

durch eie Elimination von y entstanden, betrachten, wo denn die Vergleichung der homologen Glieder vier Gleichungen darbietet, vermittelst welcher man vier von den Coefficienten a, b, c, d und D bestimmen kann. Der fünfte aber kann nach Gefallen angenommen werden.

Dies sind die Methoden, wie Euler und Bezout die Gleichungen des vierten Grades in den Nr. 18. angeführten Memoiren aufgelöset haben.

Euler setzt sogleich $c = 1$ und findet durch Wegschaffung der drey übrigen unbestimmten Größen a, b, d eine reducirte Gleichung für D vom dritten Grade. Bezout hingegen setzt $D = -1$, und findet eine reducirte Gleichung für c vom sechsten Grade, die sich wie eine cubische Gleichung behandeln läßt, weil ihr die Glieder fehlen, worin die unbekannte Größe in einer ungeraden Dignität stehen würde. Er fügt zugleich die Anmerkung hinzu, daß man, wenn man b oder d anstatt c suchen wollte, eine Gleichung vom vier und zwanzigsten Grade finden würde, deren Exponenten Vierfache von vier wären, und welche sich daher wie eine Gleichung des sechsten Grades behandeln ließen. Ferner, daß eine reducirte Gleichung für bd bloß eine cubische Gleichung seyn, und folglich die reducirten Gleichungen für b oder d bloß die Schwierigkeiten des dritten Grades haben

würden,

würden, weil sie mittelst der Gleichung für bd in drey Gleichungen vom achten Grade zerfällt werden könnten, die sich wie quadratische Gleichungen auflösen ließen, weil die Exponenten darin Vielfache von vier wären.

Ich begnüge mich mit der Anzeige dieser Resultate, weil sie jeder leicht selbst finden kann, im Fall er die gedachten Memoiren nicht zur Hand hat, und will dagegen den Grund davon a priori aufsuchen.

47.

Die Werthe von x, d. h. die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung mögen x', x'', x''', x'''', und die vier Werthe von y aus der Gleichung $y^4 + D = 0$, wie oben $\pm\sqrt[4]{-D}$, $\pm\sqrt[4]{-D}\,.\,\sqrt{-1}$ seyn. Bringt man diese Werthe nach und nach in die Gleichung

$$x = a + by + cy^2 + dy^3$$

so bekommt man dafür folgende vier

$$x' = a + b\sqrt[4]{-D} + c\sqrt[4]{D^2} + d\sqrt[4]{-D^3}$$

$$x'' = a - b\sqrt[4]{-D} + c\sqrt[4]{D^2} - d\sqrt[4]{-D^3}$$

$$x''' = a + b\sqrt[4]{-D}\,.\,\sqrt{-1} - c\sqrt[4]{D^2} - d\sqrt[4]{-D^3}\,.\,\sqrt{-1}$$

$$x'''' = a - b\sqrt[4]{-D}\,.\,\sqrt{-1} - c\sqrt[4]{D^2} + d\sqrt[4]{-D^3}\,.\,\sqrt{-1}$$

Addirt man nun zuvörderst diese vier Gleichungen zu einander, so wird

$$x' + x'' + x''' + x'''' = 4a = -m \text{ und also}$$

$$a = \frac{-m}{4}$$

Addirt

Addirt man ferner erst die beyden ersten und dann die beyden andern, so findet man

$$x' + x'' = 2a + 2c\sqrt[4]{D^2}$$

$$x''' + x'''' = 2a - 2c\sqrt[4]{D^2}$$

woher

$$c\sqrt[4]{D^2} = c\sqrt{-D} = \frac{x' + x'' - x''' - x''''}{4}$$

wird. Setzt man also mit Eulern $c = 1$, so wird

$$-D = \frac{(x' + x'' - x''' - x'''')^2}{16}$$

Dieser Ausdruck für D giebt bald zu erkennen, daß die Gleichung für D eine cubische Gleichung ist, wie Euler gefunden hat. Denn es ist diese Gleichung nichts anders als die oben (Nr. 32.) gefundene reducirte Gleichung für t, wenn man darin $-16D$ für t setzt. Es war endlich

$$t = s^2 = (a + b - c - d)^2$$

angenommen worden, und a, b, c, d hatten eben die Bedeutung, welche hier die Buchstaben x', x'', x''', x'''' haben, d. h. sie stellten die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung vor.

Wenn man aber nicht $c = 1$, sondern $b = 1$ setzt, so bleibt diese Gleiche keine cubische, sondern sie steigt bis zum sechsten Grade auf.

Denn zieht man die beyden ersten und die beyden andern von den vorhergehenden vier Gleichungen von einander ab, so wird

$$x' - x'' = 2b\sqrt[4]{-D} + 2d\sqrt[4]{-D^3}$$

$$x''' - x'''' = (2b\sqrt[4]{-D} - 2d\sqrt[4]{-D^3})\sqrt{-1}$$

und

und hieraus

$$b\sqrt[4]{-D} = \frac{x' - x'' - (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

$$d\sqrt[4]{-D^3} = \frac{x' - x'' + (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

Setzt man demnach $b = 1$, so ergiebt sich

$$-D = \left(\frac{x' - x'' - (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}\right)^4$$

und diese Größe hängt, wie man bald sehen wird, von einer Gleichung vom sechsten Grade ab.

48.

Setzt man mit Bezout $D = -1$, so hat man aus den vorhergehenden Formeln

$$c = \frac{x' + x'' - x''' - x''''}{4}$$

und hieraus läßt sich schließen, daß die reducirte Gleichung für c eine Gleichung vom sechsten Grade mit geraden Exponenten seyn wird, wie Bezout gefunden hat. Denn es ist offenbar, daß der Werth von $-D$ bey der Eulerschen Hypothese mit dem Werthe von c^2 bey der gegenwärtigen Annahme übereinstimmt, so daß man durch die Setzung von $-c^2$ für D die reducirte Gleichung von Eulern in die von Bezout verwandeln kann, wodurch diese eine Gleichung vom sechsten Grade wird, welche sich wie eine Gleichung des dritten Grades behandeln läßt. Uebrigens ist diese reducirte Gleichung für c mit der obigen für z Nr. 29. einerley, wenn man darin $-2c$ für z setzt.

Nun wollen wir die Form der reducirten Gleichungen für b und d aufsuchen, so daß wir durchaus mit Bezout

D = — 1 annehmen. Bey dieser Voraussetzung ist aus den Formeln der vorigen Nr.

$$b = \frac{x' - x'' - (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

$$d = \frac{x' - x'' + (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

und hieraus findet man alle Werthe von b und d, wenn man darin die vier Wurzeln x', x'', x''', x'''' auf alle mögliche Arten versetzt. Auf diese Art läßt sich aus dem Grad und der Form dieser Werthe der Grad und die Natur der Gleichungen schließen, wodurch b und d bestimmt werden müssen. Es ist daher

1. Die Gleichung für b, eben die als die Gleichung für d, weil der Werth von d aus dem Werthe von b sich ergiebt, wenn man darin die beyden Wurzeln x''' und x'''' mit einander verwechselt, so daß die Werthe von b und d Wurzeln einer und derselben Gleichung seyn müssen.

2. Diese Gleichung ist überhaupt genommen eine Gleichung vom $4 . 3 . 2 . 1$ d. h. vom 24sten Grade, weil man die vier Größen x', x'', x''', x'''' auf so viel Arten versetzen kann.

3. Hat dieselbe lauter Vielfache von 4 zu ihren Exponenten, indem leicht zu sehen ist, daß auch $-b$, $b\sqrt{-1}$, $-b\sqrt{-1}$ Wurzeln davon seyn müssen, wenn b dergleichen ist. Nimmt man nemlich wie vorhin

$$b = \frac{x' - x'' - (x''' - x'''')\sqrt{-1}}{4}$$

so fällt in die Augen, daß b in $-b$, wenn man x' in x'' und x''' in x'''', in $b\sqrt{-1}$, wenn man x' in x''' und x'' in x'''', und endlich in $-b\sqrt{-1}$ übergeht, wenn man x'

in

in x'''' und x'' in x''' verwandelt. Hiernach muß die Gleichung für b unverändert bleiben, wenn man — b oder $\pm b\sqrt{-1}$ für b setzt, und dazu ist nöthig, daß dieselbe weder ungerade noch gerademal ungerade Dignitäten von b enthalte. Setzt man daher $b^4 = \nu$, so folgt, daß man eine reducirte Gleichung für ν vom sechsten Grade haben wird. Auch ist diese reducirte Gleichung für ν mit der für $-D$, $b = 1$ gesetzt, (Nr. 47.) einerley, weil der Werth von $-D$ mit dem Werthe von b^4 übereinstimmt.

Man könnte hier auf eine ähnliche Art, wie oben Nr. 42. beweisen, daß sich diese Gleichung für ν in drey Gleichungen vom zweyten Grade und zwar vermittelst einer reducirten Gleichung vom dritten Grade zerfällen lasse. Allein es giebt dazu noch einen einfachern Weg, nemlich folgenden.

Ich suche das Produkt von b und d, nemlich

$$bd = \frac{(x' - x'')^2 + (x''' - x'''')^2}{16}$$

Nun ist

$$(x' - x'')^2 + (x''' - x'''')^2 = x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x''''^2 - 2(x'x'' + x'''x'''') = m^2 - 2n - 2(x'x'' + x'''x'''')$$

und die Größe $x'x'' + x'''x''''$ ist offenbar mit der Größe u Nr. 30. einerley, welche, wie wir gesehen haben, von einer Gleichung des dritten Grades abhängt. Es muß demnach auch die Gleichung für bd eine cubische Gleichung seyn. Da ferner

$$bd = \frac{m^2 - 2n - 2u}{16}$$

ist, so findet man diese Gleichung für bd, wenn man in der Gleichung für u der angeführten Nr. $\frac{m^2 - 2n - 16bd}{16}$ für u setzt.

Nun seyen ϱ', ϱ'', ϱ''' die Wurzeln dieser Gleichung für bd, so hat man

$$\varrho' = \frac{m^2 - 2n}{16} - \frac{x'x'' + x'''x''''}{8} = bd$$

$$\varrho'' = \frac{m^2 - 2n}{16} - \frac{x'x''' + x''x''''}{8}$$

$$\varrho''' = \frac{m^2 - 2n}{16} - \frac{x'x'''' + x''x'''}{8}$$

Multiplicirt man nun die beyden Gleichungen der 48sten Nr.

$$x' - x'' = 2(b + d) \text{ und } x''' - x'''' = 2(b - d)\sqrt{-1}$$

mit einander, so findet man

$$x'x''' + x''x'''' - x''x''' - x'x'''' = 4(b^2 - d^2)\sqrt{-1}$$

folglich

$$4(b^2 - d^2)\sqrt{-1} = 8(\varrho''' - \varrho'')$$

und wenn man quadrirt

$$b^4 - 2b^2d^2 + d^4 = -4(\varrho''' - \varrho'')^2$$

Nun war aber $bd = \varrho'$, und es ist daher

$$b^4 + d^4 = 2\varrho'^2 - 4(\varrho''' - \varrho'')^2$$

und da $d = \frac{\varrho'}{b}$ ist

$$b^4 + \frac{\varrho'^4}{b^4} = 2\varrho'^2 - 4(\varrho''' - \varrho'')^2$$

folglich

$$b^8 - 2(\varrho'^2 - 2(\varrho''' - \varrho'')^2)b^4 + \varrho'^4 = 0$$

eine Gleichung vom achten Grade, welche sich, dem Resultate von Bezout gemäß, wie eine quadratische Gleichung behandeln läßt.

In Ansehung der reducirten Gleichung für b verdient bemerkt zu werden, daß, wenn $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ vorstellen

$$b = \frac{x' + \alpha x'''' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x'''}{4}$$

oder

oder, wenn man, wie denn dadurch nichts verändert wird, x'''' in x'', x'' in x''' und x''' in x'''' verwandelt,

$$b = \frac{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x''''}{4}$$

ist. Dieser Ausdruck ist dem ähnlich, welchen wir oben (Nr. 6 und 19) für die reducirte Gleichung des dritten Grades gefunden haben, und so erhellet die Aehnlichkeit der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche sich auf diese letzte Methode gründet, mit der Auflösung der cubischen Gleichungen.

49.

Nimmt man die Gleichungen Nr. 46.

$$x = a + by + cy^2 + dy^3$$
$$y^4 + D = 0$$

wieder zur Hand, und setzt $y^2 = z$, so bekommt man

$$x = (a + cz) + (b + dz)\sqrt{z}$$
$$z^2 + D = 0.$$

Befreyet man die erste von der Irrationalität, so wird sie

$$(x - a - cz)^2 - (b + dz)^2 z = 0$$

und diese Gleichung läßt sich mittelst $z^2 = -D$ auf diese Form bringen

$$x^2 + (f + gz)x + h + kz = 0.$$

Auf diese Art hat man die beyden Gleichungen

$$z^2 + D = 0$$
$$x^2 + (f + gz)x + h + kz = 0$$

welche durch die Elimination von z eine Gleichung des vierten Grades geben, welche sich mit der gegebenen

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

vergleichen läßt, so daß man vermittelst der Vergleichung der analogen Glieder vier von den Coefficienten f, g, h, k

und D bestimmen, und den fünften nach Belieben annehmen kann.

Diese Methode läuft mit derjenigen auf eines hinaus, welche Bezout in seinem Memoire von 1762 über die Gleichungen gegen das Ende, und zum zweytenmale in dem Memoire von 1765 S. 548., als ein Beyspiel einer allgemeinen Methode geliefert hat, welche sich auf alle diejenigen Gleichungen erstreckt, deren Höhe durch einen Exponenten bemerkt wird, welcher eine zusammengesetzte Zahl ist. In der ersten dieser Abhandlungen setzet der Verfasser $g = -1$, und findet eine Endgleichung für k vom dritten Grade. In der zweyten setzet er $D = -1$ und kommt auf eine Endgleichung für g vom sechsten Grade mit geraden Exponenten, die sich folglich wie eine Gleichung vom dritten Grade auflösen lässet.

Um den Grund dieser Resultate einzusehen, darf man nur bemerken, daß man, da $z = \pm \sqrt{-D}$, folgende zwey Gleichungen haben wird

$$x^2 + (f + g\sqrt{-D})x + h + k\sqrt{-D} = 0$$
$$x^2 + (f - g\sqrt{-D})x + h - k\sqrt{-D} = 0$$

deren Produkt, die gegebene Gleichung seyn wird; so daß eine dieser Gleichungen zwey Wurzeln der gegebenen, und die andern die beyden übrigen Wurzeln derselben enthalten muß. Vermöge der Natur der Gleichungen, haben wir demnach

$$-f - g\sqrt{-D} = x' + x'', \quad h + k\sqrt{-D} = x'x''$$
$$-f + g\sqrt{-D} = x''' + x'''', \quad h - k\sqrt{-D} = x'''x''''$$

also

$$-2g\sqrt{-D} = x' + x'' - x''' - x''''$$
$$2k\sqrt{-D} = x'x'' - x'''x''''$$

Setzt

Setzt man nun $g = -1$, und substituiret den aus der ersten Gleichung abgeleiteten Werth von $\sqrt{-D}$, in der zweyten, so erhält man

$$k = \frac{x'x'' - x'''x''''}{x' + x'' - x''' - x''''}$$

und hieraus läßt sich schließen, daß die Gleichung für k bloß vom dritten Grade seyn wird; denn auf welche Art man auch die vier Wurzeln x', x'', x''', x'''', versetzen mag, so wird man doch nicht mehr als folgende drey verschiedene Werthe von k erhalten

$$\frac{x'x'' - x'''x''''}{x' + x'' - x''' - x''''}$$

$$\frac{x'x''' - x''x''''}{x' + x'' - x'' - x''''}$$

$$\frac{x'x'''' - x''x'''}{x' + x'''' - x'' - x'''}$$

vermittelst welcher Werthe man die Gleichung für k selbst, wenn man will, directe finden kann.

Setzet man $D = -1$, so erhält man

$$g = \frac{x'''' + x''' - x' - x''}{2}$$

so daß die Größe g, mit z Nr. 29. einerley seyn wird, und die Nr. 32. gezogenen Folgerungen, ihre Anwendung finden werden. Suchet man, bey dieser Voraussetzung $D = -1$, die Größe k, statt g, so findet man

$$k = \frac{x'x'' - x'''x''''}{2}$$

und die Gleichung für k wird vom sechsten Grade, mit geraden Exponenten seyn. Ihre Wurzeln sind

$$\frac{x'x'' - x'''x''''}{2}, \quad \frac{x'x''' - x''x''''}{2}, \quad \frac{x'x'''' - x''x'''}{2},$$

$$\frac{x''x''' - x'x''''}{2}, \quad \frac{x''x'''' - x'x'''}{2}, \quad \frac{x'''x'''' - x'x''}{2},$$

Uebrigens kann diese Gleichung für k, leicht aus der Gleichung für u Nr. 30. abgeleitet werden. Denn da

$$k = \frac{x'x'' - x'''x''''}{2} \text{ und } u = x'x'' + x'''x''''$$

(man erinnere sich, daß hier x', x'', x''', x'''' nichts anders als die unter der angeführten Nr. mit a, b, c, d bezeichneten Größen sind, nemlich die Wurzeln der gegebenen Gleichung); so ist

$$u^2 - 4k^2 = 4x'x''x'''x'''' = 4q$$

also

$$u = 2\sqrt{(q + k^2)}$$

Bringt man nun diesen Werth in die Gleichung für u, und schaffet alsdenn die Irrationalität weg, so wird man eine Gleichung vom sechsten Grade für k erhalten, deren sämtliche Exponenten Vielfache von 2 sind.

50.

Wir schließen hier unsere Untersuchung derer Methoden, welche die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade betreffen. Wir haben diese Methoden nicht nur unter einander verglichen, und ihren Zusammenhang und gegenseitiges Verhältniß gezeiget; sondern wir haben auch, was unsere Hauptabsicht war, den Grund a priori angegeben, warum dieselben zum Theil auf reducirte Gleichungen vom dritten Grade, zum Theil auf solche vom sechsten Grade, die sich aber auf den dritten bringen lassen, führen: und man wird bemerkt haben, daß dies überhaupt daher rühre, weil die Wurzeln dieser reducirten Gleichungen, Funktionen der Größen x', x'', x''', x'''' von solcher Beschaffenheit sind,

daß,

daß, wenn man diese vier Größen auf alle mögliche Arten verwechselt, jene Funktionen doch nicht mehr als drey verschiedene Werthe erhalten können, wie die Funktion $x'x'' + x'''x''''$; oder sechs Werthe, worunter aber immer zweye gleich sind, nur mit entgegengesetzten Zeichen, wie die Funktion $x' + x'' - x''' - x''''$: oder vielmehr sechs Werthe von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man sie in drey Paare theilet, und die Summe, oder das Produkt der Werthe von jedem Paare nimmt, diese drey Summen, oder drey Produkte immer die nemlichen bleiben, was man auch für Verwechselungen mit den Größen x', x'', x''', x'''' machen mag; wie bey der Funktion Nr. 42. Dies ist etwas Eigenthümliches dieser Funktionen, von welchen die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade abhängt.
